Μαθηματικά

Β' Λυκείου Κατεύθυνσης

Επισκόπηση Θεωρίας
Προτάσεις λύσεων
εξεταστικών δοκιμίων

ΙΩΑΚΕΙΜ ΙΩΑΝΝΗΣ 2019

Νέο αναλυτικό Πρόγραμμα

Ιωακείμ Ιωάννης ■ Μαθηματικά Β' Λυκείου Κατεύθυνσης

ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΘΕΩΡΙΑΣ

Κεφάλαια

Κεφάλαιο 1 • Μαθηματική Λογική

Α. Ευθεία απόδειξη [P ⇒ Q]

Χρησιμοποιώντας τον αρχικό προτασιακό τύπο P τον οποίο θεωρούμε ως αληθή, εξάγουμε το ζητούμενο συμπέρασμα Q.

Παραδείγματα

i. Το άθροισμα δύο θετικών ακεραίων άρτιων αριθμών είναι ένας άρτιος αριθμός. Πράγματι, αφού η υπόθεσή μας είναι η Πρόταση

α και β δύο θετικοί ακέραιοι άρτιοι αριθμοί

τότε $\alpha = 2\kappa$ *και* $\beta = 2\lambda$ *για κάποιους φυσικούς αριθμούς* κ *και* λ. Τότε,

$$\alpha + \beta = 2\kappa + 2\lambda = 2\underbrace{(\kappa + \lambda)}_{\in \mathbb{N}}$$

και το συμπέρασμα έπεται.

ii. Έστω n ένας άρτιος αριθμός. Τότε ο n^2 είναι επίσης άρτιος. Πράγματι, αφού ο n είναι άρτιος, θα γράφεται στη μορφή $n = 2l$, όπου $l \in \mathbb{N}$. Τότε $n^2 = 4l^2 = 2(2l^2)$ και άρα ο n^2 είναι επίσης άρτιος.

iii. Από τα δύο πιο πάνω, έπεται ότι το άθροισμα των τετραγώνων δύο άρτιων αριθμών είναι επίσης άρτιος αριθμός'.

Εφαρμογές

i. Ανισότητα Αριθμητικού-Γεωμετρικού Μέσου

Έστωσαν α και β δύο θετικοί αριθμοί. Τότε

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \geq \sqrt{\alpha \cdot \beta}$$

Καταρχάς, αφού $\alpha, \beta \geq 0$, θα είναι $\alpha \cdot \beta \geq 0$ και άρα η πιο πάνω ρίζα έχει νόημα. Έχουμε

$(\alpha - \beta)^2$	$\geq$	0	*Το τετράγωνο θετικού αριθμού είναι θετικός αριθμός*
$\Rightarrow \quad \alpha^2 - 2\alpha \cdot \beta + \beta^2$	$\geq$	0	*Χρήση της ταυτότητας* $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha \cdot \beta + \beta^2$
$\Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha \cdot \beta + \beta^2 + 4\alpha \cdot \beta$	$\geq$	$4\alpha \cdot \beta$	*Αλγεβρικοί χειρισμοί με γνώμονα το ζητούμενο*
$\Rightarrow \quad \alpha^2 + 2\alpha \cdot \beta + \beta^2$	$\geq$	$4\alpha \cdot \beta$	
$\Rightarrow \quad (\alpha + \beta)^2$	$\geq$	$4\alpha \cdot \beta$	
$\Rightarrow \quad \alpha + \beta$	$\geq$	$\sqrt{4\alpha \cdot \beta}$	*Αν* $\alpha, \beta > 0$ *τέτοιο ώστε* $\alpha \geq \beta$, *τότε* $\sqrt{\alpha} \geq \sqrt{\beta}$
$\Rightarrow \quad \dfrac{\alpha + \beta}{2}$	$\geq$	$\sqrt{\alpha \cdot \beta}$	

Β. Με ισοδύναμες προτάσεις

Όταν μας ζητάνε να αποδείξουμε μια ταυτότητα $(P(x) = Q(x))$, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ότι αυτή είναι ισοδύναμη με την $(P(x) - Q(x) = 0)$, η οποία μπορεί να είναι πιο εύκολη στους χειρισμούς. Αν η ταυτότητα αυτή είναι μια ταυτολογία, τότε και η αρχική μας ταυτότητα θα είναι επίσης μια ταυτολογία.

Παράδειγμα

Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα (με σύνολο αναφοράς το $\mathbb{R}$)

$$\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}=2\sigma\tau\epsilon\mu x.$$

1ος τρόπος

Έχουμε

$$\begin{aligned}
& \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} &=& \ 2\sigma\tau\epsilon\mu x && \text{Ομώνυμα}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\eta\mu^2 x+1+2\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x} &=& \ 2\sigma\tau\epsilon\mu x && \\
\Leftrightarrow\ & \frac{2+2\sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x} &=& \ 2\sigma\tau\epsilon\mu x && \eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x=1\\
\Leftrightarrow\ & \frac{2(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x} &=& \ 2\sigma\tau\epsilon\mu x && \text{Κοινός παράγοντας}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{2}{\eta\mu x} &=& \ 2\sigma\tau\epsilon\mu x && \\
\Leftrightarrow\ & 2\sigma\tau\epsilon\mu x &=& \ 2\sigma\tau\epsilon\mu x && \frac{1}{\eta\mu x}=\sigma\tau\epsilon\mu x
\end{aligned}$$

η οποία είναι ταυτολογία.

2ος τρόπος

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} &= \frac{\eta\mu^2 x+1+2\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu^2 x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x} = \frac{2+2\sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}=\frac{2(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}\\
&= \frac{2}{\eta\mu x}=2\sigma\tau\epsilon\mu x
\end{aligned}$$

3ος τρόπος

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}+\frac{1+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} - 2\sigma\tau\epsilon\mu x &= \frac{2+2\sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}-\frac{2}{\eta\mu x}\\
= \frac{2(1+\sigma\upsilon\nu x)}{(1+\sigma\upsilon\nu x)\eta\mu x}-\frac{2}{\eta\mu x} = \frac{2}{\eta\mu x}-\frac{2}{\eta\mu x} &= 0
\end{aligned}$$

Παρατηρήσεις

Όταν μας ζητάνε να αποδείξουμε ότι δύο Προτάσεις P και Q είναι ισοδύναμες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη λογική ισοδυναμία $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)]$

Εφαρμογή

Έστωσαν $P(x)$ και $Q(x)$ δύο πολυώνυμα βαθμού n και x πραγματική μεταβλητή. Θα δείξουμε ότι οι προτάσεις $\pi = [P(x)\cdot Q(x)=0]$ και $\rho =$ "ένα τουλάχιστον από τα δύο αυτά πολυώνυμα είναι το μηδενικό πολυώνυμο" είναι ισοδύναμες.

$(\pi \Rightarrow \rho)$ Υποθέτουμε ότι $P(x)\cdot Q(x)=0$. Τότε, υποθέτουμε προς άτοπον ότι και τα δύο αυτά πολυώνυμα δεν είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Τότε, $\deg(P(x)), \deg(Q(x)) \geq 0$ και άρα

$$\deg[P(x)\cdot Q(x)] = \deg(P(x)) + \deg(Q(x)) \geq 0$$

και άρα, $P(x)\cdot Q(x) \neq 0$, άτοπο. Συνεπώς, τουλάχιστον ένα από τα πολυώνυμα είναι το μηδενικό.
$(\rho \Rightarrow \pi)$ Υποθέτουμε ότι ένα τουλάχιστον από τα δύο αυτά πολυώνυμα είναι το μηδενικό πολυώνυμο. Τότε, προφανώς $P(x)\cdot Q(x)=0$

Πολλές φορές, στις ισοδυναμίες, η μια κατεύθυνση είναι προφανής.

Παραδείγματα

i. Έστωσαν α και β δύο θετικοί αριθμοί. Τότε
$$\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta$$
Είναι
$$\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$$
η οποία ισχύει.

ii. Έστωσαν $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ θετικοί αριθμοί. Τότε
$$(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\delta^2)\geq(\alpha\beta+\gamma\delta)^2$$
Είναι
$$\begin{aligned}
&(\alpha^2+\gamma^2)(\beta^2+\delta^2) &\geq\ & (\alpha\beta+\gamma\delta)^2\\
\Leftrightarrow\ &\alpha^2\cdot\beta^2+\alpha^2\cdot\delta^2+\gamma^2\cdot\beta^2+\gamma^2\cdot\delta^2 &\geq\ & \alpha^2\cdot\beta^2+2\alpha\beta\gamma\delta+\gamma^2\cdot\delta^2\\
\Leftrightarrow\ &\alpha^2\cdot\delta^2+\gamma^2\cdot\beta^2 &\geq\ & 2\alpha\beta\gamma\delta\\
\Leftrightarrow\ &\alpha^2\cdot\delta^2-2\alpha\beta\gamma\delta+\gamma^2\cdot\beta^2 &\geq\ & 0\\
\Leftrightarrow\ &(\alpha\delta-\beta\gamma)^2 &\geq\ & 0
\end{aligned}$$
η οποία ισχύει.

iii. Έστωσαν $\alpha,\beta>0$. Τότε
$$(1+\alpha)(1+\beta)>1+\alpha+\beta$$
Είναι
$$(1+\alpha)(1+\beta)>1+\alpha+\beta \Leftrightarrow 1+\beta+\alpha+\alpha\beta>1+\alpha+\beta \Leftrightarrow \alpha\beta>0$$
η οποία ισχύει αφού $\alpha,\beta>0$.

iv. Θα δείξουμε ότι αν $\alpha>1$ και $n\in\mathbb{N}$, τότε $\sqrt[n]{\alpha}-1>0$. Πράγματι,
$$\alpha>1\Rightarrow\sqrt[n]{\alpha}>1\Rightarrow\sqrt[n]{\alpha}-1>0$$

Παρατηρούμε ότι η ευθεία μέθοδος μπορεί να γίνει και με τη μέθοδο της συνεπαγωγής. Πότε όμως χρησιμοποιούμε τη μια και πότε την αλλη μέθοδο; Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της συνεπαγωγής όταν η διαδικασία έναρξής της μέσω των υποθέσεων είναι δύσκολη. Καταλήγουμε έτσι σε μια ισοδύναμη πρόταση η οποία είναι αληθής σύμφωνα με τις υποθέσεις. Όταν όμως οι υποθέσεις μπορούν να μας δώσουν άμεσα την απόδειξη, χρησιμοποιούμε την ευθεία μέθοδο.

Ας δούμε το πρώτο παράδειγμα με τη μέθοδο της συνεπαγωγής:

$$\begin{aligned}
\alpha^2+\beta^2 \text{ άρτιος αριθμός} &\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2=2\kappa \textit{ για κάποιον } \kappa \textit{ θετικό ακέραιο}\\
&\Leftrightarrow \textit{Το 2 διαιρεί τον } (\alpha^2+\beta^2)\\
&\Leftrightarrow \textit{Το 2 διαιρεί τον } \alpha^2 \textit{ και το } \beta^2 \textit{ (αφού ο 2 είναι πρώτος)}\\
&\Leftrightarrow \textit{Το 2 διαιρεί τον } \alpha \textit{ και το } \beta \textit{ (αφού είναι θετικοί ακέραιοι)}
\end{aligned}$$

C. Εις άτοπον απαγωγή[1]

[1] Η μέθοδος αυτή στη Θεωρία της Λογικής, ανήκει στο είδος των μεθόδων *reductio ad absurdum* (παράλογου επιχειρήματος) οι οποίες προσπαθούν είτε να αποδείξουν ότι ενα συμπέρασμα είναι λάθος αυτό οδηγεί σε

Θυμόμαστε ότι αν P και Q είναι δύο Προτασιακοί τύποι, τότε

$$\neg(P \wedge \neg Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$$

Αν λοιπόν θέλουμε να ελέγξουμε την αλήθεια της λογικής συνεπαγωγής $P \Rightarrow Q$, υποθέσουμε ότι ισχύουν ταυτόχρονα οι P και $\neg Q$ (δηλ. ο $P \wedge \neg Q$ είναι αληθής) και καταλήξουμε σε *οποιανδήποτε* αντίφαση, τότε ο $\neg(P \wedge \neg Q)$ είναι αληθής, άρα και ο $(P \Rightarrow Q)$. Για παράδειγμα, αν με τις πιο πάνω υποθέσεις καταλήξουμε στην αλήθεια του Q^2, τότε ο $(P \wedge \neg Q)$ είναι ψευδήςκαι άρα ο $(P \Rightarrow Q)$είναι αληθής.

Η πιο πάνω διαδικασία συνοψίζεται στο ακόλουθο σχήμα:

Υποθέτοντας, *δεδομένης της αρχικής πρότασης* P, ότι δεν ισχύει το συμπέρασμα Q (δηλ. οτι ισχύει η Πρόταση $P \wedge \neg Q$) καταλήγουμε σε *οποιανδήποτε* αντίφαση, τότε η Πρόταση $P \Rightarrow Q$ είναι αληθής.

Η μέθοδος αυτή είναι προτιμότερη της ευθείας αποδείξεως όταν η (αρχική) υπόθεση είναι παρουσιάζει δυσκολίες στο χειρισμό της ή όταν το συμπέρασμα είναι τόσο προφανές, που η άρνησή του είναι εύκολο σε μας να φανεί.

Παραδείγματα

i. Αν για ένα *ακέραιο* αριθμό α ισχύει ότι ο α^2 είναι άρτιος, τότε αυτός θα είναι επίσης άρτιος.

1ος τρόπος
- Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλ. ότι ο α είναι περιττός.
- Τότε ο αριθμός $\alpha + 1$ θα είναι (προφανώς) άρτιος. Τότε ο $\alpha(\alpha+1)$ θα είναι άρτιος, ως γινόμενο περιττού επί άρτιο. Αλλά, $\alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha+1)$ και άρα $\alpha = \alpha(\alpha+1) - \alpha^2$ απόπου και συμπεραίνουμε ότι ο α^2 είναι άρτιος, ως διαφορά δύο άρτιων.
- Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι ο α είναι περιττός.
- Άρα, ο α είναι άρτιος.

2ος τρόπος
- Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλ. ότι ο α είναι περιττός. Τότε $\alpha = 2 \cdot \mu + 1$, όπου $\mu \in \mathbb{Z}$.
- Τότε
$$\alpha^2 = (2 \cdot \mu + 1)^2 = 2(2\mu^2 + 2\mu)$$
και άρα ο α^2 είναι άρτιος.
- Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι ο α είναι περιττός.
- Άρα, ο α είναι άρτιος.

ii. Η Μέθοδος της Εις άτοπον Απαγωγής έχει τις ρίζες της στους Πυθαγορείους, οι οποίοι έδειξαν με τον τρόπο αυτό ότι μερικοί αριθμοί είναι άρρητοι. Για παράδειγμα, θα δείξουμε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.[3]

"παράλογο" συμπέρασμα είτε να αποδείξουν ότι ένα συμπέρασμα είναι σωστό με το επιχείρημα ότι αν αυτό ήταν λάθος, το συμπέρασμα θα ήταν επίσης "παράλογο".

[2] Η Πρόταση Q δεν μπορεί να είναι ταυτόχρονα αληθής και ψευδής! Αυτό είναι και το περιεχόμενο του *κανόνα του εξαιρεταίου μέσου* που εισήγαμε ο Αριστοτέλης.

[3] Ισοδύναμα, οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 = 2$ είναι άρρητοι αριθμοί.

- Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλ. ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός, δηλ. ότι μπορεί να γραφτεί ως πηλίκο δύο ακεραίων (με τον ακέραιο του παρονομαστή να είναι διάφορο του μηδενός), δηλ. ότι $\exists p, q \in \mathbb{Z}$ με $q \neq 0$ τέτοιοι ώστε $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
- Προχωράμε στα λογικά συμπεράσματα τα οποία θα μας οδηγήσουν σε αντίφαση με την αρχική υπόθεση. Παρατηρούμε ότι οι αριθμοί p και q δεν μπορεί να είναι και οι δύο άρτιοι γιατί αν ήταν, το ανωτέρο κλάσμα θα απλοποιείτω περαιτέρω. Αλλά
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$$
και άρα ο p είναι άρτιος. Συνεπώς, ο q είναι περιττός. Τώρα, αφού ο p είναι άρτιος, θα υπάρχει $l \in \mathbb{Z}$ τέτοιος ώστε $p = 2l$. Έτσι,
$$\begin{cases} 2q^2 = p^2 \\ \\ p = 2l \end{cases} \Rightarrow 2q^2 = (2l)^2 \Rightarrow 2q^2 = 4l^2 \Rightarrow q^2 = 2l^2$$
και άρα ο q^2 είναι άρτιος. Όμως, ξέρουμε από πρίν ότι τότε και ο q θα είναι άρτιος.
- Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι ο q είναι περιττός.
- Άρα, ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Παρατήρηση

Στην περίπτωση που θέλουμε να δείξουμε ότι $P \Rightarrow Q$ και οι προτάσεις P και Q περιλαμβάνουν έκαστη συμπληρωματικά ενδεχόμενα (δηλ. ενδεχόμενα που είτε το ένα ισχύει είτε το άλλο) τότε η μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής λαμβάνει τη μορφή της αντίστροφης μεθόδου. Συγκεκριμένα, αν ξεκινώντας *μόνο* από την $\neg Q$ καταλήξουμε στην $\neg P$, τότε έχουμε την αντίστροφη μέθοδο, σε αντίθεση με την εις άτοπον απαγωγή η οποία μας εγγυάται την ορθότητα της πρότασης $P \Rightarrow Q$ αν φτάσουμε σε *οποιαδήποτε* αντίφαση (όχι μόνο στην $\neg P$).

➞Για παράδειγμα, θα αποδείξουμε την πρόταση

Έστω $x \in \mathbb{Z}$ με $3x + 5$ άρτιο. Τότε ο x είναι περιττός.

- Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλ. ότι ο x είναι άρτιος. Τότε $x = 2l$ για κάποιο $l \in \mathbb{Z}$.
- Είναι
$$3x + 5 = 3 \cdot 2l + 5 = 6l + 5 = 2 \cdot 3l + 4 + 1 = 2 \cdot (3l + 2) + 1$$
και άρα $3x + 5$ περιττός.
Έτσι, δείξαμε ότι αν ο x *ήταν* άρτιος, τοτε ο $3x + 5$ θα ήταν περιττός και άρα (στην αντίθετη περίπτωση) ισχύει το ζητούμενο.

➞Ένα άλλο παράδειγμα είναι το εξής:

Έστω ότι $A \subseteq B$. Τότε, αν $x \notin B \Rightarrow x \notin A$

1ος τρόπος (μέθοδος της εις άτοπον απαγωγής)
- Υποθέτουμε ότι ισχύει το αντίθετο, δηλ. ότι $x \in A$.
- Τότε, αφού $A \subseteq B$, θα είναι $x \in B$.
- Αυτό όμως είναι άτοπο, γιατί υποθέσαμε ότι $x \notin B$.
- Άρα, $x \notin A$.

2ος τρόπος (αντίστροφη μέθοδος)

Υποθέτουμε ότι $x \in A$. Τότε, αφού $A \subseteq B$, θα είναι $x \in B$. Άρα, αν $x \notin B$, τότε $x \notin A$.

D. Μαθηματική Επαγωγή

Είδαμε για $\alpha \neq \beta$ τις ταυτότητες
$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) \quad \text{και} \quad \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

οι οποίες προκύπτουν από τις διαιρέσεις $(\alpha^2 - \beta^2):(\alpha - \beta)$ και $(\alpha^3 - \beta^3):(\alpha - \beta)$ αντίστοιχα. Προχωρώντας στη διαίρεση $(\alpha^4 - \beta^4):(\alpha - \beta)$, βρίσκουμε ότι

$$(\alpha^4 - \beta^4):(\alpha - \beta) = \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta^3$$

Συγκρίνοντας τους πιο πάνω τύπους, μπορούμε να διαπιστώσουμε τη μορφή του αποτελέσματος της διαίρεσης $(\alpha^\nu - \beta^\nu):(\alpha - \beta)$ **για κάθε φυσικό αριθμό ν :**

$$\frac{\alpha^\nu - \beta^\nu}{\alpha - \beta} = \alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 + \cdots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\alpha^\nu - \beta^\nu = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^{\nu-1} + \alpha^{\nu-2}\beta + \alpha^{\nu-3}\beta^2 + \cdots + \alpha\beta^{\nu-2} + \beta^{\nu-1})$$

Θα δείξουμε ότι με αφετηρία την ταυτότητα $\alpha - \beta = \alpha - \beta$, μπορούμε να πάρουμε βήμα βήμα τους πιο πάνω τύπους. Έχουμε

$$\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta)\alpha + \beta(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta)$$

Με το ίδιο σκεπτικό με πρίν, έχουμε

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)\alpha^2 + \beta(\alpha^2 - \beta^2)$$

Αλλά, από πρίν, $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta)$ και άρα,

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)\alpha^2 + \beta \cdot (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) = (\alpha - \beta) \cdot [\alpha^2 + \beta \cdot (\alpha + \beta)] = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha^2 + \beta \cdot \alpha + \beta)$$

Αν συνεχίσουμε έτσι, μπορούμε, να πάρουμε τον επόμενο τύπο από τον προηγούμενο και αυτό είναι που εννοούμε ότι ο τύπος ισχύει $\nu \in \mathbb{N}$. Βέβαια, η αφετηρία μας (ο αρχικός τύπος) μπορεί να ξεκινά για τιμή του $\nu \geq 2$. Η πιο πάνω διαδικασία αναφέρεται ως μέθοδος της Μαθηματικής Επαγωγής (ή τέλειας επαγωγής) η οποία διατυπώνεται ως εξής:

Πρόταση (αρχή της Μαθηματικής επαγωγής)

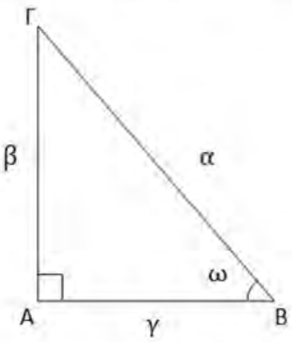
Αν ένας Προτασιακός τύπος $\mathrm{P}(\nu)$

- Αληθεύει για $\nu = 1$
- Αν (υποθέτοντας ότι) αληθεύει για τον (τυχαίο φυσικό αριθμό) $\nu = k$, τότε αληθεύει και για τον επόμενό του, δηλ. για $\nu = k + 1$,

τότε αυτός αληθεύει για όλους τους φυσικούς αριθμούς.

