

7. Ημιτονοειδής ανάλυση σταθερής κατάστασης Sinusoidal Steady State Analysis

Ως εδώ, έχουμε εστιασθεί σε κυκλώματα με σταθερές πηγές. Εδώ εξετάζουμε κυκλώματα που ενεργοποιούνται από πηγές ρεύματος ή τάσης που αλλάζουν με το χρόνο. Ειδικότερα ενδιαφερόμαστε για τις πηγές στις οποίες η αξία της τάσης ή του ρεύματος αλλάζει ημιτονοειδώς.

Αυτός είναι ένας πολύ σημαντικός τομέας μελέτης επειδή η παραγωγή, η μετάδοση, η διανομή και η κατανάλωση ηλεκτρικής ενέργειας εμφανίζονται υπό ουσιαστικά ημιτονοειδείς όρους σταθερής κατάστασης.

Μια **ημιτονοειδής πηγή (sinusoidal source)** παράγει είτε ρεύμα είτε τάση που μεταβάλλεται ημιτονοειδώς με το χρόνο.

$$\text{π.χ. } V = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

Αυτή είναι μια ημιτονοειδής πηγή τάσης.

T είναι η περίοδος σε δευτερόλεπτα (seconds)

f είναι η συχνότητα σε Hertz (Hz) και

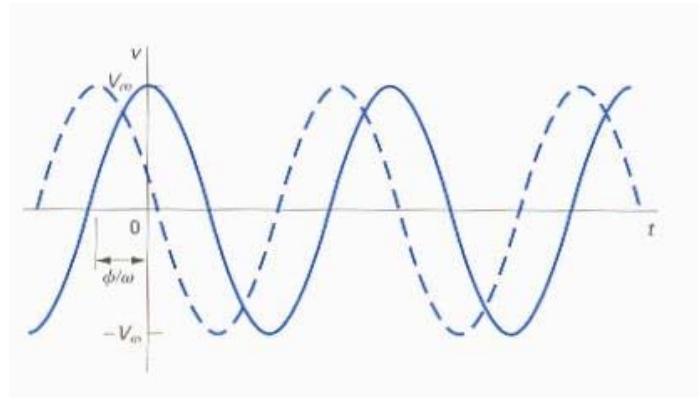
$$f = \frac{1}{T}$$

ω είναι η γωνιακή συχνότητα σε radians/second (rad/s)

$$\omega = 2\pi f$$

ϕ είναι η γωνία φάσης σε radians.

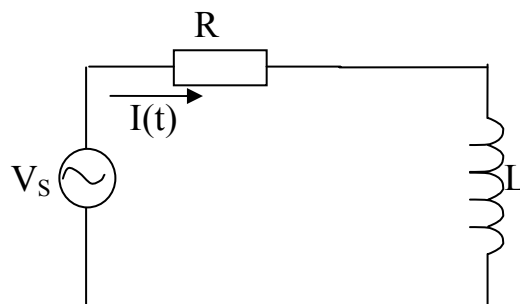
Σημείωση: Εάν η ϕ είναι θετική τότε η τάση μετατοπίζεται στα αριστερά.



$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

Η μέση τετραγωνική τιμή (RMS - root mean square) δίνεται από την ανωτέρω έκφραση. Περισσότερα για αυτό πιο κάτω.

Η Ημιτονοειδής απόκριση The Sinusoidal Response



$$V_s = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

KVL

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

Η λύση θα είναι της μορφής

$$I = \frac{-V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\phi - \theta) e^{-(R/L)t} + \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \phi - \theta)$$

όπου θ ορίζεται ως η γωνία της οποίας εφαπτομένη είναι η $\omega L / R$.

