

Διαγώνισμα στα κεφάλαια: όρια ,συναρτήσεις ,αντίστροφες ,
ολοκληρώματα , κύκλος. (κάθε άσκηση 7 βαθμοί)

Όνομα.

Τμήμα.Γ2

Ημερ. 9 . 1 . 2012 (Χρόνια πολλά , όμορφα και ευλογημένα και
το 2012 να σας φέρει πολλές επιτυχίες και χαρές.)

1. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\eta \mu^2 x} =$ (β.5)

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης
 $y^2 = 4\alpha x$ στο σημείο της (x_1, y_1) είναι η $y_1 y = 2\alpha(x + x_1)$.
(β.5)

3. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 4}$. Αφού βρείτε το πεδίο
ορισμού , τα σημεία τομής με τους άξονες , τα τοπικά
ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης, να την
παραστήσετε γραφικά. (β.12)

4. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \left(\frac{5x^4}{\sqrt{x}} + \frac{2}{\sin^2 x} \right) dx$. (β.6)

5. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων του κύκλου
 $x^2 + y^2 + 2x - 4 = 0$ που είναι παράλληλες με την ευθεία
 $2x - y - 1 = 0$ (β.8)

6. Να βρείτε τις τιμές των α και β για τις οποίες η συνάρτηση
 $f(x) = 2x^3 + \alpha x^2 + \beta x + 11$ παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα
σημεία με τετμημένες $x_1 = 1$ και $x_2 = -4$ και να τα χαρακτηρίσετε.
(β.8)

7. Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int x^2 e^{3x} dx$. (β.8)

8. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon : y=2x-3$.

a. Να αποδείξετε ότι η απόσταση τυχαίου σημείου $A(x,y)$ της ευθείας ε από την αρχή των αξόνων είναι $d(x) = \sqrt{5x^2 - 12x + 9}$.

b. Να αποδείξετε ότι το σημείο της ευθείας ε το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι το σημείο $M(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5})$. Στη συνέχεια να βρείτε την ελάχιστη αυτή απόσταση. (β.10)

9. Αν $x = e^{-t}$ και $y = t^2$, να δείξετε ότι: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 2$. (β.5)

10. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο με ακτίνα 6 cm, να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου που έχει μέγιστο εμβαδόν. (β.8)

11. Δίνεται η πραγματική συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = 2e^{2x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (β.7)

12. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = \sqrt{x}$, $x > 0$, ή με άλλο τρόπο να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \ln \sqrt{x} \, dx$
(β.8)

13. Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = x(2 + \ln x)$, $x \in [1, e]$. Να βρείτε τον αριθμό $\xi \in (1, e)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής. (β.10)