Κεφάλαιο 2 • Τριγωνομετρία Ι

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί (οξείας) γωνίας $0 < \omega < \frac{\pi}{2}$ και βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες



$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{\gamma}{\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \frac{\beta}{\gamma}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \quad \sigma\varphi\theta = \frac{1}{\varepsilon\varphi\theta}, \quad \tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta}, \quad \sigma\tau\varepsilon\mu\theta = \frac{1}{\eta\mu\theta}$$

$\eta\mu\omega \in [-1,1]$

$\sigma\upsilon\nu\omega \in [-1,1]$

$\varepsilon\varphi\omega \in (-\infty, +\infty)$

$\sigma\varphi\omega \in (-\infty, +\infty)$

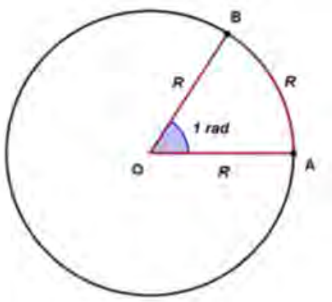
$\eta\mu^2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1$

$\tau\varepsilon\mu^2\alpha = 1 + \varepsilon\varphi^2\alpha$

$\sigma\tau\varepsilon\mu^2\alpha = 1 + \sigma\varphi^2\alpha$

Μοίρες ↔ Ακτίνια

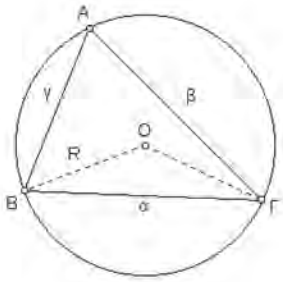
$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{\mu}{180^o}$$



θ	0^0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
ημθ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
συνθ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
εφθ	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-
σφθ	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	0	0

θ	−θ	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	π − θ	π + θ	$\frac{3\pi}{2}-\theta$	$\frac{3\pi}{2}+\theta$
ημθ	−ημθ	συνθ	συνθ	ημθ	−ημθ	−συνθ	−συνθ
συνθ	συνθ	ημθ	−ημθ	−συνθ	−συνθ	−ημθ	ημθ
εφθ	−εφθ	σφθ	-σφθ	−εφθ	εφθ	σφθ	−σφθ
σφθ	−σφθ	εφθ	−εφθ	−σφθ	σφθ	εφθ	−εφθ

Θεώρημα [Νόμος Ημιτόνων]



Σε κάθε τρίγωνο τα μήκη των πλευρών του είναι ανάλογα προς τα ημίτονα των απέναντι γωνιών του. Ο λόγος αυτός είναι ίσος με το διπλάσιο της ακτίνας R του περιγεγραμμένου κύκλου στο τρίγωνο. Δηλαδή, σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}}=\frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}}=\frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}}=2R$$

Η πιο πάνω σχέση εξυπακούει στο ότι

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}}=\frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}},\qquad \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}}=\frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}},\qquad \frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}}=\frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}}$$

και

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\hat{A}}=2R,\qquad \frac{\beta}{\eta\mu\hat{B}}=2R,\qquad \frac{\gamma}{\eta\mu\hat{\Gamma}}=2R$$

Θεώρημα [Νόμος Συνημιτόνων]

Το τετράγωνο του μήκους μιας πλευράς τριγώνου είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των άλλων δύο πλευρών, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο του μήκους των δύο άλλων πλευρών επί το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν οι πλευρές αυτές. Δηλαδή, σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύουν οι σχέσεις:

$$\begin{cases}\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{A}\\ \beta^2=\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\sigma\upsilon\nu\hat{B}\\ \gamma^2=\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}\end{cases}\quad \acute{\eta}\quad \begin{cases}\sigma\upsilon\nu\hat{A}=\frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}\\ \sigma\upsilon\nu\hat{B}=\frac{\alpha^2+\gamma^2-\beta^2}{2\alpha\gamma}\\ \sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}=\frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}\end{cases}$$

Εμβαδόν Τριγώνου

$$E_{AB\Gamma}=\frac{\alpha\beta\eta\mu\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\alpha\gamma\eta\mu\hat{B}}{2}=\frac{\beta\gamma\eta\mu\hat{A}}{2}$$

Πόρισμα

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε το ύψος υ_A από την κορυφή Α του τριγώνου. Τότε:

$$(\alpha)\ \upsilon_A=\frac{\beta\gamma}{2R}\quad \text{και}\quad (\beta)\ E_{AB\Gamma}=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

Τριγωνομετρικοί Αριθμοί Αθροίσματος και διαφοράς δύο γωνιών

$$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\beta\sigma\upsilon\nu\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta}{1-\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$$

$$\varepsilon\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\varepsilon\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\beta}{1+\varepsilon\varphi\alpha\varepsilon\varphi\beta}$$

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta-1}{\sigma\varphi\alpha+\sigma\varphi\beta}$$

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha}$$

Πόρισμα [Τριγωνομετρικοί Αριθμοί του διπλασίου μιας γωνιάς]

$$\eta\mu(2\alpha)=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\varepsilon\varphi(2\alpha)=\frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\eta\mu^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu(2\alpha)}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha=\frac{1+\sigma\upsilon\nu(2\alpha)}{2}$$

Κεφάλαιο 3 • Απόλυτη Τιμή-Συναρτήσεις

Ορισμός

Απόλυτη τιμή ενός πραγματικού αριθμού x λέγεται ο (μη αρνητικός) αριθμός

$$|x| = \begin{cases} x, αν\ x \geq 0 \\ -x, αν\ x < 0 \end{cases} \quad ή \ |x| = \begin{cases} x, αν\ x > 0 \\ -x, αν\ x \leq 0 \end{cases}$$

Διαδικασία γραφής μιας παράστασης χωρίς απόλυτα

Όταν μας δίνουν μια παράσταση με απόλυτη τιμή μεταβλητής (αγνώστου), χωρίς να μας δώσουν το διάστημα στο οποίο αυτός λαμβάνει τις τιμές του, για να γράψουμε την παράσταση χωρίς απόλυτα, πρέπει να βρούμε το πρόσημο των παραστάσεων εντός της απόλυτης τιμής και να χρησιμοποιήσουμε τον πιο πάνω ορισμό.

Όταν μας δίνουν μια παράσταση με απόλυτη τιμή μεταβλητής (αγνώστου), δίνοντοντάς μας το διάστημα στο οποίο αυτός λαμβάνει τις τιμές του, για να γράψουμε την παράσταση χωρίς απόλυτα, πρέπει να βρούμε το πρόσημο των παραστάσεων εντός της απόλυτης τιμής για τις τιμές αυτές του αγνώστου και να χρησιμοποιήσουμε τον πιο πάνω ορισμό.

Ιδιότητες Απόλυτης Τιμής

1. $|x| \geq x, \forall x \in \mathbb{R}$
2. $|x| \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$
3. $|x| = \max\{x, -x\}$ [4]
4. $\forall x \in \mathbb{R}, |x| = |-x|$ ή γενικότερα $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| = |y-x|$
5. $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε οτι $|x|^2 = x^2$ (2)
6. $\forall x \in \mathbb{R}$ έχουμε οτι $\sqrt{x^2} = |x|$ (3)
7. Αν $\varepsilon > 0$, τότε $|x| = \varepsilon \Leftrightarrow x = \pm\varepsilon$ (4)
8. Αν $\varepsilon > 0$, τότε $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ (5)
9. $\forall x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε $|x| = |y| \Leftrightarrow x = \pm y$ (6)

Πόρισμα

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |x-y| = 0 \Leftrightarrow x = y$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \big||x|\big| = |x|$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -|x| \leq x \leq |x|$$

Αν $\varepsilon > 0$, τότε

$$|x| > \varepsilon \Leftrightarrow (x < -\varepsilon) \vee (x > \varepsilon), \ \ δηλ.\ |x| > \varepsilon \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - [-\varepsilon, \varepsilon]$$

Πρόταση

Ισχύουν:

$$|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|, \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$
$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}\ με\ \beta \neq 0$$
$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

[Τριγωνική Ανισότητα]

$$\big||\alpha| - |\beta|\big| \leq |\alpha + \beta|, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

[Αντίστροφη Τριγωνική Ανισότητα]

Εξισώσεις με απόλυτες τιμές του αγνώστου

Η εξίσωση της μορφής $|x| = |\alpha|$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $|x|^2 = |\alpha|^2$ η οποία είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $x^2 = a^2$ η οποία είναι ισοδύναμη με την $x^2 - a^2 = 0$ η οποία είναι ισοδύναμη με την $(x-a)(x+a) = 0$ η οποία έχει λύσεις τις $\pm\alpha$. Συνεπώς, για να λύσουμε εξίσωση τέτοιας μορφής, είτε χρησιμοποιούμε την πρώτη ιδιότητα της απολύτου τιμής είτε υψώνουμε στο τετράγωνο και τα 2 μέλη της. Το γεγονός αυτό δηλώνει τη σχέση συμμετρίας που έχουν η απόλυτη τιμή και το τετράγωνο ενός αριθμού.

Ανισώσεις με απόλυτες τιμές του αγνώστου

Σύμφωνα με την ιδιότητα (8) της απολύτου τιμής, έχουμε ότι αν $\varepsilon > 0$, τότε

$$|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$$

Επίσης, γνωρίζουμε ότι $x^2 \leq \varepsilon^2 \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$. Συνεπώς, οι δύο αυτές ανισώσεις είναι ισοδύναμες. Το γεγονός αυτό δηλώνει τη σχέση συμμετρίας που έχουν η απόλυτη τιμή και το τετράγωνο ενός αριθμού. Έτσι, μπορούμε να διακρίνουμε τα εξής:

- Αν έχουμε μια ανίσωση της μορφής $|x| - |a| \geq 0$, αυτή είναι ισοδύναμη με την $|x| \geq |a|$, αυτή είναι ισοδύναμη με την τότε $|x|^2 \geq |a|^2$ ή ισοδύναμα, με την

[4] Η έκφραση αυτή λαμβάνει ως τιμή τη μεγαλύτερη από τις $x, -x$

- $x^2 \geq a^2$ η οποία έχει σύνολο λύσεων το $(x \leq -|a|) \vee (x \geq |a|)$. Συνεπώς,για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής $|x| \geq |a|$, είτε υψώνουμε και τα 2 μέλη στο τετράγωνο είτε χρησιμοποιούμε απευθείας την ιδιότητα της απολύτου τιμής[5]. Βέβαια, στην απλή περίπτωση που $a \geq 0$, η ανίσωση γίνεται $|x| \geq a$. Ομοίως και για ανισώσεις της μορφής $|x| < |a|$ [6]
- Γενικότερα, αν έχουμε μια ανίσωση της μορφής $|P(x)| \geq |a|$, όπου $P(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ μια ρητή συνάρτηση, αυτή είναι ισοδύναμη με την τότε $|P(x)|^2 \geq |a|^2$ ή ισοδύναμα, με την $P^2(x) \geq a^2$ η οποία έχει σύνολο λύσεων το $(P(x) \leq -|a|) \vee (P(x) \geq |a|)$. Συνεπώς,για να λύσουμε μια ανίσωση της μορφής $|P(x)| \geq |a|$, είτε υψώνουμε και τα 2 μέλη στο τετράγωνο είτε χρησιμοποιούμε απευθείας την ιδιότητα της απολύτου τιμής. Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι η ανίσωση έχει νόημα για τα x στα οποία δε μηδενίζεται η παράσταση $B(x)$.
- Εκτός από τις πιο πάνω απλές περιπτώσεις, έχουμε και τις γενικότερες $|P(x)| \geq |Q(x)|, |P(x)| < |Q(x)|$ ή $|P(x)| + |Q(x)| \geq |a|$ όπου $P(x)$ και $Q(x)$ παραστάσεις[7] με απόλυτα του x και $a \in \mathbb{R}$. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις, μπορούμε να αναχθούμε στα προηγούμενα ενώ στην τρίτη περίπτωση πρέπει να λάβουμε τις τιμές που παίρνουν οι παραστάσεις ξεχωριστά.

Ορισμός

Συνάρτηση είναι μια αντιστοιχία στοιχείων ενός συνόλου A σε ένα άλλο σύνολο B στην οποία επιτρέπεται δύο ή περισσότερα στοιχεία του A να απεικονίζονται (αντιστοιχούν) σε έναν στοιχείο του B και ΔΕΝ επιτρέπεται ένα στοιχείο του A να απεικονίζεται σε δύο ή περισσότερα στοιχεία του B. Την αντιστοιχία $A \to B$ τη συμβολίζουμε με γράμματα του λατινικού αλφαβήτου, π.χ. $f: A \to B$. Σε μια συνάρτηση $f: A \to B$, το Α λέγεται *Πεδίο Ορισμού (Π.Ο.)* και το Β *το Πεδίο Τιμών (Π.Τ.) της* f.

Κάθε στοιχείο του συνόλου A ονομάζεται *όρισμα της συνάρτησης* f. Για κάθε όρισμα $\alpha \in A$, το αντίστοιχο μοναδικό y του συνόλου τιμών ονομάζεται *η τιμή της συνάρτησης τιμή στο α ή η εικόνα του α* μέσω της f και γράφεται δε ως $f(\alpha)$. Η αντιστοίχιση αυτή γράφεται συντομογραφικά ως $y = f(\alpha)$. Το τυχαίο στοιχείο του συνόλου A ονομάζεται *ανεξάρτητη μεταβλητή* της συνάρτησης, εώ το τυχαίο στοιχείο του συνόλου B ονομάζεται *εξαρτημένη μεταβλητή* της συνάρτησης.

Το **γράφημα** μιας συνάρτησης $f: A \to B$ είναι το *σύνολο* που αποτελείται από τα διατεταγμένα ζεύγη της αντιστοιχίας, δηλ. το

$$G(f) = \{(\alpha, \beta) | \, \beta = f(\alpha)\}$$

Επίσης,

$$f(A) = \{\beta \in B \mid \exists \alpha \in A \; \mu\varepsilon \; f(\alpha) = \beta\}$$

Λέμε ότι μια αντιστοιχία είναι *καλά ορισμένη* εαν το αποτέλεσμα της σχέσης που αυτή αναπαριστά (δηλ. η τιμή) παραμένει το ίδιο
όταν διαλέξουμε διαφορετική έκφραση για το αντίστοιχο στοιχείο στο πεδίο ορισμού της.

Συμβολισμός

Ταυτοτική (ή ταυτότητα) θα καλούμε τη συνάρτηση $id: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$id(x) = x$$

Σημείωση: Σαφέστατα, μια **ρητή** συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, για να είναι καλά ορισμένη, πρέπει $Q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Ορισμός

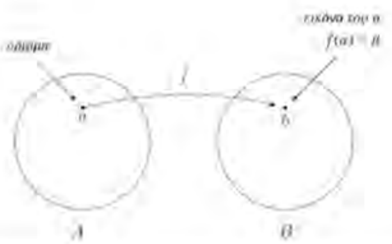
Έστω $f: A \to B$ συνάρτηση κα έστω $\Gamma \subseteq A$. Το σύνολο $\{f(\gamma) \mid \gamma \in \Gamma\}$ θα λέγεται η **εικόνα** του συνόλου Γ μέσω της f και θα συμβολίζεται με $f(\Gamma)$.

---

[5] $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow (x \geq \varepsilon) \vee (x \leq -\varepsilon) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - (-\varepsilon, \varepsilon)$ (όπου $\varepsilon > 0$)

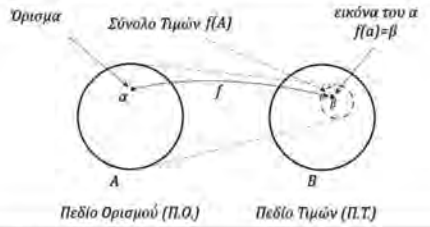
[6] $|x| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x < \varepsilon \Leftrightarrow x \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ (όπου $\varepsilon > 0$)

[7] σαφώς και για περισσότερες από 2 παραστάσεις



Ορισμός

Έστω $f: A \rightarrow B$ συνάρτηση κα έστω $\Gamma \subseteq A$. Η εικόνα του συνόλου η εικόνα του συνόλου Γ μέσω της f δηλ. το σύνολο $f(A) = \{f(\alpha) \mid \alpha \in A\}$ θα λέγεται το σύνολο τιμών της f. Με R(f) συμβολίζουμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης f.



Μεθοδολογία

Για να βρούμε το σύνολο τιμών μιας συνάρτησης της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $(\alpha \neq 0)$, ακολουθούμε τις εξής διαδικασίες:

Αλγεβρικά

Θεωρούμε την εξίσωση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ την οποία φέρνουμε στη μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma - y = 0$. Αντιμετωπίζουμε την τελευταία εξίσωση ως μια παραμετρική εξίσωση (με παράμετρο το y) και άγνωστο το x. Για να έχει (πραγματικές) λύσεις η εξίσωση αυτή (η οποία είναι 2ου βαθμού ως προς το x) πρέπει η διακρίνουσά του να είναι ≥ 0:

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - 4\alpha(\gamma - y) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\dfrac{\Delta}{4\alpha}, \alpha\nu\ \alpha > 0 \\ \\ y \leq -\dfrac{\Delta}{4\alpha}, \alpha\nu\ \alpha < 0 \end{cases}$$

Βρίσκοντας την κορυφή της αντίστοιχης παραβολής

Θεωρούμε την εξίσωση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ την οποία φέρνουμε στη μορφή

$$y = \alpha(x + \kappa)^2 + \delta$$

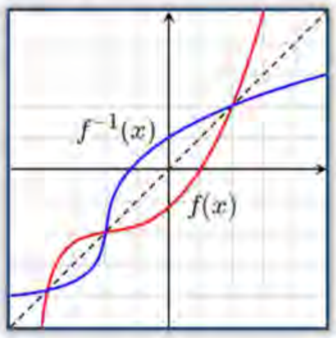
Τότε, η κορυφή της βρίσκεται στο σημείο $(-\kappa, \delta)$ και αν $\alpha > 0$, τότε η παραβολή έχει ελάχιστο και άρα $y \leq \delta$ ενώ αν $\alpha < 0$, τότε η παραβολή έχει μέγιστο και άρα $y \geq \delta$. Πράγματι:

- Έστω $\alpha > 0$. Τότε $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x+\kappa)^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha(x+\kappa)^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha(x+\kappa)^2 + \delta \geq \delta$
- Έστω $\alpha < 0$. Τότε $\forall x \in \mathbb{R}$, $(x+\kappa)^2 \geq 0 \Rightarrow \alpha(x+\kappa)^2 \leq 0 \Rightarrow \alpha(x+\kappa)^2 + \delta \leq \delta$

Ορισμός

Έστωσαν $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις. Ορίζουμε ως fog τη συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο και διαβάζουμε "σύνθεση της f με την g".

της είναι η f, δηλ. $(f^{-1})^{-1} = f$.



Για να έχει νόημα το πιο πάνω αντικείμενο, ως πεδίο ορισμού της fog πρέπει να πάρουμε όλα εκείνα τα x στο πεδίο ορισμού της g για τα οποία οι εικόνες τους μέσω της g ανήκουν στο πεδίο ορισμού της f, δηλ.

$$D(fog) = \{x \in B | g(x) \in A\}$$

δηλ. $g(B) \subseteq A$

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f: A \rightarrow B$ λέγεται 1-1 (ένα προς ένα) αν ο πιο κάτω προτασιακός τύπος

$(\forall x_1, x_2 \in A\ \mu\varepsilon\ x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))$είναι αληθής.

Ισότητα συναρτήσεων

Δυο συναρτήσεις είναι ίσες αν έχουν ίδιο πεδίο ορισμού, ίδιο πεδίο τιμών και οι τιμές τους συμφωνούν (είναι ίσες) σε κάθε στοιχείο του π.ο. τους.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται **επί** αν $f(A) = B$.

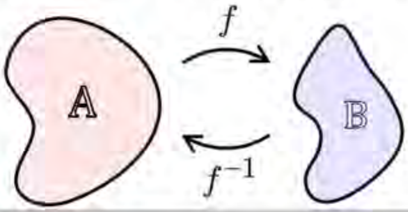
Ορισμός

Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση. Ως αντίστροφη *συνάρτηση* της f ονομάζουμε μια *συνάρτηση* $g: B \to A$ για την οποία ισχύει

$f(\alpha) = \beta \Leftrightarrow g(\beta) = \alpha, \quad \forall \alpha \in A \quad \text{και} \quad \forall \beta \in B.$ $(*)$

Αν υπάρχει τέτοια *συνάρτηση*, τότε λέμε οτι η f είναι αντιστρέψιμη και συμβολίζουμε την g με f^{-1}.

Δοθείσης μιας συνάρτησης $f: A \to B$ 1-1 και επί, τότε μια συνάρτηση g είναι αντίστροφή της αν και μόνο αν
$(fog)(\beta) = \beta, \forall \beta \in B \;\; \text{και} \; (gof)(\alpha) = \alpha, \forall \alpha \in A$



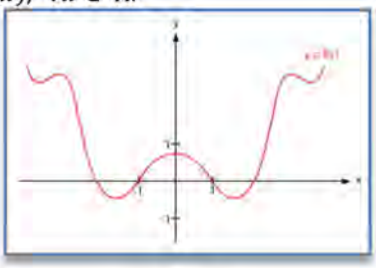
Πόρισμα

Αν f μια 1-1 και επί συνάρτηση, τότε αυτή και η αντίστροφή της είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $\psi = x$.

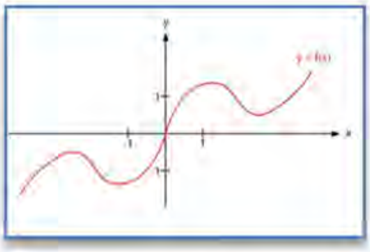
Αν f μια 1-1 και επί συνάρτηση, τότε και η αντίστροφή της είναι και αυτή αντιστρέψιμη και μάλιστα η αντίστροφη της g είναι η ίδια η f, δηλ. $g^{-1} = f$.

Ορισμός

- Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται **άρτια** αν $\forall x \in A$, το $(-x) \in A$ και $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in A$.
- Μια συνάρτηση $f: A \to B$ λέγεται **περιττή** αν $\forall x \in A$, το $(-x) \in A$ και $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in A$.