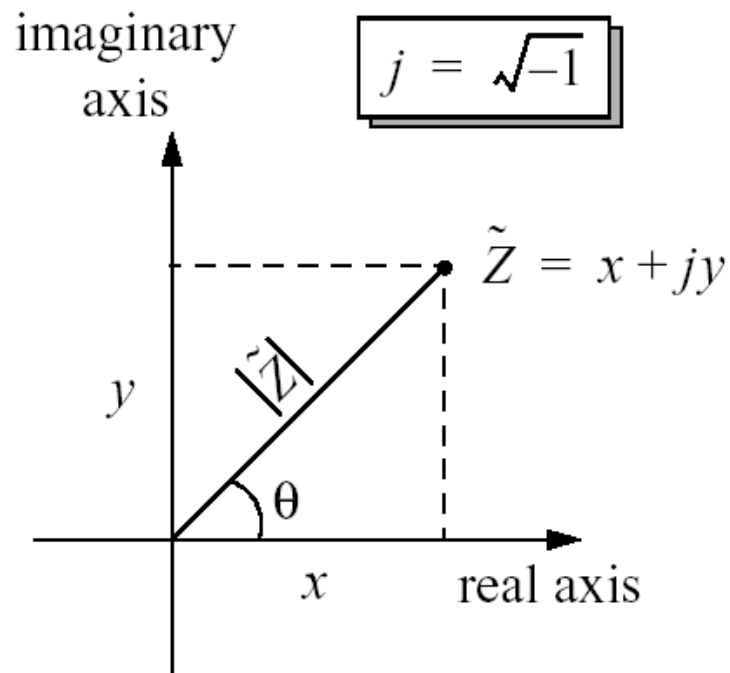
Ο πρώτος όρος στη δεξιά πλευρά είναι το **μεταβατικό** μέρος (transient component) επειδή γίνεται απειροελάχιστο καθώς ο χρόνος παύει. Ο δεύτερος όρος στη δεξιά πλευρά είναι γνωστός ως **σταθερή κατάσταση (steady state)** της λύσης. Υπάρχει εφ' όσον ο διακόπτης παραμένει κλειστός και η πηγή συνεχίζει να παρέχει την ημιτονοειδή τάση.

Σε αυτήν την σειρά μαθημάτων ενδιαφερόμαστε για την ανάπτυξη μιας τεχνικής για την απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response) άμεσα, αποφεύγοντας κατά συνέπεια τα προβλήματα με τη λύση διαφορικών εξισώσεων. Εντούτοις, με τη χρησιμοποίηση αυτής της τεχνικής χάνουμε τη λήψη είτε του παροδικού μέρους (transient component) είτε της συνολικής απάντησης (total response), η οποία είναι το σύνολο της παροδικής απόκρισης και της λύσης σταθερής κατάστασης (steady state).

Εστιάζομαστε στην απόκριση σταθερής κατάστασης (steady state response). Είναι σημαντικό να αναφερθούν τα ακόλουθα χαρακτηριστικά για τη λύση σταθερής κατάστασης:

1. Η λύση σταθερής κατάστασης είναι και αυτή ημιτονοειδής συνάρτηση
2. Η συχνότητα του σήματος απόκρισης (output signal) είναι ίδια με τη συχνότητα του σήματος πηγής.
3. Το μέγιστο εύρος της σταθερής κατάστασης (steady state response) γενικά διαφέρει του εύρους της πηγής.
4. Η γωνία φάσης του σήματος απάντησης (output signal), γενικά, διαφέρει από τη γωνία φάσης της πηγής.

Μιγαδικοί αριθμοί Complex Numbers



$$\tilde{Z} = x + jy$$

(i) Συζυγής
Complex Conjugate

$$\tilde{Z}^* = x - jy$$

(ii) Πραγματικά και φανταστικά μέρη
Real and Imaginary Parts

$$\text{Re}(\tilde{Z}) = x = \frac{(\tilde{Z} + \tilde{Z}^*)}{2}$$

$$\text{Im}(\tilde{Z}) = y = \frac{(\tilde{Z} - \tilde{Z}^*)}{2j}$$

(iii) Άθροισμα και διαφορά
Sum and Difference

$$\tilde{Z}_1 \pm \tilde{Z}_2 = (x_1 \pm x_2) + j(y_1 \pm y_2)$$

(iv) Γινόμενο - Product

$$\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2 = (x_1 + jy_1)(x_2 + jy_2) =$$

