

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Οι μαθητές μας, μπορούν να διαβάσουν πρώτα τη σχετική θεωρία και τα παραδείγματα και παράλληλα να εκτελέσουν τις σχετικές δραστηριότητες, από τα σχολικά εγχειρίδια, **Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Κατεύθυνσης, Α΄, Β΄ και Γ΄ Τεύχος**, που υπάρχουν στις ενότητες που αναφέρονται πιο κάτω:

Α΄ Τεύχος

- 1. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ, σελίδες 7 - 109.
- 2. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ, σελίδες 111 - 126.

Β΄ Τεύχος

- 3. ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ, σελίδες 7 – 60.
- 4. ΣΕΙΡΕΣ, σελίδες 61 - 82.
- 5. ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ, σελίδες 83 – 141.

Γ΄ Τεύχος

- 6. ΚΥΚΛΟΣ, σελίδες 7 – 69.
 - 7. ΠΑΡΑΒΟΛΗ, σελίδες 71 - 98.
 - 8. ΕΛΛΕΙΨΗ, σελίδες 99 – 135.
-
- Τα τρία τεύχη του σχολικού εγχειρίδιου είναι αναρτημένα στην ιστοσελίδα του ΥΠΠΑΝ στις πιο κάτω διευθύνσεις:

http://archeia.moec.gov.cy/sm/272/c_lyk_mathimatika_katefthynsi_a_tefchos.pdf

http://archeia.moec.gov.cy/sm/272/c_lyk_mathimatika_katefthynsi_b_tefchos.pdf

http://archeia.moec.gov.cy/sm/272/c_lyk_mathimatika_katefthynsi_c_tefchos.pdf

Για επιπλέον εμπέδωση της ύλης και εξάσκηση των μαθητών, για τις πιο πάνω ενότητες, δίνονται οι πιο κάτω επαναληπτικές ασκήσεις:

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

1. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $\psi = x \ln x$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $2x - 2\psi + 3 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της καμπύλης: $\frac{x^2}{2} - \frac{\psi^2}{7} = 1$, που είναι κάθετες στην ευθεία $2x + 4\psi - 3 = 0$.
2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β έτσι ώστε το
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + \alpha e^{2-x} + \beta x}{x^2 - 4} = \frac{1}{2}$$
3. Να δείξετε ότι:
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$
4. Να υπολογίσετε τα όρια:
α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 x}{x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\exp x}}{\ln(x+1)}$ γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-3x}}{x^2}$
5. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και τα σημεία καμπής των πιο κάτω συναρτήσεων:
α) $\psi = x + \frac{1}{x}$ β) $\psi = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$
6. Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της $f(x) = \frac{\eta \mu x}{2 - \sigma \upsilon \nu x}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$
Να εξετάσετε αν εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $[0, 2\pi]$.
7. Να βρείτε τα α και β έτσι ώστε η καμπύλη με εξίσωση $\psi = \alpha x^3 + \beta x^2$ να έχει σημείο καμπής στο $(1, 2)$.
8. Να εφαρμόσετε το θεώρημα της μέσης τιμής για την συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 3$ στο διάστημα $[-2, 4]$ και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το αποτέλεσμα.
9. Για μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|f'(x)| \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$
Αν $f(1) = 20$, να δείξετε ότι: $18 \leq f(2) \leq 22$
10. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha \neq 0$ έχει στο σημείο καμπής της εφαπτομένη παράλληλη με την ευθεία $\psi = 2x + 7$, αν $\beta^2 = 3\alpha(\gamma - 2)$.
11. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα μέσης τιμής για την συνάρτηση $f(x) = \ln x$ να δείξετε ότι: Αν $0 < \alpha < \beta$, τότε $1 - \frac{\alpha}{\beta} < \ln \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} - 1$.

12. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2-x}$, είναι γνήσια αύξουσα ή γνήσια φθίνουσα με χρήση του ορισμού της γνήσιας αύξουσας ή γνήσιας φθίνουσας συνάρτησης.

13. Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο (α, β) με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Αν για κάποιο $\gamma \in (\alpha, \beta)$ είναι $f(\gamma) > 0$, να αποδείξετε ότι:

i) υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1)f'(\xi_2) < 0$

ii) υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε: $f''(\xi) < 0$

(Υπόδειξη: εφαρμόστε επανειλημμένα το Θ.Μ.Τ)

14. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln(1+x) - \frac{1}{x}, \forall x \in (0, 1]$

α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία

β) Να δείξετε ότι: $\ln(1+x) < \frac{1}{x}, \forall x \in (0, 1)$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \eta \mu x + x - 3, x \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

α) Να εξετάσετε τη συνάρτηση ως προς την μονοτονία

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $2 \eta \mu x + x - 3 = 0$, έχει ακριβώς μία

πραγματική λύση στο διάστημα $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2})$

16. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα, την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και τις ασύμπτωτες, να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο:

$$(α) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad (β) f(x) = x e^{\frac{1}{x}} \quad (γ) y = \frac{x - 2}{x^2 + x - 2} \quad (δ) y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4}$$

17. Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y = \alpha x^2 + \beta \ln x \text{ να έχει σημείο καμπής το } \left(1, \frac{1}{2}\right).$$

18. (α) Να δώσετε τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης.

(β) Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη, αν υπάρχει, της συνάρτησης $y = (x - 3)e^{1-x}$.

19. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(α) f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x + 1} \quad (β) g(x) = \ln(e^x + 1) - x \quad (γ) y = \frac{e^{2x} + 3}{2 - x}$$