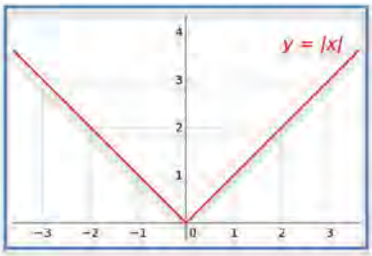


άρτια



περιττή

Η συνάρτηση **Απόλυτη τιμή** είναι η αντιστοιχία $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x| = \begin{cases} x, \alpha\nu\ x \geq 0 \\ -x, \alpha\nu\ x < 0 \end{cases}$



Πράξεις μεταξύ συναρτήσεων

Αν $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ δυο συναρτήσεις και $A \cap B \neq \emptyset$ (δηλ. τα π.ο. τους έχουν κοινά στοιχεία) τότε ορίζουμε

- ως **άθροισμα** των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση f + g ως
  $f + g: A \cap B \to \mathbb{R}$ με $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
  $\forall x \in (A \cap B)$
  [Η συνάρτηση αυτή έχει νόημα (είναι καλά ορισμένη) γιατί το $A \cap B \neq \emptyset$ και στο σύνολο αυτό ορίζονται τα f(x) και $g(x)$]

- ως **διαφορά** των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση f − g ως
  $f - g: A \cap B \to \mathbb{R}$ με $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
  $\forall x \in (A \cap B)$
  [Η συνάρτηση αυτή έχει νόημα-όπως πιο πρίν]

- ως **γινόμενο** των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση $f \cdot g$ ως
  $f \cdot g: A \cap B \to \mathbb{R}$ με $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$
  $\forall x \in (A \cap B)$
  [Η συνάρτηση αυτή έχει νόημα-όπως πιο πρίν]

- ως **πηλίκο** των συναρτήσεων f και g τη συνάρτηση $f \cdot g$ ως
  $$\frac{f}{g}: \Gamma \to \mathbb{R} \text{ με } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$
  $\forall x \in \Gamma$, όπου $\Gamma = \{x \in (A \cap B): g(x) \neq 0\}$
  [Η συνάρτηση αυτή έχει νόημα αφού στο σύνολο ορίζονται Γ τα $f(x)$ και $g(x)$ αλλά και το πηλίκο $\frac{f(x)}{g(x)}$]

Κεφάλαιο 4 • Τριγωνομετρία ΙΙ

Μετατροπή γινομένου δύο τριγωνομετρικών αριθμών σε άθροισμα ή διαφορά	Μετατροπή αθροίσματος ή διαφοράς δύο τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενο
$2\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)$	$\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta=2\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$2\sigma\upsilon\nu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$	$\eta\mu\alpha-\eta\mu\beta=2\eta\mu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$
$2\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)$	$\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta=2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$
	$\sigma\upsilon\nu\alpha-\sigma\upsilon\nu\beta=2\eta\mu\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cdot\eta\mu\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$

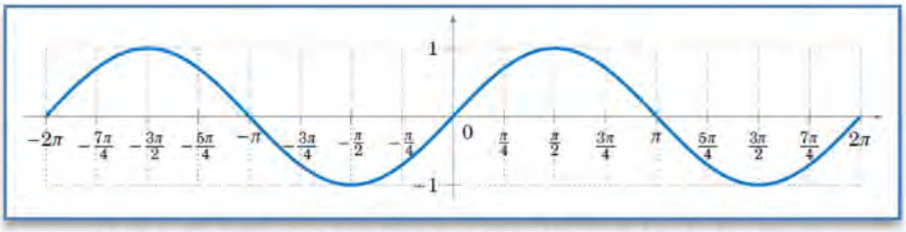
Τριγωνομετρικές εξισώσεις

$\eta\mu\alpha=\eta\mu\beta \iff (\alpha=2\kappa\pi+\beta,\quad \kappa\in\mathbb{Z})\vee(\alpha=2\kappa\pi+(\pi-\beta),\quad \kappa\in\mathbb{Z})$

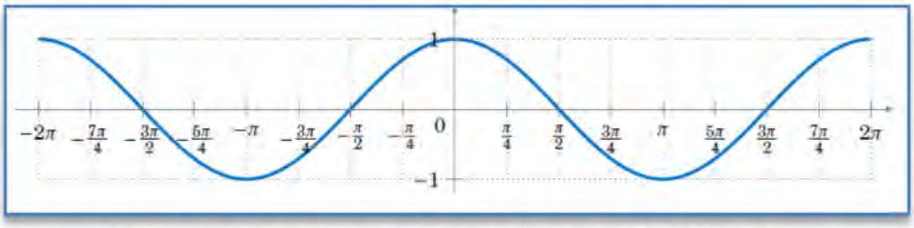
$\sigma\upsilon\nu\alpha=\sigma\upsilon\nu\beta \iff \alpha=2\kappa\pi\pm\beta,\quad \kappa\in\mathbb{Z}$

$\varepsilon\varphi\alpha=\varepsilon\varphi\beta \iff \alpha=\kappa\pi+\beta,\quad \kappa\in\mathbb{Z}$

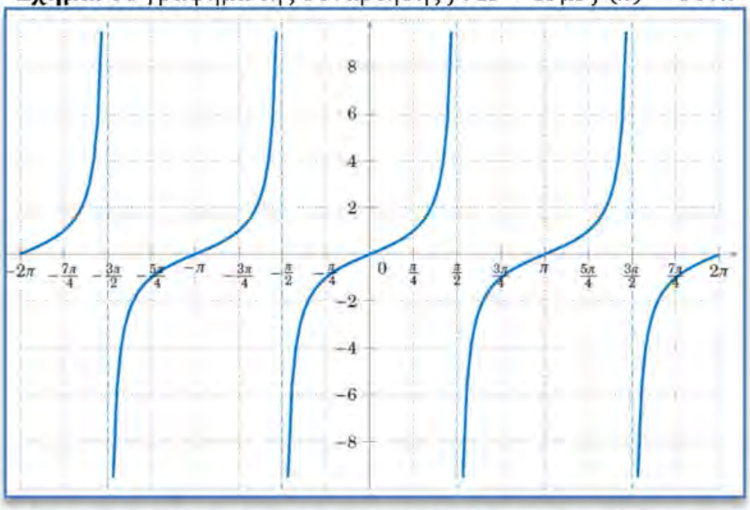
$\sigma\varphi\alpha=\sigma\varphi\beta. \iff \alpha=\kappa\pi+\beta,\quad \kappa\in\mathbb{Z}$



Σχήμα: Το γράφημα της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\eta\mu x$



Σχήμα: Το γράφημα της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$



Σχήμα: Το γράφημα της συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\varepsilon\varphi x$

Κεφάλαιο 5 • Όριο-Συνέχεια συνάρτησης

Πρόταση [Αλγεβρικές Ιδιότητες Ορίων]

Έστω $c \in \mathbb{R}$. Έστω $f, g: I \to \mathbb{R}$ (I διάστημα) συναρτήσεις και έστω x_0 σημείο συσσώρευσης του I τέτοιο ώστε τα όρια $\lim_{x\to x_0} f(x)$ και $\lim_{x\to x_0} g(x)$ να υπάρχουν. Τότε,

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c\, f(x) = c \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right) \cdot \left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$

4. $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$

5. $\lim\limits_{x\to x_0} f^{\nu}(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^{\nu}$ $(\nu \in \mathbb{N})$

6. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = \left|\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right|$.

7. $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$ $(\nu \in \mathbb{N})$

   [Αν ν άρτιος, υποθέτουμε ότι είτε το $\lim_{x\to x_0} f(x) > 0$ είτε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ και η $\sqrt[\nu]{f(x)}$ ορίζεται σε μια περιοχή του $x = 0$]

➢ Η σχέση

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

είναι ισοδύναμη με τη

$$\lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x) = 0,$$

ή (από την Προηγούμενη Πρόταση) με την

$$\lim_{x\to a} [f(x) - g(x)] = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι το να υπάρχουν τα δύο αυτά όρια και να είναι ίσα μεταξύ τους είναι ισοδύναμο με το να υπάρχει το όριο της διαφοράς τους και να είναι ίσο με 0.

Η πιο πάνω Πρόταση γενικεύεται για για περισσότερες από μια συναρτήσεις:

Πρόταση

Έστω $c \in \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Έστω $f_1, f_2, \dots, f_\nu$ $(\nu \in N)$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε τα όρια

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x), \lim_{x\to x_0} f_2(x), \dots, \lim_{x\to x_0} f_\nu(x)$$

να υπάρχουν. Τότε,

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [f_1(x) + \dots + f_\nu(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) + \dots + \lim\limits_{x\to x_0} f_\nu(x)$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f_1(x) \cdot \dots \cdot f_\nu(x)] = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)\right) \cdot \dots \cdot \left(\lim\limits_{x\to x_0} f_\nu(x)\right)$

Πρόταση

Έστω $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ένα πολυώνυμο βαθμού $n \in \mathbb{N}$ με $a_n \neq 0$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0),$$

δηλ.

$$\lim_{x\to x_0}[a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \cdots + a_1 x + a_0] = a_\nu {x_0}^\nu + a_{\nu-1}{x_0}^{\nu-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0.$$

Παρατήρηση

Η πιο πάνω Πρόταση μας λέει οτι (για p όπως πάνω)

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p\left(\lim_{x\to x_0} x\right) \quad (*),$$

δηλ.

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = a_n\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^\nu + a_{n-1}\left(\lim_{x\to x_0} x\right)^{\nu-1} + \cdots + a_1 \lim_{x\to x_0} x + a_0$$

ή με άλλα λόγια, ότι το όριο περνά μέσα στο πολυώνυμο. Η ιδιότητα $(*)$ δεν ισχύει εν γένει για όλες τις συναρτήσεις. Επίσης, το πολυώνυμο θεωρείται ως *συνάρτηση* του x. Όμως, στην επόμενη παράγραφο, θα μελετήσουμε σε περισσότερο βάθος συγκεκριμένες συναρτήσεις οι οποίες έχουν την "καλή" αυτή ιδιότητα. Συγκεκριμένα, θα δούμε ότι η ιδιότητα αυτή αποτελεί χαρακτηριστικό των *συνεχών* συναρτήσεων. Αποδεικνύεται δε ότι δύο από τις "καλες" (συνεχείς) αυτές συναρτήσεις είναι και οι $f(x) = \eta\mu x$, $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$ και η εκθετική/λογαριθμική συνάρτηση.

Στο ίδιο πνεύμα της προηγούμενης παρατήρησης, αν $\nu \in \mathbb{N}$, τότε

$$\lim_{x\to x_0} p^\nu(x) = \left(\lim_{x\to x_0} p(x)\right)^\nu$$

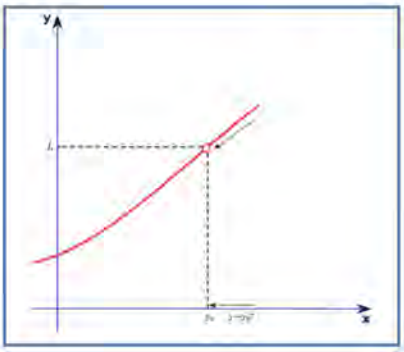
Η έννοια των πλευρικών ορίων

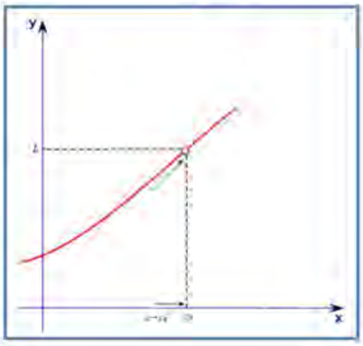
Όταν καθώς το x προσεγγίζει έναν πραγματικό αριθμό x_0 από τα δεξιά, δηλ. αν καθώς το x παίρνει τιμές $> x_0$, έχουμε ότι οι τιμές μίας συνάρτησης f πλησιάζουν έναν πραγματικό αριθμό L γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

Όταν καθώς το χ προσεγγίζει έναν πραγματικό αριθμό x_0 από τα αριστερά, δηλ. αν καθώς το x παίρνει τιμές $< x_0$, έχουμε ότι οι τιμές μίας συνάρτησης f πλησιάζουν έναν πραγματικό αριθμό L γράφουμε

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$$





Θεώρημα

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα το οποίο περιέχει το σημείο x_0 (εκτός ίσως από το σημείο αυτό). Τότε

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists \delta > 0 :\ \text{για } 0 < |x - x_0| < \delta, \quad f(x) > M$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M < 0\ \exists \delta > 0 :\ 0 < |x - x_0| < \delta, \quad f(x) < M$$

Οι συντομογραφίες $\alpha^\pm$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)

Με α^+ θα συμβολίζουμε έναν αριθμό δεξιότερα από τον α και με α^- θα συμβολίζουμε έναν αριθμό αριστερότερα από τον α υπό την έννοια των ορίων που περιγράψαμε πιο πάνω. Έτσι,
Αν $\alpha > 0$, τότε

$$\alpha^+ - \alpha = 0^+ \text{ και } \alpha - \alpha^+ = 0^-.$$

Επίσης,

$$\alpha^- + \alpha = 0^+ \text{ και } \alpha - \alpha^- = 0^-.$$

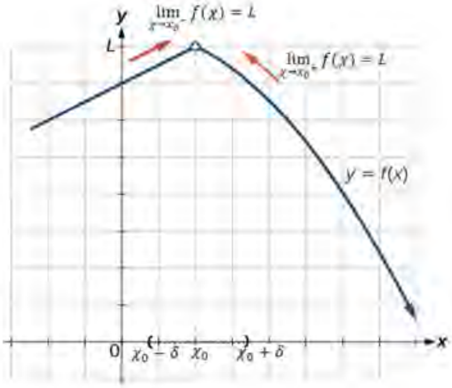
Αν $\alpha < 0$, τότε

$$\alpha^+ - \alpha = 0^+ \text{ και } \alpha - \alpha^+ = 0^-.$$

Επίσης,

$$\alpha^- - \alpha = 0^- \text{ και } \alpha - \alpha^+ = 0^-.$$

Εύρεση πλευρικών ορίων από το γράφημα μιας συνάρτησης



Για να προσδιορίσουμε οπτικά αν ένα όριο υπάρχει (καθώς το x τείνει σε ένα x_0) μέσω της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, παρατηρούμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης σε μιά περιοχή του σημείου x_0, δηλ. αριστερά και δεξιά του σημείου.

Για να καθορίσουμε αν το αριστερό όριο υπάρχει, παρατηρούμε το τμήμα της συνάρτησης αριστερά του σημείου, δηλ. στο διάστημα $(x_0 - \delta, x_0)$ για κάποιο $\delta > 0$. Αν οι αριθμοί $f(x)$ για x στο διάστημα αυτό πλησιάζουν σε κάποιο αριθμό L τότε το αριστερό όριο είναι ο αριθμός αυτός.

Για να καθορίσουμε αν το δεξιό όριο υπάρχει, παρατηρούμε το τμήμα της συνάρτησης δεξιά του σημείου, δηλ. στο διάστημα $(x_0, x_0 + \delta)$ για κάποιο $\delta > 0$. Αν οι τιμές $f(x)$ για x στο διάστημα αυτό πλησιάζουν σε κάποιο αριθμό L τότε το δεξιό όριο είναι ο αριθμός αυτός.

Τέλος, αν το αριστερό όριο ισούται με το δεξιό, τότε το όριο της συνάρτησης στο σημείο αυτό (υπάρχει και) είναι ακριβώς η κοινή τιμή των δύο αυτών ορίων. Αν το όριο υπάρχει, αυτό ΔΕΝ είναι κατανάγκην ίσο με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Αν τα δύο πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, τότε το όριο της συνάρτησης στο σημείο αυτό δεν υπάρχει.

Πρόταση

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Τότε,

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty$$

και

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, \text{αν } n = \text{περιττός} \\ -\infty, \text{αν } n = \text{άρτιος} \end{cases}$$

Επίσης

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0.$$

Όρια ρητών συναρτήσεων όταν $x \to +\infty$ ή $x \to -\infty$

Πρόταση

Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Τότε το

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{\beta_m x^m + \beta_{m-1} x^{m-1} + \cdots + \beta_1 x + \beta_0}$$

υπάρχει αν και μόνο αν $m \geq n$.

Επιτρεπτές Πράξεις στο $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$	$\alpha\cdot(+\infty)=\begin{cases}+\infty, \alpha\nu\ \alpha>0\\ -\infty, \alpha\nu\ \alpha<0\end{cases}$
$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$	$\alpha\cdot(-\infty)=\begin{cases}-\infty, \alpha\nu\ \alpha>0\\ +\infty, \alpha\nu\ \alpha<0\end{cases}$
$(+\infty)+\alpha=+\infty, \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$	$\dfrac{\alpha}{\pm\infty}=0, \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$
$(-\infty)+\alpha=-\infty, \quad \forall\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, \alpha\nu\ \alpha>1\\ 0, \alpha\nu\ 0\le\alpha<1\end{cases}$
$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$	$(+\infty)^{\alpha}=+\infty, \quad \forall\alpha>0$
$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$	$(+\infty)\cdot(-\infty)=-\infty$

Στο δεύτερο παράδειγμα, είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-x^2}=\frac{2}{1-(+\infty)^2}=\frac{2}{1-(+\infty)}=\frac{2}{1+(-\infty)}=\frac{2}{-\infty}=0$$

Βεβαίως, υπάρχουν και αποτελέσματα ορίων που η απευθείας αντικατάστασή τους να μην έχει μονοσήμαντα ορισμένη τιμή:

Μη Επιτρεπτές Πράξεις (Απροσδιόριστες Μορφές)

$(+\infty)+(-\infty)$	0^0
$(-\infty)-(-\infty)$	$1^{\pm\infty}$
$(+\infty)+(-\infty)$	$(\pm\infty)^0$
$(-\infty)+(+\infty)$	$\dfrac{0}{0}$
$0\cdot(\pm\infty)$	$\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

Θεώρημα [Το Κριτήριο Παρεμβολής]
Έστω I ένα διάστημα και $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε κάθε ανοικτή περιοχή του x_0 περιέχει ένα τουλάχιστον σημείο του I, διαφορετικό του x_0. Έστωσαν επίσης συναρτήσεις f, g και h τέτοιες ώστε τα πεδία ορισμού τους να περιέχουν το I και όχι κατανάγκην το x_0. Τότε, αν για κάθε $x\in I, x\neq x_0$ ισχύει

$$g(x)\le f(x)\le h(x)$$

και

$$\lim_{x\to x_0}g(x)=L=\lim_{x\to x_0}h(x),$$

τότε θα είναι και

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=L.$$

Πρόταση
Ισχύει

$$\lim_{x\to0}\eta\mu(x)=0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \lim_{x\to0}\sigma\upsilon\nu(x)=1$$

Πόρισμα

$$\lim_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}=1.$$

Υπολογίζοντας το $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Α. Απ'ευθείας αντικατάσταση

Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης στο x_0

$$f(x_0)$$

$$f(x_0) = \frac{\alpha}{0}$$

όπου $\alpha \neq 0$

Β. Το όριο (πιθανών) να είναι ίσο με $+\infty$ ή $-\infty$

Π.χ.

$$\lim_{x \to 2} \frac{1}{x-2}$$

Χρησιμοποιούμε τις γνωστές συντμήσεις

$$f(x_0) = \alpha$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$

Γ. Αυτή είναι (πιθανών) και η τιμή του ορίου

Π.χ.

$$\lim_{x \to 2} (2x^2 - 1) = 2 \cdot 2^2 - 1 = 7$$

$$f(x_0) = \frac{0}{0}$$

Δ. Απροσδιόριστη Μορφή

Π.χ.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$$

Ξαναγράφουμε το όριο σε μια ισοδύναμη μορφή

Ε. Παραγοντοποίηση

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1}$$

ΣΤ. Συζυγής Παράσταση

$$\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Ζ. Χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων

$$\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu(4x)}{\eta\mu(2x)} = \lim_{x \to 0} \left(2\sigma\upsilon\nu(2x)\right)$$

Υπολογισμός ορίου στη μορφή αυτή

Η. Προσέγγιση του ορίου

(όταν τα πιο πάνω δε δουλεύουν)

π.χ. με το κριτήριο παρεμβολής

Συνέχεια Συνάρτησης

Ορισμός

Μια συνάρτηση f λέγεται ότι είναι συνεχής σε ενα σημείο x_0 του Π.Ο. (το οποίο είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων) της αν

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

δηλ.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Μια συνάρτηση λέγεται συνεχής αν κάθε σημείο του Π.Ο. της είναι σημείο συνέχειάς της.

Αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι οι 3 πιο κάτω προτάσεις είναι ταυτόχρονα αληθείς:

(α) Υπάρχουν τα $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ *και* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$,

(β)

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)$$

(γ)

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Σημείωση: η συνθήκη $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ είναι ισοδύναμη με την $\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$ αλλά και την $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$.

Ορισμός

Μια συνάρτηση λέγεται συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ αν είναι συνεχής στο (ανοικτό) διάστημα (α,β) και επιπλέον ισχύουν

$$\lim_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

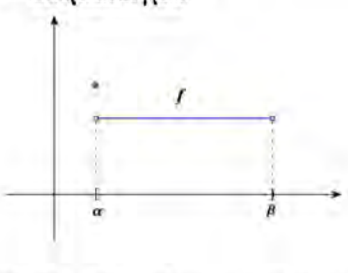
Μια συνάρτηση λέγεται συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta)$ αν είναι συνεχής στο (ανοικτό) διάστημα (α,β), το $\alpha \in D(f)$ και επιπλέον ισχύει

$$\lim_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$$

Μια συνάρτηση λέγεται συνεχής στο διάστημα $(\alpha,\beta]$ αν είναι συνεχής στο (ανοικτό) διάστημα (α,β), το $\beta \in D(f)$ και επιπλέον ισχύει

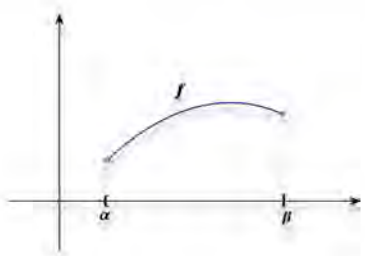
$$\lim_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

Παράδειγμα

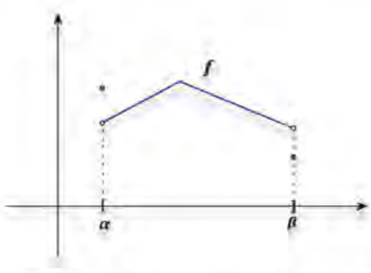


Η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta)$ αφού $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \neq f(\alpha)$

Είναι όμως συνεχής στο διάστημα (α,β)



Η f είναι συνεχής στο διάστημα $(\alpha,\beta]$ αφού είναι συνεχής στο διάστημα (α,β) και $\lim_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$

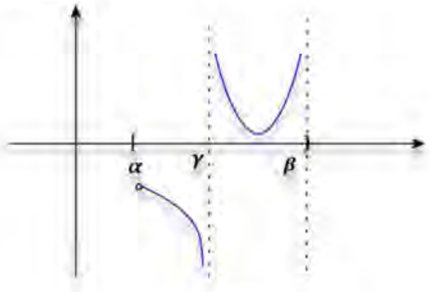


Η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta)$ αφού $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) \neq f(\alpha)$

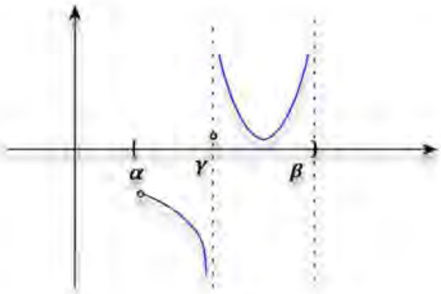
ούτε συνεχής στο $(\alpha,\beta]$ αφού $\lim_{x\to\beta^-} f(x) \neq f(\beta)$ αλλά είναι συνεχής στο (α,β)

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τον ορισμό της συνέχειας που δώσαμε, δεν έχει νόημα να μιλάμε για συνέχεια συνάρτησης στο διάστημα $[\alpha,\beta)$ σε καταστάσεις όπως στο σχήμα α) αφού το σημείο $x=\gamma$ (το οποίο ανήκει στο εσωτερικό του διαστήματος $[\alpha,\beta)$) δεν ανήκει στο π.ο. της συνάρτησης. Η συνάρτηση όμως είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\gamma)$ και στο (γ,β). Αν όμως το σημείο $x=\gamma$

ανήκει στο π.ο. της συνάρτησης, τότε μπορούμε να μιλάμε για συνέχεια στο διάστημα $[\alpha, \beta)$ (βλ. σχήμα β))



Σχήμα α)



Σχήμα β)

η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta)$ αφού δεν είναι συνεχής στο εσωτερικό του, δηλ. στο (α, β).

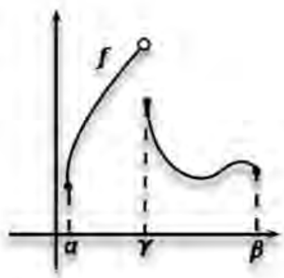
[Αυστηρότερα βέβαια, θα έπρεπε να αναφερθούμε στον **περιορισμό** της συνάρτησης στα υποσύνολα του π.ο. της]

Παράδειγμα

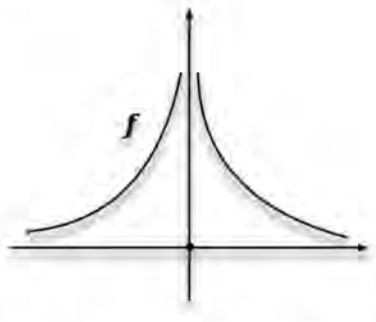
Η f δεν είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ αφού δεν είναι συνεχής στο σημείο $x = \gamma$ (το οποίο ανήκει στο εσωτερικό του διαστήματος $[\alpha, \beta]$). Είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \gamma)$ αφού $\lim_{x \to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και συνεχής στο διάστημα $[\gamma, \beta]$ αφού είναι συνεχής στο (γ, β) και

$$\lim_{x \to \gamma^+} f(x) = f(\gamma) \quad \text{και} \quad \lim_{x \to \beta^-} f(x) = f(\beta)$$

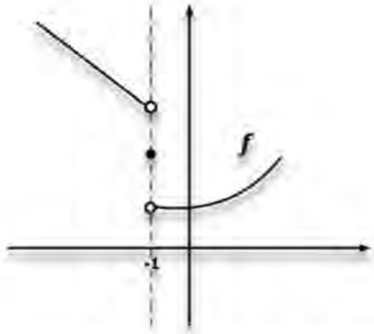
Με άλλα λόγια, η f είναι συνεχής στο σύνολο $[\alpha, \beta] - \{\gamma\}$.



