

ΠΟΛΥΕΔΡΑ

Πολύεδρο: Λέγεται το στερεό που περικλείεται από επίπεδα μέρη

Έδρες: Είναι τα επίπεδα που περικλείουν το πολύεδρο

π.χ. $\Gamma\Delta\Theta$, $AB\eta Z$

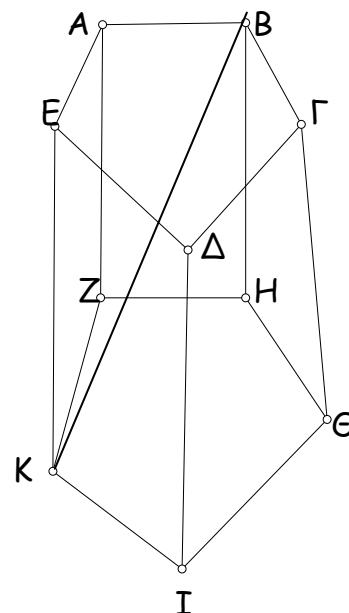
Ακμή: Η τομή δύο εδρών (οι πλευρές των εδρών)

π.χ. $E\kappa$, AZ

Κορυφή: Η τομή δύο ακμών (Οι κορυφές των εδρών)

π.χ. A , Z

Διαγώνιος του πολυέδρου: Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει δύο κορυφές που δεν βρίσκονται στην ίδια έδρα π.χ. κB



ΠΡΙΣΜΑ

Πρίσμα: Λέγεται το πολύεδρο που έχει δύο έδρες ίσες και παράλληλες (βάσεις του πρίσματος) και όλες οι άλλες έδρες του παραλληλόγραμμα (παράπλευρες έδρες)

Βάσεις: Οποιοδήποτε πολύγωνο από το οποίο παίρνει το όνομα του το πρίσμα

π.χ. τριγωνικό πρίσμα $\Rightarrow$ βάση τρίγωνο

εξαγωνικό πρίσμα $\Rightarrow$ βάση εξαγωνο

Ύψος (u): Η απόσταση των δύο βάσεων του.

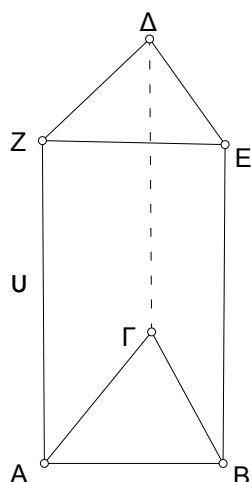
Παράπλευρες ακμές: Οι ακμές του πρίσματος που δεν ανήκουν στη βάση του.

Πρίσμα:

- Ορθό πρίσμα: Οι παράπλευρες ακμές του είναι κάθετες των βάσεων του, είναι μεταξύ τους ίσες και συμπίπτουν με το ύψος του πρίσματος.
- Πλάγιο πρίσμα: Οι παράπλευρες ακμές δεν είναι κάθετες στις βάσεις του.

Κανονικό πρίσμα: Λέγεται το ορθό πρίσμα που οι βάσεις του είναι κανονικά πολύγωνα.

ΜΕΤΡΗΣΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ ΚΑΙ ΟΓΚΟΥ ΠΡΙΣΜΑΤΟΣ



E_{π} : εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας

$E_{ολ}$: εμβαδόν ολικής επιφάνειας

V : όγκος

Π_{β} : Περίμετρος βάσης

E_{β} : Εμβαδόν βάσης

$$\text{ΤΥΠΟΙ : } E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot u$$

$$E_{ολ} = E_{\pi} + 2 E_{\beta}$$

$$V = E_{\beta} \cdot u$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

- 1) Δίνεται ορθό πρίσμα με βάση ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές 3cm και 4cm και το ύψος του πρίσματος είναι διπλάσιο της υποτείνουσας του τριγώνου.

