ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης

Μέρος ΙΙ

Σύμφωνα με το νέο αναλυτικό πρόγραμμα

Ιωακείμ Ιωάννης

- ✓ Επανάληψη από το Μέρος Ι
- ✓ **Ακολουθίες - Αθροίσματα - Πρόοδοι**
- ✓ **Εκθετική - Λογαριθμική Συνάρτηση**
- ✓ **Γεωμετρικές Κατασκευές/ Γεωμετρικοί Τόποι**
- ✓ **Πολύγωνα/Μέτρηση κύκλου**
- ✓ **Στατιστική**
- ✓ **Τριγωνομετρία ΙΙ**

ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ | ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ | ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

$y = f(x)$

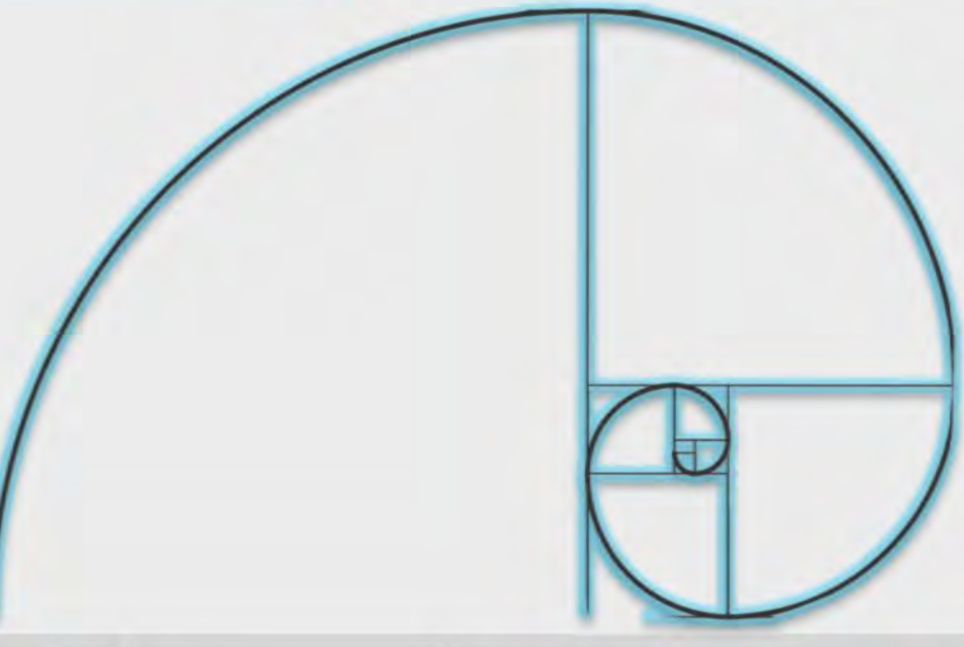
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu, \cdots$

$\sum_{\infty} \alpha_i = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}, \ |\lambda| < 1$

$\lim_{\nu} \left(1 + \frac{x}{\nu}\right)^{\nu} = \mathrm{e}^{x}$

$x \mapsto \varepsilon\varphi x \coloneqq w$

$S_X{}^2$



Για το μαθητή και τον εκπαιδευτικό

Λευκωσία, 2019

Σφαιρική προσέγγιση των νέων αναλυτικών προγραμμάτων

ISBN 978-9925-7485-2-5

Τίτλος: ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ [Μέρος ΙΙ]

Συγγραφή-Επιστημονική επιμέλεια: Ιωακείμ Ιωάννης • **email:** yiannisioa@hotmail.com • Έτος έκδοσης: 2018

2η Έκδοση, Απρίλιος 2019

Πακέτα Γραφικών: desmos Corel PaintShop Pro LaTeX DRAW

Εκτύπωση:

ΕΚΤΥΠΩΣΕΙΣ Piastr

/PiastrCopyCenter

Επιμέλεια εξωφύλλου:

Ιωακείμ Ι./ Piastr Copy centre/

Christos Gavriel

Christos19896@gmail.com

ΚΕΝΤΡΙΚΗ ΔΙΑΘΕΣΗ: Βιβλιοπωλείο Piastr Copy centre
Λεωφ. Αρχ. Μακαρίου Γ', 22, Αγλαντζιά, Τ.Κ. 2107, Λευκωσία • Τηλ. 22 106882 • **e-mail:** piastr@cablenet.com.cy

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΑ 'ΠΑΡΓΑ'
-Λεωφ. Τσερίου 94, Στρόβολος, Τ.Κ. 2043, **Λευκωσία** • Τηλ. 22327740
-Λεωφ. Λάρνακος 56, Τ.Κ. 2101, **Λευκωσία** • Τηλ. 22 336011
-Λεωφ. Αρχ. Μακαρίου Γ' Λατσιά, Τ.Κ. 2224, **Λευκωσία** • Τηλ. 22 485914
-Πανεπιστημιούπολη (**Λευκωσία**), Αναστάσιος Λεβέντης, Κτήριο 4 • Τηλ. 22 022876
- Στρατηγού Τιμάγια, 9, Τ.Κ. 6051, **Λάρνακα** • Τηλ. 24 668090
- Αθηνών 8, Τ.Κ. 8035, **Πάφος** • Τηλ. 26 811130

Sophocleous Bookshop
Λεωφ. Λυκαβηττού 14, Έγκωμη, Τ.Κ. 2401, **Λευκωσία** • Τηλ. 22 353792

ΣΟΛΩΝΕΙΟΝ ΚΕΝΤΡΟΝ ΒΙΒΛΙΟΥ
Βυζαντίου 24, Στρόβολος, Τ.Κ. 2064, **Λευκωσία** • Τηλ. 22 666799

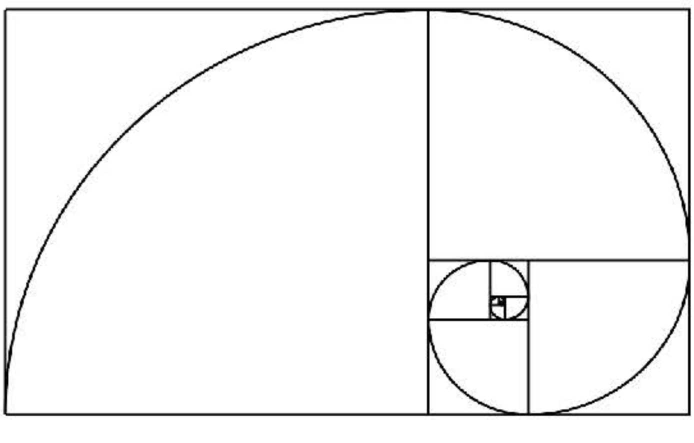
ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ 'ΡΕΝΟΣ ΑΓΡΟΤΗΣ & ΥΙΟΣ'
Λεωφ. Προεδρικού Μεγάρου 1, ΜΕΓΑΡΟ ΑΓΡΟΤΗ, Τ.Κ. 1081 **Λευκωσία** • Τηλ. 22 314771

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ 'ΤΟ ΜΑΘΗΤΙΚΟ'
Ραφαήλ Σάντη 23, Τ.Κ. 6052 **Λάρνακα** • Τηλ. 24 663882

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ 'Κ.Π. ΚΥΡΙΑΚΟΥ'
Λεωφ. Γρίβα Διγενή 3 (πλατεία Δικαστηρίων), Τ.Κ. 3635, **Λεμεσός** • Τηλ. 25 747555

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΑ 'KYRIAKOU FULLPAGE'
Λεωφ. Ελλάδος 30, Τ.Κ. 8020, **Πάφος** • Τηλ. 26 822850

Αφιερώνεται στον εκπαιδευτικό εκείνο που αγωνίζεται καθημερινά να φέρει εις πέρας την αποστολή του, εντός και εκτός της αίθουσας διδασκαλίας.



Πρόλογος 1ης έκδοσης

Όπως και το πρώτο μέρος, το παρόν έχει ρόλο επικουρικό στην εκπαίδευση του μαθητή και βοηθητικό ρόλο στην περίπτωση του εκπαιδευτικού. Επίσης, ένα σύγγραμμα για να δικαιολογεί την ύπαρξή του, πρέπει να προσφέρει κάτι νέο στο κοινό στο οποίο απευθύνεται.

Τα Μαθηματικά είναι για όλους. Για να γίνουν όμως ακόμα και οι "δύσκολες" έννοιες κτήμα μας, πρέπει να εγκαταλειφθούν τα σχήματα τύπου "μεθοδολογίας" και "είδη ασκήσεων" και να εκπαιδεύονται οι μαθητές να σκέφτονται (και) σύμφωνα με τους κανόνες του Προτασιακού Λογισμού, έτσι ώστε, όταν φτάσουν στη Γ Λυκείου να μπορούν να αντεπεξέλθουν στις συνέπειες των (δύσκολων) Θεωρημάτων που διδάσκονται εκεί αλλά και να ξεκινήσουν με εφόδια τις ανώτατές τους σπουδές. Αυτός άλλωστε ήταν και ο σκοπός της εισαγωγής της Μαθηματικής Λογικής και της Θεωρίας των Συναρτήσεων στο αναλυτικό πρόγραμμα.

Προς την κατεύθυνση αυτή, οι ασκήσεις του σχολικού βιβλίου λύθηκαν σύμφωνα με τις επιταγές του νέου αυτού προγράμματος, αυστηρά μεν, με την κατάλληλη όμως δικαιολόγηση. Επίσης, δίνονται παρατηρήσεις, γενικεύσεις, περισσότεροι από εναν τρόποι επίλυσης σε ορισμένες ασκήσεις και επιπλέον ασκήσεις διαβαθμισμένης δυσκολίας. Αυτό είναι το ένα καινούργιο στοιχείο που έχει να προσφέρει το σύγγραμμα αυτό. Παρόλαυτά, οι λύσεις ανταναкλούν τον τρόπο σκέψης και την παιδεία του συγγραφέα. Μπορεί να υπάρχουν και άλλες λύσεις καθόσον τα Μαθηματικά είναι ευέλικτα από τη φύση τους.

Το δεύτερο είναι η ανάπτυξη της Θεωρίας, επιμελημένα έτσι ώστε αυτή να καθοδηγά τον αναγνώστη με ομαλό τρόπο ανάμεσα στις δύσκολες έννοιες που επιβάλλει το νέο πρόγραμμα σπουδών. Δεν έγινε ουδεμία έκπτωση στην ανάπτυξη των εννοιών για οποιουσδήποτε σκοπούς εκπαιδευτικών πλαισίων.

Συγκεκριμένα, στις **ακολουθίες** τόσο η θεωρία όσο και οι ασκήσεις έχουν τοποθετηθεί και λυθεί αντίστοιχα με σκοπό την ανάδειξη της σύνδεσης των ειδικών ακολουθιών με τους αντίστοιχους ορισμούς. Προστέθηκε κεφάλαιο **'Αντίστροφων τριγωνομετρικών εξισώσεων'** γιατί η μελέτη της παραγωγισιμότητάς τους εμπίπτει στο φάσμα των εργαλείων που διδάσκεται στην παρούσα τάξη. Η δε (ορθή) μελέτη της γραφικής τους παράστασης είναι όμως αντικείμενο της επόμενης τάξης. Στο κεφάλαιο με την **εκθετική** και **λογαριθμική** συνάρτηση και συγκεκριμένα στην επίλυση εξισώσεων και ανισώσεων, αναπτύσσεται η Θεωρία αυστηρά και εξηγείται το πώς αυτές λύνονται συμβατικά αλλά με τρόπο που να φαίνεται το 1-1 των εν λόγω συναρτήσεων.

Στην παρούσα ανατύπωση προστέθηκε ενα μικρό τμήμα του κεφαλίου 'Στερεομετρία'. Το πλήρες κεφάλαιο, μαζί με τα υπόλοιπα Γεωμετρικά αντικείμενα της παρούσης τάξης υπάρχουν στο Μέρος III. Επίσης, **ευχαριστώ θερμά** τους συναδέλφους που αφιέρωσαν από το χρόνο τους για να μου αποστείλουν σχόλια και παρατηρήσεις με αποτέλεσμα να βελτιωθεί η παρούσα σειρά των βιβλίων.

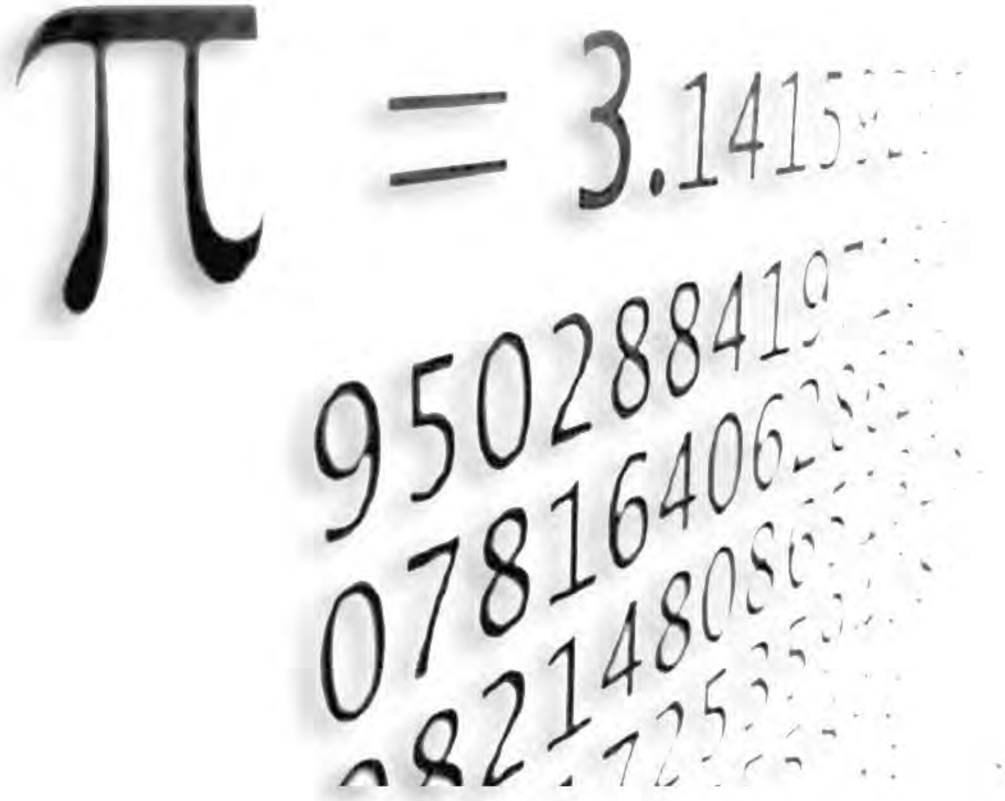
Είναι φανερό πως πλέον τα Μαθηματικά της Β και Γ Λυκείου κατεύθυνσης προσανατολίζονται στο να προετοιμάσουν το μαθητή για να μπορεί να αντεπεξέλθει σε ενα πρώτο μάθημα εισαγωγικών (γενικών) μαθηματικών ανωτάτου επιπέδου. Τα δύο τεύχη της Β Λυκείου δρούν συνεργικά μαζί με τα αντίστοιχα τεύχη της Γ'Λυκείου με σκοπό να προετοιμάσουν τον υποψήφιο σπουδαστή στα πλαίσια της εξής πορείας (όσον αφορά το κομμάτι της Ανάλυσης):

Όριο/Συνέχεια συνάρτησης → **Παράγωγος αριθμός** → **Παράγωγος συνάρτηση** → **Μονοτονία/κυρτότητα συνάρτησης** → **Μελέτη γραφήματος συνάρτησης**

email: yiannisioa@hotmail.com

Πίνακας περιεχομένων

Κεφάλαιο 0 • Ασκήσεις Επανάληψης Μέρους Ι



Μαθηματική Λογική (Μέθοδοι απόδειξης)

1. Να αποδείξετε οτι αν $\alpha \geq 0$ και $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$, τότε
$$(1+\alpha)^n \geq 1 + n \cdot a + \frac{n\cdot(n-1)}{2}\cdot a^2$$

Λύση

[Με επαγωγή στο n]

Βήμα 1

Για $n = 1$ το πρώτο μέλος είναι ισο με $1 + \alpha$ όπως επίσης και το δεύτερο.