Παράδειγμα



Η f είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$



Η f είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R} - \{-1\}$

Συνέχεια βασικών συναρτήσεων

- Οι πολυωνυμικές συναρτήσεις είναι συνεχείς συναρτήσεις (σε όλο το $\mathbb{R}$). Πράγματι, αν $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ένα πολυώνυμο βαθμού $n \in N$ με $a_n \neq 0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ τυχόν, τότε,

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0),$$

δηλ.

$$\lim_{x \to x_0} [a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0] = a_n {x_0}^n + a_{n-1} {x_0}^{n-1} + \cdots + a_1 x_0 + a_0$$

δηλ.

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = p\left(\lim_{x\to x_0} x\right) = p(x_0)$$

και το συμπερασμα έπεται.

- Κάθε **ρητή** συνάρτηση f, δηλ. της μορφής $\frac{P}{Q}$, $(Q \neq 0)$ είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της. Αυτό έπεται από τη γνωστή μας ιδιότητα των ορίων:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} \text{αν } \lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$$

  και το προηγούμενο σχόλιο.
- Οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις $x \mapsto \eta\mu x$ και $x \mapsto \sigma\upsilon\nu x$ είναι παντού συνεχείς όπως προκύπτει από τις ιδιότητες

$$\lim_{x\to x_0} \eta\mu(x) = \eta\mu(x_0) \text{ και } \lim_{x\to x_0} \sigma\upsilon\nu(x) = \sigma\upsilon\nu(x_0)$$

  για $x_0 \in \mathbb{R}$.

Πρόταση

Έστω $A \subset \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$.

i. Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο x_0, τότε και το άθροισμα $\lambda f + g: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής (συνάρτηση) στο σημείο x_0.
ii. Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο x_0 και $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε και το γινόμενο $\lambda f \cdot g: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής (συνάρτηση) στο σημείο x_0.
iii. Αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο x_0, τότε και η σύνθεσή της με την απόλυτη τιμή, δηλ. η $|f|$ είναι συνεχής στο σημείο x_0.
iv. Αν οι συναρτήσεις $f, g: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχείς στο σημείο x_0 με $g(x_0) \neq 0$, τότε και το πηλίκο $\frac{f}{g}$ είναι συνεχής στο σημείο x_0.
v. Αν η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο σημείο x_0, τότε και η $\sqrt[\nu]{f}$ όπου $\nu \in \mathbb{N}$ είναι συνεχής στο σημείο x_0.

Πρόταση (Συνέχεια της σύνθεσης συναρτήσεων)

Έστω g μια συνάρτηση συνεχής σε ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ και f μια συνάρτηση συνεχής στο $g(x_0)$. Τότε η $f o g$ είναι συνεχής στο x_0.

Εφαρμογή

Η συνάρτηση απόλυτη τιμή είναι συνεχής συνάρτηση.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι

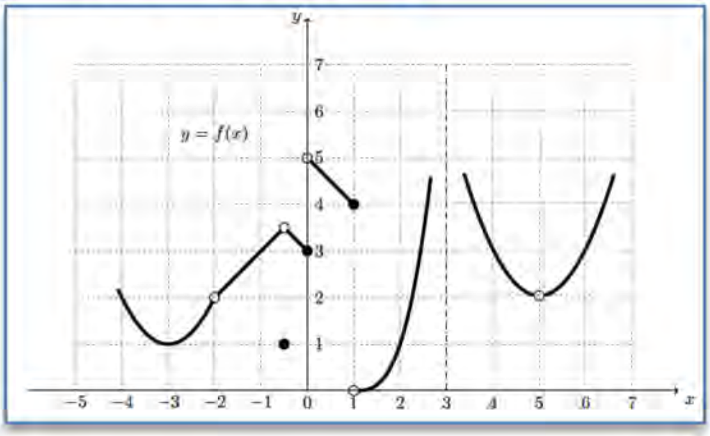
$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$$

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R} - \{0\}$ (ως πολυωνυμική (ανα κλάδο)). Ελέγχουμε τη συνέχεια στο σημείο $x = 0$. Είναι

$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} x = 0 = \lim_{x\to 0^+} x = \lim_{x\to 0^+} |x|$$

και αρα $\lim_{x\to 0} |x| = 0$ και αφού $|0| = 0$ έπεται ότι συνάρτηση είναι συνεχής (και) στο σημείο $x = 0$.

Παράδειγμα (Μελέτη συνέχειας από το γράφημά της)



Έχουμε

Στο σημείο $x=-2$ η συνάρτηση δεν ορίζεται, αρα δεν έχει νόημα να συζητάμε για συνέχεια στο σημείο αυτό. Αφού $$\lim_{x\to -\frac{1}{2}^-} f(x) = 3.5 = \lim_{x\to -\frac{1}{2}^+} f(x)$$ Έπεται ότι το $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)$ υπάρχει και ισούται με 3.5. Αλλά, $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \neq 5 = \lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)$. Άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο $x=-\frac{1}{2}$	Αφού $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 3 \neq 5 = \lim_{x\to 0^+} f(x)$$ Έπεται ότι το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει. Είναι $f(0)=3$. Άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο $x=0$. Αφού $$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 4 \neq 0 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$ Έπεται ότι το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει. Είναι $f(1)=0$. Άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο $x=1$.
Στο σημείο $x=3$ η συνάρτηση δεν ορίζεται, αρα δεν έχει νόημα να συζητάμε για συνέχεια στο σημείο αυτό. Αφού $$\lim_{x\to 5^-} f(x) = 2 = \lim_{x\to 5^+} f(x)$$ Έπεται ότι το $\lim_{x\to 5} f(x)$ υπάρχει και ισούται με 2. Αλλά, στο σημείο $x=5$ η συνάρτηση δεν ορίζεται, αρα δεν έχει νόημα να συζητάμε για συνέχεια στο σημείο αυτό	Έτσι, η συνάρτηση είναι συνεχής στο σύνολο $$(-\infty,-2) \cup \left(-2,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2},0\right) \cup (0,1) \cup (1,3) \cup (3,5) \cup (5,+\infty)$$

Παράδειγμα

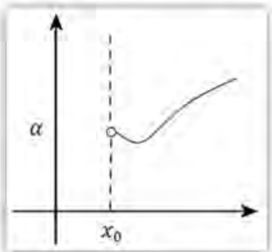
Θα εξετάσουμε τη συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} |x-1|, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ ως προς τη συνέχεια. Έχουμε:

$$f(x) = \begin{cases} x-1, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \\ 1-x, & x < 1 \end{cases}$$

. Για $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ η συνάρτηση είναι συνεχής (ως πολυωνυμική). Ελέγχουμε τη συνέχεια στο σημείο $x=1$. Είναι

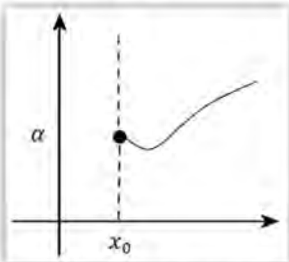
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (1-x) = 0 = \lim_{x\to 1^+} (x-1) = \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

και αρα το $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ υπάρχει και ισούται με 0. Αλλά, $f(0)=1$. Άρα η συνάρτηση δεν είναι συνεχής στο σημείο $x=1$. Έτσι, η συνάρτηση είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R}-\{1\}$.

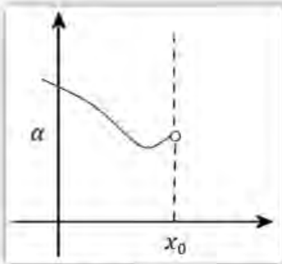


$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\alpha$

$x_0 \notin D(f)$

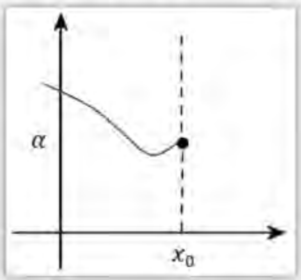


$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

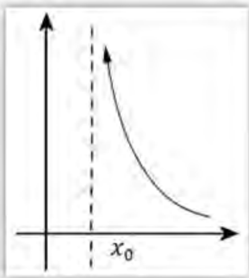


$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\alpha$

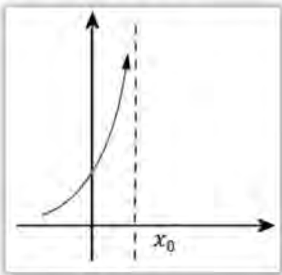
$x_0 \notin D(f)$



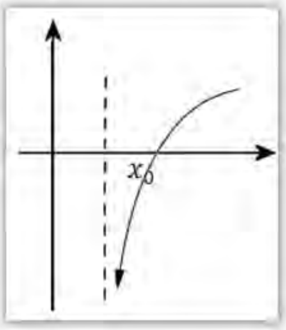
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$



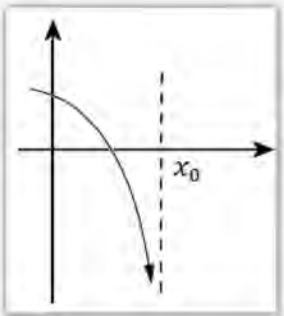
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=+\infty$



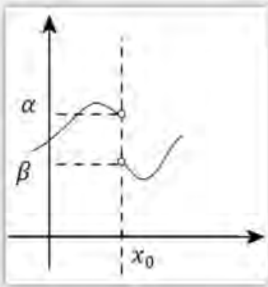
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=+\infty$



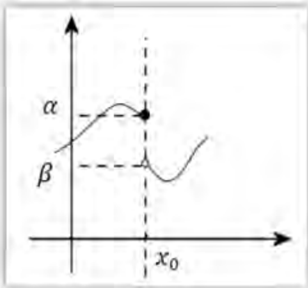
$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=-\infty$



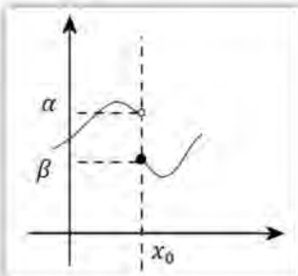
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=-\infty$



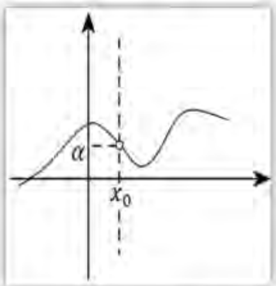
$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\alpha \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\beta \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$



$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0) \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\beta \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$



$\begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\alpha \\ \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0) \end{cases} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$



$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

$\Rightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

$x_0 \notin D(f)$

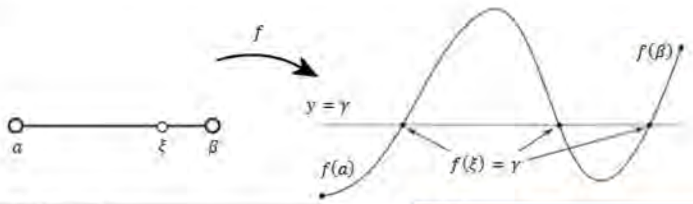
Η f ειναι συνεχής στην ένωση των διαστημάτων $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ (ως πολυωνυμική σε κάθε ένα από τα διαστήματα αυτά). Ελέγχουμε τη συνέχεια και στο σημείο $x = 0$: Είναι

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(2x^2 - 4x + 3) = 3 \;\; και \;\; \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(3x - 4) = -4$$

Έτσι, αφού τα πλευρικά όρια είναι διαφορετικά, έπεται ότι η f δεν ειναι συνεχής στο σημείο $x = 0$. Τελικά, η f είναι συνεχής στο σύνολο $\mathbb{R} - \{0\}$.

Βασικά Θεωρήματα Συνεχών Συναρτήσεων

Θεώρημα [Ενδιάμεσης Τιμής]
Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε, αν $f(\alpha) \neq f(\beta)$ και γ ένας οποιοσδήποτε αριθμός μεταξύ των τιμών $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, τότε υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \gamma$.



Πόρισμα [Θεώρημα Bolzano]

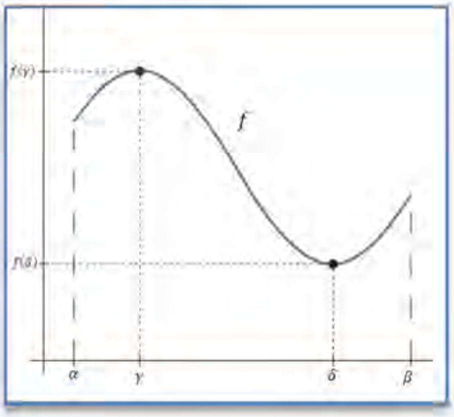
Έστω f μια συνάρτηση συνεχής σε ένα (κλειστό) διάστημα $[\alpha, \beta]$. Τότε, αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

ΘΕΩΡΗΜΑ [Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής]

Μια συνεχής συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ λαμβάνει ολικό μέγιστο και ολικό ελάχιστο.

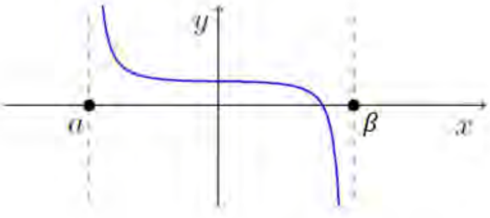
Με άλλα λόγια, το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι επίσης κλειστό διάστημα. Ιδιαίτερα, οι αριθμοί m και M είναι η ελάχιστη και μέγιστη τιμή αντίστοιχα της συνάρτησης, δηλ.

$$m = \min_{x\in[\alpha,\beta]} f(x) \;\; και \;\; M = \max_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$$

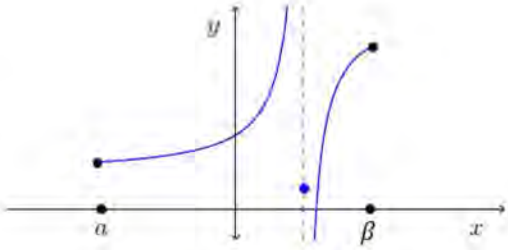


Έτσι, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιοι ώστε $f(x_1) = m$ και $f(x_2) = M$. Ας σημειώσουμε ότι μπορεί να είναι $m = M$. Στην περίπτωση αυτή, το Σ.Τ. της συνάρτησης είναι μονοσύνολο και άρα αυτή είναι σταθερή συνάρτηση.

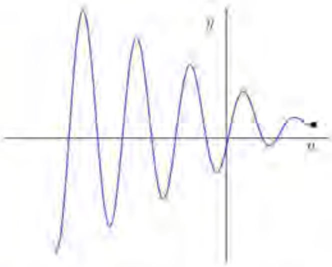
Αν οποιαδήποτε από τις υποθέσεις του πιο πάνω Θεωρήματος αφαιρεθεί, τότε αυτό δεν ισχύει:



$f: (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ συνεχής χωρίς ολικό μέγιστο ή ελάχιστο

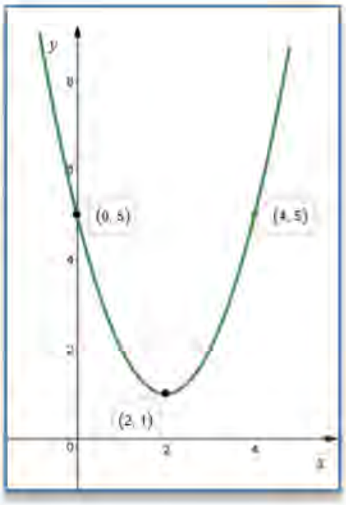


$f: [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ ασυνεχής χωρίς ολικό μέγιστο ή ελάχιστο



$f: (-\infty, \alpha] \to \mathbb{R}$ συνεχής χωρίς ολικό μέγιστο ή ελάχιστο

Παράδειγμα



Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 5$ λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο διάστημα $[0,4]$. Αυτό είναι άμεση απόρροια του Θεωρήματος Μέγιστης/Ελάχιστης Τιμής, αφού η f είναι συνεχής (ως πολυωνυμική) και άρα συνεχής στο (κλειστό) διάστημα $[0,4]$. Για να βρούμε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της μπορούμε να ακολουθήσουμε είτε αλγεβρικούς χειρισμούς, είτε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το γράφημα αυτής αποτελεί παραβολή. Με τον πρώτο τρόπο:

$$f(x) = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \quad (1)$$

και αρα $x \in [0,4] \Rightarrow (x-2) \in [-2,2] \Rightarrow (x-2)^2 \in [0,4] \Rightarrow \underbrace{((x-2)^2 + 1)}_{f(x)} \in [1,5]$, δηλ. $f_{\mu\varepsilon\gamma.} = 5$ και $f_{\varepsilon\lambda.} = 1$.

Με το δεύτερο τρόπο, από την (1) παρατηρούμε ότι η κορυφή της παραβολής είναι στο σημείο (2,1) στην οποία λαμβάνει την ελάχιστή της τιμή (άσχετα αν αυτή περιοριστεί στο διάστημα $[0,4]$), δηλ. $f_{\varepsilon\lambda.} = 1$. Τώρα, παρατηρούμε ότι $f(0) = 5 = f(4)$ και αρα, αφού τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα συμμετρίας της παραβολής, ότι $f_{\mu\varepsilon\gamma.} = f(0) = f(4) = 5$.

Παρατήρηση: Το πρόβλημα της εύρεσης της μέγιστης και ελάχιστης τιμής (ακόμα και στην περίπτωση που ικανοποιούνται οι υποθέσεις του πιο πάνω Θεωρήματος) δεν είναι καθόλου εύκολη περίπτωση. Λόγου χάριν, στο προηγούμενο παράδειγμα, αφενός μέν το γράφημα της συνάρτησης ήταν 'γνωστής' μορφής και αφετέρου τα άκρα του διαστήματος παρουσίαζαν κάποια συμμετρία ως προς τη θέση τους στο γράφημά της. Γενικά, η εύρεση μέγιστης και ελάχιστης τιμής συνεχούς συνάρτησης σε κλειστό διάστημα ευκολύνεται πάρα πολύ με εργαλεία της ανάλυσης τα οποία αποτελούν αντικείμενο μελέτης της **επόμενης τάξης. Αυστηρά μιλώντας, χρήση δεδομένων όπως 'από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται ότι...' ΔΕΝ αποτελούν μαθηματικά συνεπείς ισχυρισμούς.**

Παρατήρηση: Σύμφωνα με το Θεώρημα Ελάχιστης/Μέγιστης Τιμής, η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης, είναι επίσης κλειστό διάστημα. Το αντίστροφο δεν είναι εν γένει σωστό. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{4x^3}{x^4 + 1}$$

Έχει σύνολο τιμών το διάστημα $[-\sqrt[4]{3}, \sqrt[4]{3}]$ αλλά το Π.Ο. της είναι όλο το $\mathbb{R}$. Ένα άλλο παράδειγμα είναι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \eta\mu x$. Είναι συνεχής, $D(f) = \mathbb{R}$ και $R(f) = [-1,1]$.

Κεφάλαιο 6 • Ακολουθίες

Ορισμός
Κάθε συνάρτηση $\alpha: \mathbb{N} \to B \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται ακολουθία πραγματικών αριθμών.

Συμβολισμός: Αν $\alpha: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών, τότε οι όροι της είναι οι

$$\alpha(1), \alpha(2), \cdots, \alpha(n), \cdots.$$

Αν $\alpha_n \equiv \alpha(n), \forall n \in \mathbb{N}$, τότε με $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ή $(\alpha_n)_n$ εννοούμε το πιο πάνω.

Τρόποι περιγραφής (αναπαράστασης) ακολουθίας

Λεκτική περιγραφή μιας ακολουθίας. Π.χ.

ο πρώτος όρος είναι το 2 και ο κάθε επόμενος όρος μειώνεται κατά 1 μονάδα.

Διατεταγμένη μορφή, δηλ. οι όροι καταγράφονται σε μια σειρά:

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_\nu, \cdots$$

Με αναγωγικό (αναδρομικό) τύπο, όπου ο τυχόντας όρος της ακολουθίας εκφράζεται σε σχέση με τον προηγούμενο ή τον επόμενό του. Θα πρέπει όμως να έχουμε έναν αρχικό όρο. Π.χ.

$\alpha_1 = 2$	$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + 1 \ (\nu \in \mathbb{N})$
$\beta_1 = 2$	$\beta_{\nu+1} = \beta_\nu + 1 \ (\nu \in \mathbb{N})$

Ας παρατηρήσουμε ότι οι δύο πιο πάνω τρόποι ορισμού της ακολουθίας είναι ισοδύναμοι, αφού το ν τρέχει όλο το σύνολο των φυσικών αριθμών.

Ορισμός
Μια ακολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ λέγεται αναδρομική αν οι όροι της καθορίζονται μέσω μιας (αναδρομικής) σχέσης της μορφής $\alpha_{\nu+1} = P(\alpha_\nu)$, όπου P είναι μια αλγεβρική έκφραση.

Ορισμός
Θα λέμε ότι μια ακολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών είναι:
Αύξουσα αν $\alpha_{\nu+1} \geq \alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και ιδιαίτερα γνησίως αύξουσα όταν η πιο πάνω ανίσωση ισχύει αυστηρά, δηλ. αν $\alpha_{\nu+1} > \alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$
Φθίνουσα αν $\alpha_{\nu+1} \leq \alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$ και ιδιαίτερα γνησίως φθίνουσα όταν η πιο πάνω ανίσωση ισχύει αυστηρά, δηλ. αν $\alpha_{\nu+1} < \alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$
Σταθερή αν $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu, \forall \nu \in \mathbb{N}$

Έτσι, μια σταθερή ακολουθία είναι ταυτοχρόνως αύξουσα και φθίνουσα.

Ορισμός
Θα λέμε ότι μια ακολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών είναι:
μονότονη αν είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα
γνησίως μονότονη αν είναι είτε γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα

Μεθοδολογία μελέτης μονοτονίας ακολουθίας

Μέθοδος της Διαφοράς

Βρίσκουμε το πρόσημο της διαφοράς δυο τυχόντων διαδοχικών όρων της ακολουθίας: $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu$. Αν

(α) $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu \geq 0$, τότε η ακολουθία είναι αύξουσα

(β) $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu > 0$, τότε η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα

(γ) $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu \leq 0$, τότε η ακολουθία είναι φθίνουσα

(δ) $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu < 0$, τότε η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα

Μέθοδος του λόγου (πηλίκου)
Αν οι όροι της ακολουθίας είναι ομόσημοι, τότε μελετάμε το λόγο (το πηλίκο) $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}$.