Να βρείτε το E_{π} , $E_{ολ}$ και τον V πρίσματος; ($E_{\pi\alpha\rho} = 120 \text{ cm}^2$, $E_{ολ} = 132 \text{ cm}^2$, $V = 60 \text{ cm}^3$)

- 2) Ορθό πρίσμα έχει βάση τετράγωνο. Αν το ύψος του πρίσματος είναι τριπλάσιο από την ακμή της βάσης του και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας είναι 108 cm^2 , να υπολογίσετε τον όγκο του πρίσματος.
($V = 81 \text{ cm}^3$)

- 3) Κανονικό τριγωνικό πρίσμα έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 96 cm^2 και ύψος 8cm. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του πρίσματος.

$$[E_{ολ} = (96 + 8\sqrt{3}) \text{ cm}^2, V = 32\sqrt{3} \text{ cm}^3]$$

- 4) Πρίσμα έχει βάσεις ρόμβο με διαγωνίους 10cm και 24cm. Αν το $E_{ολ} = 396 \text{ cm}^2$, να βρείτε το ύψος και τον όγκο του πρίσματος.
($u = 3 \text{ cm}$, $V = 360 \text{ cm}^3$)

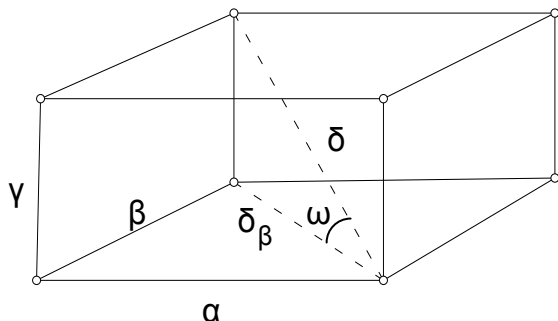
- 5) Κανονικό εξαγωνικό πρίσμα η ακμή της βάσης ισούται με a . Αν $E_{\pi} = 2 E_{\beta}$ να υπολογιστεί το ύψος του πρίσματος συναρτήσει του a και ο όγκος του πρίσματος. ($u = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $V = \frac{9a^3}{4}$)

- 6) Κανονικό εξαγωνικό πρίσμα το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του είναι 72 cm^2 και το ύψος του 3cm. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του πρίσματος.
[$E_{ολ} = (48\sqrt{3} + 72) \text{ cm}^2$, $V = 72\sqrt{3} \text{ cm}^3$]

- 7) Κανονικό τριγωνικό πρίσμα έχει όγκο ίσο με 240 cm^3 εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $240\sqrt{3} \text{ cm}^2$. Να βρείτε το ύψος και την ακμή της βάσης του ($u = 20\sqrt{3} \text{ cm}$, $a = 4 \text{ cm}$)

ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΠΙΠΕΔΟ

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο λέγεται το πρίσμα του οποίου η βάση του είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



$$E_{ολ} = 2(\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma)$$

$$V = \alpha \cdot \beta \cdot \gamma$$

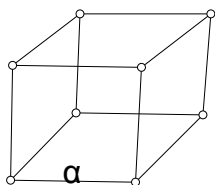
$$\delta = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \quad (\text{διαγώνιος ορθ. παραλ.})$$

$$\delta_{\beta} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \quad (\text{διαγώνιος βάσης})$$

ω : γωνία που σχηματίζει η διαγώνιος με τη βάση του ορθογωνίου παραλλ.

ΚΥΒΟΣ

Κύβος λέγεται το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που έχει όλες τις έδρες του τετράγωνα.



$$E_{ολ} = 6 \cdot \alpha^2$$

$$V = \alpha^3$$

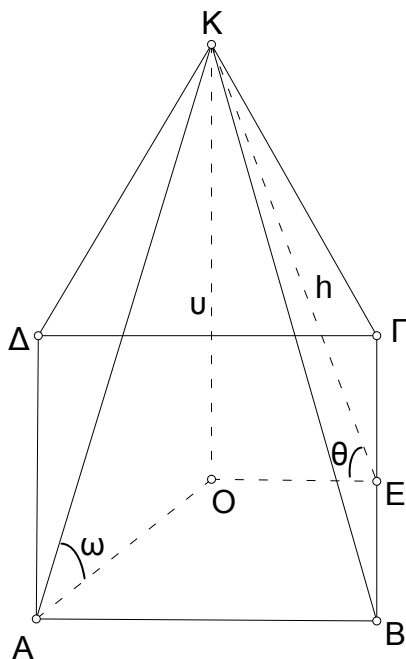
$$\delta = \alpha\sqrt{3}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

