

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1 : Αξιοσημείωτες Ταυτότητες

1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(\chi - 3)^2 =$$

$$(2\chi + \omega)^2 =$$

$$(5\chi + 3\omega) \cdot (3\omega - 5\chi) =$$

$$(2\psi - 5)^3 =$$

$$(-5\chi^3 - 2\psi)^2 =$$

$$(\alpha - 3\beta^2)^2 =$$

2) Να βρείτε τα αναπτύγματα

$$\alpha)(\alpha + 3)^2 =$$

$$\beta)(5 - \psi)^2 =$$

$$\gamma)(\chi - 6)(\chi + 6) =$$

$$\delta)(\kappa + 2)^3 =$$

$$\varepsilon)(1 - \lambda)^3 =$$

$$\sigma\tau)(2 + 3\chi)^2 =$$

3) Να βρείτε τα αναπτόγματα

$$\alpha) \left(-\frac{\chi^4}{3} - \frac{\psi^3}{2} \right)^2 =$$

$$\beta) \left(-\chi - \frac{4}{\psi} \right)^3 =$$

$$\gamma) \left(\frac{\alpha\sqrt{2}}{4} - \beta \right) \cdot \left(-\beta - \frac{\alpha\sqrt{2}}{4} \right) =$$

$$\delta) \left(\frac{1001}{1000} \right)^2 - \left(\frac{999}{1000} \right)^2 =$$

$$\varepsilon) \left(3 - \frac{2}{\alpha} \right) \left(9 + \frac{4}{\alpha^2} \right) \left(3 + \frac{2}{\alpha} \right) =$$

4) Να κάνετε τις πράξεις και μετά να βρείτε την αριθμητική τιμή του αποτελέσματος για $\chi = -2$

$$(2\chi + 1)^3 - 2\chi(3\chi + 1) \cdot (3\chi - 1) - (3\chi - 2)^2$$

5) Αν $\chi = \frac{1}{\psi}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$A = (5\chi - \psi)^2 - (5\chi - 3)(5\chi + 3) + 4\psi - (\psi + 2)^2$$

6) Αν $2\chi + \phi = -5$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = (2\chi - \phi)^2 + 7\chi\phi - \chi(2 - \phi) + 2\chi$$

7) Αν $2\alpha - \beta = 7$ και $\alpha\beta = 10$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $4\alpha^2 + \beta^2$.

8) Αν $\chi - \frac{3}{\chi} = 4$, να δείξετε ότι: $\chi^3 - \frac{27}{\chi^3} = 100$

9) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(3\alpha + 2\beta)^2 - 5(\alpha - 2\beta)(\alpha + 2\beta) - 3\beta(8\alpha + 5\beta) = (2\alpha - 3\beta)^2$$

10) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$A = (\alpha + \beta)^2 - (\alpha + \gamma)^2 - 2\alpha(\beta - \gamma) - (\beta - \gamma)(\beta + \gamma) + 5 \text{ είναι σταθερό.}$$

11) Το μήκος των δύο κάθετων πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι 2χ και $\chi^2 - 1$. Να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας.

ΕΝΟΤΗΤΑ 2 : Παραγοντοποίηση – Ρητές αλγεβρικές παραστάσεις

1) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

1) $4\chi + 4\psi + 8\omega$

2) $3\chi - 3\psi - \omega\chi + \omega\psi$

3) $9\chi^2 - 16\psi^2$

4) $\chi^2 - \chi - 30$

5) $25\chi^2 + 40\chi + 16$

6) $\psi^3 - 25\psi$

7) $16\alpha^2 + 49\beta^2$

8) $-\psi^2 + 8\psi - 15$

2) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

$\alpha(\alpha - 2) - \beta(\beta - 2)$

$\chi^2 - 6\chi + 9 - 2\beta\chi + 6\beta$

$(\chi - 3\omega)^2 + (\chi - 3\omega) - 6$

$\chi^2 - 6\psi - 1 - 9\psi^2 + 4 - 4\chi$

$16\chi^4 - 81\psi^4$

$3\rho^2 - 3\omega^2 - \omega^2 - 2\rho\omega - \rho^2$

$\alpha^2(\alpha - 5) + (\alpha - 5)(3\alpha - 2) - 25 + \alpha^2$

$\chi^2 - 6\chi\psi + 9\psi^2 - 4\omega^2$

$(\chi^2 - 6\chi + 3)^2 - (\chi - 9)^2$

$4(\chi - 1) + 9\chi^2(1 - \chi)$

3) Να γίνει πλήρης παραγοντοποίηση, σε γινόμενο πρώτων παραγόντων και να βρείτε τη τιμή του πολυωνύμου

$A = 2\chi^3 + 6\chi\psi^2 - 2\psi^3 - 6\chi^2\psi$ για $\chi=101$ και $\psi=99$.

4) Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

1) $\frac{\chi^2 - 25}{2\chi - 10}$

2) $\frac{5\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2}{\alpha^3\beta - \alpha\beta^3}$

5) Να κάνετε τις πράξεις:

$$1) \frac{\chi\psi^2}{\chi^2+3\chi-18} \cdot \frac{4\chi+24}{\chi\psi}$$

$$2) \frac{\chi^2-8\chi+12}{\chi^2-36} : \frac{3\chi-6}{\chi^2+5\chi-6}$$

$$3) \frac{2\chi}{\chi^2-25} + \frac{1}{5-\chi} - \frac{3}{\chi^2+5\chi}$$

$$4) \frac{3\chi^2-3}{\chi^3+\chi^2-2\chi} : \left(\frac{3}{\chi^2-4} + \frac{1}{\chi+2} \right)$$

$$5) \frac{3\chi}{\chi-2} + \frac{2\chi-1}{\chi-2} - \frac{\chi+7}{\chi-2} =$$

$$6) \frac{\chi-1}{(\chi+1)(\chi+2)} + \frac{1}{\chi+2} =$$

$$7) \frac{1}{3\chi^2-3\chi} + \frac{\chi+1}{6\chi} - \frac{1}{3\chi-3} =$$

$$8) \frac{1}{2\chi+6} + \frac{\chi-1}{3\chi-\chi^2} - \frac{\chi}{\chi^2-9} =$$

$$9) \frac{1}{\psi^2-3\psi+2} + \frac{3}{\psi^2+\psi-2} - \frac{1}{4-\psi^2} =$$

$$10) \left(\frac{\chi+1}{2\chi-2} + \frac{6}{2\chi^2-2} - \frac{\chi+3}{2\chi+2} \right) \div \frac{3}{\chi^2-4} =$$

6) Να γίνουν απλά τα σύνθετα κλάσματα:

$$1) \frac{\frac{\chi}{\psi} - \frac{9\psi}{\chi}}{\frac{\chi^2-6\chi}{\psi^2} + 9}$$

$$2) \frac{\frac{\chi^2-16}{\chi^2+3\chi-4}}{\frac{\chi^2-4\chi}{\chi^2}}$$

7) Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\chi^2 - 8\chi = 0$$

$$\chi^2 - 64 = 0$$

$$\chi^2 - 2\chi = 15$$

$$(\chi + 5)(\chi^2 - 2\chi - 3)(2\chi - 5) = 0$$

$$\chi^2 = 4\chi - 4$$

$$9\chi^2 - 4 = 0$$

$$2(\chi - 3)^2 = 0$$

$$(\chi - 5)^2 = -4$$

$$3\chi^2 - 11\chi - 4 = 0$$

$$2\chi^2 + 4\chi + 9 = 0$$

$$(\chi^2 + 4)(\chi - 1) = 0$$

$$2\chi^2 - \chi - 1 = 0$$

$$\chi(\chi - 1)(3 + \chi) = 0$$

$$3\chi^2 + 2\chi + 4 = 0$$

$$4\chi^2 - 4\chi = -1$$

$$\chi^3 - \chi^2 = -6\chi$$

8) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα

$$(\rho^2 - 4)(2\rho - 4) - (4\rho - 8)(2 - \rho)^2 =$$

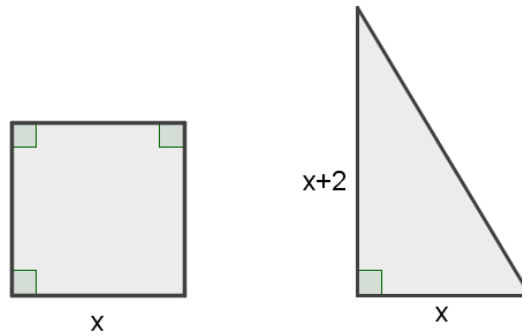
$$(3\chi + 4)(4\chi^2 - 9) - (9\chi^2 + 24\chi + 16)(2\chi - 3) =$$

9) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα

$$a) -4\varphi - 4\varphi^2 + 9\varphi^2 - 1 =$$

$$\beta) 4\beta + \beta^2 + 3 + a\beta + 3a =$$

- 10) Το ορθογώνιο τρίγωνο και το τετράγωνο του διπλανού σχήματος έχουν το ίδιο εμβαδόν. Να υπολογίσετε το χ .