(α) $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \geq 1$, τότε αν $\alpha_\nu > 0$, η ακολουθία είναι αύξουσα ενώ αν $\alpha_\nu < 0$, η ακολουθία είναι φθίνουσα

(β) $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} > 1$, τότε αν $\alpha_\nu > 0$, η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα ενώ αν $\alpha_\nu < 0$, η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα

(γ) $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} \leq 1$, τότε αν $\alpha_\nu > 0$, η ακολουθία είναι φθίνουσα ενώ αν $\alpha_\nu < 0$, η ακολουθία είναι αύξουσα

(δ) $\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} < 1$, τότε αν $\alpha_\nu > 0$, η ακολουθία είναι γνησίως φθίνουσα ενώ αν $\alpha_\nu < 0$, η ακολουθία είναι γνησίως αύξουσα

Ορισμός
Θα λέμε ότι μια ακολουθία $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών είναι:
Άνω φραγμένη αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε $\alpha_\nu \leq M, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι ο αριθμός M είναι **ένα άνω φράγμα** της ακολουθίας.
Κάτω φραγμένη αν υπάρχει πραγματικός αριθμός M τέτοιος ώστε $\alpha_\nu \geq M, \forall \nu \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι ο αριθμός M είναι **ένα κάτω φράγμα** της ακολουθίας.
Φραγμένη αν είναι και άνω και κάτω φραγμένη, δηλ. υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί M και m τέτοιοι ώστε

$$m \leq \alpha_\nu \leq M, \forall \nu \in \mathbb{N}.$$

Ορισμός
Λέμε ότι η ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει στον πραγματικό αριθμό α αν
$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \nu_0 \equiv \nu_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε: $|\alpha_\nu - a| < \varepsilon\ \forall \nu \geq \nu_0$.
Αν δεν υπάρχει πραγματικός αριθμός στον οποίο η ακολουθία να συγκλίνει, τότε λέμε ότι η ακολουθία αποκλίνει. Λέμε επίσης ότι α είναι το όριο της ακολουθίας $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$. Συμβολικά γράφουμε

$$\alpha_\nu \overset{\nu}{\to} \alpha \quad ή \quad \alpha_\nu \to \alpha \quad ή \quad \lim_{\nu} \alpha_n = \alpha \quad ή \quad \lim_{\nu\to+\infty} \alpha_n = \alpha$$

Πρόταση
Αν μια ακολουθία συγκλίνει, τότε είναι φραγμένη.

Ορισμός
(α) Λέμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει στο $+\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\alpha_\nu \geq M, \forall \nu \geq \nu_0$. Συμβολικά γράφουμε

$$\alpha_\nu \overset{\nu}{\to} +\infty \quad ή \quad \alpha_\nu \to +\infty \quad ή \quad \lim_{\nu} \alpha_\nu = +\infty \quad ή \quad \lim_{\nu\to+\infty} \alpha_n = +\infty$$

(β) Λέμε ότι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει στο $-\infty$ αν για κάθε $M > 0$ υπάρχει $\nu_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\alpha_\nu < M, \forall \nu \geq \nu_0$. Συμβολικά γράφουμε

$$\alpha_\nu \overset{n}{\to} -\infty \quad ή \quad \alpha_\nu \to -\infty \quad ή \quad \lim_{\nu} \alpha_\nu = -\infty \quad ή \quad \lim_{\nu\to+\infty} \alpha_\nu = -\infty$$

Θεώρημα
Κάθε μονότονη και φραγμένη ακολουθία πραγματικών αριθμών συγκλίνει (σε εναν πραγματικό αριθμό).

Ειδικές ακολουθίες
Ορισμός
Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ λέγεται αριθμητική πρόοδος αν ισχύει

$$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \delta,\ \forall \nu \in \mathbb{N} \quad (1)$$

όπου δ ένας (σταθερός) αριθμός, ο οποίος θα λέγεται η **διαφορά** της προόδου.

Θεώρημα
Τρείς αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν ισχύει η ιδιότητα

$$\boldsymbol{2\beta = \alpha + \gamma}$$

[Ιδιότητα Αριθμητικού Μέσου]

Αλλά και αντίστροφα: αν για αριθμούς α, β, γ ισχύει η Ιδιότητα Αριθμητικού Μέσου, τότε αυτοί είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου.

Θεώρημα
Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια Αριθμητική Πρόοδος με διαφορά δ. Τότε, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\delta$$

Θεώρημα
Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια Α.Π. με διαφορά δ. Τότε, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ είναι

$$\sum\nolimits_\nu = \frac{\nu(\alpha_1 + \alpha_\nu)}{2} = \frac{\nu[2\alpha_1 + (\nu - 1)\delta]}{2}.$$

Δηλ. το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας Α.Π. μπορεί να βρεθεί αν γνωρίζουμε τον πρώτο και ν -οστό όρο της ή ισοδύναμα τον πρώτο όρο και τη διαφορά της.

Ορισμός

Μια ακολουθία μη μηδενικών πραγματικών αριθμών $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ λέγεται **γεωμετρική πρόοδος** αν ισχύει

$$\boldsymbol{\alpha_{\nu+1} = \lambda\alpha_\nu}, \ \forall \boldsymbol{\nu} \in \mathbb{N} \quad (1)$$

όπου λ ένας (σταθερός) αριθμός, ο οποίος θα λέγεται ο **λόγος** της προόδου.

Θεώρημα

Τρείς αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου αν ισχύει η ιδιότητα

$$\boldsymbol{\beta^2 = \alpha \cdot \gamma} \ (*)$$

Αλλά και αντίστροφα δηλ. αν για (μη μηδενικούς) αριθμούς α, β, γ ισχύει η Ιδιότητα Γεωμετρικού Μέσου, τότε αυτοί είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου.

Αν σε μια Γεωμετρική Πρόοδο με θετικούς όρους οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αυτής, τότε ο αριθμός $\beta = \sqrt{\alpha \cdot \gamma}$ λέγεται Γεωμετρικός Μέσος

Θεώρημα

Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια Γεωμετρική Πρόοδος με λόγο λ . Τότε, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1}$$

Πρόταση

Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια Γ.Π. με λόγο λ. Τότε,

$$\begin{cases} \sum_\nu = \dfrac{\alpha_1(1-\lambda^\nu)}{1-\lambda}, \lambda \neq 1 \\ \nu\alpha_1, \quad \lambda = 1 \end{cases}$$

Πρόταση

Έστω $(\alpha_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ μια Γ.Π. με λόγο λ, $|\lambda| < 1$. Τότε

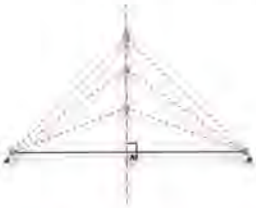
$$\sum_\infty = \frac{\alpha_1}{1-\lambda}$$

Κεφάλαιο 7 • Γεωμετρικές κατασκευές/Γεωμετρικοί τόποι

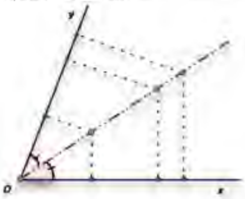
Γεωμετρικός τόπος είναι ένα γεωμετρικό σχήμα του οποίου τα σημεία, και μόνον αυτά, ικανοποιούν μία κοινή γεωμετρική ιδιότητα $(\boldsymbol{P})$.

Ο **κύκλος** ορίζεται ως ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα δεδομένο σημείο.

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δυο δεδομένα σημεία A και B είναι η **μεσοκάθετος** του ευθυγράμμου τμήματος (AB).



Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία βρίσκονται στο εσωτερικό μιας γωνίας $\angle xOy$ και ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας είναι η **διχοτόμος** της γωνίας.



Αναλυτική και συνθετική μέθοδος στις Γεωμετρικές κατασκευές

Βήμα 1: Ανάλυση: Σκοπός της Ανάλυσης είναι να μας υποδείξει τον δρόμο για να ξεκινήσουμε να λύσουμε το πρόβλημα. Υποθέτουμε αρχικά ό,τι το πρόβλημα που μας δίνεται έχει λυθεί και θεωρούμε ένα σχήμα που ικανοποιεί όλα τα δεδομένα του προβλήματος. Ακολούθως, με διάφορες παρατηρήσεις, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα και φέροντας κατάλληλες γραμμές (ευθείες και κύκλους) προσπαθούμε να δημιουργήσουμε ένα άλλο σχήμα που κατασκευάζεται με γνωστές **απλές γεωμετρικές κατασκευές**.

Συνδυάζοντας τις διάφορες γεωμετρικές κατασκευές που συναντούμε, διαδοχικά, προσπαθούμε να φτάσουμε στο ζητούμενο σχήμα.

Βήμα 2: Σύνθεση (Κατασκευή): Είναι η αντίστροφη πορεία της Ανάλυσης και αποτελεί ουσιαστικά τη **λύση** του προβλήματος. Στη διαδικασία αυτή κατασκευάζουμε σταδιακά τα σχήματα που συναντούμε στην Ανάλυση και οδηγούμαστε στο ζητούμενο σχήμα.

Βήμα 3: Απόδειξη

Αποδεικνύουμε ότι το σχήμα που κατασκευάσαμε ικανοποιεί όλα τα δεδομένα που μας δόθηκαν και άρα είναι το ζητούμενο.

Βήμα 4: Διερεύνηση: Αναζητούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα έτσι ώστε να υπάρχει λύση και αναζητούμε όλες τις δυνατές λύσεις του προβλήματος. Με τα δεδομένα του προβλήματος μπορεί να κατασκευάζονται περισσότερα από ένα σχήματα ή να μην κατασκευάζεται κανένα σχήμα.

Διαδικασία επίλυσης Γεωμετρικών προβλημάτων

1) **Κατασκευή:** Είναι όλες εκείνες οι διαδικασίες και ενέργειες που ακολουθούμε, για να επιτύχουμε την ακριβή σχεδίαση του σχήματος, με χρήση **μόνο** κανόνα και διαβήτη. Αναζητούμε τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα για να υπάρχει λύση και αναζητούμε όλες τις δυνατές λύσεις του προβλήματος.

2) **Απόδειξη:** Χρησιμοποιώντας Θεωρήματα και προτάσεις της Γεωμετρίας, αποδεικνύουμε ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε έχει ως στοιχεία του τα δεδομένα του προβλήματος.

3) **Διερεύνηση:** Αναζητούμε όλες τις συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται, λαμβάνοντας υπόψη τα δεδομένα, ώστε το πρόβλημα να έχει λύση. Εξετάζουμε επίσης αν το πρόβλημα έχει και άλλες λύσεις. Σε απλές κατασκευές το βήμα αυτό παραλείπεται.

Βασικές Κατασκευές Γεωμετρικών Αντικειμένων

Κατασκευή διχοτόμου δοθείσης γωνίας

- Με κέντρο την κορυφή O της γωνίας $\angle xOy$

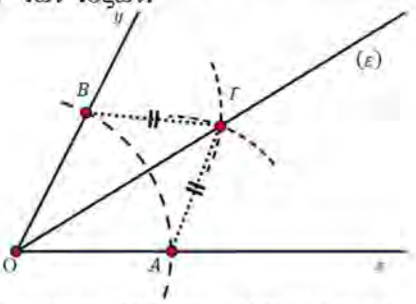
Κατασκευή κάθετης σε σημείο Α ευθείας (ε)

- Γράφουμε κύκλο με κέντρο το σημείο A και

και τυχαία ακτίνα γράφουμε κυκλικό τόξο.

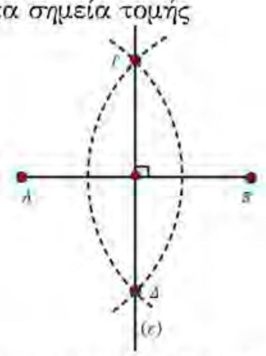
- Σημειώνουμε τα σημεία τομής A και B του κυκλικό τόξο με τις πλευρές τις γωνίας.
- Με ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό της απόστασης των δύο σημείων τομής, γράφουμε τόξα με κέντρα τα σημεία αυτά.
- Βρίσκουμε το σημείο τομής των δύο αυτών τόξων.

Ενώνουμε την κορυφή A με το σημείο τομής Γ των τόξων.



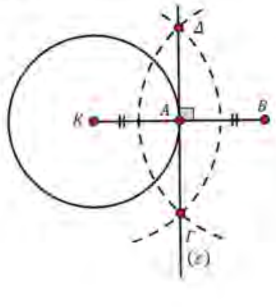
Κατασκευή μέσου και μεσοκάθετης ευθύγραμμου τμήματος AB

- Με κέντρα τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος (AB) και ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό του μήκους του ευθύγραμμου τμήματος, γράφουμε κυκλικά τόξα.
- Βρίσκουμε τα σημεία τομής των τόξων Γ και Δ αντίστοιχα.
- Ενώνουμε τα σημεία τομής



Κατασκευή εφαπτομένης κύκλου (K, R) σε ένα σημείο A αυτού.

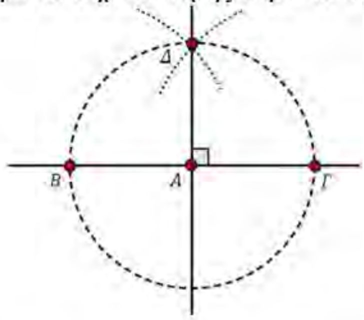
- Στην προέκταση της ακτίνας KA παίρνουμε σημείο B τέτοιο ώστε $KA = AB = R$.
- Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετη (ε) του τμήματος KB η οποία είναι και η ζητούμενη εφαπτομένη.



τυχούσα ακτίνα.

- Βρίσκουμε τα σημεία τομής B και Γ του κύκλου με την ευθεία (ε)
- Γράφουμε τόξα με κέντρα τα σημεία τομής και ακτίνα μεγαλύτερη από το μισό της απόστασης μεταξύ των σημείων τομής.
- Βρίσκουμε το σημείο τομής Δ των τόξων.

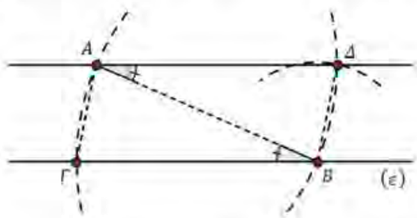
Ενώνουμε το σημείο τομής Δ με το σημείο A.



Κατασκευή παράλληλης από σημείο A εκτός ευθείας (ε) προς την αυτή ευθεία

- Κατασκευάζουμε κύκλο με κέντρο το σημείο A και τυχούσα ακτίνα, μεγαλύτερη της απόστασης του σημείου αυτού από την ευθεία.
- Βρίσκουμε το σημείο τομής B της ευθείας και του κύκλου.
- Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BA γράφουμε κυκλικό τόξο.

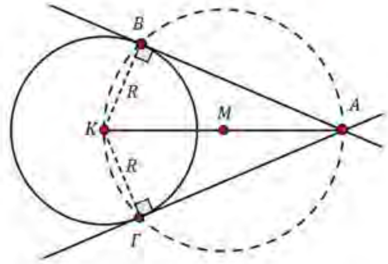
Έστω Γ το σημείο τομής του κύκλου με την ευθεία



Κατασκευή εφαπτομένων από σημείο A εκτός κύκλου (K, R)

- Βρίσκουμε το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος (A, K).
- Κατασκευάζουμε κύκλο με διάμετρο το KA. Έστω B και Γ τα σημεία τομής του κύκλου με τον κύκλο (K, R).

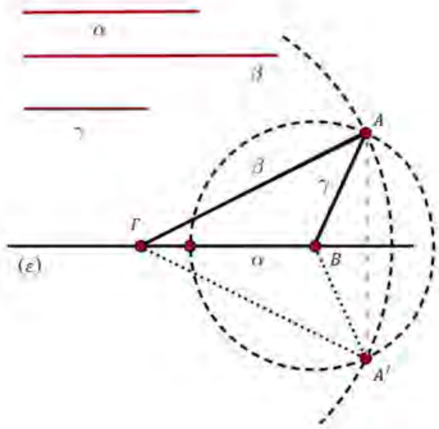
Φέρουμε τις ευθείες AB και $A\Gamma$, οι οποίες είναι και οι ζητούμενες εφαπτομένες του κύκλου.



Βασικές Κατασκευές Τριγώνων

1. **Κατασκευή τριγώνου $ΑΒΓ$ όταν δίνονται οι πλευρές του** α, β, γ.

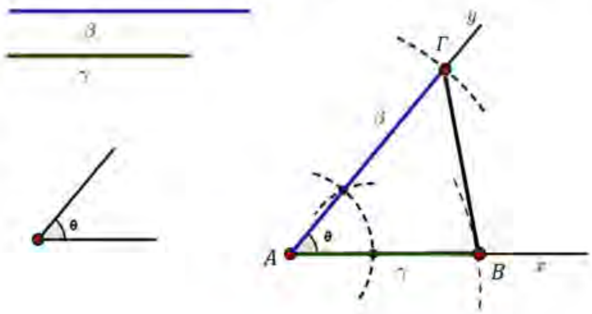
   - Πάνω σε ευθεία (ε) παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $(ΒΓ)$ ίσο με ένα από τα δοθέντα τμήματα, α, β, γ έστω $(ΒΓ) = \alpha$.
   - Γράφουμε δύο κύκλους με κέντρα τα άκρα $Β$ και $Γ$ και με ακτίνες ίσες με γ και β αντίστοιχα.
   - Αν οι κύκλοι τέμνονται, το σημείο τομής τους θα είναι η τρίτη κορυφή του τριγώνου.



2. **Κατασκευή τριγώνου $ΑΒΓ$ όταν δίνονται οι δυο πλευρές του $ΑΒ = \gamma$, $ΑΓ = \beta$ και η περιεχόμενη σε αυτές γωνία $\widehat{A} = \theta$**

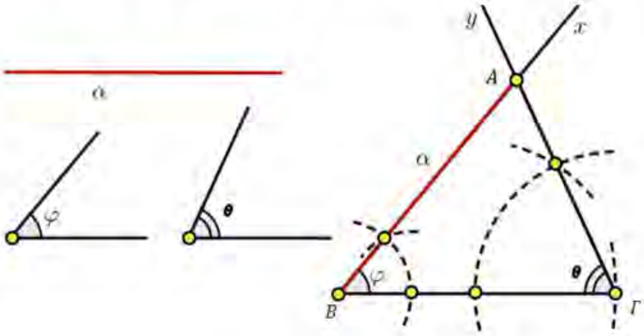
   - Αρχικά κατασκευάζουμε (κατά τα γνωστά) γωνία $\angle \boldsymbol{xAy} = \boldsymbol{\theta}$
   - Στις πλευρές Ax και Ay της γωνίας $\boldsymbol{\theta}$ παίρνουμε σημεία $\boldsymbol{Γ}$ και $\boldsymbol{Β}$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $\boldsymbol{ΑΓ = \beta}$ και $\boldsymbol{ΑΒ = \gamma}$.

   Το τρίγωνο $\boldsymbol{ΑΒΓ}$ είναι το ζητούμενο.



3. **Κατασκευή τριγώνου $ΑΒΓ$ όταν δίνονται η πλευρά του $ΒΓ = \alpha$ και οι προσκείμενες σε αυτήν γωνίες $Γ = \varphi$ και $Β = \theta$.**

   - Παίρνουμε ευθύγραμμο τμήμα $\boldsymbol{ΒΓ = \alpha}$.
   - Με κορυφές τα σημεία $\boldsymbol{Β}$ και $\boldsymbol{Γ}$ κατασκευάζουμε στο ίδιο ημιεπίπεδο που καθορίζει το ευθύγραμμο τμήμα $\boldsymbol{ΒΓ}$ γωνίες τέτοιες ώστε $\angle \boldsymbol{ΓΒx} = \boldsymbol{\varphi}$ και $\angle \boldsymbol{ΒΓy} = \boldsymbol{\theta}$
   - Οι πλευρές $\boldsymbol{Bx}$ και $\boldsymbol{Γy}$ των γωνιών αυτών τέμνονται στο σημείο $\boldsymbol{A}$. Το τρίγωνο $\boldsymbol{ΑΒΓ}$ είναι το ζητούμενο.



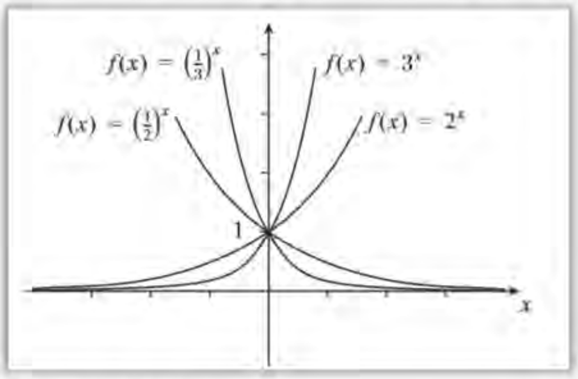
Κεφάλαιο 8 • Εκθετική/Λογαριθμική συνάρτηση

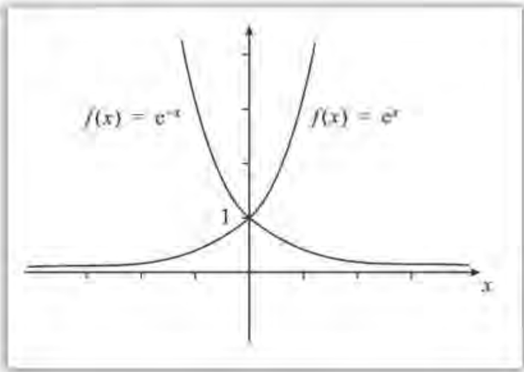
Η εκθετική συνάρτηση

- Μια συνάρτηση της μορφής $f(x) = \alpha^x$, όπου $\alpha > 0, \alpha \neq 1$ λέγεται *εκθετική συνάρτηση*
- Αν $\alpha = 1$, τότε η συνάρτηση είναι απλά η σταθερή συνάρτηση η οποία είναι ταυτοτικά ίση με 1
- Στην ειδική περίπτωση που $\alpha = e = 2.718, \dots$, η εκθετική συνάρτηση έχει πολλές εφαρμογές σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους και γιαυτό αναφέρεται συνήθως ως η ' *εκθετική συνάρτηση*'.
- Είναι $R(f) = (0, +\infty)$.
- Αν $0 < \alpha < 1$, έχουμε ότι η f είναι φθίνουσα ενώ αν $\alpha > 1$, έχουμε ότι η f είναι αύξουσα
- Η συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ με $x \mapsto f(x) = \alpha^x$ οπου $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$ είναι 1-1 και επί.