Βήμα 2

Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = \kappa \in \mathbb{N}$, δηλ. ότι $(1+\alpha)^k \geq 1 + n\cdot a + \frac{k\cdot(k-1)}{2}\cdot a^2$
και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\kappa + 1$, δηλ. ότι $(1+\alpha)^{k+1} \geq 1 + (k+1)\cdot a + \frac{k\cdot(k+1)}{2}\cdot a^2$
Παρατηρήστε ότι $\alpha \geq 0 \Rightarrow a^3 \geq 0$.
Έχουμε
$$\begin{aligned}
(1+\alpha)^{k+1} &= \underbrace{(1+\alpha)^k}_{\geq 1+k\cdot a+\frac{k\cdot(k-1)}{2}\cdot a^2}\cdot(1+\alpha)\\
&\geq \left[1 + k\cdot a + \frac{k\cdot(k-1)}{2}\cdot a^2\right]\cdot(1+\alpha)\\
&= 1 + k\cdot a + \frac{k\cdot(k-1)}{2}\cdot a^2 + \alpha + k\cdot a^2 + \underbrace{\frac{k\cdot(k-1)}{2}\cdot a^3}_{\geq 0}\\
&\geq 1 + k\cdot a + \frac{k\cdot(k-1)}{2}\cdot a^2 + \alpha + k\cdot a^2 \quad (1)
\end{aligned}$$
Αλλά,
$$\frac{k\cdot(k-1)}{2}\cdot a^2 + k\cdot a^2 = a^2\left[\frac{k\cdot(k-1)}{2} + k\right] = a^2\frac{k\cdot(k+1)}{2} \quad (2)$$
και άρα από τις (1) και (2) έχουμε
$$(1+\alpha)^{k+1} \geq 1 + k\cdot a + a^2\frac{k\cdot(k+1)}{2} + \alpha = 1 + (k+1)\alpha + a^2\frac{k\cdot(k+1)}{2}$$
και το ζητούμενο ισχύει.

Βήμα 3

Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το ζητούμενο ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. **[Ανίσωση του Bernoulli]**
Έστω $a \geq -1$. Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$, $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\cdot a$.

Λύση

Με επαγωγή στο n

Βήμα 1

Για $n = 1$ το πρώτο μέλος είναι ισο με $1 + \alpha$ όπως και το δεύτερο και άρα η ανίσωση ισχύει ως ισότητα

Βήμα 2

Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = \kappa \in \mathbb{N}$, δηλ. ότι
$$(1+\alpha)^k \geq 1 + k\cdot a$$
και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\kappa + 1$, δηλ. ότι
$$(1+\alpha)^{k+1} \geq 1 + (1+\kappa)\cdot a$$
Έχουμε
$$(1+\alpha)^{k+1} = \underbrace{(1+\alpha)^k}_{\geq 1+k\cdot a}\cdot(1+\alpha) \geq (1+k\cdot a)\cdot(1+\alpha)$$
$$= 1 + k\cdot a + \alpha + k\cdot a^2 = 1 + \alpha\cdot(1+\kappa) + \underbrace{k\cdot a^2}_{\geq 0} \geq 1 + \alpha\cdot(1+\kappa)$$
και το ζητούμενο ισχύει.

Βήμα 3
Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το ζητούμενο ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Να αποδείξετε τη"συμμετρική" της Ανίσωσης του Bernoulli:

Αν $\alpha > 1$ και $\forall n \in \mathbb{N}$, είναι $(1-\alpha)^n \geq 1 - n \cdot a$

Λύση
[Με επαγωγή στο n]
Βήμα 1
Για $n = 1$ το πρώτο μέλος είναι ισο με $1 - \alpha$ όπως και το δεύτερο και άρα η ανίσωση ισχύει ως ισότητα.
Βήμα 2
Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $n = \kappa \in \mathbb{N}$, δηλ. ότι

$$(1-\alpha)^k \geq 1 - k \cdot a$$

και θα δείξουμε ότι ισχύει και για $\kappa + 1$, δηλ. ότι

$$(1-\alpha)^{k+1} \geq 1 - (\kappa+1) \cdot a$$

Έχουμε

$$(1-\alpha)^{k+1} = \underbrace{(1-\alpha)^k}_{\geq 1+k\cdot a} \cdot (1-\alpha) \geq (1 - k \cdot a) \cdot (1-\alpha)$$

$$= 1 - k \cdot a - \alpha + k \cdot a^2 = 1 - \alpha \cdot (\kappa + 1) + \underbrace{k \cdot a^2}_{\geq 0} \geq 1 - \alpha \cdot (\kappa+1)$$

και το ζητούμενο ισχύει.
Βήμα 3

Από την αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το ζητούμενο ισχύει $\forall n \in \mathbb{N}$.

4. Έστωσαν $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Αν ο αριθμός $\alpha^2 + \beta^2$ είναι τέλειο τετράγωνο, τότε οι α και β δεν μπορούν να είναι και οι δυο ταυτόχρονα περιττοί.

Λύση

Υποθέτουμε ότι και οι δυο αριθμοί α και β είναι περιττοί. Αφού ο αριθμός $\alpha^2 + \beta^2$ είναι τέλειο τετράγωνο, θα είναι της μορφής $\alpha^2 + \beta^2 = c^2$ για κάποιον ακέραιο αριθμό c . Από υπόθεση, έχουμε ότι

$$\alpha = 2\mu + 1 \ \textit{και}\ \beta = 2\lambda + 1, \textit{για κάποιους}\ \mu, \lambda \in \mathbb{Z}$$

Τότε,

$$c^2 = \alpha^2 + \beta^2 = (2\mu+1)^2 + (2\lambda+1)^2 = 2 \cdot [2(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2) + 1]$$

δηλ. ο $\ ^2$ είναι άρτιος, άρα και ο c (γιατί;). Συνεπώς, $c = 2\xi$ για κάποιο $\xi \in \mathbb{Z}$. Έτσι, η πιο πάνω ισότητα δίνει

$$c^2 = (2\xi)^2 = 2 \cdot [2(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2) + 1],$$

δηλ. $2\xi^2 = 2(\mu^2 + \lambda\mu + \lambda^2) + 1$, δηλ. ο $2\xi^2$ είναι περιττός. Έτσι, ο $c = 2\xi$ είναι ταυτόχρονα και άρτιος και περιττός, πρόταση η οποία είναι ψευδής.

5. Έστωσαν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$ τέτοιοι ώστε ο α να διαιρεί το β και τον $(\beta^2 - \gamma)$. Να δείξετε ότι ο α διαιρεί το γ.

Λύση (με ευθεία απόδειξη)

Αφού ο α διαιρεί το β, έχουμε ότι $\beta = \alpha\mu$ για κάποιο $\mu \in \mathbb{Z}$ και αρα $\beta^2 = \alpha^2\mu^2$

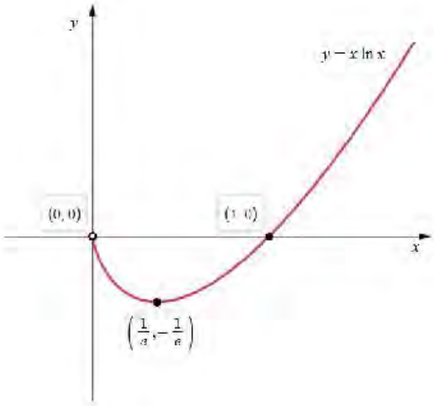
Αφού ο α διαιρεί τον $(\beta^2 - \gamma)$, έχουμε ότι $\beta^2 - \gamma = \alpha\xi$ για κάποιο $\xi \in \mathbb{Z}$.

Αφαιρούμε την πρώτη από τη δεύτερη σχέση και έχουμε $\gamma = \alpha^2\mu^2 - \alpha\xi = \alpha\ \underbrace{(\alpha\mu^2 - \xi)}_{\in \mathbb{Z}}$ και αρα ο γ είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του αριθμού α, δηλ. ο α διαιρεί το γ.

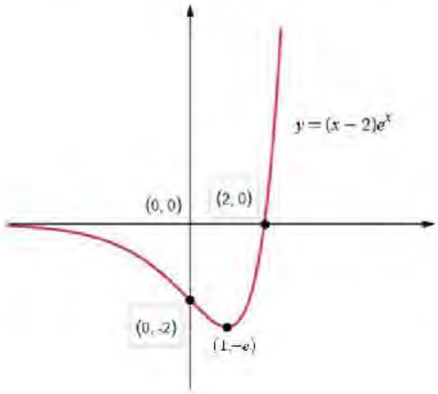
Συναρτήσεις

1. Πιο κάτω δίνονται τα γραφήματα κάποιων συναρτήσεων. Με βάση αυτά, να βρείτε το πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών της κάθε μιας από αυτές:

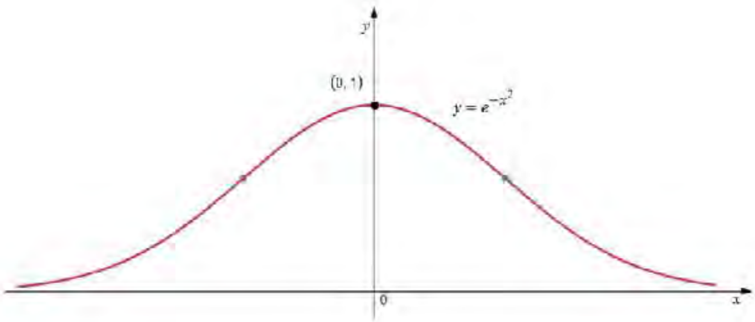
(α)



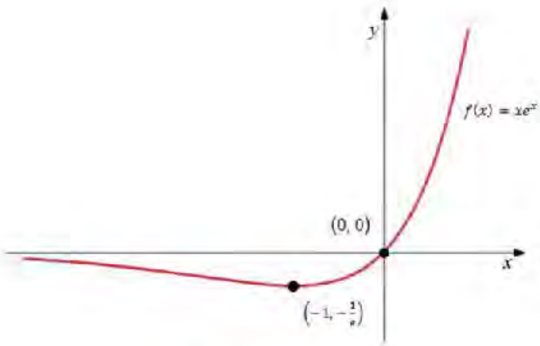
(β)



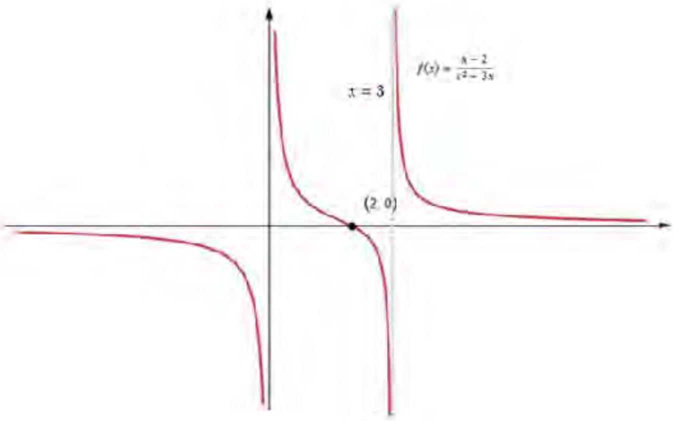
(γ)



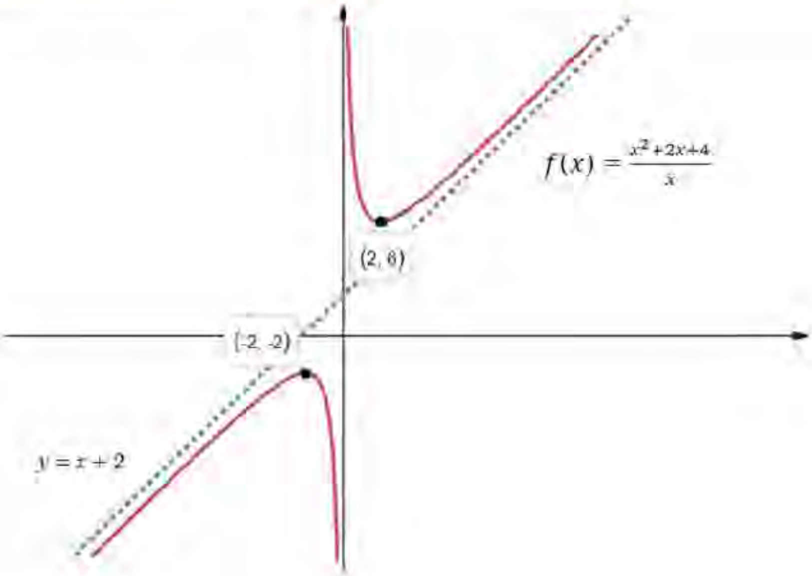
(δ)



(ε)



(στ)



Λύση

(α) Π.Ο.: $(0,+\infty)$
Π.Τ.: $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$

(β) Π.Ο.: $\mathbb{R}$
Π.Τ.: $[-e,+\infty)$

(γ) Π.Ο.: $\mathbb{R}$
Π.Τ.: $(0,1]$

(δ) Π.Ο.: $\mathbb{R}$
Π.Τ.: $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$

(ε) Π.Ο.: $\mathbb{R}-\{0,3\}$
Π.Τ.: $\mathbb{R}$

(στ) Π.Ο.: $\mathbb{R}-\{0\}$
Π.Τ.: $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x)=x^2+3x-1,\ x\in\mathbb{R}$ **(β)** $f(x)=\frac{x^2+4}{x+2},\ x\in\mathbb{R}-\{-2\}$ **(γ)** $f(x)=\frac{1}{|x|+2},\ x\in\mathbb{R}$

Λύση

Είναι

$$y=x^2+3x-1 \Leftrightarrow x^2+3x-1-y=0$$

Για διευκόλυνση των πράξεων $$\Leftrightarrow x^2+3x-(1+y)=0$$

Αντιμετωπίζουμε την τελευταία εξίσωση ως μια παραμετρική εξίσωση (με παράμετρο το y) και άγνωστο το x. Για να έχει (πραγματικές) λύσεις η εξίσωση αυτή (η οποία είναι 2ου βαθμού ως προς το x) πρέπει η διακρίνουσά του να είναι ≥ 0:

$$\Delta\geq 0 \Leftrightarrow 9+4(1+y)\geq 0\Leftrightarrow y\geq -\frac{13}{4}$$

και άρα το Π.Τ. της είναι το διάστημα $\left[-\frac{13}{4},+\infty\right)$. Το ίδιο αποτέλεσμα προκύπτει και αν βρούμε τις ρίζες του τριωνύμου: $x^2+3x-(1+y)$

$$x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-4(2+y)}}{2}=\frac{-3\pm\sqrt{13+4y}}{2}$$

Για να είναι πραγματικές αυτές οι δύο ρίζες, θα πρέπει $y\geq-\frac{13}{4}$Έτσι, $R(f)=\left[-\frac{13}{4},+\infty\right)$.