- 11) Αν $A = (\chi - 3)^2 - (\chi + 3)^2$ και $B = 3\chi^2 - 2\chi$ και ισχύει ότι $\frac{A}{B} = 1$, να βρείτε τη τιμή του χ με $\chi > 0$.
- 12) Αν η εξίσωση $(\chi - \mu)^2 + 5(\chi - \mu) + 6 = 0$ έχει λύση (ρίζα) τον αριθμό 5, να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού μ , αν το μ είναι άρτιος αριθμός.

13) Να λυθούν οι εξισώσεις:

$$1) \frac{\chi-2}{\chi} + \frac{4}{\chi-2} = \frac{8}{\chi^2-2\chi}$$

$$2) \frac{y+2}{y} = \frac{y+3}{y+4} - \frac{4}{y^2+4y}$$

$$3) \frac{3}{y+5} - \frac{y}{y-5} = \frac{y^2+25}{25-y^2}$$

$$4) \frac{3}{\kappa+2} = \frac{2}{\kappa} + \frac{\kappa-4}{\kappa^2+2\kappa}$$

$$5) \frac{\rho}{\rho-1} + \frac{6}{\rho^2-1} = 4$$

$$6) \frac{3}{\omega^2-3\omega-4} = \frac{2\omega+5}{\omega^3+2\omega^2+\omega} + \frac{4}{\omega^2-4\omega}$$

$$7) \left(\frac{\chi+1}{\chi-1} \right)^2 - 4 \frac{\chi+1}{\chi-1} + 3 = 0$$

$$14) \frac{\chi}{\chi-2} + \frac{4}{\chi-2} = \frac{5}{\chi-2}$$

$$15) \frac{\chi}{\chi+3} - \frac{2}{\chi-3} = \frac{-\chi-9}{\chi^2-9}$$

$$16) \frac{2\chi^2-8\chi}{\chi^2-4\chi+4} - \frac{4}{2-\chi} = \frac{\chi}{\chi-2}$$

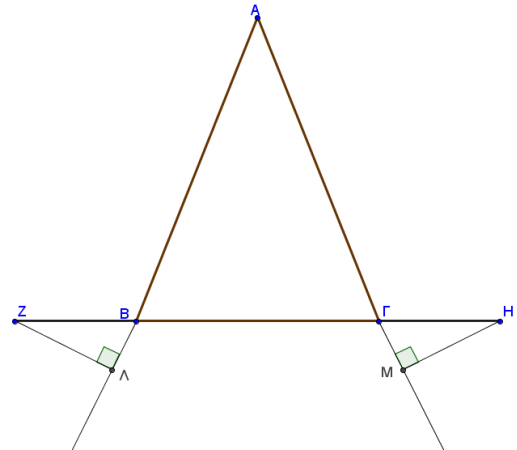
ΕΝΟΤΗΤΑ 3 : Γεωμετρία

1. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα Σ , αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα Λ , αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

1) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα .	Σ	Λ
2) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.	Σ	Λ
3) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, και έχουν μια γωνία αντίστοιχα ίση τότε απαραίτητα θα είναι ίσα.	Σ	Λ
4) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση μία προς μία, και έχουν μια κάθετη πλευρά τους αντίστοιχα ίση τότε απαραίτητα θα είναι ίσα.	Σ	Λ

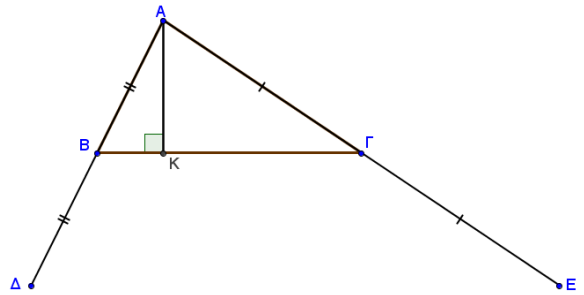
2. Να δείξετε ότι σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ η διάμεσος AD είναι ύψος και διχοτόμος.
3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Αν M και Λ είναι μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα να δείξετε ότι :
- 1) $BL = \Gamma M$
 - 2) Τα M και Λ απέχουν ίση απόσταση από την πλευρά $B\Gamma$.

4. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) προεκτείνουμε τη βάση $B\Gamma$ κατά τμήματα $BZ = \Gamma H$ όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν $Z\Lambda$ και HM αποστάσεις από τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα να δείξετε ότι $Z\Lambda = HM$.

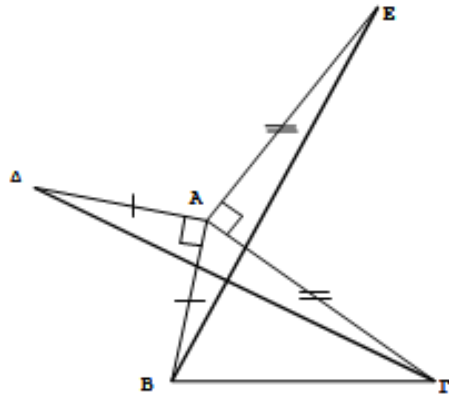


5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Αν K, Λ, M είναι μέσα των πλευρών $AB, B\Gamma, AG$ αντίστοιχα να δείξετε ότι $\Lambda K = \Lambda M$.

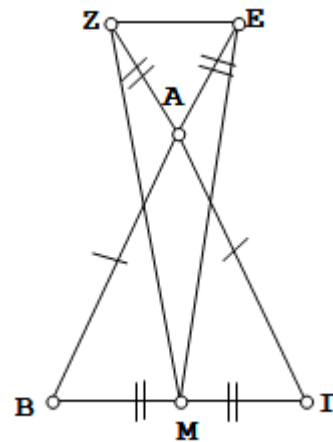
6. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AK . Αν $AB=BD$ και $AG=GE$ να αποδείξετε ότι Δ και E απέχουν ίση απόσταση από την ευθεία $B\Gamma$.



7. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι τυχαίο τρίγωνο με $AD=AB$, $AE=AG$ και $AD \perp AB$, $AG \perp AE$. Να δείξετε ότι $\Gamma\Delta = BE$.



8. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB=AG$) , M μέσο της $B\Gamma$ και $AZ=AE$. Να δείξετε το τρίγωνο MZE είναι ισοσκελές.

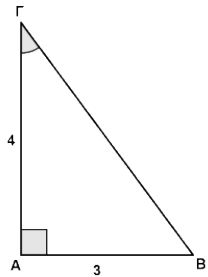


- 9) Στο ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$), ονομάζουμε M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το μέρος του B , και την AG προς το μέρος του Γ και παίρνουμε τα σημεία Δ και E αντίστοιχα, έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να δείξετε ότι: **α)** $M\Delta = ME$
β) οι αποστάσεις των σημείων Δ και E από την πλευρά $B\Gamma$ είναι ίσες.

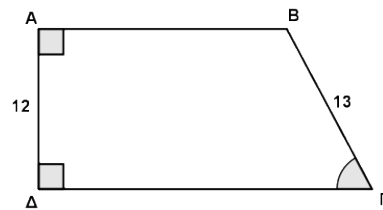
ΕΝΟΤΗΤΑ 4: Τριγωνομετρία

- 1) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

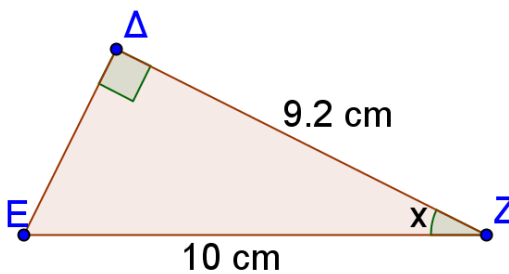
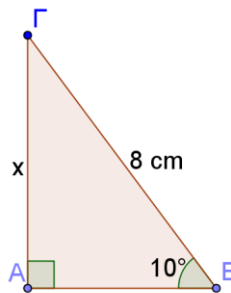
(α)



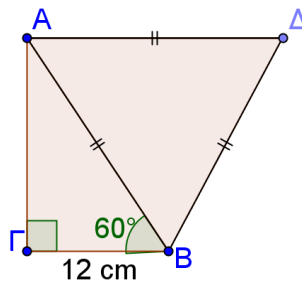
(β)