Γράφημα εκθετικής συνάρτησης

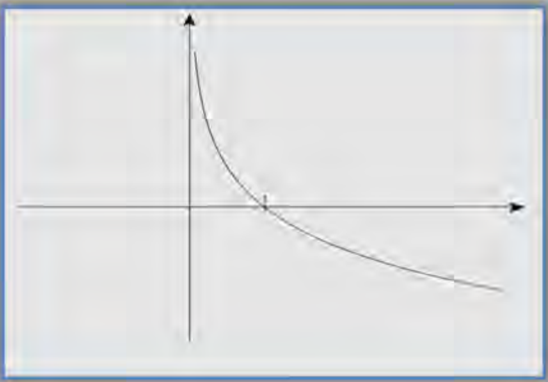
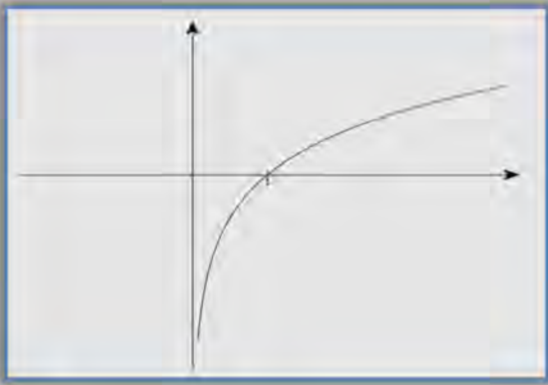
- Για $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$ και : f όπως πιο πάνω, ορίζεται η f^{-1} η οποία συμβολίζεται και με $\log_\alpha$. Δηλ.
$$\log_\alpha x = \psi \Leftrightarrow \alpha^\psi = x, x > 0$$
- $f(1) = 0$ και αρα, το γράφημα της εκθετικής συνάρτησης περνά από το σημείο $(1, 0)$.
- Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ ενώ αν $\alpha > 1$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- Αν $f(x) = \log_e x$, τότε η συνάρτηση $h(x) = f(-x) = e^{-x}$ αποτελεί αντικατοπτρισμό της *εκθετικής συνάρτησης* γύρω από τον άξονα των τεταγμένων





Η λογαριθμική συνάρτηση

- Για $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$ και f όπως πιο πάνω, ορίζεται η f^{-1} η οποία συμβολίζεται και με $\log_\alpha$. Δηλ.
$$\log_\alpha x = \psi \Leftrightarrow \alpha^\psi = x, x > 0$$
- $f(1) = 0$ και αρα, το γράφημα της εκθετικής συνάρτησης περνά από το σημείο $(1, 0)$.
- Αν $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$ ενώ αν $\alpha > 1$, τότε $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- Η συνάρτηση $f\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $x \mapsto f(x) = \log_\alpha x$ οπου $\alpha > 0,\ \alpha \neq 1$ είναι 1-1 και επί.
- Στην ειδική περίπτωση που $\alpha = e = 2.718, \dots$, η εκθετική συνάρτηση έχει πολλές εφαρμογές σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους και γιαυτό αναφέρεται συνήθως ως η ' *λογαριθμική συνάρτηση*'
- Αν $f(x) = \log_e x \equiv \ln x$, τότε η συνάρτηση $h(x) = f(-x) = \ln(-x)$ αποτελεί αντικατοπτρισμό της *λογαριθμικής συνάρτησης* γύρω από τον άξονα των τετμημένων

Αν $0<\alpha<1$	**Αν $\alpha>1$**
Πεδίο ορισμού: $(0,+\infty)$	Πεδίο ορισμού: $(0,+\infty)$
Πεδίο τιμών: $\mathbb{R}$	Πεδίο τιμών: $\mathbb{R}$
1-1 (γνησίως φθίνουσα)	1-1 (γνησίως αύξουσα)
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
Σημείο τομής με τον άξονα των xx': $(1,0)$	Σημείο τομής με τον άξονα των xx': $(1,0)$
	

$\alpha,\beta>0,\quad \alpha,\beta\neq 1.$

$\log_{10}x\equiv\log x$

$\log_e x\equiv\ln x$

Τύπος αλλαγής βάσης

Για κάθε $x>0$ είναι

$$\log_\beta x=\frac{1}{\log_\alpha\beta}\cdot\log_\alpha x$$

$\alpha^{\log_\alpha x}=x,\ \ e^{\ln x}=x,$

$\log_\alpha\alpha^x=x,\ \ \ln e^x=x$

$\log_\alpha x+\log_\alpha y=\log_\alpha(x\cdot y)$

$\log_\alpha x-\log_\alpha y=\log_\alpha\left(\frac{x}{y}\right)$

$\log_\alpha x^\nu=n\log_\alpha x,\ \ \ln x^\nu=x\ln x\quad(\nu\in\mathbb{N})$

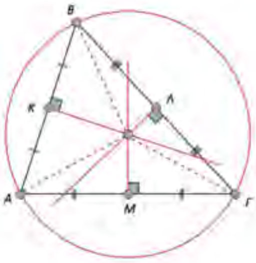
$\log_\alpha x=\frac{\log_\beta x}{\log_\beta\alpha}$ ή $\log_\alpha x=\frac{1}{\log_x\alpha}$

Κεφάλαιο 9 • Πολύγωνα-Μέτρηση κύκλου

Χαρακτηριστικά σημεία τριγώνου

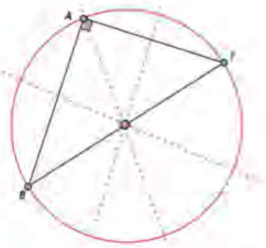
Θεώρημα

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κυκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.



Ορισμός

Το σημείο από το οποίο διέρχονται οι μεσοκάθετοι ενός τριγώνου, θα λέγεται το **περίκεντρο** του τριγώνου.



Θεώρημα

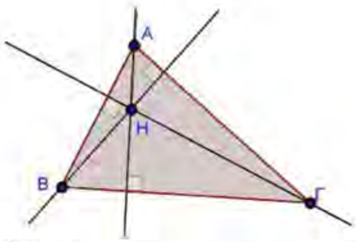
Οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται τα ύψη ενος τριγώνου διέρχονται από ενα κοινό σημείο.

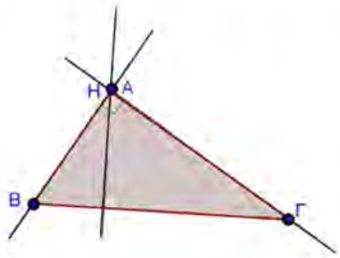
Ορισμός

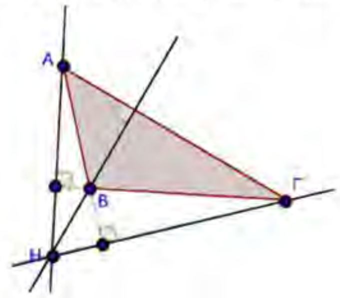
Το σημείο από το οποίο διέρχονται τα ύψη ενός τριγώνου, θα λέγεται το **ορθόκεντρο** του τριγώνου.

▨ Το ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι εσωτερικό σημείο του τριγώνου αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο ενώ αν το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο το ορθόκεντρό του είναι εξωτερικό σημείο του τριγώνου.

▨Αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο τότε το ορθόκεντρο του είναι η κορυφή της ορθής του γωνίας

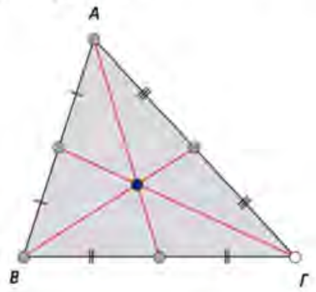






Θεώρημα

Οι διάμεσοι κάθε τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο το οποίο απέχει από κάθε κορυφή του τριγώνου απόσταση ίση με τα $\frac{2}{3}$ της αντίστοιχης διαμέσου.

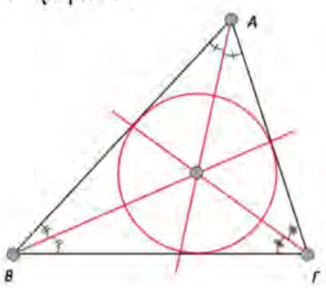


Ορισμός

Το σημείο από το οποίο διέρχονται οι διάμεσοι ενός τριγώνου, θα λέγεται το **βαρύκεντρο** του τριγώνου.

Ορισμός

Το σημείο από το οποίο διέρχονται οι διχοτόμοι ενός τριγώνου, θα λέγεται το έγκεντρο του τριγώνου.



Θεώρημα

Οι διχοτόμοι των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Επειδή το έγκεντρο του τριγώνου ισαπέχει από τις πλευρές του τριγώνου, έπεται ότι ο κύκλος με κέντρο το έγκεντρο και ακτίνα την απόσταση του από μια πλευρά θα εφάπτεται στις τρεις πλευρές του τριγώνου και ονομάζεται ***εγγεγραμμένος κύκλος*** του τριγώνου.

Εγγεγραμμένα πολύγωνα

Ορισμός

Πολύγωνο στη γεωμετρία είναι κάθε απλή κλειστή τεθλασμένη γραμμή. Ένα πολύγωνο με ν πλευρές λέγεται ειδικότερα ν-γωνο ή ν -πλευρο. Προφανώς ισχύει $\nu \geq 3$. Ενα πολύγωνο λέγεται **κανονικό** όταν έχει είτε όλες τις πλευρές του ίσες είτε όλες τις γωνίες του ίσες.

Ορισμός

Δύο ευθύγραμμα σχήματα λέγονται **όμοια**, αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες και τις γωνίες που σχηματίζονται από ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία. Συμβολίζουμε τη σχέση ομοιότητας με το σύμβολο $\approx$.

Ισχύουν:

(α) Δύο οποιεσδήποτε αντίστοιχες πλευρές ομοίων πολυγώνων έχουν τον ίδιο λόγο γι' αυτό λέγονται **ομόλογες** και ο λόγος τους λέγεται **λόγος ομοιότητας** και συμβολίζεται με λ.

(β) Αν δύο πολύγωνα είναι **όμοια**, τότε έχουν τις ομόλογες **πλευρές** τους **ανάλογες** και τις αντίστοιχες **γωνίες** τους **ίσες**.

(γ) Ο λόγος των **περιμέτρων** δύο ομοίων πολυγώνων είναι ίσος με το **λόγο ομοιότητας** τους λ. Π.χ. στο πιο πάνω, είναι

$$\frac{\Pi_{AB\Gamma\Delta}}{\Pi_{A'B'\Gamma'\Delta'}} = \lambda.$$

(δ) Ο λόγος των **εμβαδών** δύο ομοίων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του **λόγου ομοιότητας** τους λ. Π.χ. στο πιο πάνω, είναι

$$\frac{E_{AB\Gamma\Delta}}{E_{A'B'\Gamma'\Delta'}} = \lambda^2.$$

(ε) Δύο **κανονικά** πολύγωνα που έχουν το **ίδιο** πλήθος πλευρών είναι όμοια μεταξύ τους.

Ορισμός

Ένα πολύγωνο του οποίου οι κορυφές είναι σημεία ενός κύκλου λέγεται **εγγεγραμμένο** πολύγωνο στον κύκλο αυτό και ο κύκλος λέμε ότι είναι περιγεγραμμένος κύκλος στο πολύγωνο.

Ομοκυκλικά θα λέμε τα σημεία που ευρίσκονται πάνω σε εναν κύκλο

Ο κύκλος πάνω στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ενα τετράπλευρο λέγεται ο **περιγεγραμμένος** κύκλος του τετραπλεύρου

Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο έχει τις εξής ιδιότητες:

(α) Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται από το ίδιο σημείο που είναι το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου.

(β) Οι απέναντί του γωνίες είναι παραπληρωματικές.

(γ) Κάθε εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

(δ) Κάθε πλευρά του τετραπλεύρου φαίνεται από τις δυο απέναντι κορυφές του υπό ίσες γωνίες

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται **εγγράψιμο** όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

Θεώρημα (συνθήκες για να είναι τέσσερα σημεία ομοκυκλικά)

Ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγεγραμμένο σε κύκλο όταν μια από τις παρακάτω προτάσεις είναι αληθής:

(α) Μπορεί να γραφτεί κύκλος που περνά από τα σημεία A, B, Γ και Δ.

(β) Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(γ) Οι απέναντί του γωνίες είναι παραπληρωματικές.

(δ) Μια εξωτερική γωνία του τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική του γωνία.

(ε) Μια πλευρά του τετραπλεύρου φαίνεται από τις δυο απέναντι κορυφές του υπό ίσες γωνίες

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται **περιγεγραμμένο** σε κύκλο όταν οι πλευρές του είναι εφαπτόμενες στον αυτό κύκλο. Ο αντίστοιχος κύκλος λέγεται ο **περιγεγραμμένος** κύκλος στο τετράπλευρο.

Θεώρημα (ιδιότητες περιγεγραμμένων τετραπλεύρων)

Αν ενα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγεγραμμένο σε ενα κύκλο (K, ρ), τότε έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου είναι ίσα, δηλ. $AB + \Gamma\Delta = A\Delta + B\Gamma$.

(β) Οι διχοτόμοι των γωνιών του τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο συμπίπτει με το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο τετράπλευρο.

Θεώρημα (Κριτήριο για να είναι ενα τετράπλευρο περιγεγραμμένο σε κύκλο)

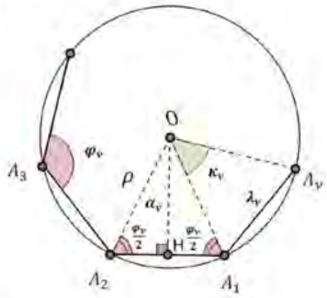
Ενα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο σε ενα κύκλο αν μια από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθής:

(α) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του τετραπλεύρου είναι ίσα, δηλ. ΑΒ + ΓΔ = ΑΔ + ΒΓ.
(β) Οι διχοτόμοι των γωνιών του τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Κανονικά πολύγωνα (Στοιχεία)

Π^ν κανονικό ν −γωνο ($\nu \geq 3$) με πλευρές $A_1, A_2, \cdots, A_\nu$. Τότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \cdots = \hat{A}_\nu \equiv \widehat{\omega}_\nu$ και

$$\boldsymbol{\widehat{\omega}_\nu = \frac{(\nu-2)}{\nu}\cdot 180^\circ = 180^\circ - \frac{2}{\nu}\cdot 180^\circ = 180^\circ - \frac{360^\circ}{\nu} = \left(2-\frac{4}{\nu}\right)90^\circ, \qquad \nu \geq 3}$$



$\boldsymbol{\lambda_\nu}$ η πλευρά του Π^ν
$\boldsymbol{\varphi_\nu}$ η γωνιά του Π^ν (δηλ. τη γωνιά που σχηματίζουν δυο οποιεσδήποτε διαδοχικές πλευρές του)
$\boldsymbol{\kappa_\nu}$ η επίκεντρη γωνιά του Π^ν (δηλ. η επίκεντρη γωνιά γωνιά που αντιστοιχεί σε τόξο χορδής ίσης με λ_ν)
$\boldsymbol{\alpha_\nu}$ το απόστημά του (δηλ. η απόσταση του κέντρου του περιγεγραμμένου κύκλου στο πολύγωνο)
$\boldsymbol{\Pi_\nu}$ η περίμετρος του πολυγώνου, $\boldsymbol{E_\nu}$ το εμβαδόν του πολυγώνου

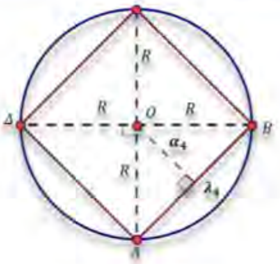
Ισχύουν

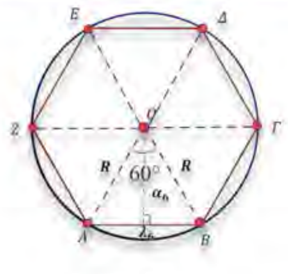
$$\boldsymbol{\lambda_\nu = 2R\eta\mu\left(\frac{\pi}{\nu}\right), \quad \alpha_\nu = 2R\eta\mu\left(\frac{\pi}{\nu}\right), \quad \Pi_\nu = 2\nu R\eta\mu\left(\frac{\pi}{\nu}\right) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ E_\nu = \frac{\nu}{2}R^2\eta\mu\left(\frac{\pi}{\nu}\right)}$$

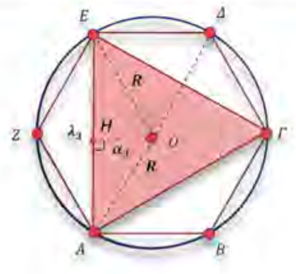
και

$$\boldsymbol{\Pi_\nu = \nu\lambda_\nu \quad \kappa\alpha\iota \quad E_\nu = \frac{1}{2}\Pi_\nu\alpha_\nu}$$

Σχήμα	Πλευρά	Απόστημα	Περίμετρος	Εμβαδόν
Ισόπλευρο Τρίγωνο	$\lambda_3 = R\sqrt{3}$	$\alpha_3 = \frac{R}{2}$	$\Pi_3 = 3R\sqrt{3}$	$E_3 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$
Τετράγωνο	$\lambda_4 = R\sqrt{2}$	$\alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$	$\Pi_4 = 4R\sqrt{2}$	$E_4 = 2R^2$
Κανονικό εξάγωνο	$\lambda_6 = R$	$\alpha_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\Pi_6 = 6R$	$E_6 = \frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$
Κανονικό δεκάγωνο	$\lambda_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$	$\alpha_{10} = \frac{R}{4}\cdot\sqrt{10+2\sqrt{5}}$	$\Pi_{10} = 6R(\sqrt{5}-1)$	$E_{10} = \frac{3}{2} \cdot R^2(\sqrt{5}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}$
Κανονικό δωδεκάγωνο	$\lambda_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\alpha_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$\Pi_{12} = 12R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$E_{12} = 6R^2(2+\sqrt{3})$







Μέτρηση κύκλου

Έστω κύκλος (K, R). Αν Γ το μήκος της περιφέρειας του κύκλου τότε

$$\frac{\boldsymbol{\Gamma}}{\boldsymbol{2R}} = \boldsymbol{\pi},\ \ \boldsymbol{\delta\eta\lambda.}\ \boldsymbol{\Gamma = 2\pi R}$$

Έστω AB ενα τόξο ενός κύκλου (K, R). Μία τεθλασμένη με άκρα τα σημεία A και B και με τις άλλες κορυφές της σημεία του τόξου, λέγεται **εγγεγραμμένη** στο τόξο AB. Στην περίπτωση που οι πλευρές της είναι ίσες, λέγεται **κανονική τεθλασμένη.** Μια τεθλασμένη με άκρα τα A και B και πλευρές εφαπτόμενες του τόξου AB λέγεται **περιγεγραμμένη τεθλασμένη** στο τόξο αυτό. **Μήκος του τόξου** AB είναι ο μοναδικός θετικός αριθμός τον οποίο προσεγγίζει η ακολουθία των κανονικών τεθλασμένων γραμμών των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων στο τόξο AB (καθώς αυξάνεται το πλήθος των κορυφών των τεθλασμένων). Επειδή ο κύκλος (K, R) είναι τόξο μέτρου $360°$ με μήκος $\Gamma = 2\pi R$, το τόξο μέτρου $1°$ θα έχει μήκος $\frac{\Gamma}{360°}$ και αρα το τόξο μέτρου $\mu°$ θα έχει μήκος ίσο με

$$\gamma = \frac{\Gamma}{360°}\mu°$$

δηλ.

$$\boldsymbol{\gamma = \frac{\mu°}{360°}2\pi R = \frac{\mu°}{180°}\pi R}$$

Ορισμός

Κυκλικός δίσκος λέγεται το σύνολο των σημείων ενός κύκλου με τα εσωτερικά του σημεία.

Το εμβαδόν κυκλικού δίσκου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $\boldsymbol{\mu°}$ γίνεται από τον

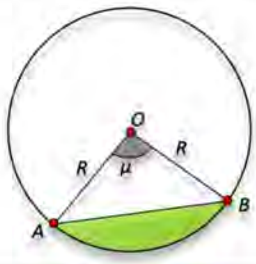
$$\boldsymbol{\frac{\mu°}{360°}\pi R^2}$$

Ορισμός

Κυκλικός τομέας λέγεται κάθε γεωμετρικό σχήμα που αποτελείται από τα κοινά σημεία ενός κυκλικού δίσκου και μίας επίκεντρης γωνίας του.

Έστω κύκλος (O, R) και (AB) χορδή του. Το καθένα από τα οποία η χορδή χωρίζει τον κυκλικό δίσκο λέγεται **κυκλικό τμήμα** που περιέχεται στην επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$. Το εμβαδόν $\boldsymbol{E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma}}$ που περιέχεται στην **κυρτή** γωνία $A\hat{O}B$ δίνεται από την

$$\boldsymbol{E_{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} = {E^{AOB}}_{\kappa\upsilon\kappa\lambda.\tau o\mu\acute{\epsilon}\alpha} - E_{\Delta\, AOB}}$$



Ορισμός

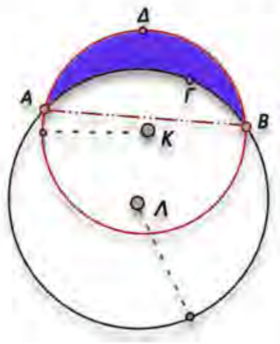
Στην επιπεδομετρία, ο **μηνίσκος** (lune) είναι μια κοίλη-κυρτή περιοχή που οριοθετείται από δύο κυκλικά τόξα.

Κάθε επίπεδο κλειστό σχήμα που περικλείεται μεταξύ καμπύλων γραμμών ορίζουμε ως **καμπυλόγραμμο** (στην παρούσα ενότητα οι καμπύλες γραμμές είναι
τόξα κύκλων). Ως **μικτόγραμμο,** ορίζουμε κάθε επίπεδο κλειστό σχήμα που περικλείεται μεταξύ καμπύλων γραμμών και ευθυγράμμων τμημάτων. Ένα ενδιαφέρον μικτόγραμμο χωρίο είναι ο **μηνίσκος,** το χωρίο που περικλείεται μεταξύ δυο τόξων κύκλων που έχουν κοινή χορδή και βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της χορδής. Είναι

$$E_{\mu\eta\nu\acute{\iota}\sigma\kappa o\upsilon} = {E^{A\Delta BA}}_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma} - {E^{A\Gamma BA}}_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau\mu\acute{\eta}\mu\alpha\tau o\varsigma}$$

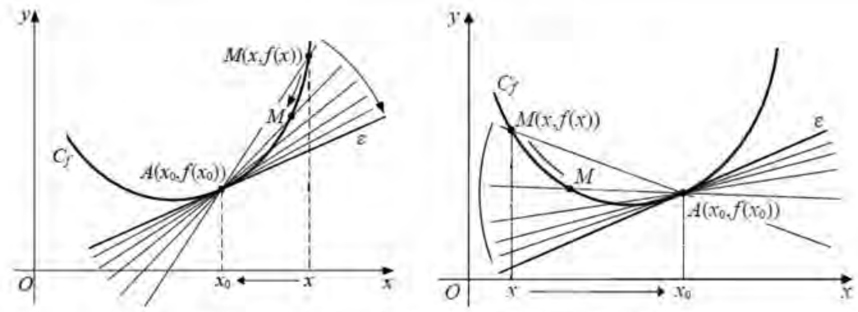
δηλ.

$$E_{\mu\eta\nu\acute{\iota}\sigma\kappa o\upsilon} = {E^{AKB}}_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau o\mu\acute{\epsilon}\alpha} - E_{\boldsymbol{\Delta}\, AKB} - \left({E^{A\Lambda B}}_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa o\acute{\upsilon}\ \tau o\mu\acute{\epsilon}\alpha} - E_{\boldsymbol{\Delta}\, A\Lambda B}\right)$$



Κεφάλαιο 10 • Παράγωγος

Ορισμός
Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση και έστω $x_0 \in A$. Αν το όριο
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι **παραγωγίσιμη** στο x_0 και συμβολίζουμε το πιο πάνω όριο με $f'(x_0)$ ή με
$$\frac{df(x_0)}{dx} \quad ή\, με \quad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0} \quad ή\, με \quad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} \quad αν\, y = f(x).$$



Γεωμετρική Ερμηνεία του παραγώγου αριθμού

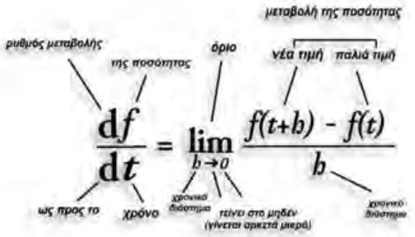
Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα $(\alpha, \beta) \subseteq A$ αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του διαστήματος (α, β).
Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ λέγεται παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta] \subseteq A$ αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο του εσωτερικού του, δηλ. του διαστήματος (α, β) και επιπλέον οι πλευρικές παράγωγοι
$$f'_{+}(\alpha) := \lim_{x \to \alpha^+} \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \quad και \quad f'_{-}(\beta) := \lim_{x \to \beta^-} \frac{f(x) - f(\beta)}{x - \beta}$$
υπάρχουν (είναι πραγματικοί αριθμοί).