2ος τρόπος (Βρίσκοντας την κορυφή της αντίστοιχης παραβολής)

Είναι

$$f(x)=x^2+3x-1=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$

και άρα η f εκφράζει παραβολή με κορυφή το σημείο $\left(-\frac{3}{2},-\frac{13}{4}\right)$ η οποία έχει ελάχιστο στο σημείο αυτό. Έτσι, $R(f)=\left[-\frac{13}{4},+\infty\right)$.

(β) $f(x) = \frac{x^2+4}{x+2}$.

$$y = \frac{x^2+4}{x+2} \Leftrightarrow y(x+2) = x^2+4$$
$$\Leftrightarrow yx + 2y - x^2 - 4 = 0$$

Το φέρνουμε στη μορφή τριωνύμου με άγνωστο το x
$$\Leftrightarrow -x^2 + yx + (2y-4) = 0$$

Για διευκόλυνη των πράξεων
$$\Leftrightarrow x^2 - yx + (4-2y) = 0$$

Για να έχει λύσεις η εξίσωση αυτή (η οποία είναι 2ου βαθμού ως προς το x) πρέπει η διακρίνουσά του να είναι ≥ 0:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow y^2 - 4(4-2y) \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + 8y - 16 \geq 0$$

Λύνοντας την πιο πάνω ανίσωση κατά τα γνωστά, έχουμε ότι το σύνολο λύσεών της είναι το διάστημα $(-\infty,-4(1+\sqrt{2})] \cup [4(1+\sqrt{2}),+\infty)$.

(γ) Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε οτι

$$f(x) = \frac{1}{|x|+2} = \begin{cases} \frac{1}{x+2}, \text{αν } x \geq 0 \\ \frac{1}{2-x}, \text{αν } x < 0 \end{cases}$$

Αρα,

- αν $x \geq 0$, τότε $y = \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow x = \frac{1-2y}{y}$ και λύνοντας την ανίσωση $\frac{1-2y}{y} \geq 0$
- αν $x < 0$, τότε $y = \frac{1}{-x+2} \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{2y}$ και λύνοντας την ανίσωση $\frac{2y-1}{y} < 0$

3. Ελέγξτε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι κλαδικές (πολλαπλού τύπου) και να βρείτε το σύνολο τιμών τους.

(α) $f(x) = |x+2|$ **και (β)** $h(x) = |x+2| - x$

Λύση

(α) $f(x) = |x+2| = \begin{cases} x+2, \ x \geq -2 \\ -x-2, \ x < -2 \end{cases}$ και αρα η f είναι πολλαπλού τύπου. Αφού $\forall x \in \mathbb{R}$ είναι $|x+2| \geq 0$, έχουμε ότι $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ και άρα το σύνολο τιμών της είναι το $[0,+\infty)$

(β) $f(x) = |x+2| - x = \begin{cases} x+2-x, \ x \geq -2 \\ 2-x-x, \ x < -2 \end{cases} = \begin{cases} 2, \ x \geq -2 \\ 2-2x, \ x < -2 \end{cases}$ και αρα η f είναι πολλαπλού τύπου.

Για το σύνολο τιμών της, έχουμε:

- Για $x \geq -2$, $f(x) = 2 \Rightarrow f([-2,+\infty)) = \{2\}$
- Για $x < -2$, $f(x) = 2-2x$. Αλλά, $x < -2 \Rightarrow -2x > 4 \Rightarrow 2-2x > 6 \Rightarrow f((-\infty,-2)) = (6,\infty)$

και άρα το σύνολο τιμών της είναι το $\{2\} \cup (6,\infty)$.

4. Να βρεθεί (αν υπάρχει) η αντίστροφη της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \sqrt{x+2}$.

Λύση

Καταρχάς, είναι $D(f) = [-2,+\infty)$. Η f είναι 1-1 ως σύνθεση δύο 1-1 συναρτήσεων, των $g(x) = \sqrt{x}$ και $h(x) = x+2$. Διαφορετικά, με τον ορισμό:

Έστωσαν $x_1, x_2 \in [-2,+\infty)$. τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2)$. Είναι

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \sqrt{x_1+2} = \sqrt{x_2+2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Θα βρούμε το Σ.Τ. της: Αφού $\sqrt{x+2} \geq 0$, τότε $R(f) = [0, +\infty)$. Η συνάρτηση $f: [-2, +\infty) \to [0, +\infty)$ με $f(x) = \sqrt{x+2}$ είναι 1-1 και επί άρα αντιστρέψιμη. Θα βρούμε τον τύπο της αντίστροφής της:

$$y = \sqrt{x+2} \Leftrightarrow y^2 = x + 2 \Leftrightarrow x = y^2 - 2$$

και άρα η f^{-1} είναι η $g: [0, +\infty) \to [-2, +\infty)$ με $g(x) = x^2 - 2$

5. Να εξετάσετε αν οι πιο κάτω συναρτήσεις είναι 1-1:

(α) $f(x) = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$ **(β)** $f(x) = x^2 + 1, \quad x \in \mathbb{R}$

(γ) $f(x) = x^3 - 2, \quad x \in \mathbb{R}$ **(δ)** $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}, \quad x > 0$

Λύση

(α) $f(x) = 3x - 1, x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε οτι η f είναι 1-1. Έστωσαν λοιπόν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 3x_1 - 1 = 3x_2 - 1 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

(β) $f(x) = x^2 + 1, \ x \in \mathbb{R}$. Η f δεν ειναι 1-1, αφού π.χ. $f(-1) = 2 = f(+1)$

(γ) $f(x) = x^3 - 2, \ x \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε οτι η f είναι 1-1. Έστωσαν λοιπόν $x_1, x_2 \neq 0$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow {x_1}^3 - 2 = {x_2}^3 - 2 \Leftrightarrow {x_1}^3 - {x_2}^3 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)({x_1}^2 + x_1x_2 + {x_1}^3) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

(δ) $f(x) = -\frac{1}{x^2}, \ x > 0$. Θα δείξουμε οτι η f είναι 1-1. Έστωσαν λοιπόν $x_1, x_2 > 0$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{1}{{x_1}^2} = \frac{1}{{x_2}^2} \Leftrightarrow {x_1}^2 = {x_2}^2 \xLeftrightarrow{x_1, x_2 > 0} x_1 = x_2$$

6. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \frac{1}{x^3}$, $(x \neq 0)$. Να δείξετε οτι $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ισχύει

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Λύση

Έστω $x \in \mathbb{R} - \{0\}$. Τότε

$$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = x^3 - \frac{1}{x^3} + \left(\frac{1}{x}\right)^3 - \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^3} = x^3 - \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^3} - x^3 = 0$$

7. Να αποδείξετε ότι η πιο κάτω συνάρτηση είναι περιττή

$$f(x) = \left(3\sqrt{5} - 2\sqrt{11}\right)^x - \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}\right)^x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

$x \in \mathbb{R} \Rightarrow (-x) \in \mathbb{R}$ και $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(-x) &= \left(3\sqrt{5} - 2\sqrt{11}\right)^{-x} - \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}\right)^{-x} \\ &= \frac{1}{\left(3\sqrt{5} - 2\sqrt{11}\right)^x} - \frac{1}{\left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}\right)^x} \\ &= \frac{\left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}\right)^x - \left(3\sqrt{5} - 2\sqrt{11}\right)^x}{\left(3\sqrt{5} - 2\sqrt{11}\right)^x \cdot \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}\right)^x} \\ &= \frac{\left(3\sqrt{5} + 3\sqrt{3}\right)^x - \left(3\sqrt{5} - 2\sqrt{11}\right)^x}{\left[\left(3\sqrt{5} - 2\sqrt{11}\right) \cdot \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}\right)\right]^x} \\ &= \left(3\sqrt{5} + 3\sqrt{3}\right)^x - \left(3\sqrt{5} - 2\sqrt{11}\right)^x = -f(x) \end{aligned}$$

$\left(3\sqrt{5} - 2\sqrt{11}\right) \cdot \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{11}\right) =$
$\left(3\sqrt{5}\right)^2 - \left(2\sqrt{11}\right)^2 = 1$

Συνέχεια/Παράγωγος (πρώτης τάξης)

Ασκήσεις

1. **(α)** Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο x_0 και $f(x_0) = 2$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

(β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 και ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = 2c - 1$ (όπου c πραγματική σταθερά) και $f(x_0) = 1$, να βρείτε το c.

Λύση

(α) Αφού η f είναι συνεχής στο σημείο x_0, έπεται ότι

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = 2$$

(β) Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0, έπεται ότι είναι και συνεχής στο σημείο αυτό, άρα

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = 1$$

Αλλά από υπόθεση είναι $\lim_{x \to x_0} f(x) = 2c - 1$ και έτσι, από τις 2 τελευταίες σχέσεις, έπεται ότι $2c - 1 = 1$, δηλ. $\boldsymbol{c = 1}$.

2. Με τη χρήση του ορισμού, να βρεθεί η παράγωγος συνάρτηση της συνάρτησης $f(x) = (x-3)^2$ όπου αυτή υπάρχει.

Λύση

Είναι για $x \in \mathbb{R}$ σταθεροποιημένο:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\left((x+h) - 3\right)^2 - (x-3)^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\left((x+h) - 3\right)^2 - (x-3)^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 6(x+h) + 9 - (x-3)^2}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 6x - 6h + 9 - x^2 + 6x - 9}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{2xh + h^2 - 6h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h - 6)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} (2x + h - 6) = 2x - 6 = 2(x-3)
\end{aligned}$$

και αρα η f είναι παραγωγίσιμη παντού και μάλιστα

$$f'(x) = 2(x-3), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Να χρησιμοποιηθεί ο ορισμός της παραγώγου συνάρτησης για να βρεθεί η παράγωγος (συνάρτηση) της $f(x) = \frac{1}{x+4}, x \neq -4$

Λύση

Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα για $x \neq -4$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)+4} - \frac{1}{x+4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{x + 4 - [(x+h)+4]}{(x+h+4) \cdot (x+4)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{x+4-x-h-4}{h\cdot(x+h+4)(x+4)} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h\cdot(x+h+4)(x+4)}$$
$$= -\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\cdot(x+h+4)(x+4)} = -\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h+4)(x+4)}$$
$$= -\frac{1}{(x+4)(x+4)} = -\frac{1}{(x+4)^2}$$

4. Με τη χρήση του ορισμού, να βρεθεί η παράγωγος συνάρτηση της συνάρτησης $f(x)=\sqrt{\eta\mu x}, x\in(0,\pi)$ όπου αυτή υπάρχει.

Λύση

Η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη, αφού $\eta\mu x>0, \forall x\in(0,\pi)$. Είναι $\forall x\in(0,\pi)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{\eta\mu(x+h)}-\sqrt{\eta\mu x}}{h}$$

Συζυγής παράσταση
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{\eta\mu(x+h)}-\sqrt{\eta\mu x}\right)\left(\sqrt{\eta\mu(x+h)}+\sqrt{\eta\mu x}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{\eta\mu(x+h)}+\sqrt{\eta\mu x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu(x+h)-\eta\mu x}{h\cdot\left(\sqrt{\eta\mu(x+h)}+\sqrt{\eta\mu x}\right)}$$

$\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta=2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\eta\mu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$$= 2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{x+h+x}{2}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{x+h-x}{2}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{\eta\mu(x+h)}+\sqrt{\eta\mu x}\right)}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2x+h}{2}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}\cdot\left(\sqrt{\eta\mu(x+h)}+\sqrt{\eta\mu x}\right)}$$

$$= \left(\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}\right)\cdot\left(\lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\sqrt{\eta\mu(x+h)}+\sqrt{\eta\mu x}}\right)$$

$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=\lim_{\frac{h}{2}\to 0}\frac{\eta\mu\left(\frac{h}{2}\right)}{\frac{h}{2}}=1$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2x+h}{2}\right)}{\sqrt{\eta\mu(x+h)}+\sqrt{\eta\mu x}} = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2x}{2}\right)}{\sqrt{\eta\mu x}+\sqrt{\eta\mu x}}$$

$$= \frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu x}}$$

και αρα η f είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο $(0,\pi)$ και μάλιστα

$$f'(x)=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{\eta\mu x}}, \quad \forall x\in(0,\pi)$$

5. **(α)** Αν $f(x)=x^3-5x^2+6x-1$, να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=0$.

(β) Αν $f(x)=e^x-5\cdot e^{-x}-6x$, να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=0$.

Λύση

(α) Είναι $\forall x\in\mathbb{R}$ $f'(x)=3x^2-10x+6$ και αρα

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-10x+6=0 \Leftrightarrow x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{7}}{3}$$

(β) Είναι $\forall x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=e^x+5\cdot e^{-x}-6$

και αρα

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x + 5 \cdot e^{-x} - 6 = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 6e^x + 5 = 0$$

Θεωρούμε τον (αντιστρέψιμο) μετασχηματισμό $w = e^x$ και η πιο πάνω εξίσωση γίνεται $w^2 - 6w + 5 = 0$ ή, ισοδύναμα, $(w-5)(w-1) = 0$ η οποία έχει 2 λύσεις, την $w_1 = 5$ και την $w_2 = 1$. Επιστρέφοντας στην αρχική μεταβλητή x, έχουμε

$$w_1 = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$$

και

$$w_2 = 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

6. Αν $y(x) = \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{e^{3x}-e^{-3x}}$ $(x \neq 0)$, να δείξετε ότι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{12e^{6x}}{(e^{6x}-1)^2}$$

Λύση

Για $x \neq 0$ είναι

$$y = \frac{e^{3x}+e^{-3x}}{e^{3x}-e^{-3x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{(e^{3x}+e^{-3x})' \cdot (e^{3x}-e^{-3x}) - (e^{3x}-e^{-3x})' \cdot (e^{3x}-e^{-3x})}{(e^{3x}-e^{-3x})^2}$$

$$= \frac{(3e^{3x}-3e^{-3x}) \cdot (e^{3x}-e^{-3x}) - (3e^{3x}+3e^{-3x}) \cdot (e^{3x}+e^{-3x})}{(e^{3x}-e^{-3x})^2}$$

$$= 3\frac{(e^{3x}-e^{-3x}) \cdot (e^{3x}-e^{-3x}) - (e^{3x}+e^{-3x}) \cdot (e^{3x}+e^{-3x})}{(e^{3x}-e^{-3x})^2}$$

$$= 3\frac{(e^{3x}-e^{-3x})^2 - (e^{3x}+e^{-3x})^2}{(e^{3x}-e^{-3x})^2}$$

$$= 3\frac{[(e^{3x}-e^{-3x}) - (e^{3x}+e^{-3x})] \cdot [(e^{3x}-e^{-3x}) + (e^{3x}+e^{-3x})]}{(e^{3x}-e^{-3x})^2}$$

$$= 3\frac{-2e^{-3x} \cdot 2e^{3x}}{(e^{3x}-e^{-3x})^2} = -\frac{12}{(e^{3x}-e^{-3x})^2}$$

$$= -\frac{12}{\left(e^{3x}-\frac{1}{e^{3x}}\right)^2} = -\frac{12}{\left(\frac{e^{6x}-1}{e^{3x}}\right)^2} = -\frac{12e^{6x}}{(e^{6x}-1)^2}$$

7. Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2, x \leq 0 \\ x^2+1, x > 0 \end{cases}$. Να δείξετε ότι

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0$$

αλλά η $f'(0)$ δεν υπάρχει.