(v) Μέτρο - Modulus

$$|\tilde{Z}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\tilde{Z}\tilde{Z}^*}$$

(vi) Μέτρο γινομένου και πηλίκου
Modulus of Product and Quotient

$$|\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2| = |\tilde{Z}_1| |\tilde{Z}_2|$$

$$|\tilde{Z}_1 / \tilde{Z}_2| = |\tilde{Z}_1| / |\tilde{Z}_2|$$

(vii) Μέτρο συνόλου
Modulus of Sum

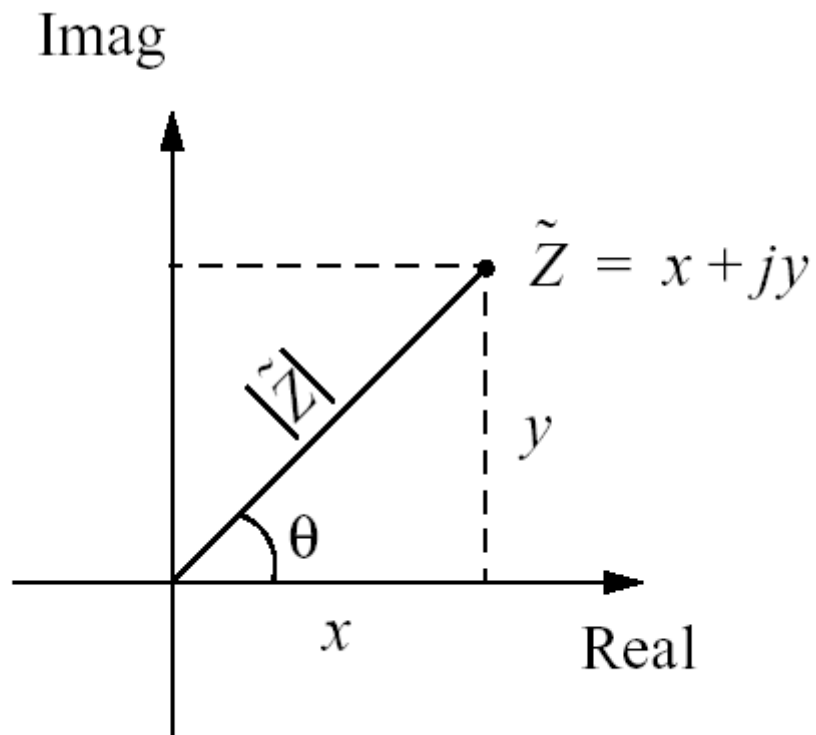
$$\begin{aligned} |\tilde{Z}_1 + \tilde{Z}_2|^2 &= |\tilde{Z}_1|^2 + |\tilde{Z}_2|^2 + 2\operatorname{Re}(\tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2^*) \\ &= |\tilde{Z}_1|^2 + |\tilde{Z}_2|^2 + 2\operatorname{Re}(\tilde{Z}_1^* \tilde{Z}_2) \end{aligned}$$

Απόδειξη:

(viii) Θεώρημα De Moivre's - De Moivre's Theorem

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Πολική μορφή - Polar Form



Η πολική μορφή ενός μιγαδικού αριθμού αντιπροσωπεύει τον αριθμό υπό μορφή τού μήκους του r και την γωνιά θ στο διάγραμμα argand.

$$\tilde{Z} = re^{j\theta}$$

από το θεώρημα De Moivre's και το ότι

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

και

$$r = |\tilde{Z}|$$

$\tilde{Z}$ μπορεί επίσης να γραφτεί ως

$$\tilde{Z} = r\angle\theta^\circ$$

Παράδειγμα 7.1

(a) Βρείτε τις πολικές συντεταγμένες (r, θ) των ακόλουθων μιγαδικών αριθμών.

(i) -2 , (ii) j , (iii) $1+j$

(b) Βρείτε το μιγαδικό αριθμό $a+jb$ από τις δεδομένες πολικές συντεταγμένες.