20. Δίνεται η συνάρτηση f τύπου $y = x^2$. Να βρείτε εκείνο το σημείο της f του οποίου η απόσταση του από την ευθεία $3x - y - 5 = 0$ είναι η ελάχιστη.
21. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$, πλευράς 4 cm. Παίρνουμε σημείο Λ πάνω στην πλευρά $B\Gamma$ με $B\Lambda = x$ cm. Φέρουμε τα κάθετα ευθύγραμμα τμήματα $\Lambda\Delta$ και ΛE πάνω στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
 (α) Να εκφράσετε το γινόμενο $(\Lambda\Delta)(\Lambda\text{E})$ συναρτήσει του x .
 (β) Να υπολογίσετε την τιμή του x , ώστε το γινόμενο $(\Lambda\Delta)(\Lambda\text{E})$ να είναι μέγιστο.
22. Να βρείτε το μέγιστο εμβαδόν ορθογωνίου που μπορεί να εγγραφεί σε ημικύκλιο με διάμετρο 16 cm.
23. Δίνεται μεταβλητό ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με σταθερή περίμετρο 16 μ. Από το ορθογώνιο θα αφαιρεθεί κύκλος που εφάπτεται των δυο απέναντι πλευρών του. Να βρείτε: (α) τις διαστάσεις εκείνου του ορθογωνίου για το οποίο, το εμβαδόν που απομένει, μετά την αφαίρεση του κύκλου, είναι μέγιστο και (β) το μέγιστο αυτό εμβαδόν.
24. Μια τουριστική επιχείρηση οργανώνει εκδρομές με λεωφορεία. Κάθε λεωφορείο έχει 50 θέσεις. Όταν οι επιβάτες του λεωφορείου είναι 30, τότε η εταιρεία ζητά €25 ανά άτομο. Για να αυξήσει τους επιβάτες, η εταιρεία κάνει την εξής προσφορά:
 « Κάθε επιπλέον επιβάτης θα μειώνει κατά 50 σ την χρέωση κάθε άλλου επιβάτη».
 Να βρείτε το πλήθος των επιπλέον επιβατών που πρέπει να έχει κάθε λεωφορείο, ώστε η επιχείρηση να έχει μεγιστοποιήσει τα έσοδα της.
25. Ένας καλλιεργητής γνωρίζει ότι κάποια συγκεκριμένη στιγμή η παραγωγή μήλων είναι 40 κιλά ανά δέντρο ενώ η τιμή των μήλων είναι €4 το κιλό. Αν η παραγωγή αυξάνεται κατά 5 κιλά την εβδομάδα και η τιμή του κιλού μειώνεται κατά £0,2 την εβδομάδα να βρείτε μετά από πόσες εβδομάδες τα έσοδα του καλλιεργητή θα είναι μέγιστα.
26. Πρόκειται να κατασκευάσουμε περίφραξη που να οριοθετεί τρία συνεχόμενα, ίσα ορθογώνια οικοπέδα. Ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις κάθε οικοπέδου ώστε με φράκτη συνολικού μήκους 1500m να περιφράξουμε τη μέγιστη έκταση;
27. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης με εξίσωση $y = x^3 - 3x^2 + 5x$, στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης είναι ελάχιστη. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της κλίσης.

28. Ένα τουριστικό λεωφορείο έχει να διανύσει απόσταση 625 Km με σταθερή ταχύτητα x Km την ώρα. Σύμφωνα με τον κώδικα οδικής κυκλοφορίας, το μέγιστο όριο ταχύτητας είναι 90 Km/h. Τα καύσιμα κοστίζουν 1,6 ευρώ το λίτρο, η ωριαία κατανάλωση είναι $5,5 + \frac{x^2}{200}$ λίτρα και η αμοιβή του οδηγού είναι 20 ευρώ την ώρα.

α) Να δείξετε ότι το συνολικό κόστος $K(x)$ της διαδρομής είναι:

$$K(x) = \frac{18000}{x} + 5x, \quad 0 < x \leq 90$$

β) Να βρείτε την ταχύτητα του λεωφορείου για την οποία το κόστος της διαδρομής γίνεται ελάχιστο.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

1. Να υπολογίσετε τα ακόλουθα:

$$(\alpha) \text{ τοξημ} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \quad (\beta) \text{ τοξημ} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (\gamma) \text{ τοξσυν} \left(\frac{1}{2} \right) \quad (\delta) \text{ τοξσυν} (-1)$$

$$(\epsilon) \text{ τοξεφ} 1 \quad (\zeta) \text{ τοξεφ} \left(-\frac{\sqrt{3}}{3} \right) \quad (\eta) \text{ τοξσφ} (-1) \quad (\theta) \text{ τοξσφ} (\sqrt{3})$$

2. Να μετατρέψετε σε αλγεβρικές παραστάσεις του x τις πιο κάτω τριγωνομετρικές παραστάσεις:

$$(\alpha) \eta\mu(\text{τοξεφ}(3x)), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{3}$$

$$(\beta) \epsilon\phi(\text{τοξσυν}(4x)), \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$$

3. Να υπολογίσετε την παράσταση: $A = \eta\mu(\text{τοξσυν}(\frac{4}{5})) + \text{τοξεφ}(\frac{5}{12})$

4. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \text{τοξσυν}(3x) \quad (\beta) f(x) = \text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x-1}\right) \quad (\gamma) \text{τοξημ}(x^2)$$

5. Να δείξετε ότι: $\text{τοξσφ} x + \text{τοξσφ}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

6. Να αποδείξετε ότι: $(\text{τοξημ} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

ΑΟΡΙΣΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$(\alpha) \int (x^5 + \eta \mu x - e^{-x} - \pi) dx \quad (\beta) \int \left(\frac{1}{x} + \varepsilon \phi x \right) dx$$

$$(\gamma) \int (\varepsilon \phi^4 x \tau \varepsilon \mu^2 x) dx \quad (\delta) \int \frac{7x}{9x^2 + 25} dx$$

$$(\varepsilon) \int \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}} dx, \quad u = \ln x \quad (\zeta) \int x^2 e^{3x} dx$$

$$(\eta) \int \frac{2x+7}{x^2 + 4x + 8} dx \quad (\theta) \int \frac{x-1}{(x+1)(x^2+1)} dx$$

$$(\iota) \int \varepsilon \phi^5 x dx \quad (\kappa) \int \frac{\tau \varepsilon \mu^2 x}{\sqrt{2 - \varepsilon \phi x}} dx$$

2. Χρησιμοποιώντας τις αντικαταστάσεις που δίνονται ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$(\alpha) \int \frac{dx}{1 - \eta \mu x + 2 \sigma \upsilon \nu x}, \quad t = \varepsilon \phi \frac{x}{2}$$

$$(\beta) \int \frac{dx}{x\sqrt{-3x^2 + 4x - 1}}, \quad x = \frac{1}{u}$$

$$(\gamma) \int \frac{dx}{3 - \eta \mu 2x + 2 \sigma \upsilon \nu 2x}, \quad t = \varepsilon \phi x$$

$$(\delta) \int \tau \omicron \xi \eta \mu^2 x dx, \quad t = \tau \omicron \xi \eta \mu x$$

$$(\varepsilon) \int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} dx, \quad x = 5 \tau \varepsilon \mu \phi \quad 0 < \phi < \frac{\pi}{2}, x > 5$$

3. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3)=7$, η οποία για κάθε $x \neq 0$ ικανοποιεί την σχέση $f'(x) = \frac{2+f(x)}{x}$.