Λύση

Είναι $f'(x) = 2x, \forall x \in \mathbb{R}_*$ και αρα

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = 0.$$

Όμως, η f **δεν είναι συνεχής** στο $x = 0$:

$$\lim_{h \to 0^+} f(x) = \lim_{h \to 0^+} (x^2+1) = 1$$

ενω

$$\lim_{h \to 0^-} f(x) = \lim_{h \to 0^-} x^2 = 0$$

Έτσι, η $f'(0)$ δεν υπάρχει.

8. Να υπολογίσετε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων (η απάντηση να δοθεί στην πιο απλή της μορφή)

(α) $f(x) = -3x^2 + \ln x - 2\sigma\upsilon\nu(x)$ **(β)** $f(x) = e^{2x}\varepsilon\varphi(x) - 2018x$

(γ) $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x-1}$ **(δ)** $f(x) = \sqrt{(x^2+3)^4}$

(ε) $f(x) = \ln^2\left[\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)^3\right] - \eta\mu(x)$ **(στ)** $f(x) = \dfrac{2\sigma\upsilon\nu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x) + \eta\mu(x)}$

(ζ) $f(x) = -\dfrac{2}{(x-2)^2} + \varepsilon\varphi(2x) - 3e^{-x^2+1}$ **(η)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{e^x+2}{e^{-x}+1}}$

(θ) $f(x) = \left(\dfrac{\tau\varepsilon\mu(x) - 3x^4}{e^{x^2}+1}\right)^5$

Λύση

(α) $f'(x) = 2\eta\mu x - 6x + \dfrac{1}{x}, x > 0$ **(β)** $f'(x) = e^{2x}[2\varepsilon\varphi(x) - \tau\varepsilon\mu^2 x] - 2018$

(γ) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}\ (x \neq 1)$ **(δ)** $f'(x) = 4x(x^2+3)$

(ε) $f'(x) = -4\dfrac{(x^2-2x-1)\cdot\ln^3\left(\dfrac{x-1}{x^2+1}\right)}{(x-1)\cdot(x^2+1)} - \sigma\upsilon\nu(x)\ (x \neq 1)$

(στ) $f'(x) = -\dfrac{2}{\eta\mu(2x)+1}, \quad \left(x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{4}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}\right)$

(ζ) $f'(x) = 2\tau\varepsilon\mu^2(2x) + 6xe^{-x^2+1} + \dfrac{4}{(x-2)^3}\ (x \neq 2)$

(η) $f'(x) = \dfrac{e^{-x}(e^{2x} + 2e^x + 2)}{2(e^{-x}+1)^{3/2}\sqrt{e^x+2}}$

θ) $f'(x) = \dfrac{(\tau\varepsilon\mu^2 x - 3x^4)^4\cdot\left[5\left(e^{x^2}+1\right)(2\tau\varepsilon\mu^2 x\cdot\varepsilon\varphi x - 12x^3) - 10xe^{x^2}\right]}{\left(e^{x^2}+1\right)^6}$

9. Αν $y = \dfrac{(x-2)^2\sqrt{x-3}}{\sqrt[3]{x^2+5}}$, να βρείτε την $\frac{dy}{dx}$

Λύση

$$y = \frac{(x-2)^2\cdot\sqrt{x-3}}{\sqrt[3]{x^2+5}}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln\frac{(x-2)^2\cdot\sqrt{x-3}}{\sqrt[3]{x^2+5}}$$

Λογαριθμούμε αμφότερα μελη

$$\Rightarrow \ln y = 2\ln(x-2) + \frac{1}{2}\ln(x-3) - \frac{1}{3}\ln(x^2+5)$$

$$\Rightarrow (\ln y)' = \left(2\ln(x-2) + \frac{1}{2}\ln(x-3) - \frac{1}{3}\ln(x^2+5)\right)'$$

Παραγωγίζουμε αμφότερα μέλη

$$\Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-3} - \frac{2}{3}\frac{1}{x^2+5}$$

$$\Rightarrow y' = y \cdot \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{2}\frac{1}{x-3} - \frac{2}{3}\frac{1}{x^2+5}\right)$$

Λύνουμε ως προς y'

$$= \frac{(x-2)^2\sqrt{x-3}}{\sqrt[3]{x^2+5}} \cdot \left(\frac{2}{x-2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-3} - \frac{2}{3}\frac{1}{x^2+5}\right)$$

10. Έστω f μια συνάρτηση η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f(x+y) = f(x)\cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ και $f(0) \neq 0$. Αν επιπλέον υπάρχει η $f'(0)$, να δείξετε ότι για κάθε $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$ υπάρχει η $f'(\xi)$ και ισχύει $f'(\xi) = f(\xi)\cdot f'(0)$.

Λύση

Καταρχάς παρατηρούμε ότι $f(0+0) = f(0)\cdot f(0)$, δηλ. $f(0) = f(0)\cdot f(0)$ και αφού $f(0)\neq 0$ έπεται ότι $f(0) = 1$. Τώρα, για $\xi \in \mathbb{R} - \{0\}$ έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(\xi+h) - f(\xi)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\xi)\cdot f(h) - f(\xi)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(\xi)\cdot (f(h)-1)}{h}$$

$$= f(\xi)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(h) - \overbrace{1}^{=f(0)}}{h} = f(\xi)\cdot \underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}}_{=f'(0)} = f(\xi)\cdot f'(0)$$

και άρα υπάρχει η $f'(\xi)$ και ισχύει $f'(\xi) = f(\xi)\cdot f'(0)$.

11. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 - (2\kappa+1)x, & x \geq 1 \\ (\kappa+3)x - 3\kappa, & x < 1 \end{cases}.$$

Να βρεθούν οι τιμές του κ για τις οποίες η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 1$.

Λύση

Για να είναι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 1$ πρέπει να είναι πρώτα συνεχής στο σημείο αυτό, δηλ. πρέπει $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$. Έχουμε

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}[4x^3 - (2\kappa+1)x] = 4\cdot 1^3 - (2\kappa+1)\cdot 1 = 3 - 2k$$

και

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}[(\kappa+3)x - 3\kappa] = (\kappa+3)\cdot 1 - 3\kappa = 3 - 2\kappa$$

Επίσης, $f(1) = 3 - 2\kappa$. Άρα, $\lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$ και έτσι η f είναι συνεχής στο $x = 1$. Για να είναι επιπλέον παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 1$, πρέπει να υπάρχει το $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, δηλ. τα πλευρικά όρια

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} \quad \text{και} \quad \lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

να υπάρχουν και να είναι ίσα μεταξύ τους. Όμως,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{4(1+h)^3 - (2\kappa+1)(1+h) - (3-2\kappa)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{4(1+3h^2+3h+h^3)-(2\kappa+2\kappa h+1+h)-3+2k}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{4+12h^2+12h+h^3-2\kappa-2\kappa h-1-h-3+2k}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{12h^2+h^3+11h-2\kappa h}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(12h+h^2+11-2k)h}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} (12h+h^2+11-2\kappa) = 11-2k$$

και

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(\kappa+3)(1+h)-3\kappa-(3-2\kappa)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{\kappa+kh+3+3h-3k-3+2k}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^-} \frac{kh+3h}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(k+3)}{h} = \lim_{h\to 0^-} (k+3) = k+3$$

Έτσι,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} \Leftrightarrow 11-2k = k+3 \Leftrightarrow \boxed{k=\frac{8}{3}}$$

12. **(α)** Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f' = f$. Να δείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης $g(x) = f(x)\cdot e^{-x}$ είναι η μηδενική συνάρτηση.
(β) Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο σημείο $x=0$ με $f(0)\neq 0$ και τέτοια ώστε

$$[f(x)]^3 - x[f(x)]^2 + x^2 f(x) = x^2\cdot e^x.$$

Να δείξετε ότι $f'(0) = \frac{1}{3}$.

Λύση

(α) Καταρχάς η g είναι παραγωγίσιμη ως γινόνενο 2 παραγωγισίμων συναρτήσεων. Επίσης,

$$g'(x) = (f(x)\cdot e^{-x})' = f'(x)\cdot e^{-x} + f(x)\cdot (e^{-x})' = f'(x)\cdot e^{-x} - f(x)\cdot e^{-x}$$

$$\overset{f'(x)=f(x)}{=} f(x)\cdot e^{-x} - f(x)\cdot e^{-x} = 0$$

(β) Έχουμε για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
& [f(x)]^3 - x[f(x)]^2 + x^2 f(x) &&= x^2 e^x \\
\Rightarrow\ & 3[f(x)]^2 f'(x) - [f(x)]^2 - 2xf(x)f'(x) + 2xf(x) + x^2 f'(x) &&= 2xe^x + x^2 e^x \\
\Rightarrow\ & f'(x)[3[f(x)]^2 - 2xf(x) + x^2] &&= 2xe^x + x^2e^x + [f(x)]^2 - 2xf(x) \\
\Rightarrow\ & f'(0)\cdot[3[f(0)]^2 - 2\cdot 0 f(0) + 0^2] &&= 2\cdot 0\cdot e^0 + 0^2\cdot e^0 + [f(0)]^2 \\
\Rightarrow\ & f'(0)\cdot 3[f(0)]^2 = [f(0)]^2 &&\overset{f(0)\neq 0}{\Rightarrow} f'(0) = \frac{[f(0)]^2}{3[f(0)]^2} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

13. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2+1)$. Θεωρούμε τη συνάρτηση g η οποία ορίζεται ως $g(x) = f\left(\frac{x}{x+1}\right)$. Να βρείτε την $\frac{dg}{dx}$.

Λύση

Παρατηρούμε ότι η g είναι σύνθεση των συναρτήσεων f και h όπου $h(x) = \frac{x}{x+1}, x\neq -1$:

$$g(x) = (foh)(x)$$

και άρα, για $x \neq -1$ έχουμε (από τον κανόνα της αλυσίδας)

$$\frac{dg}{dx} = (foh)'(x) = f'(h(x)) \cdot h'(x) = \sigma\upsilon\nu(h^2(x)) \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)' = \sigma\upsilon\nu(h^2(x)) \cdot \left(\frac{x}{x+1}\right)'$$

$$= \sigma\upsilon\nu(h^2(x)) \cdot \frac{(x)' \cdot (x+1) - (x+1)' \cdot x}{(x+1)^2} = \sigma\upsilon\nu(h^2(x)) \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu(h^2(x))}{(x+1)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu\left(\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\right)}{(x+1)^2}$$

Παράγωγος Ανώτερης Τάξης

1. Αν $y = \ln\sqrt{5-2x^3}$, να δείξετε ότι

(α) $e^{2y} \cdot \dfrac{dy}{dx} + 3x^2 = 0$

(β) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2 \cdot \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 6xe^{-2y} = 0$

Λύση

Καταρχάς, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\{x \in \mathbb{R}: 5 - 2x^3 \geq 0\} = \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right]$ και για $x \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right)$ η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη με

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{2x^3-5} \ \kappa\alpha\iota \ \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{6x(x^3+5)}{(2x^3-5)^2}, \ \forall x \in \left(-\infty, \sqrt[3]{\frac{5}{2}}\right]$$

Επίσης,

$$e^{2y} = e^{2\ln\sqrt{5-2x^3}} = e^{\ln\left(\sqrt{5-2x^3}\right)^2} = e^{\ln(5-2x^3)} = 5 - 2x^3$$

και ομοίως

$$e^{-2y} = \frac{1}{5-2x^3}$$

και αρα

(α) $e^{2y} \cdot \dfrac{dy}{dx} + 3x^2 = (5-2x^3) \cdot \dfrac{3x^2}{2x^3-5} + 3x^2 = -3x^2 + 3x^2 = 0.$

(β)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2 \cdot \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 6xe^{-2y} = -\frac{6x(x^3+5)}{(2x^3-5)^2} + 2 \cdot \left(\frac{3x^2}{2x^3-5}\right)^2 + \frac{6x}{5-2x^3} = \cdots = 0$$

2. Έστω $y = f(x)$ συνάρτηση 4 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Δείξτε ότι

$$\frac{d^4y}{dx^4} = (4x^2+2)\frac{d^2y}{dx^2}$$

Αν επιπλέον είναι $f(0) = 1$ *και* $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 2$, να βρείτε τις $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=0}$

Λύση

$$\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y=0 \Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+2y\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\frac{d}{dx}\left(-2x\frac{dy}{dx}\right)+\frac{d}{dx}(2y)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^3y}{dx^3}-2\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right)+2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^3y}{dx^3}-2\left(\frac{dy}{dx}+x\frac{d^2y}{dx^2}\right)+2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^3y}{dx^3}-2x\frac{d^2y}{dx^2}=0 \Leftrightarrow \frac{d^3y}{dx^3}=2x\frac{d^2y}{dx^2}$$

Ξαναπαραγωγίζουμε αμφότερα μέλη

$$\Leftrightarrow \frac{d^4y}{dx^4}=2\frac{d}{dx}\left(x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^4y}{dx^4}=2\left(\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{d^3y}{dx^3}\right)$$

αντικαθιστούμε $\frac{d^3y}{dx^3}=2x\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\Leftrightarrow \frac{d^4y}{dx^4}=2\left(\frac{d^2y}{dx^2}+x2x\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^4y}{dx^4}=(4x^2+2)\frac{d^2y}{dx^2}$$

Αν επιπλέον είναι $f(0)=1$ και $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=2$, τότε η υπόθεση μας δίνει (για $x=0$)

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}-2x\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}+2\cdot f(0)=0$$

δηλ.

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}-4+2=0$$

και αρα $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}=2$. Από το προηγούμενο ερώτημα βρήκαμε ότι $\frac{d^3y}{dx^3}=2x\frac{d^2y}{dx^2}$

και αρα

$$\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=0}=2\cdot 0\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$$

δηλ. $\left.\frac{d^3y}{dx^3}\right|_{x=0}=0$. Τέλος, επίσης από το προηγούμενο ερώτημα,

$$\left.\frac{d^4y}{dx^4}\right|_{x=0}=(0^2+2)\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$$

και έτσι $\left.\frac{d^4y}{dx^4}\right|_{x=0}=4$.