(β) Αν $\nu \in \mathbb{N}$, τότε ως ν -οστή παράγωγο της συνάρτησης f ορίζεται ως η συνάρτηση $f^{(\nu)}: A^{\nu} \to \mathbb{R}$ όπου $(A^{\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ ακολουθία διαστημάτων τέτοια ώστε $A^i \subseteq A^{i-1}, \forall i \in \{1,2,\cdots,\nu\}$ και $A^i \subseteq A, \forall i \in \{1,2,\cdots,\nu\}$ η οποία ορίζεται (για $\nu \geq 2$) ως
$$x \mapsto f^{(\nu)}(x) := \left(f^{(\nu-1)}(x)\right)'$$

Σχέση συνέχειας-παραγώγου

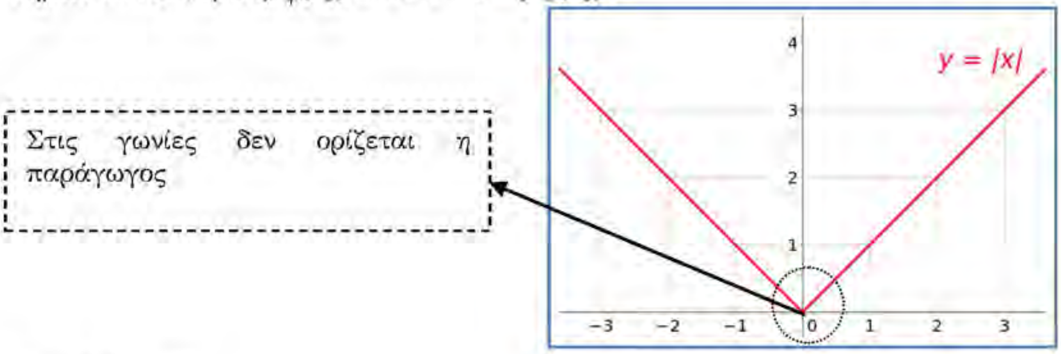
Θεώρημα
Έστω $f: A \to B$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in A$. Τότε είναι συνεχής στο x_0.

Το αντίστροφο δεν ισχύει.



Στα σημεία στα οποία στο γράφημα μιας συνάρτησης σχηματίζονται *γωνίες*, τότε δεν μπορούμε να ορίσουμε (μονοσήμαντα) την εφαπτομένη στο σημείο αυτό (παρόλο που η συνάρτηση είναι συνεχής εκεί) και άρα η παράγωγος δεν ορίζεται στο σημείο αυτό.[8]

Η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = |x|$: στο $x = 0$ δεν είναι παραγωγίσιμη (ενώ είναι συνεχής στο σημείο αυτό) (αφού $f'_+(x_0) = +1 \neq -1 = f'_-(x_0)$)



Παραδείγματα:

1. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ x^2, & x < 0 \end{cases}.$$

Στο σύνολο $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ είναι παραγωγίσιμη (ως πολυωνυμική) και μάλιστα $f'(x) = 2x$ (για $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$). Στο $x = 0$, είναι

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{h \to 0^+} f(x)$$

και άρα η f δεν είναι συνεχής στο σημείο αυτό άρα ούτε και παραγωγίσιμη. Βέβαια, θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα με τις πλευρικές παραγώγους:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2}{h} = 0$$

και

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + 1}{h} = +\infty$$

2. Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 < x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & 1 < x \leq 2 \end{cases}$$

όπου α και β σταθερές. Θα προσδιορίσουμε τις τιμές των σταθερών αυτών έτσι ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη (και) στο σημείο $x = 1$. Για να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x = 1$ πρέπει να είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. Έτσι, τα όρια $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ και $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ θα πρέπει να υπάρχουν και να είναι ίσα με $f(1) = 1$. Είναι

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1^2 = 1$$

και

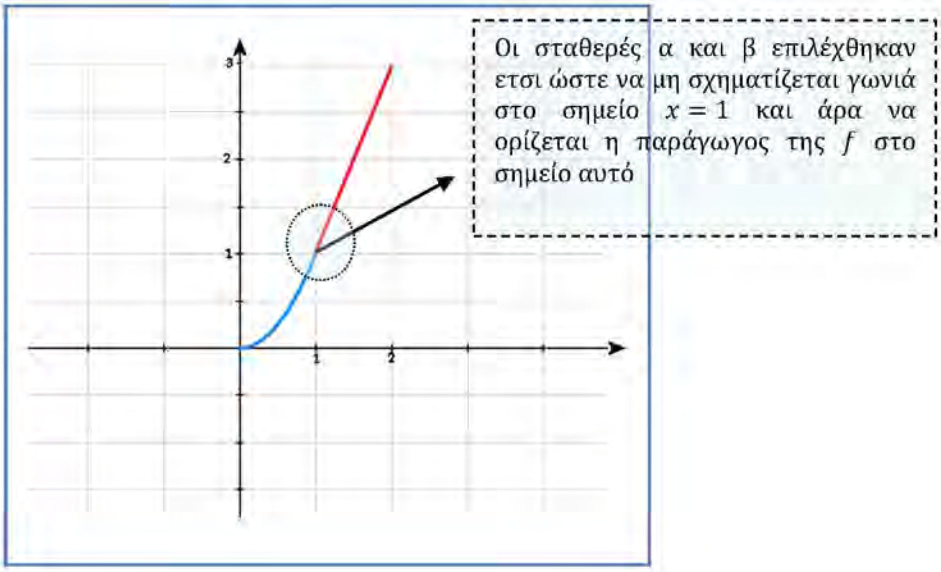
$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (\alpha x + \beta) = \alpha + \beta$$

[8] Τί εννοούμε όμως όταν λέμε γωνιές; δες το τεύχος Ι του συγγραφέα

Έτσι, πρέπει $\alpha+\beta=1$. Επιπλέον, ο ορισμός της παραγώγου της f στο σημείο $x=1$ μας λέει ότι το όριο $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ θα πρέπει να υπάρχει, δηλ., ισοδύναμα, να υπάρχουν τα πλευρικά όρια $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και να είναι ίσα. Αλλά,

$$
\begin{aligned}
& \lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &=& \lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\\
\Leftrightarrow\quad & \lim_{x\to 1^+}\frac{\alpha x+\beta-1}{x-1} &=& \lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-1}{x-1}\\
\overset{\alpha+\beta=1}{\Longleftrightarrow}\quad & \lim_{x\to 1^+}\frac{\alpha x+\beta-\overbrace{(\alpha+\beta)}^{=1}}{x-1} &=& \lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}\\
\Leftrightarrow\quad & \lim_{x\to 1^+}\frac{\alpha(x-1)}{x-1} &=& \lim_{x\to 1^-}(x+1)\\
\Leftrightarrow\quad & \alpha=2 & &
\end{aligned}
$$

Τέλος, αντικαθιστώντας το $\alpha=2$ στη σχέση $\alpha+\beta=1$ παίρνουμε $\beta=-1$



Κανόνες Παραγώγισης

Έστωσαν $f_1, f_2, \cdots, f_n, f, g$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $c \in \mathbb{R}$. Τότε

$(cf)' = cf'$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$

και γενικότερα

$$(f_1 + f_2 + \cdots + f_n)' = f_1' + f_2' + \cdots + f_n'$$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Εφαρμογές του Κανόνα της Αλυσίδας

Έστω $g: A \to B$ μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο A και έστω $f: g(A) \subset \Gamma \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση. Τότε

i. $[f^{\nu}(x)]' = \nu \cdot f^{\nu-1}(x) \cdot f'(x) \quad (\nu \in \mathbb{N})$

ii. $\left[f^{\nu}(g(x))\right]' = \nu \cdot f^{\nu-1}(g(x)) \cdot f'(g(x)). g'(x)$

iii. $\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ αν $(f(x) > 0)$

iv. $\left(e^{f(x)}\right)' = f'(x) \cdot e^{f(x)}$

v. $\left(\alpha^{f(x)}\right)' = \alpha^{f(x)} \cdot \ln\alpha \cdot f'(x), (\alpha > 0,\ \alpha \neq 1)$

vi. $\left[\ln(f(x))\right]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ αν $(f(x) > 0)$

vii. $\left[\log_{\alpha}(f(x))\right]' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln\alpha}$

$(f(x) > 0, \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1)$

viii. $\left[\eta\mu(f(x))\right]' = \sigma\upsilon\nu(f(x)) \cdot f'(x)$

ix. $\left[\sigma\upsilon\nu(f(x))\right]' = -\eta\mu(f(x)) \cdot f'(x)$

x. $\left[\varepsilon\varphi(f(x))\right]' = \tau\varepsilon\mu^2(f(x)) \cdot f'(x)$

xi. $\left[\sigma\varphi(f(x))\right]' = -\sigma\tau\varepsilon\mu^2(f(x)) \cdot f'(x)$

xii. $\left[\tau\varepsilon\mu(f(x))\right]' = \tau\varepsilon\mu x(f(x)) \cdot \varepsilon\varphi(f(x)) \cdot f'(x)$

xiii. $\left[\sigma\tau\varepsilon\mu(f(x))\right]' = -\sigma\tau\varepsilon\mu x(f(x)) \cdot \sigma\varphi(f(x)) \cdot f'(x)$

Παράγωγοι βασικών συναρτήσεων

i. $(c)' = 0 \quad (c \in \mathbb{R})$

ii. $(x^{\nu})' = \nu \cdot x^{\nu-1} \quad (\nu \in \mathbb{N})$

iii. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x > 0)$

iv. $\left(\frac{1}{x^{\nu}}\right)' = -\frac{\nu}{x^{\nu+1}} \quad (x \neq 0)$

v. $(e^x)' = e^x$

vi. $(\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln\alpha\ ,(\alpha > 0,\ \alpha \neq 1)$

vii. $(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x > 0)$

viii. $(\log_{\alpha} x)' = \frac{1}{x \cdot \ln\alpha}$
$(x > 0, \alpha > 0, \quad \alpha \neq 1)$

ix. $(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x, \quad (\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$

x. $(\varepsilon\varphi x)' = \tau\varepsilon\mu^2 x, \quad (\sigma\varphi x)' = -\sigma\tau\varepsilon\mu^2 x$

xi. $(\tau\varepsilon\mu x)' = \tau\varepsilon\mu x \cdot \varepsilon\varphi x$

xii. $(\sigma\tau\varepsilon\mu x)' = -\sigma\tau\varepsilon\mu x \cdot \sigma\varphi x$

Παράγωγος παραμετρικής καμπύλης

Αν

$$C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \in I$$

όπου οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες (ως προς t) στο διάστημα I και οι παράγωγοί τους είναι **συνεχείς** συναρτήσεις. Τότε, αν $\frac{dx}{dt} \neq 0$, τότε η y είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του x και μάλιστα ισχύει

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{ή} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Λίγα Λόγια για ενα πολύ σημαντικό Θεώρημα

Παράγωγος Αντίστροφης Συνάρτησης

Θεώρημα

Έστω $f: A \to B$ μια αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) \neq 0, \forall x \in A$. Τότε, η f^{-1} είναι επίσης παραγωγίσιμη και μάλιστα

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Παρατηρήσεις

1. Ο πιο πάνω τύπος γράφεται και ως

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

αν $y = f(x)$. Πράγματι, $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$ και παραγωγίζουμε ως προς x και τα δύο μέλη της πιο πάνω ισότητας και (χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας) έχουμε

$$\frac{df^{-1}(y)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 1 \text{ δηλ. } \frac{df^{-1}(y)}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

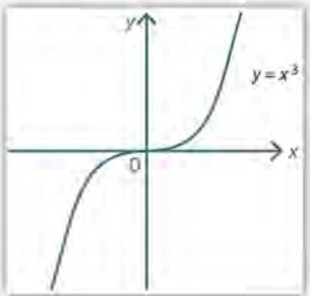
και αφού $x = f^{-1}(y)$, έπεται ότι $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$.

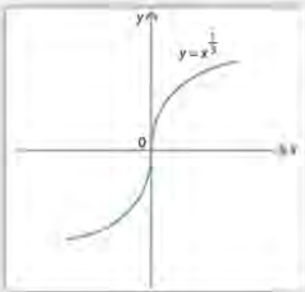
Για να βρούμε λοιπόν τον τύπο της παραγώγου της αντίστροφης με τον τρόπο αυτό, ακολουθούμε τα εξής βήματα

- Βρίσκουμε την παράγωγο συνάρτηση της f.
- $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
- Παραγωγίζουμε και τα 2 μέλη της πιο πάνω ως προς x
- Λύνουμε ως προς $\frac{dy}{dx}$
- Αντικαθιστούμε $y = f(x)$
- Αντιστρέφουμε

2. Το κλάσμα στον πιο πάνω τύπο ορίζεται, αφού είναι $f'(x) \neq 0, \forall x \in$ Α. Μάλιστα, η τελευταία αυτή συνθήκη είναι ουσιώδης στο πιο πάνω θέωρημα. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3$ $(x \in \mathbb{R})$. Η f είναι αντιστρέψιμη και μάλιστα $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$ $(x \in \mathbb{R})$. Επίσης, η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ και μάλιστα $f'(x) = 3x^2$. Έτσι, $f'(0) = 0$ και $f^{-1}(0) = 0$. Συνεπώς, $f'(f^{-1}(0)) = f'(0) = 0$. Έτσι, ο πιο πάνω τύπος δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Αυτό αντανακλά το γεγονός ότι η f^{-1} δεν είναι αντιστρέψιμη στο $x = 0$.





Εφαρμογή 1

Θα βρούμε την παράγωγο της $\log_\alpha(x)$, όπου $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Από τον τύπο αλλαγής βάσης στο λογάριθμο έχουμε $\log_\alpha(x) = \frac{\ln x}{\ln \alpha}$ και άρα

$$\log_\alpha(x) = \frac{\ln x}{\ln \alpha} \Rightarrow \frac{d}{dx}(\log_\alpha(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{\ln \alpha}\right) = \frac{1}{\ln \alpha} \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x \cdot \ln \alpha}$$

Συνεπώς, $[\log_\alpha(x)]' = \dfrac{1}{x \cdot \ln\alpha}$

Επίσης, αν f μια συνάρτηση τέτοια ώστε $f > 0$, ο κανόνας της αλυσίδας σε συνδυασμό με τον πιο πάνω τύπο μας δίνουν

$$[\log_\alpha(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x) \cdot \ln\alpha}$$

Εφαρμογή 2

Θα βρούμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \alpha^x$ για $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = [\log_\alpha(x)]$. Τότε, η f είναι η αντίστροφη της g. Έτσι, για $x \in \mathbb{R}$, έχουμε

$$f'(x) = (\alpha^x)' = \frac{1}{g'(f(x))} = \frac{1}{([\log_\alpha(\alpha^x)])'} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha^x \cdot \ln\alpha}} = \alpha^x \cdot \ln\alpha.$$

Δουλεύοντας με τον τύπο παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης

Οι τύποι $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$ και $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ μπορεί να μας μπερδεύουν ως προς τη το ρόλο του x και $f^{-1}(x)$ όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της αντίστροφης. Γι'αυτό ας δούμε το μηχανισμό πίσω από το Θεώρημα αυτό: Έστω $f: A \to B$ μια αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) \neq 0, \forall x \in A$. Τότε, ξέρουμε ότι $f(f^{-1}(x)) = x$. Θεωρούμε τον 1-1 μετασχηματισμό $f^{-1}(x) = w$. Παραγωγίζουμε ως προς x και τα δύο μέλη της πιο πάνω ισότητας και χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας έχουμε

$$\frac{df(w)}{dw} \cdot \frac{dw}{dx} = 1$$

και αρα (αφού $f'^{(x)} \neq 0, \forall x \in A$) $\quad \dfrac{dw}{dx} = \dfrac{1}{\frac{df(w)}{dw}}$ **δηλ.** $\dfrac{df^{-1}(x)}{dx} = \dfrac{1}{\frac{df(w)}{dw}}$

Για να βρούμε λοιπόν τον τύπο της παραγώγου της αντίστροφης με τον τρόπο αυτό, ακολουθούμε τα εξης βήματα

- Βρίσκουμε την παράγωγο συνάρτηση της f.
- Βρίσκουμε τον τύπο της αντίστροφης g της $y = f(x)$. Στον τύπο της αντίστροφης αντικαθιστούμε τη μεταβλητή y με τη μεταβλητή x
- Υπολογίζουμε την $f'(g(x))$, δηλ. αντικαθιστούμε στην τιμή της παραγώγου της f την τιμή $g(x)$
- Το αντίστροφο του πιο πανω είναι η παράγωγος της αντίστροφης
- Αντικαθιστούμε $y = f(x)$
- Αντιστρέφουμε

Παράδειγμα 1

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x - 1$. Η f είναι αντιστρέψιμη και παραγωγίσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε $f'(x) = 3 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Θα βρούμε τον τύπο της παραγώγου της αντίστροφής της. Είναι

$$y = 3x - 1 \Leftrightarrow \frac{y}{3} + \frac{1}{3} = x$$

και άρα η αντίστροφή της $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $y = g(x) = \frac{x}{3} + \frac{1}{3}$

1ος τρόπος [απευθείας]: Από τον τύπο της αντίστροφης, έχουμε $\dfrac{dg(x)}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$

2ος τρόπος [Με τον πρώτο τύπο]: $\quad (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{3}, \forall x \in \mathbb{R}$

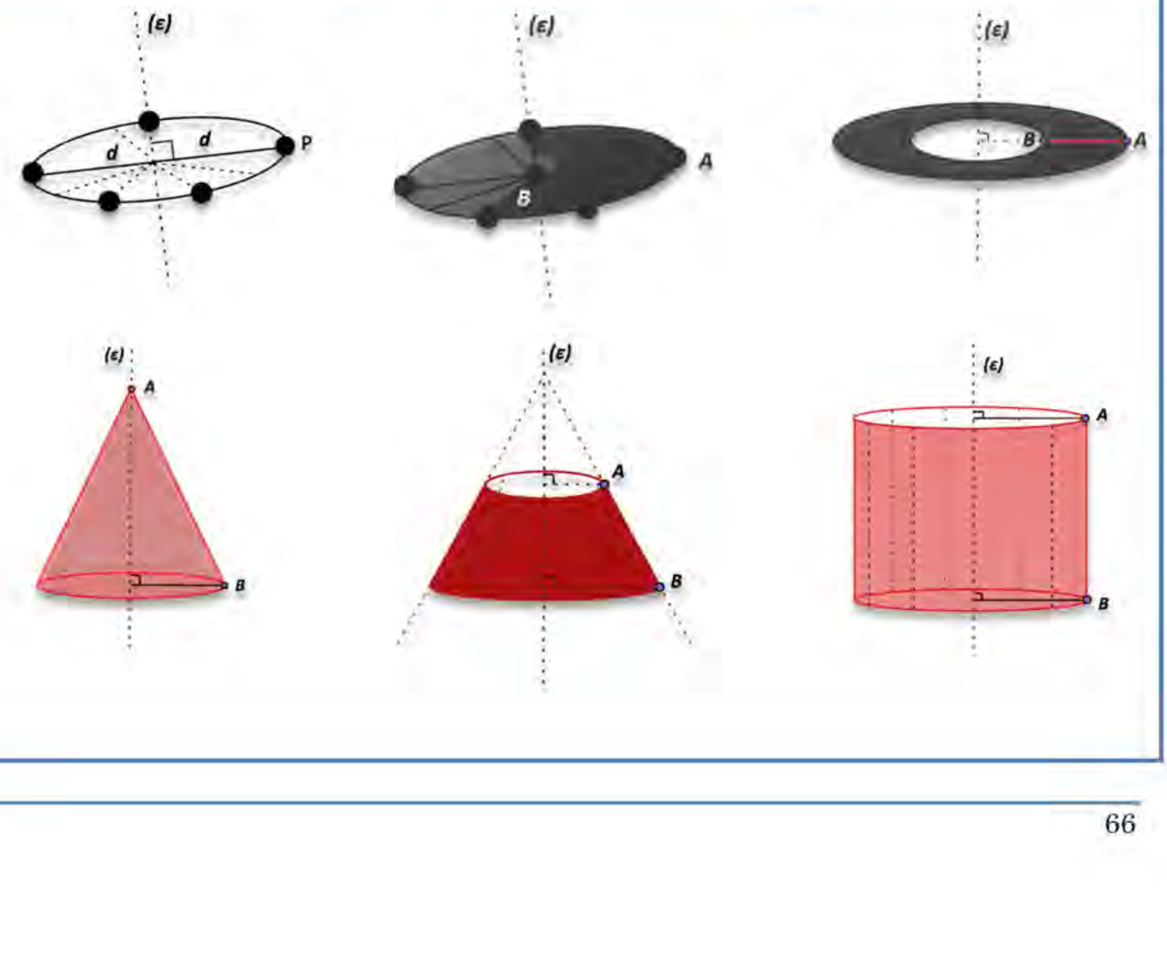
3ος τρόπος [Με το δεύτερο τύπο]: $\quad \dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\frac{dy}{dx}} = \dfrac{1}{2}.$

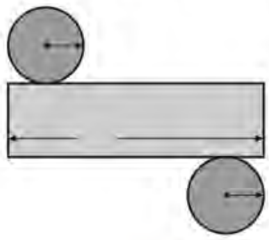
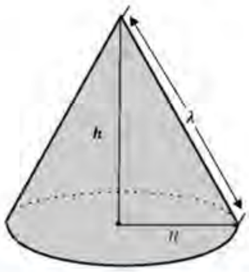
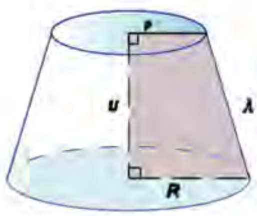
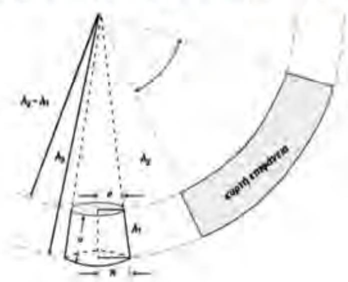
Κεφάλαιο 12 • Στερεομετρία

Προσδιορισμός του στερεού εκ περιστροφής

Στην παρούσα τάξη, θα περιοριστούμε σε στερεά που προκύπτουν από περιστροφές γύρω από (σταθερό) άξονα ευθυγράμμων τμημάτων και συνδυασμών αυτών (δηλ. κλειστών πολυγωνικών γραμμών). Τα στερεά που προκύπτουν από περιστροφές καμπυλόγραμμων (ομαλών) σχημάτων είναι αντικείμενο μελέτης της επόμενης τάξης. Παρακάτω, ακολουθεί ένας πίνακας με τις βασικότερες κυρτές επιφάνειες που προκύπτουν.

Επίπεδο σχήμα	Σχέση με τον άξονα περιστροφής (ε)	Σχήμα (πλήρη περιστροφή)
(α) Σημείο P (εκφυλισμένο ευθύγραμμο τμήμα)	Το P δεν ανήκει στον άξονα περιστροφής. Έστω $d>0$ η απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής	Κύκλος ακτίνας d
(β) Ευθύγραμμο τμήμα AB	Κάθετο με τον άξονα περιστροφής	Κυκλικός δίσκος ακτίνας $R=\|AB\|$
(γ) Ευθύγραμμο τμήμα AB	Δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής και η προέκτασή του σχηματίζει ορθή γωνία με αυτόν	Δακτύλιος
(δ) Ευθύγραμμο τμήμα AB	Τέμνει τον άξονα περιστροφής και σχηματίζει οξεία γωνία με αυτόν	Κυρτή επιφάνεια κώνου
(ε) Ευθύγραμμο τμήμα AB	Δεν τέμνει τον άξονα περιστροφής και σχηματίζει οξεία γωνία με αυτόν	Κυρτή επιφάνεια κόλουρου κώνου
(στ) Ευθύγραμμο τμήμα AB	Παράλληλο με τον άξονα περιστροφής	Κυρτή επιφάνεια κυλίνδρου



Στερεό	Εμβαδόν	Όγκος
Μπάλα ακτίνας R  **Σημείωση:** Η επιφάνειας της μπάλας λέγεται **σφαίρα**	 $E_{\sigma\varphi.} = 4\pi R^2$	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Κύλινδρος ύψους h και ακτίνας βάσης R 	$E_{\kappa\upsilon\lambda.} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$ 	$V = \pi R^2 h$
Κώνος παράπλευρου ύψους h, ακτίνας βάσης R **και παράπλευρης πλευρά λ** 	$E_{\kappa\acute{\omega}\nu o\upsilon} = \pi R^2 + \pi R\lambda$ 	$V = \frac{\pi R^2 h}{3}$
Κόλουρος κώνος ύψους υ, ακτίνας μεγάλης βάσης R, **ακτίνας μικρής βάσης ρ και παράπλευρης πλευράς λ** 	$E_{o\lambda.} = \pi(R+\rho)\lambda + \pi(R^2+\rho^2)$ 	$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + R\rho + \rho^2)$

Κεφάλαιο 13 • Στατιστική

Ο **αριθμητικός μέσος** (το πιο κοινό από τα μέτρα θέσης) ορίζεται ως το άθροισμα των παρατηρήσεων διά του πλήθους των παρατηρήσεων, δηλ. αν $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_\nu$ (όπου ν φυσικός αριθμός) αναπαριστούν τις τιμές μιας μεταβλητής X, τότε η **μέση τιμή** των παρατηρήσεων αυτών συμβολίζεται με $\bar{X}$ και δίνεται από την

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_\nu}{\nu}$$

Αν οι τιμές αυτές κατανέμονται στο δείγμα με συχνότητα μεγαλύτερη του 1, τότε μιλάμε για **σταθμικό μεσο όρο** $\bar{X}$ ο οποίος δίνεται από την

$$\bar{X} = \frac{w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + w_3 \cdot x_3 + \cdots + w_\nu \cdot x_\nu}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_\nu}$$

όπου ο αριθμός w_i αντιστοιχεί στη συχνότητα που εμφανίζεται η τιμή x_i στο δείγμα ($i = 0,1,\cdots,\nu$) και λέγεται ο **συντελεστής βάρους (ή η στάθμη)** που αντιστοιχεί στη μέτρηση αυτή

Προφανώς, ο αριθμητικός μέσος είναι σταθμικός μέσος με βάρη όλα ίσα με τη μονάδα.