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{2}{x^2} dx$

β) Να βρείτε την συνάρτηση f

4. Να βρείτε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν το $(1, -14)$ είναι τοπικό ακρότατο και $f''(x) = 24x^2 + 24x + 2$

5. Να βρείτε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν το $(0, 2)$ είναι τοπικό ακρότατο και $f''(x) = xe^x + e^x$.
6. Να βρείτε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν $\int f(x)e^{-x} dx = e^{2x} + c$
7. Να βρείτε την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και θετική στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \frac{2x^3 + 2x}{f(x)}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=1$.
8. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, αν η εφαπτομένη της στο τυχαίο σημείο της $M(x,y)$, έχει κλίση $\frac{e^{2x}}{f(x)}$ και περνά από το σημείο $A(0,1)$
9. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f'(x) = 2 \ln x$ για κάθε $x > 0$. Αν η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο της $M(1, \frac{1}{2})$ οριζόντια εφαπτομένη, να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.
10. Αν $I_\nu = \int \sin^\nu x dx$, να αποδείξετε ότι: $I_\nu = \frac{1}{\nu} \sin^{\nu-1} x \cos x + \frac{\nu-1}{\nu} I_{\nu-2}$, $\nu \geq 2$
11. α) Να δείξετε ότι: $I_\nu = \int (\ln x)^\nu dx = x(\ln x)^\nu - \nu I_{\nu-1}$, $\nu \geq 1$
 β) Να βρείτε το $\int (\ln x)^3 dx$
12. α) Να δείξετε ότι: $I_\nu = \int \sigma \phi^\nu x dx = -\frac{1}{\nu-1} \sigma \phi^{\nu-1} x - I_{\nu-2}$, $\nu \geq 2$
 β) Να βρείτε το $\int \sigma \phi^5 x dx$
13. α) Να δείξετε ότι: $I_\nu = \int \varepsilon \phi^\nu x dx = \frac{\varepsilon \phi^{\nu-1} x}{\nu-1} - I_{\nu-2}$, $\nu \geq 2$
 β) Να βρείτε το $\int \varepsilon \phi^6 x dx$
14. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι ορισμένη για κάθε $x > -5$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
 α) $f''(x) = \frac{1}{3\sqrt{x+5}}$ για κάθε $x > -5$.
 β) Η εφαπτομένη της $f(x)$ στο σημείο $(4, 2)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1$
 Να βρείτε την συνάρτηση
15. Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:
 $x f'(x) = (x+1)f(x)$, $\forall x \in (0, +\infty)$ και $f(1) = e$
16. Μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\forall x \in \mathbb{R}$ ισχύει:
 $\frac{f'(x)}{x^2+1} = x e^{x^2-f(x)}$
 Να βρείτε την συνάρτηση, αν είναι γνωστόν ότι περνά από το $(0,0)$.

17. Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν
 α) Είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$
 β) $f(x) = x f'(x) - x, \quad x > 0$
 γ) $f(1) = 1$
 Να δείξετε ότι: $f(x) = x \ln x + x, \quad x > 0$
 ι) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα και σημεία καμπής αν υπάρχουν
 ιι) Να βρείτε το πεδίο τιμών της
18. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1)=1$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{f'(x)}{x+1} = e^{x-f(x)}, \quad \forall x > 0.$$
 Να δείξετε ότι η f έχει τύπο $f(x) = x + \ln x$
19. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(1) = f'(1) = 3$ για την οποία ισχύει: $2 \int f(x) dx + 2 \int x f'(x) dx = x^2 f'(x) + c$. Να δείξετε ότι η f έχει τύπο

$$f(x) = 2x^2 + \frac{1}{x}.$$
20. Δίνεται το ολοκλήρωμα: $I_v = \int \frac{x^v}{x^2 + 1} dx, \quad v \in \mathbb{N}^*.$
 α) Να δείξετε ότι: $I_v + I_{v-2} = \frac{x^{v-1}}{v-1} + c, \quad \forall v > 2.$
 β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_3
21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x + 4$.
 α) Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες ισχύει:
 $\alpha f(x) + \beta f'(x) \equiv \eta \mu x + 7 \sigma \upsilon \nu x + 4, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
 β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{\eta \mu x + 7 \sigma \upsilon \nu x + 4}{3 \eta \mu x + \sigma \upsilon \nu x + 4} dx$
22. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις σχέσεις:
 $f(x) = -g'(x), \quad g(x) = f'(x), \quad g(x) + g(x) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$
 Θεωρούμε τα ολοκληρώματα $A = \int \frac{f(x)}{f(x) + g(x)} dx, \quad B = \int \frac{g(x)}{f(x) + g(x)} dx$
 Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:
 α) $A + B$ β) $A - B$ γ) A δ) B
23. Δίνεται το ολοκλήρωμα: $I_v = \int e^{-x} \eta \mu(vx) dx, \quad v \in \mathbb{N}^*.$
 Να δείξετε ότι:
 α) $I_v = -e^{-x} \eta \mu(vx) + v \int e^{-x} \sigma \upsilon \nu(vx) dx$
 β) $(1 + v^2) I_v = -e^{-x} [\eta \mu(vx) + v \sigma \upsilon \nu(vx)] + c$

24. Δίνονται τα ολοκληρώματα:

$$A = \int e^x \eta \mu^2 x \, dx, \quad B = \int e^x \sigma \nu \nu^2 x \, dx. \text{ Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:}$$

α) $A + B$ β) $A - B$ γ) A δ) B

25. Δίνονται τα ολοκληρώματα:

$$A = \int 2x \eta \mu^2 x \, dx, \quad B = \int 2x \sigma \nu \nu^2 x \, dx. \text{ Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:}$$

α) $A + B$ β) $A - B$ γ) A δ) B

26. Δίνεται το ολοκλήρωμα: $I_v = \int \frac{(\ln x)^v}{x^2} \, dx, \quad v \in \mathbb{N}^*$

α) Να δείξετε ότι: $I_v = v I_{v-1} - \frac{(\ln x)^v}{x}$ β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_3 .

27. α) Η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ .
Να δείξετε ότι:

$$\int [f(x) + f''(x)] \eta \mu x \, dx = f'(x) \eta \mu x - f(x) \sigma \nu \nu x + c$$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int (\ln x - \frac{1}{x^2}) \eta \mu x \, dx$

28. Η συνάρτηση $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:

$$f''(x) \eta \mu x + f(x) \eta \mu x = \eta \mu 2x, \quad \forall x \in (0, \pi). \text{ Αν είναι } f'(\frac{\pi}{2}) = 1 \text{ και } f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}, \text{ τότε:}$$

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int [f(x) \eta \mu x + f''(x) \eta \mu x] \, dx$

β) Να δείξετε ότι η f έχει τύπο $f(x) = x \eta \mu x$.

29. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(\pi^2) = 0$ και
 $x f'(x) - f(x) = x^2 \sigma \nu \nu \sqrt{x}$.

α) Να δείξετε ότι: $\int \sigma \nu \nu \sqrt{x} \, dx = \frac{f(x)}{x} + c$

β) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 2x(\sqrt{x} \eta \mu \sqrt{x} + \sigma \nu \nu \sqrt{x} + 1)$.

30. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $f(\pi) = 0$ και

$$f'(x) = x e^{-x} \eta \mu x + \frac{f(x)}{x}.$$

Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = -\frac{x}{2} e^{-x} (\eta \mu x + \sigma \nu \nu x) - \frac{e^{-\pi}}{2} x$.

31. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει:
 $f''(x) = 2 \ln x, \quad \forall x > 0$. Αν η γραφική παράσταση της f έχει στο σημείο της $A(1, \frac{1}{2})$ οριζόντια εφαπτομένη,
να βρείτε τον τύπο της f .
32. Δίνεται το ολοκλήρωμα: $I_v = \int \frac{x^v}{\sqrt{x^2+1}} dx, \quad v \in \mathbb{N}^*$.
α) Να δείξετε ότι: $I_v = \frac{x^{v-1}}{v} \sqrt{x^2+1} - \frac{v-1}{v} I_{v-2}, \quad \forall v > 2$.
β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_3
33. Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε: α)
 $[f(x) + x][f'(x) + 1] = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ β) $f(0) = 1$
Να δείξετε ότι: $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$
34. Έστω μία συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει η σχέση
 $2f'(x) = e^{x-f(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$
Να δείξετε ότι: $f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$

ΣΕΙΡΕΣ

1. Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα: $\sum_{k=1}^7 2k$
2. Να υπολογίσετε τα μερικά αθροίσματα: $\sum_{k=1}^5 2, \sum_{k=1}^7 7$
3. Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα της σειράς: $\sum_{k=1}^{\infty} (2k-1)$
4. Να βρείτε το γενικό όρο μιας ακολουθίας a_n , αν γνωρίζουμε ότι το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι ίσο με $S_n = 2^n$.
5. Δίνεται ότι: $\sum_{k=1}^{30} \alpha_k = 100$ και $\sum_{k=1}^{30} \beta_k = 50$. Να υπολογίσετε το άθροισμα
 $\sum_{k=1}^{30} (4\alpha_k - 5\beta_k)$

6. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_\nu = \frac{1}{\nu^2 + 9\nu + 20}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Να δείξετε ότι η ακολουθία α_ν μπορεί να γραφεί στη μορφή $\beta_\nu - \beta_{\nu+1}$, όπου β_ν κατάλληλη ακολουθία. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το άθροισμα $\sum_{\kappa=1}^{20} \alpha_\kappa$

7. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω σειρές συγκλίνουν. Στη περίπτωση που συγκλίνουν να υπολογίσετε το άθροισμά τους.

(α) $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^\kappa$ (β) $\sum_{\kappa=1}^{\infty} (3\kappa + 1)$ (γ) $\sum_{\kappa=1}^{\infty} (-1)^\kappa$

8. Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα Σ_ν της σειράς: $\sum_{\kappa=1}^{\infty} (6\kappa^2 - 2\kappa + 3)$

9. Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα: $\sum_{\kappa=11}^{20} (\kappa^2 - 2\kappa + 1)$

10. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 30^3$

11. Να υπολογίσετε το μερικό άθροισμα Σ_ν της σειράς: $2.5 + 3.7 + 4.9 + \dots$

12. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{1}{(\kappa + 4)(\kappa + 5)}$

13. Δίνεται ότι το μερικό άθροισμα της σειράς: $\frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{7.9} + \dots$,

είναι ίσο με $\frac{\nu}{3(2\nu + 3)}$. Να εξετάσετε αν η σειρά συγκλίνει.

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

1. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$(α) \int_0^2 (-x + 3x^2) dx \quad (β) \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx \quad (γ) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{4+5\sin^2 x}, \quad t = \varepsilon \varphi x$$

$$(δ) \int_1^2 x\sqrt{x-1} dx \quad (ε) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x - \eta \mu^2 x) dx$$

$$(στ) \int_2^{2\sqrt{3}} \sqrt{16-x^2} dx, \quad x = 4\eta\mu\theta, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = \ln x$. Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και των ευθειών $x = 1$ και $x = e$.

(β) τον όγκο που παράγεται από το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της συνάρτησης f , τον άξονα των y και την ευθεία $y = 2$, όταν περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία $y = 2$.

(γ) τον όγκο που παράγεται όταν το χωρίο που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και των ευθειών $x=1$ και $x=e$, περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των y .

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη συνάρτηση $y = x^2 - 4x$ και την ευθεία $2y = x - 4$.

4. Δίνεται το χωρίο που περικλείεται, από τον κύκλο $x^2+y^2 = 8$, την ευθεία $y=x$ και τον άξονα των x . (α) Να βρείτε το εμβαδόν του και (β) να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται, από μια πλήρη περιστροφή του χωρίου, γύρω από τον άξονα των y .

5. (α) Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις της συνεχούς συνάρτησης f , του άξονα των x και των ευθειών $x = 1$ και $x = 3$. Να βρείτε το ύψος του ορθογωνίου αν γνωρίζουμε

ότι η βάση του ισούται με 2 μονάδες, $\int_1^3 f(x) dx = 26$ και $f(x) > 0$ στο $[1,3]$.

(β) Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$, το σημείο $(1,2)$ είναι τοπικό ακρότατο της και ισχύει $\int_0^1 x f''(x) dx = 1$. Να βρείτε το σημείο τομής της $f(x)$ με τον άξονα των y .

6. α) Να δείξετε ότι αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[0, \alpha]$ και

$$\text{παραγωγίσιμη στο } (0, \alpha) \text{ τότε } \int_0^\alpha f(\alpha - x) dx = \int_0^\alpha f(x) dx$$

- β) Με τη χρήση του μετασχηματισμού $u = \alpha - x$, ή με οποιοδήποτε άλλο

$$\text{τρόπο, να δείξετε ότι: } \int_0^\alpha x[f(x) + f(\alpha - x)] dx = \alpha \int_0^\alpha f(x) dx.$$

- γ) Με τη χρήση του πιο πάνω αποτελέσματος, ή με οποιοδήποτε άλλο

$$\text{τρόπο, να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x[\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x] dx$$

7. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = f(x)$ της οποίας υπάρχουν η πρώτη παράγωγος $f'(x)$ και η δεύτερη παράγωγος $f''(x)$ στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και είναι συνεχείς. Η εφαπτομένη της καμπύλης με εξίσωση $\psi = f(x)$, στο σημείο με τετμημένη $x = \alpha$ σχηματίζει προσανατολισμένη γωνιά $\frac{\pi}{4}$ ακτίνων με τον άξονα Ox και η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο με τετμημένη $x = \beta$ σχηματίζει προσανατολισμένη γωνιά $\frac{\pi}{3}$ ακτίνων με τον άξονα των Ox .

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f''(x) dx$.

8. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u = \pi - x$, να δείξετε ότι: $\int_0^\pi x f(\eta\mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\eta\mu x) dx$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^\pi \frac{x \eta\mu^3 x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$.