3.

(α) Αν $y(x) = e^{2x}συνx$, να δείξετε ότι

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

(β) Αν $y = xημ(αx)$, όπου $α \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + α^2xy = -2ημ(αx)$$

Λύση

(α) Η συνάρτηση y είναι παντού παραγωγίσιμη (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x}(2συνx - ημx) \;\; και \;\; \frac{d^2y}{dx^2} = e^{2x}(3συνx - 4ημx)$$

Συνεπώς,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} + 5y = e^{2x}(3συνx - 4ημx) - 4e^{2x}(2συνx - ημx) + 5e^{2x}συνx = 0$$

(α) Η συνάρτηση y είναι παντού παραγωγίσιμη (ως σύνθεση τέτοιων) με

$$\frac{dy}{dx} = ημ(αx) + αxσυν(αx) \;\; και \;\; \frac{d^2y}{dx^2} = α\big(2συν(αx) - αxημ(αx)\big)$$

Συνεπώς,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + α^2xy = αx\big(2συν(αx) - αxημ(αx)\big) - 2\big(ημ(αx) + αxσυν(αx)\big) + α^2x^2ημ(αx) = -2ημ(αx)$$

4.

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Να δείξετε ότι η g ικανοποιεί τη Δ.Ε.

$$(1-x^2)\frac{d^2g}{d^2x} - 3x\frac{dg}{dx} = g(x)$$

Λύση

Είναι

$$\begin{aligned}
g(x) = \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} &\Rightarrow g(x)\cdot\sqrt{1-x^2} = f(x) \\
&\Rightarrow \frac{dg}{dx}\cdot\sqrt{1-x^2} + \left(\sqrt{1-x^2}\right)'\cdot g(x) = f'(x) \\
&\Rightarrow \frac{dg}{dx}\cdot\sqrt{1-x^2} + \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot g(x) = f'(x) \\
\left(f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) &\Rightarrow \frac{dg}{dx}\cdot\sqrt{1-x^2} - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\left(\cdot\sqrt{1-x^2}\right) &\Rightarrow \frac{dg}{dx}\cdot(1-x^2) - x\cdot g(x) = 1
\end{aligned}$$

Ξαναπαραγωγίζοντας την πιο πάνω εξίσωση, παίρνουμε:

$$\frac{d^2g}{dx^2}\cdot(1-x^2) - 2x\frac{dg}{dx} - g(x) - x\cdot\frac{dg}{dx} = 0$$

δηλ.

$$(1-x^2)\frac{d^2g}{dx^2}-3x\frac{dg}{dx}=g(x)$$

5.

(α) Δείξτε ότι $\sqrt{\frac{\eta\mu(x)+1}{1-\eta\mu(x)}}=\varepsilon\varphi(x)+\tau\varepsilon\mu(x)$.

(β) Θωρήστε τη συνάρτηση $\psi=\ln\sqrt{\frac{\eta\mu(x)+1}{\eta\mu(x)-1}}$. Δείξτε ότι $\frac{d\psi}{dx}=\tau\varepsilon\mu(x)=\sigma\varphi(x)\cdot\frac{d^2\psi}{d^2x}$.

Λύση

(α) Είναι

$$\frac{\eta\mu(x)+1}{1-\eta\mu(x)}=-\frac{(\eta\mu(x)+1)^2}{(\eta\mu(x)+1)\cdot(\eta\mu(x)-1)}=-\frac{(\eta\mu(x)+1)^2}{\eta\mu^2(x)-1}=\frac{(\eta\mu(x)+1)^2}{\sigma\upsilon\nu^2(x)}=\left(\frac{\eta\mu(x)+1}{\sigma\upsilon\nu(x)}\right)^2$$

$$=\left(\frac{\eta\mu(x)}{\sigma\upsilon\nu(x)}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(x)}\right)^2=\left(\varepsilon\varphi(x)+\tau\varepsilon\mu(x)\right)^2$$

και άρα

$$\sqrt{\frac{\eta\mu(x)+1}{1-\eta\mu(x)}}=\varepsilon\varphi(x)+\tau\varepsilon\mu(x)$$

(β) Από το προηγούμενο ερώτημα, θα έχουμε

$$\psi=\ln\sqrt{\frac{\eta\mu(x)+1}{\eta\mu(x)-1}}=\ln\left[-\left(\varepsilon\varphi(x)+\tau\varepsilon\mu(x)\right)\right]$$

και άρα

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{\left[-\left(\varepsilon\varphi(x)+\tau\varepsilon\mu(x)\right)\right]'}{-\left(\varepsilon\varphi(x)+\tau\varepsilon\mu(x)\right)}=\frac{\left(\varepsilon\varphi(x)+\tau\varepsilon\mu(x)\right)'}{\varepsilon\varphi(x)+\tau\varepsilon\mu(x)}=\frac{\left(\varepsilon\varphi(x)\right)'+\left(\tau\varepsilon\mu(x)\right)'}{\varepsilon\varphi(x)+\tau\varepsilon\mu(x)}$$

$$=\frac{\tau\varepsilon\mu^2(x)+\tau\varepsilon\mu(x)\cdot\varepsilon\varphi(x)}{\varepsilon\varphi(x)+\tau\varepsilon\mu(x)}=\frac{\tau\varepsilon\mu(x)\cdot\left(\tau\varepsilon\mu(x)+\varepsilon\varphi(x)\right)}{\varepsilon\varphi(x)+\tau\varepsilon\mu(x)}=\tau\varepsilon\mu(x)$$

Διαφορετικά,

$$\psi=\ln\sqrt{\frac{\eta\mu(x)+1}{\eta\mu(x)-1}}=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{\eta\mu(x)+1}{\eta\mu(x)-1}\right)$$

και άρα

$$\frac{d\psi}{dx}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{\eta\mu(x)+1}{\eta\mu(x)-1}\right)'}{\frac{\eta\mu(x)+1}{\eta\mu(x)-1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\frac{(\eta\mu(x)+1)'\cdot(\eta\mu(x)-1)-(\eta\mu(x)-1)'\cdot(\eta\mu(x)+1)}{(\eta\mu(x)-1)^2}}{\frac{\eta\mu(x)+1}{\eta\mu(x)-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu(x)\cdot(\eta\mu(x)-1)-\sigma\upsilon\nu(x)\cdot(\eta\mu(x)+1)}{(\eta\mu(x)-1)^2\,\frac{\eta\mu(x)+1}{\eta\mu(x)-1}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu(x)\cdot\eta\mu(x)-\sigma\upsilon\nu(x)-\sigma\upsilon\nu(x)\cdot\eta\mu(x)-\sigma\upsilon\nu(x)}{(\eta\mu(x)-1)\cdot(\eta\mu(x)+1)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sigma\upsilon\nu(x)}{\eta\mu^2(x)-1}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x)}{\sigma\upsilon\nu^2(x)}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu(x)}=\tau\varepsilon\mu(x)$$

6. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και τέτοια ώστε ικανοποιεί τη σχέση $f'(1)=f''(1)=1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=f(e^x)$. Αφού δικαιολογήσετε γιατί η g είναι (επίσης) δύο φορές παραγωγίσιμη, να προσδιορίσετε την πρώτη παράγωγό της. Τέλος να υπολογίσετε την τιμή $g''(0)$.

Λύση

Καταρχάς, η g είναι σύνθεση των συναρτήσεων f και $x\to e^x$ οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες και άρα η g είναι δύο φορες παραγωγίσιμη. Από τον κανόνα της Αλυσίδας, έχουμε

$$g'(x)=[f(e^x)]'=f'(e^x)\cdot(e^x)'=f'(e^x)\cdot e^x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

και άρα

$$g''(x)=[f'(e^x)\cdot e^x]'=f''(e^x)\cdot e^x+f'(e^x)(e^x)'=f''(e^x)\cdot e^x+f'(e^x)\cdot e^x,\ \ \forall x\in\mathbb{R}$$

Συνεπώς, $g''(0)=f''(e^0)\cdot e^0+f'(e^0)\cdot e^0=f''(1)+f'(1)=1+1=2$

Πεπλεγμένη Παραγώγιση

1. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y=f(x)$ η οποία καθορίζεται από την πιο κάτω (πεπλεγμένη) εξίσωση:

(α) $2y+x^2=5$ **(β)** $x^2\cdot y=1\ (x\neq 0)$

(γ) $4x^3\cdot y-x\cdot y^2=3$ **(δ)** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=100\ (y\neq 0)$

(ε) $συν(y)+2ημ(y)=11$ **(στ)** $x^2\cdot e^y-3y^2=x^2+1$

Λύση

(α) $$2y+x^2=5\Leftrightarrow 2\frac{dy}{dx}+2x=5\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{5}{2}-x$$

(β) $$x^2\cdot y=1\Leftrightarrow\frac{d(x^2\cdot y)}{dx}=\frac{d1}{dx}\Leftrightarrow y\frac{d(x^2)}{dx}+x^2\frac{dy}{dx}=0\Leftrightarrow 2xy+x^2\frac{dy}{dx}=0$$
$$\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=-2\frac{y}{x}$$

(γ) $$4x^3\cdot y-x\cdot y^2=3\Leftrightarrow\frac{d(4x^3\cdot y-x\cdot y^2)}{dx}=\frac{d3}{dx}\Leftrightarrow 4\frac{d(x^3\cdot y)}{dx}-\frac{d(x\cdot y^2)}{dx}=0$$
$$\Leftrightarrow 12x^2\cdot y+4x^3\frac{dy}{dx}-y^2\frac{dy}{dx}-2xy=0\Leftrightarrow(4x^3-y^2)\frac{dy}{dx}=2xy-12x^2\cdot y$$
$$\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2x\cdot y(1-6x)}{4x^3-y^2}$$

(δ) $$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=100\Leftrightarrow\frac{1}{4}\frac{d(x^2\cdot)}{dx}+\frac{1}{9}\frac{d(\cdot y^2)}{dx}=0\Leftrightarrow\frac{x}{2}+\frac{2}{9}y\frac{dy}{dx}=0\Leftrightarrow\frac{2}{9}y\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{2}$$
$$\Leftrightarrow\frac{dy}{dx}=-\frac{9x}{4y}$$

(ε) $$συν(y) + 2ημ(y) = 11 \Leftrightarrow -ημ(y)\frac{dy}{dx} + 2συν(y)\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{ημ(y)}{2συν(y)} = \frac{1}{2}εφ(y)$$

(στ) $$x^2 \cdot e^y - 3y^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow 2xe^y\frac{dy}{dx} - 6y\frac{dy}{dx} = 2x \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{xe^y - 3y}$$

Εφαπτομένη και κάθετη καμπύλης- καμπύλες που ορίζονται παραμετρικά

1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης $x^2y - xy^2 + 6 = 0$ στο σημείο με τετμημένη $x = 1$ και $y > 0$.

Λύση

Αντικαθιστώντας το σημείο $x = 1$ στην εξίσωση της καμπύλης, λαμβάνουμε την εξίσωση $y^2 - y - 6 = 0$ η οποία έχει λύσεις τις $y = 3, -2$ και αφού ζητάμε το σημείο με $y > 0$, κρατάμε το $y = 3$. Επίσης, βρίσκουμε

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2xy}{x^2 - 2xy} \quad \left(x \neq 0{,}2, \quad y \neq \frac{x}{2}\right)$$

Άρα

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,3)} = -\frac{3}{5}$$

και έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης στο (1,3) είναι η

$$y = \frac{3}{5}(1 - x) + 3$$

και της καθέτου

$$y = \frac{5}{3}(x - 1) + 3.$$

2. Έστω η καμπύλη η οποία καθορίζεται από την (πεπλεγμένη) εξίσωση

$$y^2 + 4x^4 - 10xy + 4x + 13 = 0.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο (1,3).

Λύση

$y^2 + 4x^4 - 10xy + 4x + 13 = 0$. Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα:

$$2y\frac{dy}{dx} + 16x^3 - 10y - 10x\frac{dy}{dx} + 4 = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{5y - 8x^3}{y - 5x}$$

Τώρα, $λ_{εφ} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,3)} = \left.\frac{5y-8x^3}{y-5x}\right|_{(1,3)} = -\frac{7}{2}$ και αρα η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο (1,3) είναι η

$$y = \frac{7}{2}(1 - x) + 3$$

3. Να βρεθούν όλα τα σημεία της καμπύλης η οποία καθορίζεται από την (πεπλεγμένη) εξίσωση

$$y^2 + xy + x^2 - 1 = 0.$$

στα οποία η εφαπτομένη είναι οριζόντια.

Λύση

$y^2 + xy + x^2 - 1 = 0$. Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα:

$$2y\frac{dy}{dx} + y + x\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

Τα σημεία του γραφήματος της καμπύλης στα οποία η εφαπτομένη είναι οριζόντια είναι αυτά στα οποία $\frac{dy}{dx} = 0$. Αντικαθιστώντας $\frac{dy}{dx} = 0$ στην πιο πάνω έχουμε $y + 2x = 0$, δηλ. $y = -2x$. Έτσι

$$\left\{y^2 + xy + x^2 - 1 = 0, \quad \frac{dy}{dx} = 0\right\} = \{y^2 + xy + x^2 - 1 = 0, \quad y = -2x\} = \{3x^2 = 1\} = \left\{x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$$

Για $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$, στην εξίσωση $y = -2x$ έχουμε ότι $y = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ και για $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, στην εξίσωση $y = -2x$ έχουμε ότι $y = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Έτσι, τα ζητούμενα σημεία είναι τα

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) \text{ και } \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$$

4. Έστω η καμπύλη C η οποία ορίζεται από το ακόλουθο ζεύγος παραμετρικών εξισώσεων:

$$C: \begin{cases} x(t) = t^3 - 8t \\ \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

(α) Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση της καμπύλης αυτής.
(β) Αν $A(x(1), y(1))$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της καμπύλης στο σημείο αυτό.
(γ) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις οριζόντιες εφαπτομένες του γραφήματος της καμπύλης.
(δ) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες εφαπτομένες του γραφήματος της καμπύλης.