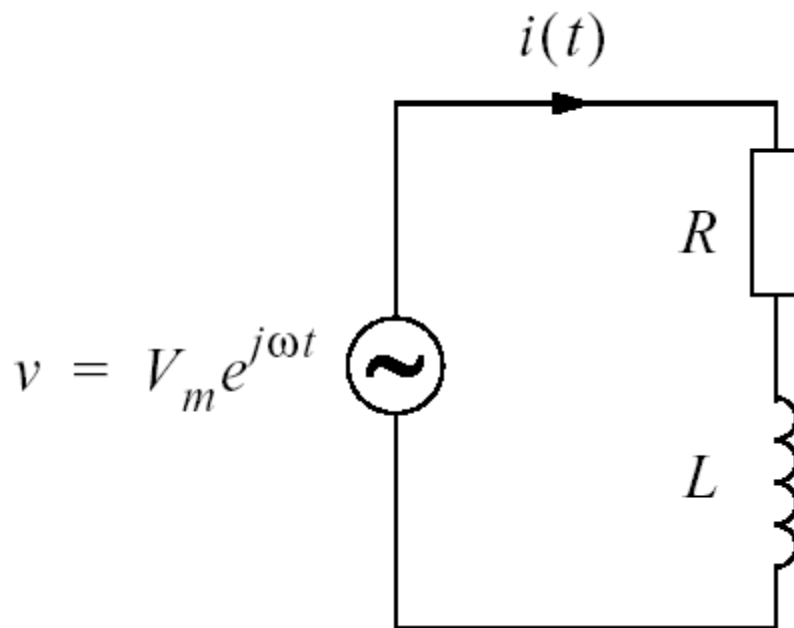
(i) $(1, \pi/3)$, (ii) $(3, 0)$, (iii) $(\frac{1}{2}, \pi)$

(c) Εάν $z_1=2+3j$ και $z_2=1-j$ υπολογίστε τα ακόλουθα
(i) z_1+z_2 , (ii) $z_1-z_2^*$, (iii) z_1/z_2 , (iv) $(z_1z_2)^*$

(d) Για $0 \leq \theta \leq \pi$ σχεδιάστε τις παραστάσεις στο μιγαδικό επίπεδο των πιο κάτω :
(i) $e^{j\theta}$, (ii) $2e^{-j\theta}$, (iii) $1+e^{j\theta}$, (iv) $1+e^{j(\theta+\pi/4)}/2$

(e) Βρείτε $1+2j/3-5j$

Μιγαδική Ανάλυση Κυκλωμάτων AC (εναλλασσόμενων)
Complex Analysis of AC circuits



Αντιπροσωπεύστε την τάση με το μιγαδικό αριθμό

$$v = V_m e^{j\omega t}$$

και υποθέστε

$$i = I_m e^{j(\omega t + \theta)}$$

$$i = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}} \sin[\omega t - \tan^{-1}(\frac{\omega L}{R})]$$

Φάσορες - Phasors

Ξέρουμε από πριν ότι

$$V_m = I_m(R + j\omega L)e^{j\theta}$$

Καθορίστε τον **φάσορα ρεύματος** (current phasor)

$$\tilde{I} = I_m e^{j\theta} = I_m \angle \theta^\circ$$

και **φάσορα τάσης** (voltage phasor)

$$\tilde{V} = V_m e^{j0} = V_m \angle 0^\circ$$

Έτσι

$$\tilde{V} = \tilde{I}Z$$

όπου $Z = R + j\omega L$ ονομάζεται **μυγαδική σύνθετη αντίσταση** (complex impedance).

Μυγαδική Σύνθετη Αντίσταση και Αγωγιμότητα Complex Impedance and Admittance

(i) Σύνθετη Αντίσταση – Complex Impedance

$$Z = R + jX$$

R = Re (Z) Αντίσταση (Resistance) Μονάδες: Ω

X = Im (Z) Επαγωγική αντίσταση (Reactance) Μονάδες: Ω

Σε γενικές γραμμές μια μιγαδική σύνθετη αντίσταση (complex impedance) Z θα έχει και πραγματικό και φανταστικό μέρος και μπορεί να εξαρτάται από την συχνότητα. Το πραγματικό μέρος της Z αντιστοιχεί με την αντίσταση και είναι υπεύθυνο για την απώλεια ενέργειας στο κύκλωμα. Το φανταστικό μέρος της Z , ονομάζεται επαγωγική αντίσταση (reactance) και είναι υπεύθυνο για την αποθήκευση ενέργειας σε ένα κύκλωμα.