9. Αν η γραφική παράσταση της $f(x)$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα σημεία $A(5, 2)$ και $B(8, 1)$ και η $f''(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

$$\int_5^8 x f''(x) dx = 1.$$

10. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f και g ορισμένες στο διάστημα $[0, \pi]$. Αν για κάθε $x \in [0, \pi]$ ισχύουν οι σχέσεις $f(x) = f(\pi - x)$ και $g(x) + g(\pi - x) = \pi$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \pi - y$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο,

να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi f(x)g(x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(x) dx$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε το

ολοκλήρωμα $\int_0^\pi \frac{x \eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu^2 x} dx$. (Απ. $\frac{\pi^2}{4}$) (ΠΑΓΚ 2006)

11. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ και ισχύει

$$f'(x) = f(x), \forall x \in [0, \pi] \text{ να δείξετε ότι: } \int_0^{\pi} f(x) \sin x dx = -\frac{1}{2} [f(0) + f(\pi)]$$

12. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

Η f έχει συνεχή πρώτη παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

$$f(-x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$f(x+\alpha) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } \alpha \neq 0, \text{ σταθερός αριθμός.}$$

$$f(0) = 0.$$

Να αποδείξετε:

$$(\alpha) f'(-x) = -f'(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(\beta) f'(x+\alpha) = f'(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

$$(\gamma) \int_0^{\alpha} x^2 f'(x) dx = -2 \int_0^{\alpha} x f(x) dx$$

(δ) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \alpha - y$, ή με οποιονδήποτε άλλο

$$\text{τρόπο, να αποδείξετε: } 2 \int_0^{\alpha} x f(x) dx = \alpha \int_0^{\alpha} f(x) dx.$$

$$(\epsilon) \text{ Χρησιμοποιώντας το } (\gamma) \text{ και } (\delta) \text{ να δείξετε ότι: } \int_0^{\alpha} x^2 f'(x) dx = -\alpha \int_0^{\alpha} f(x) dx.$$

13. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι συνεχείς στο σύνολο των πραγματικών αριθμών,

$$\text{με } f(-x) = f(x) \text{ και } g(x) + g(-x) = 1, \text{ για κάθε πραγματικό αριθμό } x.$$

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = -x$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο,

$$\text{να δείξετε ότι: } \int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)g(x) dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx, \alpha > 0.$$

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (α), ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο,

$$\text{να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: } \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{e^{2x} + 1} dx.$$

14. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και για την οποία ισχύει η σχέση $f(a + \beta - x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό, $x = a + \beta - u$ να δείξετε ότι

$$\int_a^{\beta} x f(x) dx = \frac{a + \beta}{2} \int_a^{\beta} f(x) dx$$

β) Με τη βοήθεια της πιο πάνω σχέσης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να

$$\text{υπολογίσετε το ολοκλήρωμα } \int_0^{\pi} x \sin^2 x dx.$$

15. Έστω $f:[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση

α) Να δείξετε ότι:

$$i) \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx$$

$$ii) \int_0^{\beta} f(x) dx = \int_0^{\beta} f(\beta - x) dx$$

β) Αν $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x + 2} dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x + 2} dx$, να δείξετε ότι: $I = J$

16. Αν f παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^3 f(2x+1) dx = \frac{1}{2} \int_1^7 f(x) dx$$

$$\beta) \int_0^1 x f'(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = f(1)$$

$$\gamma) \int_0^{\pi} \eta\mu^2 x dx - \int_{\pi}^0 \sigma\upsilon\nu^2 x dx = \pi$$

17. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2\pi]$, να δείξετε ότι:

$$\int_0^{2\pi} x f(\sigma\upsilon\nu x) dx = \pi \int_0^{2\pi} f(\sigma\upsilon\nu x) dx \text{ και να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα}$$

$$\int_0^{2\pi} x \sigma\upsilon\nu^2 x dx$$

(Υπόδειξη: $t = 2\pi - x$)

18. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[-a, a]$, να δείξετε ότι:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_{-1}^1 \frac{x^3 + x^2 + \eta\mu x}{x^2 + 1} dx$

19. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t = -x$, να δείξετε ότι το ολοκλήρωμα

$$A = \int_{-1}^1 \frac{x^2 e^x}{e^x + 1} dx \text{ είναι ίσο με το ολοκλήρωμα } B = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $A+B$ και το A .

20. α) Να δείξετε ότι: $\frac{d}{dx} \left(\frac{\alpha \eta \mu x}{\beta + \alpha \sigma \upsilon \nu x} \right) = \frac{\alpha^2 - \beta^2}{(\beta + \alpha \sigma \upsilon \nu x)^2} + \frac{\beta}{\beta + \alpha \sigma \upsilon \nu x}, \quad \alpha, \beta \neq 0$

β) Θέτοντας $t = \varepsilon \phi \frac{x}{2}$, να δείξετε ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4 \sigma \upsilon \nu x} = \frac{2}{3} \tau \omicron \xi \varepsilon \phi \frac{1}{3}$

γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω ή με άλλο τρόπο να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(5 + 4 \sigma \upsilon \nu x)^2}$

21. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\alpha - x = u$ να αποδείξετε ότι:

$\int_0^{\alpha} x^2 (a - x)^v dx = \int_0^{\alpha} x^v (\alpha - x)^2 dx, \quad v \in N^*$ και στη συνέχεια να βρείτε την κοινή τιμή των ολοκληρωμάτων.

22. Αν $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sigma \upsilon \nu x}{1 + 2 \eta \mu x} dx$ και $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu 2x}{1 + 2 \eta \mu x} dx$, να υπολογίσετε τα: $A, A + B$ και B .

23. Έστω η συνεχής συνάρτηση f , για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$\alpha) \int_0^1 f(x) dx = 5 \quad \beta) \int_0^3 f(x) dx = 12 \quad \gamma) \int_3^4 f(x) dx = 1.$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$I_1 = \int_1^0 f(x) dx \quad I_2 = \int_0^4 f(x) dx \quad I_3 = \int_1^3 f(x) dx \quad I_4 = \int_1^4 f(x) dx$

24. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow R$, για την οποία ισχύει η σχέση:

$\int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 2f(x) dx$. Να δείξετε ότι: $\int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$.

25. Δίνεται το ολοκλήρωμα: $I_v = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{1+x^2} dx, \quad v \in N$

α) Να δείξετε ότι: $I_v + I_{v+1} = \frac{1}{2v+2}, \quad \forall v \in N$

β) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: I_0, I_1, I_2 .

26. Δίνεται το ολοκλήρωμα: $I_v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon \phi^v x dx, \quad v \in N^*$

α) Να δείξετε ότι: $I_v + I_{v-2} = \frac{1}{v-1}, \quad \forall v > 2$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_3 .

27. Αν η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

$$\int_0^1 [x f''(x) + f'(x)] dx = f'(1)$$

28. Δίνεται η συνάρτηση f με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[\alpha, \beta]$, της οποίας οι εφαπτόμενες στα σημεία α και β σχηματίζουν προσανατολισμένες γωνίες

με τον άξονα των x , $\frac{\pi}{6}$ και $\frac{\pi}{3}$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f''(x) f'(x) dx = \frac{4}{3}$

29. Η συνάρτηση f έχει συνεχή παράγωγο στο $[0, 1]$ και είναι $f(0) = 1$ και $f(1) = 2$. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^1 \frac{f'(x) - f(x)}{e^x} dx \quad \beta) \int_0^1 x [2f(x) + x f'(x)] dx$$

30. Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f η οποία έχει συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$.