Λύση

(α) Είναι

$$\begin{cases} x(t) = t^3 - 8t \\ \\ y(t) = t^2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t(t^2 - 8) \\ \\ y = t^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = t^2(t^2 - 8)^2 \\ \\ y = t^2 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = y(y-8)^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

[Η εξίσωση είναι σε πεπλεγμένη μορφή]

(β) Καταρχάς, είναι $A(x(1), y(1)) = A(7,1)$. Έχουμε

$$\frac{dy}{dt} = 2t \;\; \text{και} \;\; \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 8$$

και αρα για $3t^2 - 8 \neq 0$, δηλ. για $t \neq \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$ είναι (από το γνωστό μας Θεώρημα)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{2t}{3t^2 - 8}$$

Έτσι,

$$\lambda_{\varepsilon\varphi}(A) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} = \frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 1^2 - 8} = \frac{2}{5}$$

και αρα η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της καμπύλης στο σημείο $A(7,1)$ είναι η

$$y - 1 = \frac{2}{5}(x - 7), \;\; \text{δηλ. η } 5y - 2x - 9 = 0$$

[Διαφορετικά, παραγωγίζουμε την πιο πάνω πεπλεγμένη εξίσωση που δίνει την καμπύλη]

(γ) Οι κατακόρυφες εφαπτομένες του γραφήματος της καμπύλης έχουν εξίσωση της μορφής $x = x(t_0)$ όπου
t_0 τέτοιο ώστε $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} = 0$. Αλλά,

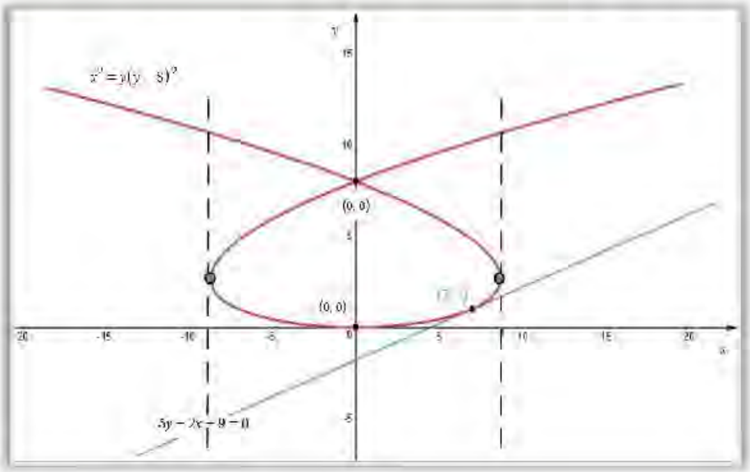
$$\frac{dx}{dt} = 0 \Leftrightarrow t = t \pm \sqrt{\frac{8}{3}}$$

Άρα, η μια κατακόρυφη εφαπτομένη είναι η $x = x\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right) \approx 8{,}71$ και η δεύτερή της η συμμετρική της προηγούμενης περί του άξονα των τετμημένων, δηλ. η $x = -8{,}71$.

(δ) Οι οριζόντιες εφαπτομένες του γραφήματος της καμπύλης έχουν εξίσωση της μορφής $y = y(t_0)$ όπου
t_0 τέτοιο ώστε $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=t_0} = 0$. Αλλά,

$$\frac{dy}{dt} = 0 \Leftrightarrow t = 0$$

και αρα ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια εφαπτομένη του γραφήματος της καμπύλης



Τριγωνομετρία

1. Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

$$\eta\mu(22^\circ)\sigma\upsilon\nu(23^\circ) + \eta\mu(22^\circ)\sigma\upsilon\nu(23^\circ) \quad \textbf{και} \quad \eta\mu(65^\circ)\sigma\upsilon\nu(35^\circ) - \eta\mu(35^\circ)\eta\mu(25^\circ)$$

Λύση

Έχουμε

$$\eta\mu(22^\circ)\sigma\upsilon\nu(23^\circ) + \eta\mu(22^\circ)\sigma\upsilon\nu(23^\circ) = \eta\mu(22^\circ + 23^\circ) = \eta\mu(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

και

$$\begin{aligned} \eta\mu(65^\circ)\sigma\upsilon\nu(35^\circ) - \eta\mu(35^\circ)\eta\mu(25^\circ) &= \eta\mu(90^\circ - 25^\circ)\sigma\upsilon\nu(35^\circ) - \eta\mu(35^\circ)\eta\mu(25^\circ) \\ \eta\mu(90^\circ - 25^\circ) = \sigma\upsilon\nu(25^\circ) \quad &= \sigma\upsilon\nu(25^\circ)\sigma\upsilon\nu(35^\circ) - \eta\mu(35^\circ)\eta\mu(25^\circ) \\ &= \sigma\upsilon\nu(25^\circ + 35^\circ) = \sigma\upsilon\nu(60^\circ) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της πιο παράστασης[1] $A(x) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + 1$

Λύση

Έχουμε:

$$A(x) = \eta\mu x\sigma\upsilon\nu x + 1 = \frac{\eta\mu(2x)}{2} + 1$$

Αλλά,

$$-1 \le \eta\mu(2x) \le 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \le \frac{\eta\mu(2x)}{2} \le \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le -\frac{\eta\mu(2x)}{2} \le \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \le 1 + \frac{\eta\mu(2x)}{2} \le 1 + \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le \underbrace{1 + \frac{\eta\mu(2x)}{2}}_{=A(x)} \le \frac{3}{2}$$

[1] Η $A(x)$ θεωρείται ως συνάρτηση του x

και άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A(x)$ είναι ο αριθμός 1 ενώ η μέγιστη τιμή της ο αριθμός $\frac{3}{2}$.

3. Αν $\varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu(2A)}{1-\sigma\upsilon\nu(2A)}$, να δείξετε ότι ισχύει $\varepsilon\varphi A \cdot \varepsilon\varphi B = 1$ και ακολούθως, αποδείξτε ότι ισχύει η σχέση

$$\varepsilon\varphi(B-A) = \sigma\varphi(2A).$$

Λύση

Καταρχάς,

$$\varepsilon\varphi B = \frac{\eta\mu(2A)}{1-\sigma\upsilon\nu(2A)} = \frac{2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu A}{2\eta\mu^2 A} = \frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A} = \sigma\varphi A$$

και άρα,

$$\varepsilon\varphi A \cdot \varepsilon\varphi B = \varepsilon\varphi A \cdot \sigma\varphi A = 1.$$

Τώρα,

$$\begin{aligned}\varepsilon\varphi(B-A) &= \frac{\varepsilon\varphi B - \varepsilon\varphi A}{1+\underbrace{\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B}_{=1}} = \frac{\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\eta\mu A} - \frac{\eta\mu A}{\sigma\upsilon\nu A}}{2} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 A - \eta\mu^2 A}{2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu A} \\ &= \frac{\sigma\upsilon\nu(2A)}{\eta\mu(2A)} = \sigma\varphi(2A)\end{aligned}$$

4. Αν $\varepsilon\varphi A = 2\varepsilon\varphi B$, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση

$$\sigma\varphi(B-A) = \frac{\sigma\upsilon\nu(2B)-3}{\eta\mu(2B)}.$$

Λύση

Καταρχάς,

$$\varepsilon\varphi A = 2\varepsilon\varphi B \Rightarrow \frac{1}{\sigma\varphi A} = \frac{2}{\sigma\varphi B} \Rightarrow \sigma\varphi A = \frac{\sigma\varphi B}{2}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}\sigma\varphi(B-) &= \frac{\sigma\varphi(B)\sigma\varphi(A)+1}{\sigma\varphi(A)-\sigma\varphi(B)} = \frac{\sigma\varphi(B)\cdot\frac{\sigma\varphi B}{2}+1}{\frac{\sigma\varphi B}{2}-\sigma\varphi(B)} = -\frac{\sigma\varphi^2(B)+2}{\sigma\varphi(B)} \\ &= -\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2(B)}{\eta\mu^2(B)}+2}{\frac{\sigma\upsilon\nu(B)}{\eta\mu(B)}} = -\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2(B)+2\eta\mu^2(B)}{\eta\mu^2(B)}}{\frac{\sigma\upsilon\nu(B)}{\eta\mu(B)}} = -\frac{\frac{\sigma\upsilon\nu^2(B)+2\eta\mu^2(B)}{\eta\mu^2(B)}}{\frac{\sigma\upsilon\nu(B)}{\eta\mu(B)}} \\ &= -\frac{\sigma\upsilon\nu^2(B)+2\eta\mu^2(B)}{\eta\mu(B)\sigma\upsilon\nu(B)} = -\frac{\sigma\upsilon\nu^2(B)+2[1-\sigma\upsilon\nu^2(B)]}{\frac{1}{2}\cdot\eta\mu(2B)} = -2\frac{2-\sigma\upsilon\nu^2(B)}{\eta\mu(2B)} \\ &= \frac{2\sigma\upsilon\nu^2(B)-4}{\eta\mu(2B)} = \frac{\sigma\upsilon\nu(2B)+1-4}{\eta\mu(2B)} = \frac{\sigma\upsilon\nu(2B)-3}{\eta\mu(2B)}\end{aligned}$$

5. Αν $\eta\mu(2A) = \frac{5}{4}$ και $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$K = \eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A.$$

Λύση

Καταρχάς,

$$\eta\mu(2A) = \frac{5}{4} \Rightarrow 2\eta\mu A \cdot \sigma\upsilon\nu A = \frac{5}{4}$$

και αφού $A \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, έπεται ότι $K > 0$. Επίσης,

$$K = \eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A \Rightarrow K^2 = \eta\mu^2 A + 2\eta\mu A \cdot \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu^2 A = 1 + \underbrace{2\eta\mu A \cdot \sigma\upsilon\nu A}_{=\frac{5}{4}} = \frac{9}{4}$$

και αφού $K > 0$, έχουμε ότι $K = \frac{3}{2}$ και άρα η ελάχιστη τιμή της παράστασης $A(x)$ είναι ο αριθμός 1 ενώ η μέγιστη τιμή της ο αριθμός $\frac{3}{2}$.

6. **(α)** Αν $x, y, z \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε $x + y + z = 0$, να δείξετε ότι

$$\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y + \varepsilon\varphi z = \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi y \cdot \varepsilon\varphi z$$

(β) Αν A, B και Γ είναι γωνιές τριγώνου, να δείξετε ότι

$$\varepsilon\varphi A + \varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi \Gamma = \varepsilon\varphi A \cdot \varepsilon\varphi B \cdot \varepsilon\varphi \Gamma$$

Λύση

(α) Έχουμε[2]

$$x + y + z = 0 \Rightarrow x + y = -z$$

Τότε,

$$\begin{aligned} x + y = -z \quad &\Rightarrow \quad \varepsilon\varphi(x+y) = \varepsilon\varphi(-z) \\ &\Rightarrow \quad \frac{\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y}{1 - \varepsilon\varphi x \varepsilon\varphi y} = -\varepsilon\varphi z \\ &\Rightarrow \quad \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y = -\varepsilon\varphi z(1 - \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi y) \\ &\Rightarrow \quad \varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi y + \varepsilon\varphi z = \varepsilon\varphi x \cdot \varepsilon\varphi y \cdot \varepsilon\varphi z \end{aligned}$$

(β) A, B και Γ είναι γωνιές τριγώνου και άρα

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \hat{A} + \hat{B} = 180^\circ - \hat{\Gamma} \quad &\Rightarrow \quad \varepsilon\varphi(\hat{A} + \hat{B}) = \varepsilon\varphi(180^\circ - \hat{\Gamma}) \\ &\Rightarrow \quad \frac{\varepsilon\varphi\hat{A} + \varepsilon\varphi\hat{B}}{1 - \varepsilon\varphi\hat{A} \cdot \varepsilon\varphi\hat{B}} = -\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} \\ &\Rightarrow \quad \varepsilon\varphi\hat{A} + \varepsilon\varphi\hat{B} = -\varepsilon\varphi\hat{\Gamma}(1 - \varepsilon\varphi\hat{A} \cdot \varepsilon\varphi\hat{B}) \\ &\Rightarrow \quad \varepsilon\varphi\hat{A} + \varepsilon\varphi\hat{B} + \varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \varepsilon\varphi\hat{A} \cdot \varepsilon\varphi\hat{B} \cdot \varepsilon\varphi\hat{\Gamma} \end{aligned}$$

7. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει ότι

$$\alpha E_{AB\Gamma} = R\beta\gamma\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right),$$

να δείξετε ότι $A = \frac{\pi}{3}$.

[2] Μπορούμε φυσικά να εκφράσουμε όποιους 2 από τους 3 αριθμούς x, y, z ως προς τον τρίτο.

Λύση

Έχουμε

$$\alpha \boldsymbol{E}_{AB\Gamma} = R\beta\gamma\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right) \iff \alpha\frac{\alpha\beta\gamma}{4R} = R\beta\gamma\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right) \iff \frac{\alpha^2}{4R^2} = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\iff \left(\frac{\alpha}{2R}\right)^2 = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right) \iff \eta\mu^2 A = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\iff 4\eta\mu^2\left(\frac{A}{2}\right)\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right)$$

$$\iff \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right)\left[4\eta\mu^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1\right] = 0$$

$$\iff \left(\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right) = 0\right) \vee \left(4\eta\mu^2\left(\frac{A}{2}\right) - 1 = 0\right)$$

$$\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right) > 0 \qquad \iff \left(\frac{A}{2} = \frac{\pi}{2}\right) \vee \left(\eta\mu\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2}\right) \iff (A = \pi) \vee \left(\frac{A}{2} = \frac{\pi}{6}\right)$$

$$A \neq \pi \qquad \iff A = \frac{\pi}{3}$$

Ασκήσεις Εμπλουτισμού

1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^{4/5}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 0$.

Λύση

Είναι

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{h^{4/5}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h^{1/5}} = +\infty$$

και αρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$.

2. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = xe^{-x}$. Δείξτε ότι για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$, η $f^{(\nu)}$ υπάρχει και μάλιστα

$$f^{(\nu)}(x) = \begin{cases} -(x-\nu)e^{-x}, \alpha\nu\ \nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ (x-\nu)e^{-x}, \alpha\nu\ \nu\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$$

Λύση

(Με επαγωγή στο $\nu \in \mathbb{N}$) Εδώ η πρότασή μας είναι η

$$P(\nu) = f^{(\nu)}(x) = \begin{cases} -(x-\nu)e^{-x}, \alpha\nu\ \nu\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma \\ (x-\nu)e^{-x}, \alpha\nu\ \nu\ \acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma \end{cases}$$

η οποία θα δείξουμε ότι έχει σύνολο αλήθειας το $\mathbb{N}$.

Βήμα 1

Για $\nu = 1$, είναι

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = e^{-x} - xe^{x} = -(x-1)e^{x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

Το $\nu = 1$ είναι περιττός, άρα ισχύει και αρα το ζητούμενο ισχύει, δηλ. η $P(1)$ αληθεύει.

Βήμα 2

Υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για $\nu = \kappa > 1$

Έστω ότι ο κ είναι άρτιος. Τότε $\kappa = 2\lambda$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{N}$. Τότε

$$f^{(\kappa)}(x) = (x-\nu)e^{-x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\varepsilon.\upsilon.)$$

δηλ.
$$f^{(2\lambda)}(x) = (x - 2\lambda)e^{-x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad (\varepsilon.\upsilon.)$$
δηλ. ότι η $P(\kappa) = P(2\lambda)$ αληθεύει.
Και θα δείξουμε ότι ισχύει για $\nu = \kappa + 1$, δηλ. ότι
$$f^{(\kappa+1)}(x) = \big(x + (\kappa + 1)\big)e^{-x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
δηλ. ότι η $P(\kappa + 1) \equiv P(2\lambda + 1)$ αληθεύει.
Από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι η κ-παράγωγος συνάρτηση της f υπάρχει και είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με
$$\begin{aligned} \left(f^{(\kappa)}(x)\right)' &= \left(f^{(2\lambda)}(x)\right)' = \left((x-2\lambda)e^{-x}\right)' = (x-2\lambda)'e^{-x} - (x-2\lambda)e^{-x} \\ \Rightarrow \quad f^{(2\kappa+1)}(x) &= e^{-x} - (x-2\lambda)e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad f^{(2\lambda+1)}(x) &= \big((2\lambda+1) - x\big)e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow \quad f^{(2\lambda+1)}(x) &= -\big(x - (2\lambda+1)\big)e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
Αλλά, ο αριθμός $2\lambda + 1$ είναι περιττός και αρα το ζητούμενο ισχύει, δηλ. η $P(2\lambda + 1) \equiv P(\kappa + 1)$ αληθεύει. Ομοίως και για κ περιττό.