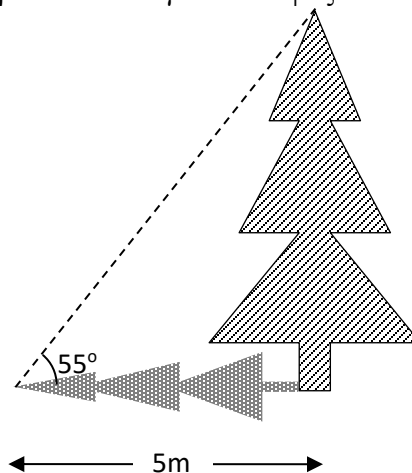
- 2) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) ισχύει ότι $\varepsilon\phi(\hat{B}) = \frac{6}{8}$. Να υπολογίσετε όλους τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.
- 3) Να υπολογίσετε τα χ και ψ στην κάθε περίπτωση:



4) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του σχήματος ΑΓΒΔ:



5) Ένας δασονόμος θέλει να μετρήσει το ύψος ενός δέντρου και παρατηρεί πως όταν η σκιά του δέντρου έχει μήκος 5m, η γωνία που έχουν οι ακτίνες του ήλιου είναι 55° . Πως μπορεί να υπολογίσει το ύψος του δέντρου;



ΕΝΟΤΗΤΑ 5 : Ευθεία - Γραμμικά Συστήματα

- 1) Να εξετάσετε αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες ή είναι κάθετες ή ταυτίζονται ή τέμνονται

$$\alpha) \begin{cases} \varepsilon_1 : \psi = 5\chi - 9 \\ \varepsilon_2 : \psi = -\frac{1}{5}\chi \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \varepsilon_1 : 3\chi - 5\psi = 8 \\ \varepsilon_2 : 6\chi + 10\psi - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \varepsilon_1 : \psi = 8 \\ \varepsilon_2 : \psi = -5 \end{cases}$$

$$\delta) \begin{cases} \varepsilon_1 : 7\chi - 2\psi = 9 \\ \varepsilon_2 : 14\chi - 4\psi = 18 \end{cases}$$

2) Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 5\chi - 2\psi = 4 \\ 3\chi + 4\psi = 18 \end{cases}$$

- 3) Να βρεθεί η απόσταση και το μέσο των σημείων A(-2, 4) και B(-9, 3).

- 4) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο (-2, 4) και είναι παράλληλη με την ευθεία $3\chi + 2\psi = 10$.

- 5) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η ευθεία $(\alpha-6)\chi + 3\psi - 10 = 0$ είναι κάθετη με την ευθεία $3\chi - 2\psi = 9$.

- 6) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A (2, -3) και έχει κλίση $\lambda = 4$.

- 7) Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας :

A) που διέρχεται από τα σημεία (6, -1) και (3, 2)

B) που διέρχεται από τα σημεία (-5, 3) και (2, 3)

Γ) που διέρχεται από τα σημεία (2, 4) και (2, -6)

Δ) που περνά από το σημείο (3,-6) και είναι παράλληλη με την ευθεία $3\chi - y = 5$

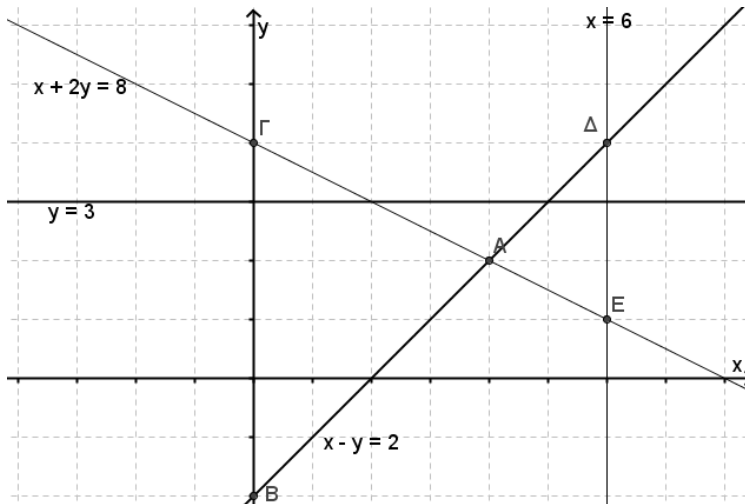
Ε) που περνά από το σημείο (-10,3) και κάθετη με την ευθεία $y = 5\chi - 3$

8) Να βρεθεί ο αριθμός a ώστε οι ευθείες $y = 2x - 5$ και $y = (2a - 7)x + 9$ να είναι :

A) παράλληλες.