- 1) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει $E_{ολ} = 236 \text{ cm}^2$. Αν το μήκος $\alpha = 5 \text{ cm}$ και το πλάτος $\beta = 6 \text{ cm}$ να βρείτε το ύψος του γ και τον όγκο του. ($\gamma = 8 \text{ cm}$ $V = 240 \text{ cm}^3$)
- 2) Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει $E_{ολ} = 88 \text{ cm}^2$. Το μήκος του παραλληλεπιπέδου είναι τριπλάσιο του ύψους του το δε πλάτος του διπλάσιο του ύψους του. Να βρείτε τον όγκο του. ($V = 48 \text{ cm}^3$)
- 3) Κύβος έχει όγκο $V = 27 \text{ cm}^3$. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας. ($E_{ολ} = 54 \text{ cm}^2$)
- 4) Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κύβου που έχει $\delta = 5\sqrt{3}$. ($V = 125 \text{ cm}^3$, $E_{ολ} = 150 \text{ cm}^2$)
- 5) Το εμβαδόν της επιφάνειας ενός ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι 88 cm^2 . Να υπολογίσετε τις διαστάσεις του, αν γνωρίζετε ότι είναι ανάλογες προς τους αριθμούς 1,2,3. ($\alpha = 2 \text{ cm}$, $\beta = 4 \text{ cm}$, $\gamma = 6 \text{ cm}$)
- 6) Οι διαστάσεις της βάσης ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι 6 cm και 8 cm . Αν η διαγώνιος του είναι 26 cm , να υπολογίσετε το $E_{ολ}$ και τον όγκο του. ($E_{ολ} = 768 \text{ cm}^2$, $V = 1152 \text{ cm}^3$)
- 7) Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο η διαγώνιος του είναι ίση με 13 cm και η διαγώνιος της βάσης του ίση με 5 cm . Αν το $E_{παρ} = 168 \text{ cm}^2$, να βρείτε τον όγκο του. ($V = 144 \text{ cm}^3$)

ΠΥΡΑΜΙΔΑ

Πυραμίδα: Λέγεται το πολύεδρο που η μια του έδρα είναι πολύγωνο και οι άλλες έδρες τρίγωνα με κοινή κορυφή



Κορυφή πυραμίδας: Η κοινή κορυφή των τριγωνικών εδρών

Βάση πυραμίδας: Το πολύγωνο που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή της πυραμίδας (ΑΒΓΔ)

Ανάλογα με το πολύγωνο της βάσης της μία πυραμίδα χαρακτηρίζεται τριγωνική, τετραγωνική, κ.ο.κ.

Παράπλευρες έδρες: Τριγωνικές έδρες της πυραμίδας (ΚΑΒ, ΚΒΓ, ΚΓΔ, ΚΑΔ)

Παράπλευρες ακμές: Οι ακμές που διέρχονται από την κορυφή της πυραμίδας (ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, ΚΔ)

Ύψος (u): Η απόσταση της κορυφής από τη βάση (ΚΟ).

Παράπλευρο ύψος (h): Το ύψος των παράπλευρων εδρών (ισοσκελών τριγώνων) λέγεται απόστημα ή παράπλευρο ύψος και συμβολίζεται με h, δηλ $h = KE$.

Κανονική πυραμίδα: Λέγεται η πυραμίδα που η βάση της είναι κανονικό πολύγωνο και το ύψος της καταλήγει στο κέντρο της βάσης.

Ιδιότητες: 1) Οι παράπλευρες έδρες της είναι ίσα ισοσκελή τρίγωνα και έχουν σχηματίζουν με τη βάση ίσες γωνίες.

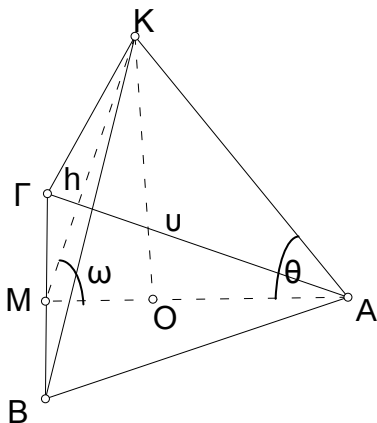
π.χ $\hat{KEO} = \hat{\theta}$ η γωνιά που σχηματίζει το παράπλευρο ύψος με την βάση

2) Οι παράπλευρες ακμές της είναι ίσες και έχουν ίσες γωνιές με τη βάση

π.χ. $\hat{KAO} = \hat{\omega}$ η γωνιά που σχηματίζει η παράπλευρη ακμή με τη βάση.