Βήμα 3

Από την Αρχή της Μαθηματικής Επαγωγής, το ζητούμενο ισχύει για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

3. Δείξτε ότι το όριο
$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu(x))}{x}$$
υπάρχει.

Λύση

Έχουμε
$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(\eta\mu(x))}{\eta\mu(x)}\cdot\frac{\eta\mu(x)}{x}\right)$$
Αλλά, ξέρουμε ότι το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu(x)}{x}$ υπάρχει και είναι $=1$ ενώ για το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu(x))}{\eta\mu(x)}$ θεωρούμε το μετασχηματισμό $u = \eta\mu(x)$. Τότε $x \to 0 \Leftrightarrow u \to 0$ και αρα
$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu(x))}{\eta\mu(x)} = \lim_{u\to 0}\frac{\eta\mu(u)}{u} = 1$$
Έτσι, το όριο $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\eta\mu(\eta\mu(x))}{\eta\mu(x)}\cdot\frac{\eta\mu(x)}{x}\right)$ υπάρχει και είναι ίσο με το $\left(\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu(x))}{\eta\mu(x)}\right)\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu(x))}{\eta\mu(x)}\right) = 1$, δηλ.
$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(\eta\mu(x))}{x} = 1$$

4. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\alpha^4 + \beta^4 = \gamma^4$, να δείξετε ότι $2\eta\mu^2\Gamma = (\varepsilon\varphi A)\cdot(\varepsilon\varphi B)$.

Λύση

Έχουμε:
$$\begin{aligned} \alpha^4 + \beta^4 = \gamma^4 \quad &\Leftrightarrow \quad \alpha^4 + \beta^4 + -2\alpha^2\beta^2 = \gamma^4 \\ &\Leftrightarrow \quad (\alpha^2 + \beta^2)^2 - 2\alpha^2\beta^2 = \gamma^4 \\ &\Leftrightarrow \quad (\alpha^2 + \beta^2)^2 - (\gamma^2)^2 = 2\alpha^2\beta^2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha^2+\beta^2-\gamma^2)\cdot(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)=2\alpha^2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma\cdot(\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}+2\gamma^2)=2\alpha^2\beta^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma\upsilon\nu\Gamma\cdot(\boldsymbol{2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma}+2\gamma^2)=\alpha\beta$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma\upsilon\nu\Gamma\cdot(2\cdot 4R^2\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+2\cdot 4R^2\eta\mu\Gamma)=4R^2\eta\mu A\eta\mu B$$

$$\Leftrightarrow \quad 8R^2\sigma\upsilon\nu\Gamma\cdot(\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu\Gamma)=4R^2\eta\mu A\eta\mu B$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma\upsilon\nu\Gamma\cdot(\eta\mu A\sigma\upsilon\nu B\sigma\upsilon\nu\Gamma+\eta\mu\Gamma)=\eta\mu A\eta\mu B$$

πράξεις

$$\Leftrightarrow \quad \eta\mu A\eta\mu B=-2\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma\cdot\eta\mu^2\Gamma}{2\sigma\upsilon\nu^2\Gamma-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \eta\mu A\eta\mu B=-2\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma\cdot\eta\mu^2\Gamma}{\sigma\upsilon\nu(2\Gamma)} \quad (*)$$

Τώρα,

$$2\eta\mu^2\Gamma=(\varepsilon\varphi A)\cdot(\varepsilon\varphi B) \Leftrightarrow 1-\sigma\upsilon\nu(2\Gamma)=\frac{\eta\mu A\mu B}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B} \Leftrightarrow 1-\frac{\eta\mu A\mu B}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}=\sigma\upsilon\nu(2\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B-\eta\mu A\mu B}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}=\sigma\upsilon\nu(2\Gamma) \Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu(A+B)}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}=\sigma\upsilon\nu(2\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu(\pi-\Gamma)}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}=\sigma\upsilon\nu(2\Gamma) \Leftrightarrow -\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}=\sigma\upsilon\nu(2\Gamma)$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B=\frac{\sigma\upsilon\nu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu(2\Gamma)} \quad (**)$$

Από τις $(*)$ και $(**)$ έχουμε τελικά

$$2\eta\mu^2\Gamma=\frac{\eta\mu A\eta\mu B}{\sigma\upsilon\nu A\sigma\upsilon\nu B}, \delta\eta\lambda.\ 2\eta\mu^2\Gamma=(\varepsilon\varphi A)\cdot(\varepsilon\varphi B)$$

Ειδικό Θέμα 1

Θα δούμε τώρα πως μπορούμε να θεωρήσουμε τα πολυώνυμα ως συναρτήσεις, καθόσον θα το χρειαστούμε στην επόμενη τάξη, στην ανάλυση ρητής συνάρτησης σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

Τα πολυώνυμα ως συναρτήσεις

Ορίσαμε τα πολυώνυμα ως *εκφράσεις* μεταβλητών και συντελεστές αυτών πραγματικούς αριθμούς αναγράφοντας δίπλα από το σύμβολο του πολυωνύμου τις μεταβλητές αυτές. Μελετήσαμε επίσης τις ρίζες πολυωνύμων μιας πραγματικής μεταβλητής[3]. Εκτός από τις ρίζες όμως, οι μεταβλητές μπορούν να λάβουν και άλλες τιμές με το αντίστοιχο (αριθμητικό) αποτέλεσμα του πολυωνύμου να είναι διάφορο του μηδενός. Βλέποντας όμως τα πολυώνυμα ως εκφράσεις[4], ο ρόλος των μεταβλητών που εμφανίζονται σε αυτές δε λαμβάνει τη σημασία αυτή. Άλλωστε, η απόδειξη μιας ταυτότητας ανάγεται στο να δείξει κανείς ότι τα δύο μέλη της έχουν την ίδια έκφραση (μορφή). Οδηγούμαστε λοιπόν στη θεώρηση ενός πολυωνύμου σαν συνάρτηση[5].

Έστωσαν οι αλγεβρικές εκφράσεις

$$P(x)=\frac{x^2-4x-5}{x+1} \ \text{και}\ Q(x)=x-5$$

Είναι αυτές "ίσες;"

- Ως εκφράσεις, αυτές είναι ίσες, αφού με έναν απλό αλγεβρικό χειρισμό, από την $P(x)$ έπεται η $Q(x)$:

---

[3] Έστω $P(x)$ ένα πολυώνυμο βαθμού n. Ένας αριθμός $\alpha\in\mathbb{R}$ ή $\alpha\in\mathbb{C}$ λέγεται *ρίζα* του $P(x)$ αν $P(\alpha)=0$.

[4] αναφέρονται και ως *φόρμες*

[5] Θα ασχοληθούμε μόνο με πολυώνυμα μιας (πραγματικής) μεταβλητής.

$$P(x)=\frac{x^2-4x-5}{x-1}=\frac{(x-5)(x+1)}{x-1}=x-5$$

- Ως συναρτήσεις, όμως, αυτές δεν είναι ίσες, αφού $D(P)=\mathbb{R}-\{-1\}$ ενώ $D(Q)=\mathbb{R}$.

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ βαθμού n ορίζει τη συνάρτηση $P:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $x\mapsto P(x)$

Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις έχουν πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$. Γι'αυτό από δω και πέρα, θα γράφουμε P αντί $P(x)$ και θα θεωρούμε το πολυώνυμο ως συνάρτηση. Οι εκφράσεις λοιπόν που αναπαριστούν ένα πολυώνυμο δεν αντανακλούν την ιδιότητα του πολυωνύμου ως συνάρτηση. Συγκεκριμένα, μπορούμε να προσθέσουμε και να πολλαπλασιάσουμε 2 ή περισσότερες πολυωνυμικές εκφράσεις με τους γνωστούς κανόνες αλλά το αποτέλεσμα που θα λάβουμε να μην αναπαριστά το αντίστοιχο πολυώνυμο που θα προέκυπτε αν θεωρούσαμε τα αρχικά πολυώνυμα ως συναρτήσεις.

Εδώ όμως προκύπτει το φυσιολογικό ερώτημα

"ποιά σχέση έχουν οι πολυωνυμικές εκφράσεις με τις πολυωνυμικές συναρτήσεις"

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα αυτό, ορίζουμε ως

$\mathbb{R}[x]$= το σύνολο όλων των πολυωνυμικών εκφράσεων μιας (πραγματικής) μεταβλητής και με συντελεστές πραγματικούς αριθμούςκαι ως $\mathbb{R}(x)$= το σύνολο όλων των πολυωνυμικών συναρτήσων που προκύπτουν από τις πολυωνυμικές αυτές εκφράσεις. Επίσης, ως πρόσθεση + πολυωνυμικών συναρτήσων f και g ορίζουμε την συνάρτηση $f+g$ με τύπο $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ και ως πολλαπλασιασμό $\cdot$ πολυωνυμικών συναρτήσων f και g ορίζουμε την συνάρτηση $f\cdot g$ με τύπο $(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)$.

Η αντιστοιχία $F:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}(x)$ με $p\mapsto F(p)$ για $p\in\mathbb{R}[x]$ και η οποία (αντιστοιχία) $F(p)\in\mathbb{R}(x)$ ορίζεται ως $x\mapsto[F(p)](x)=p(x)$ [6] είναι:

- Καλά ορισμένη απεικόνιση. Πράγματι, κάθε πολυωνυμική έκφραση p αντιστοιχεί σε μια και μόνο πολυωνυμική συνάρτηση p (και άρα πολυωνυμική έκφραση⇒ πολυωνυμική συνάρτηση)
- 1-1. Δηλ. δύο διαφορετικές πολυωνυμικές έκφρασεις δεν μπορούν να αντιστοιχούν στην ίδια πολυωνυμική συνάρτηση (και άρα πολυωνυμική συνάρτηση ⇒ πολυωνυμική έκφραση)

και διατηρά τη "δομή" των δύο αυτών συνόλων, υπό την έννοια ότι αν προσθέσεις (ή πολλαπλασιάσεις) 2 πολυωνυμικές εκφράσεις και κοιτάξεις τη συνάρτηση που προκύπτει, τότε αυτή θα είναι η ίδια συνάρτηση που προκύπτει αν προσθέσεις (ή αντίστοιχα πολλαπλασιάσεις) τις συναρτήσεις που καθορίζονται από τις 2 αυτές πολυωνυμικές εκφράσεις.

Ειδικό Θέμα 2

Ορισμός

Έστω $f:A\to B$ συνάρτηση. Αν E είναι ένα υποσύνολο του συνόλου A, τότε ο *περιορισμός της f στο E* είναι η συνάρτηση $g:E\to B$ με $f(x)=g(x)$ για κάθε x στο E και Γράφουμε $g\equiv f|_E$.

Παρατηρήσεις

i. Ο περιορισμός μιας συνάρτησης f σε ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού της είναι η ίδια η συνάρτηση f αλλά ορισμένη στο υποσύνολο αυτό.

ii. Το γράφημα $G(f|_E)$ του περιορισμού $f|_E$ μιας συνάρτησης $f:A\to B$ στο Eείναι ακριβώς το σύνολο $\{(x,f(x))\in G(f):x\in E\}$.

Παραδείγματα

i. Η συνάρτηση $g(x)=x$, $x\in[0,1)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ο περιορισμός της $f(x)=|x|$ στο διάστημα $[0,1)$ ή ως ο περιορισμός της

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in[0,1)\\ x^2, & x\in[1,+\infty)\end{cases}$$

στο ίδιο διάστημα.

[6] Η F Νοείται ως αντιστοιχία πολυωνυμικών εκφράσεων σε πολυωνυμικές συναρτήσεις

ii. Θα ελέγξουμε αν η συνάρτηση $f(x) = |x|$, $x \in [0,+\infty)$ είναι 1-1. Στην προηγούμενη παραγραφο, είδαμε ότι η f είναι 1-1 με τον ορισμό. Αυτό όμως μπορούμε να το δούμε και ως εξής:
είναι $f \equiv g$, όπου $g(x) = x$, $x \in [0,+\infty)$ η οποία είναι 1-1. Με άλλα λόγια, ο περιορισμός f της συνάρτησης $h(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ στο διάστημα $[0,+\infty)$ είναι μια 1-1 συνάρτηση.

Εφαρμογή [Οι συναρτήσεις $y = f(|x|)$ και $y = |f(x)|$]

Έστω f μια συνάρτηση. Ορίζουμε μια νέα συνάρτηση $|f|$ ως εξής

$$|f|(x) = |f(x)|, \qquad \forall x \in D(f)$$

Η $|f|$ έχει νόημα (είναι καλά ορισμένη) αφού $D(|f|) = D(f)$

- Δοθείσης μιας συνάρτησης f, θα κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της $y = f(|x|)$ και της $y = |f(x)|$

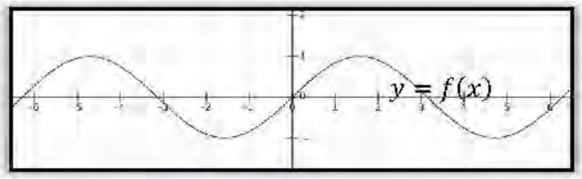
Αν $x \in \{x > 0\} \cap D(f)$, τότε $|x| = x$ και άρα $= f(x)$, ενώ αν $x \leq 0$, τότε $|x| = -x$ και άρα $f(|x|) = f(-x)$ δηλ. το γράφημα της $f(|x|)$ είναι το ίδιο με το γράφημα της f. Για ενώ για $x \in \{x \leq 0\} \cap D(f)$, το γράφημα της $f(|x|)$ είναι το συμμετρικό γράφημα της f (για $\{x > 0\} \cap D(f)$) ως προς τον άξονα των τεταγμένων.

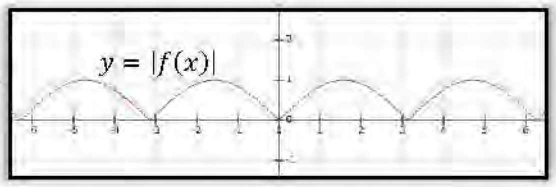
- Δοθείσης μιας συνάρτησης f, θα κατασκευάσουμε τη γραφική παράσταση της y = |f(x)|.

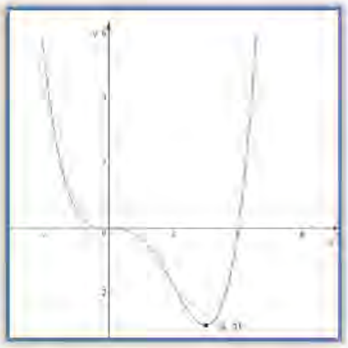
Αν $x \in D(f)$, τέτοιο ώστε $f(x) \geq 0$, τότε $y = |f(x)| = f(x)$ και άρα $(x, f(x)) \to (x, f(x))$

ενώ αν $x \in D(f)$, τέτοιο ώστε $f(x) < 0$, τότε $y = |f(x)| = -f(x)$ και άρα $(x, f(x)) \to (x, -f(x))$.