B) κάθετες.

9) Δίνονται οι πιο κάτω γραφικές παραστάσεις:



A) Με τη βοήθεια των πιο πάνω γραφικών παραστάσεων να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα :

- $x + 2y = 8, x - y = 2$
- $y = 3, x - y = 2$
- $x = 6, x + 2y = 8$
- $y = 0, x + 2y = 8$
- $x = 0, x - y = 2$

B) Να αποδείξετε ότι εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι τετραπλάσιο από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΔΕ.

10) Δίνεται η ευθεία $(\lambda + \mu)x + (2\mu - \lambda)y = 3$. Να βρεθούν οι αριθμοί λ και μ ώστε η πιο πάνω ευθεία να διέρχεται από τα σημεία $(2,5)$ και $(-1,-7)$.

11) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (a + \beta)x + 2a + \beta = 4$. Να βρείτε τους αριθμούς a και β ώστε η εξίσωση να έχει λύσεις τους αριθμούς 2 και -3.

12) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,3)$, $B(-2,1)$ και $\Gamma(1,0)$.

Να βρείτε: α) Την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$.

β) Την εξίσωση του ύψους $B\Delta$.

γ) Την εξίσωση της διαμέσου ΓM .

δ) Το εμβαδό του τριγώνου.

13) Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,4)$, $B(-2,5)$ και $\Gamma(-1,3)$.

A) Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου.

B) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

Γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου.

Δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

14) Να λύσετε τα συστήματα:

$$\text{A)} \quad \begin{cases} x - y = 9 \\ x + y = 13 \end{cases}$$

$$\text{B)} \quad \begin{cases} 3x - y = 12 \\ 2x + 3y = 19 \end{cases}$$

$$\text{Γ)} \quad \begin{cases} 2\alpha - 3\beta = -6 \\ \alpha - 2\beta = -5 \end{cases}$$

$$\text{Δ)} \quad \begin{cases} 3\varphi + 5\omega = 50 \\ 4\varphi + 3\omega = 41 \end{cases}$$

15) Σε μια κατασκήνωση υπάρχουν 260 παιδιά, τα οποία μένουν σε 50 σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων. Αν όλες οι σκηνές είναι γεμάτες να βρείτε πόσες είναι οι σκηνές των 4 ατόμων και 6 ατόμων.

16) Ο κερματοδέκτης ενός μηχανήματος πώλησης αναψυκτικών δέχεται κέρματα του ενός ευρώ και δύο ευρώ. Όταν ανοίχτηκε, διαπιστώθηκε ότι περιείχε 80 κέρματα συνολικής αξίας 95 ευρώ. Πόσα κέρματα από κάθε είδος υπήρχαν;

17) Το άθροισμα των ψηφίων ενός διψήφιου αριθμού είναι 15. Αν εναλλάξουμε τη θέση των ψηφίων του ,παίρνουμε αριθμό μικρότερο του αρχικού κατά 27. Να βρείτε τον αρχικό αριθμό.

18) Μία τάξη έχει 34 μαθητές. Σήμερα ,που είναι παρόντες στην τάξη τα $\frac{3}{4}$ των αγοριών και τα $\frac{2}{3}$ των κοριτσιών ,ο αριθμός των αγοριών είναι ίσος με τον αριθμό των κοριτσιών. Να βρείτε πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια έχει η τάξη.

ΕΝΟΤΗΤΑ 7 : Στερεομετρία

- 1) Ορθό πρίσμα έχει βάση ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(A = 90^\circ)$, $B\Gamma = 10cm$ και $A\Gamma = 8cm$. Αν το ύψος του πρίσματος είναι $10cm$ να βρείτε τον όγκο του και το εμβαδόν ολικό του.
- 2) Ορθό πρίσμα έχει βάση ρόμβο με διαγώνιους $12m$ και $16m$, Αν το ύψος του πρίσματος είναι $8m$ να βρείτε τον όγκο του και το εμβαδόν ολικό του.
- 3) Κύβος έχει ακμή $a = 8cm$. Να βρείτε το εμβαδόν ολικό του, τον όγκο του και το μήκος της διαγωνίου του.
- 4) Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις $2cm$, $3cm$ και $5cm$. Να βρείτε το εμβαδόν ολικό του τον όγκο του και το μήκος της διαγωνίου του.