Τετράεδρο: Λέγεται η πυραμίδα που έχει 4 έδρες (Τριγωνική πυραμίδα)

Κανονικό τετράεδρο: Λέγεται το τετράεδρο που όλες οι έδρες του είναι ισόπλευρα τρίγωνα.



Βάση: ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο

Ύψος (u): ΚΟ

Παράπλευρο ύψος (h) : ΚΜ

$\hat{KAO} = \hat{\theta}$: κλίση παράπλευρης ακμής προς τη βάση.

$\hat{KMO} = \hat{\omega}$: κλίση παράπλευρης έδρας προς τη βάση

ΑΜ: ύψος του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ.

Ο: κέντρο βάρους του ισόπλευρου τριγώνου ΑΒΓ.

$$AO = \frac{2}{3} AM \quad \text{και} \quad OM = \frac{1}{3} AM.$$

ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΠΥΡΑΜΙΔΑΣ

Εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας: $E_{\pi} = \frac{\pi_{\beta} \cdot h}{2}$

Εμβαδόν ολικής επιφάνειας : $E_{ολ} = E_{\pi} + E_{\beta}$

Όγκος πυραμίδας : $V = \frac{E_{\beta} \cdot u}{3}$

Παραδείγματα:

- Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με πλευρά βάσης 18 και ύψος 12cm. Να βρείτε:
α) Το παράπλευρο ύψος , β) $E_{\pi\alpha\rho}$; $(h = 15\text{cm} , E_{\pi\alpha\rho} = 540\text{cm}^2)$
- Ο όγκος κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας με πλευρά βάσης 8cm είναι 64cm^3 . Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας. $(E_{\pi\alpha\rho} = 80\text{cm}^2)$
- Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει $E_{\pi\alpha\rho} = 72\text{cm}^2$ και η γωνιά που σχηματίζουν οι παράπλευρες έδρες με τη βάση της είναι 60° . Να βρείτε τον όγκο της πυραμίδας;
 $(V = 36\sqrt{3}\text{cm}^3)$
- Δίνεται κανονική τριγωνική πυραμίδα Κ.ΑΒΓ με πλευρά βάσης 3cm και ύψος 6cm. Να υπολογιστούν το εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας και ο όγκος της πυραμίδας;
 $(E_{\pi\alpha\rho} = \frac{63\sqrt{3}}{4}\text{cm}^2 , V = \frac{9\sqrt{3}}{2}\text{cm}^3)$
- Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρη ακμή ίση με 25cm και εμβαδόν βάσης 196cm^2 . Να βρεθούν τα $E_{ολ}$ και V της πυραμίδας.
 $(E_{ολ} = 868\text{cm}^2 , V = \frac{196\sqrt{527}}{3}\text{cm}^3)$
- Κανονική τριγωνική πυραμίδα έχει $E_{\pi\alpha\rho} = 15\sqrt{3}\text{cm}^2$ και ακμή της βάσης $2\sqrt{3}\text{cm}$. Να υπολογίσετε: α) Το ύψος της πυραμίδας β) τον όγκο της
 $(u = 2\sqrt{6}\text{cm} , V = 6\sqrt{2}\text{cm}^3)$
- Κανονική τριγωνική πυραμίδα έχει όγκο $V = 72\text{m}^3$ και οι παράπλευρες έδρες της σχηματίζουν με τη βάση γωνίες 45° . Να βρείτε το $E_{ολ}$ της πυραμίδας.
 $[E_{ολ} = 36(\sqrt{6} + \sqrt{3})\text{cm}^2]$
- Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα η παράπλευρη ακμή έχει μήκος $8\sqrt{3}\text{cm}$ και σχηματίζει γωνία 30° με τη βάση της. Να υπολογίσετε (α) $E_{ολ}$ και (β) V
 $[E_{ολ} = 96(\sqrt{15} + 3)\text{cm}^2 , V = 384\sqrt{3}\text{cm}^3]$