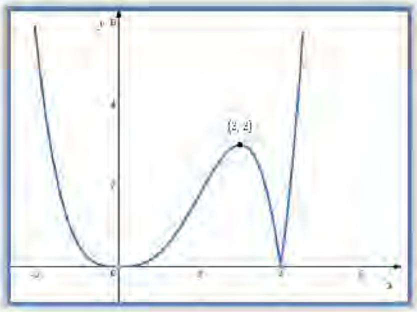
Παραδείγματα







$y = f(x)$



$y = |f(x)|$

Εφαρμογή
(α) Δείξτε ότι η συνάρτηση συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όπου $\alpha \neq 0$ και $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ δεν είναι 1-1.

(β) Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = |\alpha x^2 + \beta x + \gamma|$, όπου $\alpha > 0$. Αφού μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την παραγωγισιμότητα, να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση
(α) Πράγματι, είναι για $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \alpha\left(x + \left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right) - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$$

Τότε είναι $x_1 = -\frac{\beta}{2\alpha}+1 > -\frac{\beta}{2\alpha}-1 = x_2$ $(x_1 = x_2+1)$ αλλά

$$f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}+1\right) = \alpha - \frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha} = 8\alpha\gamma+\beta^2 = f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}-1\right)$$

και το συμπέρασμα έπεται. Το επιχείρημα ότι $x_1 \neq x_2$ ενώ $f(x_1) = f(x_2)$ μας λέει ακριβώς ό,τι η συνάρτηση δεν είναι 1-1.

(μπορείτε να δώσετε μια γεωμετρική ερμηνεία;)

(β) Η f είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, της απολύτου τιμής και της $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$, δηλ. $f \equiv |g|$. Αφού $\alpha > 0$, έπεται ότι η g λαμβάνει ελάχιστη τιμή και μπορούμε να σχεδιάσουμε την f, όπως είδαμε στο κεφάλαιο των συναρτήσεων: Ανάλογα με το πρόσημο της Διακρίνουσας $\Delta(g)$ της g, έχουμε και τις αντίστοιχες κορυφές.

- αν $\Delta(g) > 0$, τότε η f έχει δύο (διακεκριμένες) ρίζες, έστωσαν x_1 και x_2 με $x_1 < x_2$. Τότε,

$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x), & x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty) \\ -g(x), & x \in (x_1, x_2) \end{cases} = \begin{cases} \alpha(x-x_1)(x-x_2), & x \in (-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty) \\ -\alpha(x-x_1)(x-x_2), & x \in (x_1, x_2) \end{cases}$$

Στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη. Πράγματι,

$$f'_+(x_1) = \lim_{x\to h^+}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = -\alpha(x_1-x_2)$$

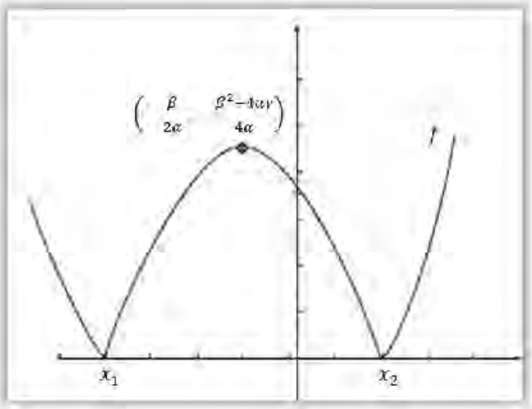
και

$$f'_-(x_1) = \lim_{x\to h^-}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = \alpha(x_1-x_2)$$

Έτσι,

$$f'(x) = \begin{cases} 2\alpha x+\beta, & x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty) \\ -(2\alpha x+\beta), & x \in (x_1, x_2) \end{cases}$$

Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής αλλά όχι παραγωγίσιμη στα σημεία x_1 και x_2, έπεται ότι το γράφημα της συνάρτησης θα σχηματίζει 'γωνίες' στα σημεία $(x_1, f(x_1))$ και $(x_2, f(x_2))$. Στο δε σημείο $\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right) = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta(g)}{4\alpha}\right) = \left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha}\right)$ έχουμε (ολικά) μέγιστη τιμή.



Η περίπτωση που $\Delta(g) \leq 0$ δε χρήζει ιδιαίτερης μελέτης (γιατί;)

Ειδικό Θέμα 3 - Βαθμωτές (ή κλιμακωτές) συναρτήσεις[7]

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται *Βαθμωτή (ή κλιμακωτή)* αν υπάρχει διαμέριση του συνόλου A σε πεπερασμένα το πλήθος ξένα ανα δύο διαστήματα $A_1 A_2, \cdots, A_m$ [8] σε κάθε ένα από τα οποία η f είναι σταθερή (συνάρτηση).

Παρατηρήσεις

[7] **(step functions)** Λέγονται έτσι γιατί το γράφημά τους μοιάζει με κλίμακα (σκάλα/βαθμίδα)

[8] Δηλ. $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = A$ και $A_i \cap A_j = \emptyset$ για κάθε $i, j \in \{1,2,\cdots,m\}$ με $i \neq j$

Δηλ. για κάθε $i \in \{1,2,\cdots,m,\}$ υπάρχει $\kappa_i \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x)=\kappa_i, \forall x \in A_i$ και για το λόγο αυτό μια τέτοια συνάρτηση λέγεται και κατά τμήματα σταθερή (piecewise constant function).

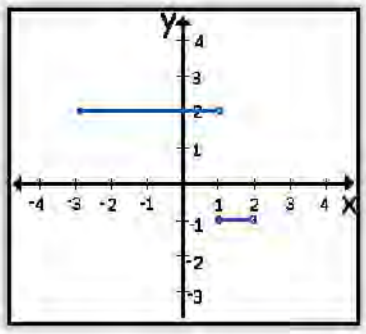
Παραδείγματα

i. Κάθε σταθερή συνάρτηση είναι και *Βαθμωτή* συνάρτηση κατά τετριμμένο τρόπο (αφού θεωρούμε ως διαμέριση του A την τετριμμένη, δηλ. τον εαυτό του και μόνο)

ii. Έστω $f:[-3,2]\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}2, & \alpha\nu\ -3\le x<1\\ -1, & \alpha\nu\ 1\le x\le 2\end{cases}$$

Το Π.Ο. $[-3,2]$ της f έχει διαμεριστεί σε δύο ξένα μεταξύ τους σύνολα $A_1=[-3,1)$ και $A_2=[1,2]$ με $f(x)=2, \forall x \in A_1$ και $f(x)=-1, \forall x\in A_2$.



Γενικές Ασκήσεις Κεφαλαίου 0

❶ Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{x}{1+|x|}$$

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της, το πεδίο τιμών της. Να τη μελετήσετε ως προς της συνέχεια και δείξετε ότι είναι 1-1 και να προσδιορίσετε την αντίστροφή της όπου αυτή ορίζεται. Να δείξετε ότι είναι περιττή συνάρτηση. Τέλος, να υπολογίσετε τα

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \quad \kappa\alpha\iota \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

❷ Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\frac{1}{3}|3x-9|$$

❸ Έστω η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x)=\begin{cases}|x-1|, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Να τη μελετήσετε ως προς τη συνέχεια.

❹ Αν f συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=1$, να βρείτε την τιμή του

$$\lim_{x\to0}\frac{f(4x)}{x}.$$

Έστω η καμπύλη που ορίζεται από το ακόλουθο ζεύγος παραμετρικών εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned}x(t)&=t^3+2\\ y(t)&=3t^2+5t+1\end{aligned}\right\}$$

Να υπολογισθούν, όπου αυτές ορίζονται, οι

$$\frac{dy}{dx} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

Δείξτε ότι το γράφημα της καμπύλης έχει κατακόρυφη εφαπτομένη στο σημείο με $t=0$.

❺ Έστω η καμπύλη που ορίζεται από το ακόλουθο ζεύγος παραμετρικών εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned}x(t)&=3t\\ y(t)&=\frac{1}{t^2}\end{aligned}\right\}$$

Να υπολογισθούν, όπου αυτές ορίζονται, οι

$$\frac{dy}{dx} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

❻ Έστω η καμπύλη που ορίζεται από το ακόλουθο ζεύγος παραμετρικών εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned}x(t)&=\eta\mu t\\ y(t)&=\sigma\upsilon\nu(2t)\end{aligned}\right\}$$

Να υπολογισθούν, όπου αυτές ορίζονται, οι

$$\frac{dy}{dx} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

❼ Έστω η καμπύλη που ορίζεται από το ακόλουθο ζεύγος παραμετρικών εξισώσεων:

$$\left.\begin{aligned}x(t)&=\frac{2+t}{1+2t}\\ y(t)&=\frac{3+2t}{t}\end{aligned}\right\}$$

Να υπολογισθούν, όπου αυτές ορίζονται, οι

$$\frac{dy}{dx} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{d^2y}{dx^2}$$

Λίστα συμβόλων:

$\emptyset$	=	το κενό σύνολο		
$\mathbb{R}$	=	Το σύνολο των πραγματικών αριθμών		
$\mathbb{R}_*$	=	$\mathbb{R} - \{0\}$		
$\mathbb{R}_+$	=	$(0, +\infty)$		
$\mathbb{N}$	=	Το σύνολο των φυσικών αριθμών	=	$\{1,2,3,\cdots\}$
$\mathbb{Z}$	=	Το σύνολο των ακεραίων αριθμών	=	$\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots\}$
$\mathbb{Q}$	=	Το σύνολο των ρητών αριθμών	=	$\left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} - \{0\}\right\}$
$A \cap B$	=	η τομή των συνόλων A και B		
$A \cup B$	=	η ένωση των συνόλων A και B		
$\mathbb{R}[x]$	=	το σύνολο όλων των πολυωνυμικών εκφράσεων μιας (πραγματικής) μεταβλητής και με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς		
$\overline{\mathbb{R}}$	$\equiv$	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$		

Συμβολισμοί:

$f: A \to B,\ g: \Gamma \to \Delta$ πραγματικές συναρτήσεις

$Z(f)$	=	Το σύνολο των (πραγματικών) ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$	=	$\{x \in \mathbb{R} : f(x) = 0\}$
$C_f \equiv Gr(f)$	=	Το γράφημα της f	=	$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\}$
			=	$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in A\}$
$f(A) \equiv R(f)$	=	το σύνολο τιμών της f	=	$\{f(\alpha) \mid \alpha \in A\}$
$C^1(\mathbb{R})$	=			$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \exists\ \eta\ f'$ και είναι συνεχής$\}$

Βιβλιογραφία

[ΘΧρ] Πολυμελούς Επιτροπής Καθηγητών, Φροντιστών - Δέσμη - Γενικό *Φροντιστήριο Δημοτικού, Γυμνασίου, Λυκείου* , τόμος 4 [Μαθηματικά Λυκείου Α], Εκδοτικός Οργανισμός Θ. Χριστόπουλος ΑΒΕΕ, Αθήνα-Λευκωσία, 1991-1992

[ΔαΚ] Χαράλαμπος Δαμιανού, Μάρκος Κούτρας- *Εισαγωγή στη Στατιστική, Μέρος Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία 2003

[Ι1] Ιωακείμ Ιωάννης, *Προτεινόμενες Λύσεις Β'Λυκείου Κατεύθυνσης [Μέρος Ι]*, Λευκωσία, Σεπτέμβριος 2018

[ΜπΑ] Μ.Α. Μπρίκας, *Τα περίφημα άλυτα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας*, Αθήνα 1970.

[ΝΓΓ] Σ. Νεγρεπόντης, Σ. Γιωτόπουλος, Ε. Γιαννακούλιας, *Απειροστικός Λογισμός, τόμοι Ι, ΙΙα και ΙΙβ*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1999

[ΥΠΠ1] Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού (Κύπρου) - *Μαθηματικά Β Λυκείου κατεύθυνσης*, Α' έκδοση, 2017

[ΥΠΠ2] Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού (Κύπρου) - *Μαθηματικά Επιλογής Γ' Ενιαίου Λυκείου*, Γ' έκδοση, 2007, Ανατύπωση 2016

[Bal] Ball, Keith M, *"8: Fibonacci's Rabbits Revisited", Strange Curves, Counting Rabbits, and Other Mathematical Explorations*, Princeton, NJ: Princeton University Press, 2003, ISBN 0-691-11321-1.

[BGO] Bernard R. Gelbau, John M. H. Olmsted- *Counterexamples in Analysis*, Dover Publications, Inc., New York, 2003 (corrected republication)

[Fey] Richard Feynman, *The Meaning of It All: Thoughts of a Citizen-Scientist*, 1998, Addison–Wesley **ISBN** 0-201-36080-2

[Fra] Frances Kirwan, *Complex Algebraic Curves* (London Mathematical Society Student Texts), Cambridge University Press, 1992

[GLo] G. Loria, *Ιστορία των Μαθηματικών*, Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα, 1978.

[GrJ] Grabiner, Judith V. - *"Who Gave You the Epsilon? Cauchy and the Origins of Rigorous Calculus"*, The American Mathematical Monthly. Mathematical Association of America. 90 (3): 185–194, (March 1983).

[HoA] Howard Anton, *Calculus-Early Transcendentals*, Seventh Edition, 2002 John Wiley & Sons

[JHL] John H Lienhard IV and John H Lienhard V, *'A Heat Transfer Textbook'*, Third Edition, Phlogyston Press, Cambridge Massachusetts

[Spi] Spivak Michael, *Διαφορικός και ολοκληρωτικός Λογισμός*, Μετάφραση: Γιαννόπουλος Απόστολος, Α' έκδοση, 2010

[StB] Sterling K. Berberian, *A First Course in Real Analysis*, Springer, 1994

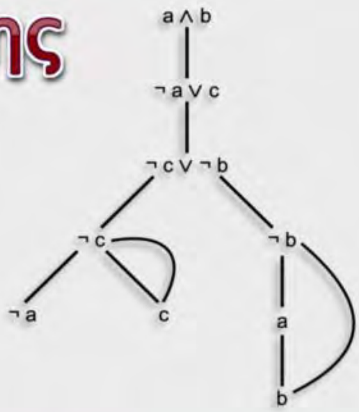
[Rex] Wu, Rex H. *"Proof Without Words: Euler's Arctangent Identity"*, Mathematics Magazine 77(3), June 2004, p. 189.

“Words can be meaningless. If they are used in such a way that no sharp conclusions can be drawn.”

— Richard P. Feynman[Fey]

ISBN 978-9925-7485-2-5

Μαθηματικά
Β΄Λυκείου Κατεύθυνσης



“Words can be meaningless. If they are used in such a way that no sharp conclusions can be drawn.”

— Richard P. Feynman

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β'Λυκείου Κατεύθυνσης

ISBN 978-9925-7485-2-5
9 789925 748525 >