Αν ισχύει $f(0) = 1$ και $f(1) = e$, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 \frac{f(x) - f'(x)}{f(x) + e^x} dx$

31. Να δείξετε ότι: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \eta \mu^{\nu} x \sigma \upsilon \nu^{\nu} x dx = 2^{-\nu} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma \upsilon \nu^{\nu} x dx$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ (Υποδ. $2x = \frac{\pi}{2} - t$)

32. Δίνεται το ολοκλήρωμα: $I_{\nu} = \int_0^1 x^{\nu} e^x dx$, $\nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να δείξετε ότι: $I_{\nu} = e - \nu I_{\nu-1}$, $\forall \nu \geq 2$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα I_3 .

33. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$, η οποία έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και ισχύει: $\int_0^1 [x^2 f''(x) - 2f(x)] dx = 2$.

α) Να δείξετε ότι: i) $\int_0^1 x f'(x) dx = -\int_0^1 f(x) dx$ ii) $\int_0^1 x^2 f''(x) dx = f'(1) + 2 \int_0^1 f(x) dx$

β) Να υπολογίσετε την τιμή του $f'(1)$.

34. Δίνεται η συνάρτηση f ώστε η δεύτερη παράγωγος της να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο $K(\beta, f(\beta))$, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha) f''(x) dx = f(\alpha) - f(\beta)$$

35. Δίνονται τα ολοκληρώματα:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sigma \nu \nu^2 x \, dx, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \eta \mu^2 x \, dx$$

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα $A + B$, $A - B$, A και B .

36. Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Αν στα σημεία α και β παρουσιάζει τοπικά ακρότατα, να δείξετε ότι:

$$\alpha) \int_{\alpha}^{\beta} x f'(x) \, dx = \beta f(\beta) - \alpha f(\alpha) \qquad \beta) \int_{\alpha}^{\beta} x^2 f(x) \, dx = 2[\alpha f(\alpha) - \beta f(\beta)]$$

37. Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$\int_0^1 x f'(x) \, dx = 1, \quad \int_0^1 x^2 f''(x) \, dx = 3, \quad f(1) = 1.$$

$$\text{Να δείξετε ότι: } \alpha) \int_0^1 f(x) \, dx = 0 \qquad \beta) f'(1) = 5$$

38. Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, 1]$ και ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f'(0) = f'(1) = f(1) = 0 \quad \text{και} \quad \int_0^1 [f(x) - f''(x)] e^x \, dx = 2.$$

$$\alpha) \text{ Να δείξετε ότι: } \int_0^1 f''(x) e^x \, dx = f(0) + \int_0^1 f(x) e^x \, dx$$

$\beta)$ Να υπολογίσετε την τιμή του $f(0)$.

39. Η συνάρτηση f έχει συνεχή τρίτη παράγωγο στο $[0, 1]$ και ισχύουν

$$f(0) = f(1) = f'(1) = 0.$$

$$\text{Να δείξετε ότι: } \int_0^1 f(x) f'''(x) \, dx = \frac{1}{2} [f'(0)]^2.$$

40. Η συνάρτηση f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0, 1]$. Αν η γραφική παράσταση της f εφάπτεται στον άξονα των x στο σημείο $A(1, 0)$, να δείξετε ότι:

$$\alpha) \int_0^1 x^2 f(x) \, dx = -2 \int_0^1 x f(x) \, dx \qquad \beta) \int_0^1 x^3 f''(x) \, dx = 6 \int_0^1 x f(x) \, dx.$$

41. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$\alpha)$ Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x + a = u$, να δείξετε ότι:

$$\int_a^{\beta} f(x) \, dx = \int_0^{\beta-a} f(x+a) \, dx$$

$\beta)$ Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x - \gamma = u$, να δείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma} f(x-\gamma) dx$$

42. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(c+x) = f(c-x)$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \text{ όπου } c \in \mathbb{R} \text{ σταθερά. Να δείξετε ότι: } \int_{ca}^{c\beta} f(x) dx = c \int_{c+a}^{c+\beta} f(x) dx.$$

43. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και ο θετικός αριθμός a .

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \frac{1}{u}$, να δείξετε ότι:

$$A = \int_{\frac{1}{a}}^a f\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{\ln x}{x} dx = 0.$$

44. Δίνονται τα ολοκληρώματα: $A = \int_{-1}^1 \frac{x^2}{e^x + 1} dx, \quad B = \int_{-1}^1 \frac{x^2 e^x}{e^x + 1} dx$

$$\text{Να δείξετε ότι: } A + B = \frac{2}{3}, \quad A - B = \frac{1}{3}.$$

45. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = f(1-x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

$$\text{Να δείξετε ότι: } \alpha) \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 f(1-x) dx \quad \beta) \int_0^1 f(x) dx = f(1) - f(0)$$

46. Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) + f(a+\beta-x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \int_a^{\beta} f(a+\beta-x) dx = \int_a^{\beta} f(x) dx \quad \beta) \int_a^{\beta} f(x) dx = 0.$$

47. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(a+\beta-x) = f(a) + f(\beta) - f(x), \quad \forall x \in [a, \beta]. \text{ Να δείξετε ότι:}$$

$$\alpha) \int_a^{\beta} f(a+\beta-x) dx = \int_a^{\beta} f(x) dx \quad \beta) \int_a^{\beta} f(x) dx = \frac{\beta-a}{2} [f(a) + f(\beta)]$$

48. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f και τα ολοκληρώματα: $A = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx,$

$$B = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x) + f(a-x)} dx. \text{ Να δείξετε ότι: } \alpha) A + B = a \quad \beta) A = B = \frac{a}{2}$$

49. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int_0^{\pi} \frac{e^x + \sigma \nu \nu x}{e^x + \eta \mu x} dx \quad \beta) \int_1^3 4x^2 y dx \quad \gamma) \int_1^3 \left(\int_3^x 5dt \right) x dx$$

$$50. \text{ Αν } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x - 2) \eta \mu^2 x dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3x - 2) \sigma \nu \nu^2 x dx$$

Να υπολογίσετε τα $I + J$, $I - J$, I .

$$51. \text{ Αν } \int_1^k \frac{2x^2 + 4}{x^2 + 1} dx - \int_k^1 \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx = 6, \text{ να βρείτε το } k.$$

52. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο και $f(\pi) = 3$.

$$\text{Αν ισχύει ότι: } \int_0^{\pi} (f'(x) \sigma \nu \nu x - f(x) \eta \mu x) dx = 2, \text{ να βρείτε το } f(0).$$

53. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ τρεις φορές παραγωγίσιμη για την οποία

$$\text{ισχύει } \int_1^2 (x f'(x) + f(x)) dx = 8 \text{ και } \int_1^2 \frac{f''(x) f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} dx = -\frac{9}{10} \text{ και η}$$

εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο $M(1,2)$ περνά από το σημείο $A(3,8)$. Να βρείτε τα $f(1)$, $f'(2)$.

54. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) = 12x^2 - 2x \int_0^1 f(t) dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε τον τύπο της f .

$$55. \text{ Δίνεται ότι: } \int_1^3 f^2(x) dx = 6 \int_1^3 x f(x) dx - 78. \text{ Να βρείτε:}$$

$$\alpha) \int_1^3 9x^2 dx \quad \beta) \text{ Τον τύπο της } f.$$

$$56. \text{ Να δείξετε ότι: } \int_a^{\beta} f(x) dx = \int_0^{\beta-a} f(x+a) dx$$

57. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x x e^{t^2} dt}{\eta \mu^2 x}$

58. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\int_2^4 f\left(\frac{x}{2}\right) dx + \int_2^e 2f(x) dx = 2. \text{ Να δείξετε ότι: } \int_1^e f(x) dx = 1$$

ΚΥΚΛΟΣ

- 1) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται του άξονα των Ψ στο σημείο $A(0, 4)$ και αποκόπτεi από τον θετικό ημιάξονα των χ χορδή ΒΓ μήκους 6m.
- 2) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από τα σημεία τομής των κύκλων $\chi^2 + \psi^2 - 4\psi = 0$, $\chi^2 + \psi^2 = 8$ και το κέντρο του βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\psi = \chi + 1$.
- 3) Να βρείτε το $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε το μήκος της εφαπτομένης που φέρεται από το σημείο $B(5, 3)$ στον κύκλο: $\chi^2 + \psi^2 + 2\kappa\psi = 0$ να είναι 8 m.
- 4) Δίνεται ο κύκλος: $\chi^2 + \psi^2 = 16$ και $P(4 \sin \theta, 4 \eta \mu \theta)$ τυχαίο σημείο του.
 - α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του στο σημείο P είναι $\chi \sin \theta + \psi \eta \mu \theta = 4$.
 - β) Η εφαπτομένη στο σημείο P τέμνει τον άξονα των Ψ στο σημείο E και την ευθεία $\psi = -6$ στο σημείο Z. Να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του μέσου M του EZ.
- 5) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο το $K(2, \beta)$ και εφάπτεται στις ευθείες $(\epsilon_1): 3\chi + 4\psi - 8 = 0$, $(\epsilon_2): 3\chi + 4\psi - 28 = 0$
- 6) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του στο πρώτο τεταρτημόριο, περνά από το σημείο $A(0, 5)$, έχει ακτίνα $R = 2\sqrt{10}$ και η τετμημένη του κέντρου του είναι διπλάσια της τεταγμένης.
- 7) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(3, 1)$ την ευθεία $\psi = 1$ και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $\psi = 2\chi$.
- 8) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που το κέντρο του έχει τεταγμένη θετική, η ακτίνα του είναι 5 cm και τέμνει τον άξονα των χ στα σημεία $A(2, 0)$ και $B(8, 0)$.

- 9) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που εφάπτεται της ευθείας $\psi = 2$ στο σημείο $A(3, 2)$ και αποκόπτει χορδή $B\Gamma = 8$ από τον άξονα των ψ , αν επιπλέον η **τεταγμένη** του κέντρου είναι θετική.
Να κάνετε σχήμα.

ΠΑΡΑΒΟΛΗ

- Δίνεται η παραβολή $y^2 = 16x$. Να βρείτε:
 - Τις συντεταγμένες της εστία της και την εξίσωση της διευθετούσας της.
 - Την απόσταση AE , του σημείου της $A(4t^2, 8t)$ από την εστία της.
- Δίνεται η παραβολή $y^2 = 12x$. Να βρείτε:
 - τις συντεταγμένες των εστιών της
 - την εξίσωση της διευθετούσας της
 - την εξίσωση της κάθετης της παραβολής στο σημείο της $(3, -6)$.
- Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$. Να βρείτε:
 - την εξίσωση της εφαπτόμενης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $2x+4y-5=0$
 - τις συντεταγμένες του σημείου επαφής.
- Δίνεται η παραβολή $y^2 = x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι παράλληλη με την ευθεία $\epsilon : x - y = 0$.
- Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής.
 - Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής με εστία το σημείο $E(1, -1)$ και διευθετούσα $\delta : y = -2x$.
- Η κάθετη της παραβολής $y^2 = 4ax$ στο σημείο της $A(at^2, 2at)$ τέμνει την παραβολή και στο σημείο $B(a\rho^2, 2a\rho)$. Να δείξετε ότι $t^2 + \rho + 2 = 0$.
- Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$. Η εφαπτόμενη της παραβολής στο σημείο $T(2t^2, 4t)$ τέμνει τον άξονα των y στο A . Αν η EA τέμνει τη διευθετούσα της στο σημείο Γ , να δείξετε ότι η εξίσωση του Γ . Τ. του μέσου M της $T\Gamma$ είναι η $y^2 = 16(x+1)$ όπου E η εστία της παραβολής.
- Η εφαπτόμενη και η κάθετη της παραβολής $y^2 = 4ax$ στο σημείο της $A(at^2, 2at)$ τέμνουν τον άξονα των x στα σημεία B και Γ αντίστοιχα.
 - Να δείξετε ότι η εστία E είναι το μέσο της $B\Gamma$.
 - Από το Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη της AB και από το B ευθεία παράλληλη της $A\Gamma$ που τέμνονται στο M . Να βρείτε την εξίσωση του Γ . Τ. του σημείου M .

9. Αν η χορδή ΚΛ όπου $K(at^2, 2at)$ και $L(ar^2, 2ar)$ περνά από την εστία της παραβολής $y^2 = 4ax$ να δείξετε ότι :
- (α) $t \cdot r = -1$
 (β) αν η ΟΚ τέμνει τη διευθετούσα στο Μ, τότε η ΜΛ είναι παράλληλη με τον άξονα των x , όπου Ο η αρχή των αξόνων.
10. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 8x$ και τα σημεία της $T(2t^2, 4t)$ και $P(2\rho^2, 4\rho)$.
- (α) Να βρείτε την εξίσωση της χορδής ΤΡ.
 (β) Αν η χορδή ΤΡ εφάπτεται της παραβολής $y^2 = 2x$, να δείξετε ότι $(t+\rho)^2 = 16$ $t\rho$.
 (γ) Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του Γ.Τ. του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος ΤΡ.
11. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ και τα σημεία της $A(at^2, 2at)$ και $B(ar^2, 2ar)$. Να βρείτε το Γ.Τ. του σημείου τομής των εφαπτομένων της παραβολής στα σημεία Α και Β, αν γνωρίζουμε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ βρίσκεται πάνω στη ευθεία $x - 2y = 0$.