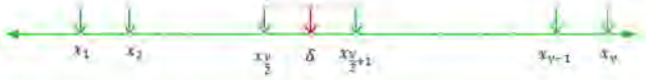
Διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων οι οποίες έχουν **διαταχθεί σε αύξουσα σειρά** ορίζεται ως η μεσαία παρατήρηση, όταν το ν είναι περιττός (φυσικός) αριθμός, ή ο μέσος όρος (ημιάθροισμα) των δύο μεσαίων παρατηρήσεων όταν το ν είναι άρτιος αριθμός.

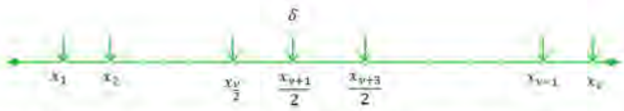
αν ν άρτιος, δηλ. $\nu = 2\kappa$, όπου κ φυσικός αριθμός, τότε

$$\delta = \frac{x_{\frac{\nu}{2}} + x_{\frac{\nu}{2}+1}}{2} = \frac{x_\kappa + x_{\kappa+1}}{2}$$

αν αν ν περιττός, δηλ. $\nu = 2\kappa - 1$, όπου κ φυσικός αριθμός, τότε

$$\delta = x_{\frac{\nu+1}{2}} = x_\kappa$$





Αν $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_\kappa$ (όπου κ φυσικός αριθμός) αναπαριστούν τις τιμές μιας μεταβλητής X με μέση τιμή $\bar{X}$ των παρατηρήσεων αυτών, τότε αν Y μια άλλη μεταβλητή της οποίας οι τιμές $y_1, y_2, y_3, \cdots, y_\kappa$ συνδέονται με τις αντίστοιχες τιμές της X μέσα από τη (γραμμική) σχέση $y_i = ax_i + \beta$ όπου a και β πραγματικές σταθερές, τότε η μέση τιμή $\bar{Y}$ των παρατηρήσεων της Y συνδέεται με τη μέση τιμή των παρατηρήσεων της X μέσα από τη σχέση

$$\bar{Y} = \alpha\bar{X} + \beta$$

Με άλλα λόγια, η γραμμική σχέση που συνδέει τις τιμές των δυο μεταβλητών αντανακλάται ακριβώς η ίδια στη σχέση των μέσων τιμών τους. Έτσι, μπορούμε να σκεφτόμαστε (άτυπα) τη συσχέτιση $ax_i + \beta \leftrightarrow \alpha\bar{X} + \beta$ στο μυαλό μας.

Μέτρα μεταβλητότητας

Το **εύρος (Range)** των παρατηρήσεων: Ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης (την οποία συμβολίζουμε με x_{min}) από τη μέγιστη παρατήρηση (την οποία συμβολίζουμε με x_{max}). Συμβολιζεται με R:

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

Η **διακύμανση (variation) (ή διασπορά)** ν το πλήθος παρατηρήσεων $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ ορίζεται ως **ο μέσος όρος των τετραγώνων των αποκλίσεων των παρατηρήσεων από τη μέση τιμή. Συμβολίζεται με S^2:**

$$S^2 = \frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{X})^2}{\nu}$$

Η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης S^2 λέγεται **τυπική απόκλιση (standard deviation)** και συμβολίζεται με S. Δηλ.

$$S = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{X})^2 + (x_2 - \bar{X})^2 + \cdots + (x_\nu - \bar{X})^2}{\nu}}$$

Παρατήρηση: Τα τετράγωνα την έκφραση του τύπου της διακύμανσης δικαιολογούν την ύπαρξή τους με το ότι το τελικό αποτέλεσμα να μή βγει αρνητικό (και μετά λαμβάνοντας την τετραγωνική ρίζα, λαμβάνουμε μια καλή εκτίμηση για τη διασπορά των τιμών του δείγματος).

Το μέτρο που μας βοηθάει στη σύγκριση ομάδων παρατηρήσεων (με ίδιες ή διαφορετικές μονάδες μέτρησης) που ενδεχομένως να έχουν σημαντικά διαφορετικές τιμές, λέγεται **συντελεστής μεταβολής** ή

μεταβλητότητας (CV) και δίνεται από τον τύπο

$$CV = \frac{S}{|\bar{X}|}$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι ανεξάρτητος από τις μονάδες μέτρησης του δείγματος και δίνεται συνήθως ως ποσοστό. Αν CV <10%, τότε λέμε ότι τα δεδομένα παρουσιάζουν **ομοιογένεια** και ενα δείγμα A έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια από ενα άλλο δείγμα B αν ο συντελεστής μεταβλητότητας του πρώτου είναι γνήσια μικρότερος από το συντελεστή μεταβλητότητας του δεύτερου.

Το **εύρος (Range)** των παρατηρήσεων: Ορίζεται ως η διαφορά της ελάχιστης παρατήρησης (την οποία συμβολίζουμε με x_{min}) από τη μέγιστη παρατήρηση (την οποία συμβολίζουμε με x_{max}). Συμβολιζεται με R:

$$R = x_{max} - x_{min}.$$

Τεταρτημόρια και ενδοτεταρτημοριακό εύρος

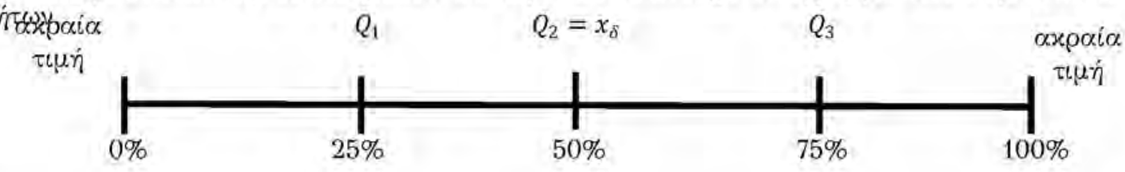
Ορισμός

Τεταρτημόρια λέγονται τα σημεία (οι μετρήσεις) εκείνα στο (διατεταγμένο κατ΄αύξουσα σειρά) δείγμα τα οποία το χωρίζουν σε 4 ίσα μέρη.

Κατα συνέπεια, έχουμε 3 τεταρτημόρια τα οποία θα ονομάζουμε Q_1 (ή Q_{25}), Q_2 (ή Q_{50}) και Q_3 (ή Q_{75}) αντίστοιχα. Δηλ. το σημείο Q_1 είναι το σημείο αυτό στο δείγμα μας στο οποίο το πολύ 25% των μετρήσεων βρίσκεται αριστερά του, το σημείο Q_2 είναι το σημείο αυτό στο δείγμα μας στο οποίο το πολύ 50% των μετρήσεων βρίσκεται αριστερά του (και αρα το υπόλοιπο 50% δεξιά του) και αντίστοιχα , το σημείο Q_3 είναι το σημείο αυτό στο δείγμα μας στο οποίο το πολύ 75% των μετρήσεων βρίσκεται αριστερά του (και αρα το υπόλοιπο 25% δεξιά του).

Προφανώς, από τον τρόπο που έχει οριστεί το Q_2, αυτό συμπίπτει με τη διάμεσο του δείγματος.

Σύμφωνα με τους ανωτέρω ορισμούς, αν ν είναι το πλήθος των (διατεταγμένων) παρατηρήσεων, τότε η θέση που κατέχει το πρώτο τεταρτημόριο Q_1 είναι $\frac{\nu+1}{4}$ και η θέση που κατέχει το τρίτο τεταρτημόριο Q_3 είναι $\frac{3}{4}(\nu+1)$. Προφανώς, $Q_2 = x_\delta$ το οποίο εξυπακούει στον τρόπο υπολογισμού που αναφέραμε, ανάλογα με το αν ν άρτιος ή περιττός. Για να υπολογίσουμε τα τεταρτημόρια (όταν τα δεδομένα είναι ομαδοποιημένα), κάνουμε το αντίστοιχο ιστόγραμμα των αθροιστικών συχνοτήτων.

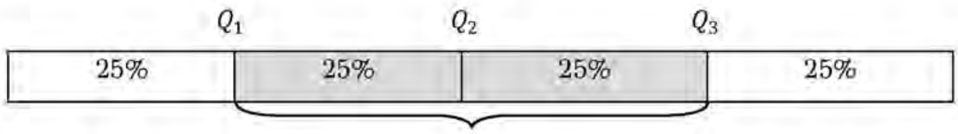


Ορισμός

Ενδοτεταρτημοριακό εύρος λέγεται το εύρος του (κεντρικού) 50% των παρατηρήσεων και συμβολίζεται με IQR.[9]

Συνεπώς, $IQR = Q_3 - Q_1$.

[9] Από τις λέξεις Inter Quartile Range



$$IQR = Q_3 - Q_1$$

Μέτρο Θέσης: Επικρατούσα τιμή	
Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Δείχνει την τιμή με τη μεγαλύτερη συχνότητα	Δε λαμβάνει υπόψιν την ακριβή τιμή της κάθε παρατήρησης
Δεν επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις	Δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για μικρό πλήθος παρατηρήσεων
Υπολογίζεται ακόμα και αν δε γνωρίζουμε τις ακραίες παρατηρήσεις	
Μέτρο Θέσης: Μέση τιμή	
Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Είναι η αντιπροσωπευτικότερη τιμή για το δείγμα	Είναι ευαίσθητη όσον αφορά τις ακραίες παρατηρήσεις
	Η τιμή της πιθανώς να μην ανήκει στις παρατηρήσεις
Μέτρο Θέσης: Εύρος: η διαφορά της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής του δείγματος	
Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Υπολογίζεται εύκολα	Αλλοιώνεται από τις ακραίες τιμές και κατα συνέπεια δε δίνει αντιπροσωπευτική εικόνα για τα δεδομένα
Περιλαμβάνει υπόψιν (και) τις ακραίες τιμές του δείγματος	Δε δίνει πληροφορία για το πως διασπείρονται (κατανέμονται) οι τιμές του δείγματος μεταξύ των ακραίων τιμών (μεταξύ της μέγιστης και ελάχιστης τιμής)
	Δεν επιτρέπει την ακριβή ερμηνεία μιας συγκεκριμένης τιμής του δείγματος
Μέτρο Θέσης: διάμεσος δ	
Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Δεν επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις	Δε λαμβάνει υπόψιν την ακριβή τιμή της κάθε παρατήρησης
Υπολογίζεται ακόμα και αν δε γνωρίζουμε τις ακραίες παρατηρήσεις	Αν το δείγμα αποτελείται από λίγες παρατηρήσεις, τότε η διάμεσος δεν αποτελεί αντιπροσωπευτικό μέτρο θέσης γι'αυτήν
Μέτρο Θέσης: ενδοτεταρτημοριακό εύρος $R = Q_3 - Q_1$	
Πλεονεκτήματα	**Μειονεκτήματα**
Υπολογίζεται εύκολα	Δε λαμβάνει υπόψιν τις ακραίες τιμές του δείγματος
Δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές του δείγματος	Δεν επιτρέπει την ακριβή ερμηνεία μιας συγκεκριμένης τιμής του δείγματος
Είναι αντιπροσωπευτικό των κεντρικών τιμών του δείγματος	Δεν είναι ιδιαίτερα ακριβές όταν οι συχνότητες των τιμών στο δείγμα είναι μεγάλες

Παρουσίαση και ανάλυση δεδομένων-Σύγκριση δυο πληθυσμών

Θα δούμε τώρα δυο μεθόδους παρουσίασης των στατιστικών μας δεδομένων οι οποίοι μας επιτρέπουν να εξαγάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για το δείγμα.

Το φυλλογράφημα (stem and leaf diagram)

Το φυλλογράφημα είναι μια γραφική αναπαράσταση των στατιστικών δεδομένων αντίστοιχη με το ιστόγραμμα και χρησιμοποιείται κυρίως για διακριτά δεδομένα (δηλ. δεδομένα που αποτελούνται από μεμονωμένους αριθμούς (όχι αυστηρά μιλώντας) και όχι διαστήματα) τα οποία θέλουμε να παρουσιάσουμε μεγάλο σχετικά πλήθος παρατηρήσεων με ενα γρήγορο και απλό τρόπο. Το φυλλογράφημα διπλής όψεως μας επιτρέπει να συγκρίνουμε εύκολα δυο δείγματα.

Το θηκόγραμμα

Το **θηκόγραμμα** (Boxplot) είναι ένας βολικός τρόπος γραφικής αναπαράστασης μιας μεταβλητής, ως προς πέντε βασικές παραμέτρους που τη χαρακτηρίζουν:
- την ελάχιστη τιμή (x_{min}) - το 1ο τεταρτημόριο (Q_1) - τη διάμεσο (Q_3, x_δ) - το τρίτο τεταρτημόριο (Q_3) -τη μέγιστη τιμή (x_{max}).

Με το θηκόγραμμα, μπορούμε επιπλέον να εντοπίσουμε τυχόν ακραίες τιμές στο δείγμα μας. Ως ακραίες παρατηρήσεις θα θεωρούμε εκείνες που δεν ανήκουν στο διάστημα $[Q_1 - 1.5IQR, Q_3 + 1.5IQR]$.

Κατασκευή φυλλογραφήματος:

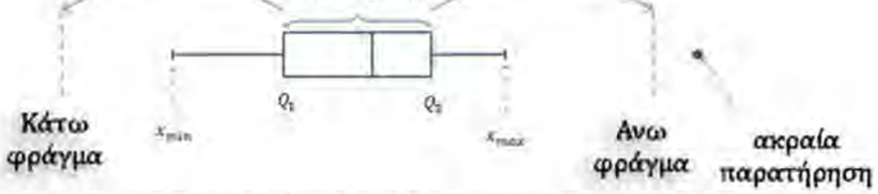
- Διατάσσουμε το δείγμα κατ᾽αύξουσα σειρά
- Το ψηφίο των δεκάδων είναι ο **μίσχος /κορμός (stem)** ενω το ψηφίο των μονάδων είναι το **φύλλο (leaf).**

Κατασκευή θηκογράμματος:

Κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με τη μια του πλευρά στο πρώτο τεταρτημόριο και την απέναντι σε αυτή πλευρά στο τρίτο τεταρτημόριο (το μήκος των πλευρών είναι αυθαίρετο και η απόσταση μεταξύ τους είναι ίση με το ενδοτεταρτημοριακό εύρος $IQR = Q_3 - Q_1$). Η διάμεσος παριστάνεται με ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο με τις πιο πάνω πλευρές μέσα στο ορθογώνιο.

-από τα μέσα των πλευρών που παριστάνουν το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα με μήκος το πολύ $1.5IQR$. Αν η ελάχιστη τιμή (x_{min}) είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που φέρουμε από το Q_1, τότε το άκρο του τμήματος είναι η x_{min}. Ομοίως, αν η μέγιστη τιμή (x_{max}) είναι σημείο του ευθύγραμμου τμήματος που φέρουμε από το Q_3, τότε το άκρο του τμήματος είναι η x_{max}.

-Σημειώνουμε τις ακραίες παρατηρήσεις με ενα αστερίσκο ή με ενα κυκλάκι.



- Οι δυο κάθετες γραμμές που δηλώνουν τις τιμές x_{min} και x_{max} σε συνδυασμό με το μέγεθος του ορθογωνίου,δείχνουν πόση έκταση καταλαμβάνουν οι τιμές μεταξύ των δυο αυτών οριακών τιμών: μεγαλύτερες γραμμές δηλώνουν μεγαλύτερη διασπορά (κατανομή) των τιμών στο δείγμα.

- ᾽Μικρά᾽ ορθογώνια δηλώνουν ότι οι τιμές του δείγματος ταλαντεύονται συνεχώς γύρω από τις κεντρικές τιμές. ᾽Μεγάλα᾽ ορθογώνια δηλώνουν ότι οι τιμές είναι περισσότερο μεταβαλλόμενες. Αυτό μας βοηθά να συγκρίνουμε δυο πληθυσμούς μέσω των θηκογραμμάτων τους όταν αυτά έχουν ίσες διαμέσους.

Συσχέτιση δύο μεταβλητών – Συντελεστής Συσχέτισης

Τί γίνεται στην περίπτωση που τα δείγματα δυο τυχαίων μεταβλητών έχουν ίδια μέτρα θέσης; Τί πληροφορίες μπορώ να πάρω αν θέλω να συγκρίνω τα δείγματα; Το **διάγραμμα διασποράς** των τιμών μας δίνει μια καλή (οπτική) εικόνα για τη συσχέτιση των τιμών των δυο δειγμάτων.

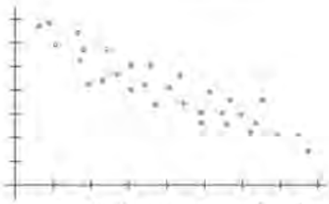
Ορισμός

Έστω $x_1, x_2, \cdots, x_\nu$ δείγμα από μια τυχαία μεταβλητή X και $y_1, y_2, \cdots, y_\nu$ δείγμα από μια τυχαία μεταβλητή Y. **Διάγραμμα διασποράς** ορίζεται ως η γραφική παράσταση (σε ορθογώνιο σύστημα αξόνων) των σημείων (διατεταγμένων ζευγών) $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \cdots, (x_\nu, y_\nu)$. Η μεταβλητή X καλείται η **ανεξάρτητη μεταβλητή** και η μεταβλητή Y η **εξαρτημένη μεταβλητή**.

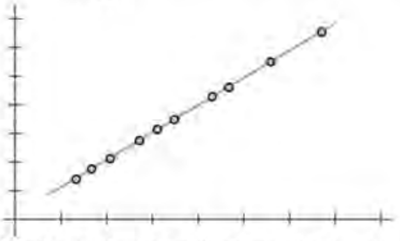
Σκοπός η μελέτη της επίδρασης της ανεξάρτητης μεταβλητής X πάνω στην εξαρτημένη μεταβλητή Y. Με τα διαγράμματα διασποράς μπορούμε να μελετήσουμε τη σχέση που ενδέχεται να έχουν οι δυο μεταβλητές. Η πιο απλή σχέση που μπορεί να έχουν δυο μεταβλητές είναι η **συσχέτιση**.

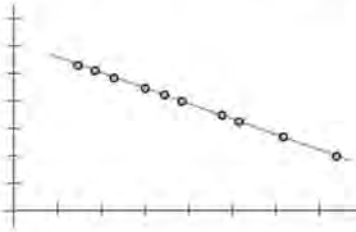
Όταν σημεία στο διάγραμμα διασποράς διαγράφουν τροχιά από κάτω αριστερά μέχρι πάνω δεξιά, τότε λέμε ότι υπάρχει **θετική συσχέτιση** μεταξύ των δυο μεταβλητών, δηλ. όσο αυξάνονται οι τιμές της X αυξάνονται οι τιμές της Y.

Όταν σημεία στο διάγραμμα διασποράς διαγράφουν τροχιά από πάνω αριστερά μέχρι κάτω δεξιά, τότε λέμε ότι υπάρχει **(γραμμική) συσχέτιση** μεταξύ των δυο μεταβλητών, δηλ. όσο αυξάνονται οι τιμές της X μειώνονται οι τιμές της Y.



Όταν όλα τα σημεία στο διάγραμμα διασποράς κείνται επί μιας ευθείας γραμμής έχουμε **τέλεια** συσχέτιση. Συγκεκριμένα, μια τέλεια (γραμμική) συσχέτιση μπορεί να είναι είτε **θετική** είτε **αρνητική**, ανάλογα αν η κλίση της ευθείας πάνω στην οποία κείνται τα σημεία έχει θετική ή αρνητική κλίση αντίστοιχα.





Μηδενική συσχέτιση: όταν οι μεταβλητές δεν παρουσιάζουν συσχέτιση.

Ισχυρή Θετική / Αρνητική Συσχέτιση: όταν τα σημεία παρουσιάζουν σχετικά μικρή διασπορά.

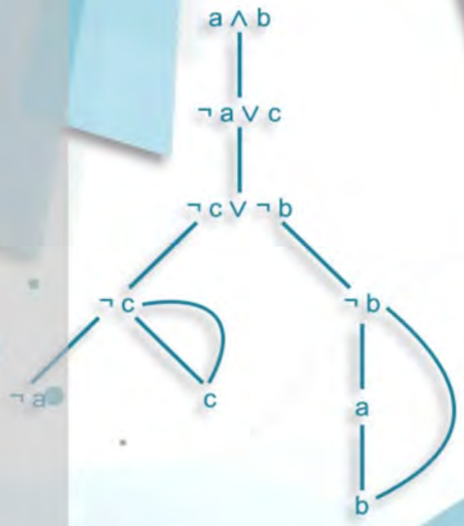
Ασθενής Θετική / Αρνητική Συσχέτιση: όταν τα σημεία παρουσιάζουν σχετικά μεγάλη διασπορά.

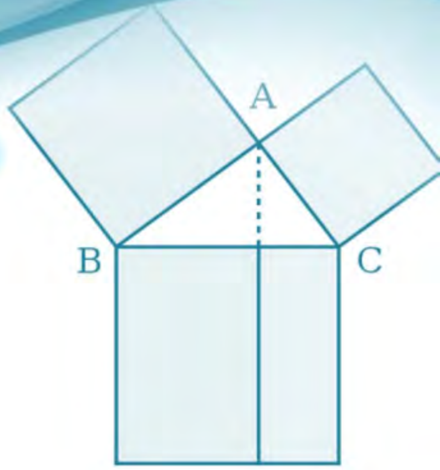
Μαθηματικά

Β' Λυκείου Κατεύθυνσης

Κεφάλαια

- Μαθηματική Λογική-Μέθοδοι απόδειξης
- Τριγωνομετρία Ι και ΙΙ
- Απόλυτη Τιμή-Συναρτήσεις
- Όριο-Συνέχεια συνάρτησης
- Ακολουθίες (πραγματικών αριθμών)
- Γεωμετρικές κατασκευές-Γεωμετρικοί τόποι
- Εκθετική-Λογαριθμική συνάρτηση
- Πολύγωνα-Μέτρηση κύκλου
- Παράγωγος (συνάρτηση)
- Στερεομετρία
- Στατιστική





ISBN 978-9925-7567-1-1

Σφαιρική προσέγγιση
των νεων αναλυτικών προγραμμάτων