ΕΛΛΕΙΨΗ

1. Δίνεται η έλλειψη $25x^2 + 36y^2 = 900$. Να βρείτε :
- α) τις συντεταγμένες των κορυφών και των εστιών της,
 β) την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των διευθετουσών της,
 γ) τη θέση του σημείου $(-3, 5)$ και τη θέση της ευθείας $x + y - 1 = 0$ ως προς την έλλειψη,
 δ) τις συντεταγμένες δυο τυχαίων σημείων της Τ και Ρ σε παραμετρική μορφή,
 ε) την περίμετρο του τετραπλεύρου ΤΕΡΕ', όπου Ε και Ε' οι δυο εστίες της έλλειψης, αν το σημείο Τ βρίσκεται στο α' και το σημείο Ρ στο γ' τεταρτημόριο.
2. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ και ΓΔ μια διάμετρος της, όπου Γ σημείο του α' τεταρτημορίου. Να βρείτε :
- α) τις συντεταγμένες των κορυφών της Α, Α', Β και Β' και των εστιών της Ε και Ε',
 β) την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των διευθετουσών της και
 γ) το μήκος της περιμέτρου του τετραπλεύρου ΓΕΔΕ'.
3. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$. Να βρείτε :
- α) τις συντεταγμένες των κορυφών και των εστιών της,
 β) την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των διευθετουσών της,
 γ) τη θέση του σημείου $(-3, -1)$ ως προς την έλλειψη,
 δ) τη θέση της ευθείας $x+y+8=0$ ως προς την έλλειψη και
 ε) την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $\left(1, \frac{4\sqrt{2}}{3}\right)$.

4. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της που είναι παράλληλες με την ευθεία $x - y = -2$.
5. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, με $a > b$, και τα σημεία της $A(\alpha \sin \theta, b \eta \mu \theta)$ και $B(\alpha \sin \varphi, b \eta \mu \varphi)$, με $\varphi - \theta = 90^\circ$. Από την εστία E φέρουμε κάθετη στην OB και από την εστία E' φέρουμε κάθετη στην OA , όπου O η αρχή των αξόνων. Αν οι κάθετες αυτές τέμνονται στο σημείο Σ , να δείξετε ότι η εξίσωση του $\Gamma.T.$ του σημείου Σ είναι έλλειψη.
6. Δίνεται η έλλειψη $x^2 + 4y^2 = 4$. Σε τυχαίο σημείο της $\Sigma(2 \sin \theta, \eta \mu \theta)$ φέρουμε την εφαπτομένη της έλλειψης. Από το κέντρο O της έλλειψης φέρουμε κάθετη στην εφαπτομένη, την OP (P σημείο της εφαπτομένης). Από το Σ φέρουμε κάθετη στον άξονα OX , τη $\Sigma\Gamma$ (Γ σημείο του OX). Η προέκταση της $\Gamma\Sigma$ τέμνει την προέκταση της OP σε σημείο T . Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου T είναι έλλειψη.
7. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και το σημείο της $P(\alpha \sin \theta, b \eta \mu \theta)$ που βρίσκεται στο α' τεταρτημόριο. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο P τέμνει τον άξονα των x στο σημείο A . Αν η απόσταση OA , όπου O η αρχή των αξόνων, ισούται με $2a$, να υπολογίσετε το θ .
8. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και το σημείο της $P(\alpha \sin \theta, b \eta \mu \theta)$. Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του ορθοκέντρου του τριγώνου $A'PA$.
(Υπενθύμιση: **ορθόκεντρο** είναι η τομή των υψών του τριγώνου)
9. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και τα τυχαία σημεία της $P(\alpha \sin \theta, b \eta \mu \theta)$ και $T(\alpha \sin \varphi, b \eta \mu \varphi)$. Να δείξετε ότι:
- (α) η κλίση λ της χορδής PT ισούται με: $-\frac{b}{a} \sigma \varphi \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right)$.
- (β) η καρτεσιανή εξίσωση του $\Gamma.T.$ του μέσου M των χορδών της έλλειψης με σταθερή κλίση λ είναι ευθεία με εξίσωση της μορφής $y = kx$, όπου k σταθερά.

10. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και το σημείο της $P(\alpha \sin \theta, b \eta \mu \theta)$ που βρίσκεται στο α' τεταρτημόριο. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο P τέμνει τον άξονα των x στο σημείο Γ και Δ η ορθή προβολή του σημείου P πάνω στον άξονα των x . Να βρείτε την γωνία θ έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $\Delta P \Gamma$ να ισούται με $\alpha b \eta \mu^2 \theta$.
11. Δίνεται η έλλειψη $4x^2 + 9y^2 = 36$ και σημείο $P(3 \sin \theta, 2 \eta \mu \theta)$. Η ευθεία $x = 3 \sin \theta$ τέμνει τον άξονα των x στο N . Προεκτείνουμε την NP κατά τμήμα $PT = 2NP$. Να δείξετε ότι ο $\Gamma.T.$ του σημείου T είναι έλλειψη και να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της στο τυχαίο καρτεσιανό της σημείο (x_1, y_1) .
12. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και το τυχαίο σημείο της $P(\alpha \sin \theta, b \eta \mu \theta)$. Η κάθετη της έλλειψης στο σημείο P τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Λ . Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος $P\Lambda$, να δείξετε ότι αυτή είναι έλλειψη και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών της A και B .
13. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ και το σημείο της $P(\alpha \sin \theta, b \eta \mu \theta)$ που βρίσκεται στο α' τεταρτημόριο. Η εφαπτομένη της έλλειψης στο σημείο P τέμνει τους άξονες ox και oy στα σημεία A και B αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OAB ισούται με $\alpha.b.\sigma \tau \epsilon \mu 2 \theta$.
14. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ και το τυχαίο σημείο της $A(3 \sin \theta, 2 \eta \mu \theta)$. Φέρουμε την εφαπτόμενη της έλλειψης στο A . Η ευθεία που περνά από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετη πάνω στην εφαπτόμενη της έλλειψης στο A , τέμνει την εφαπτόμενη στο σημείο Σ . Να αποδείξετε ότι η καρτεσιανή εξίσωση του $\Gamma.T.$ του σημείου Σ είναι η $(x^2 + y^2)^2 = 9x^2 + 4y^2$.
15. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{4} = 1$ και $T(8 \sin \theta, 2 \eta \mu \theta)$ σημείο της στο α' τεταρτημόριο με $\theta > \frac{\pi}{6}$. Από το T φέρουμε την TP κάθετη στον άξονα των x . Αν το εμβαδόν του τριγώνου OTP είναι $2\sqrt{3}$ τ.μ. να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το P και είναι παράλληλη με την OT .