Για κυκλώματα σε σειρά ή παράλληλα οι σύνθετες αντιστάσεις μπορούν να συνδυαστούν με τον ίδιο τρόπο όπως οι αντιστάσεις σε ένα κύκλωμα dc.

Κυκλώματα σειράς - Series Circuits

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N$$

Παράλληλα κυκλώματα - Parallel Circuits

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_N}$$

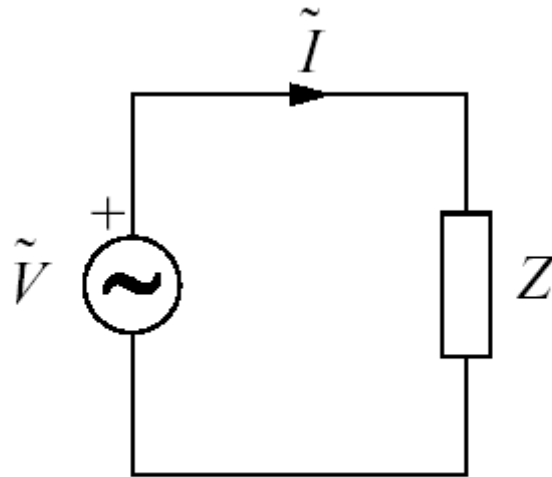
(ii) Σύνθετη Αγωγιμότητα - Admittance

$$Y = \frac{1}{Z} = G + jB$$

$G = \text{Re}(Y)$ Αγωγιμότητα (conductance)

$B = \text{Im}(Y)$ Επιδεκτικότητα (Susceptance)

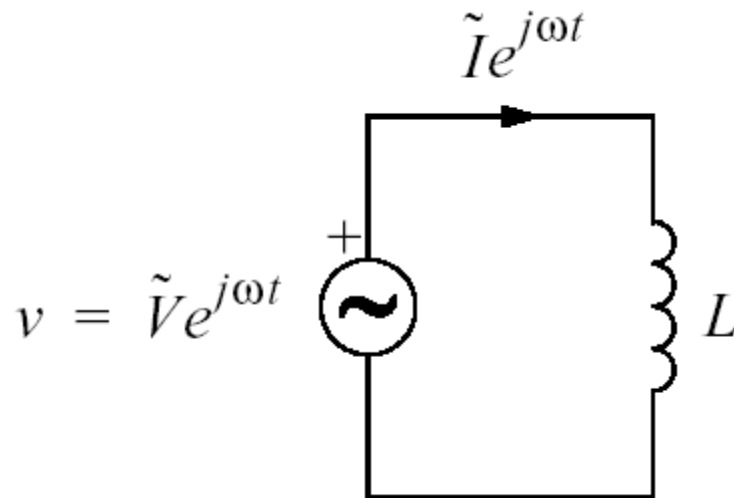
Σημαντικό: Η ανάλυση εναλλασσόμενων κυκλωμάτων χρησιμοποιώντας φάσορες (phasors) είναι παρόμοια με την ανάλυση σταθερών κυκλωμάτων (DC) και έτσι όλα τα θεωρήματα και τεχνικές που μάθαμε μέχρι τώρα όπως (θεώρημα Thevenin, Norton, επαλληλία και ανάλυση πλέγματος) μπορούν να εφαρμοστούν όμως χρησιμοποιώντας τους φάσορες τάσης και ρεύματος (phasor voltages and phasor currents) και τις σύνθετες αντιστάσεις αντί τις αντιστάσεις.



$$\tilde{V} = \tilde{I} Z$$

Σύνθετη αντίσταση των πηνίων και των πυκνωτών Complex Impedance of Inductors and Capacitors

(i) Πηνία - Inductors



Χρειαζόμαστε εκφράσεις για τη σύνθετη αντίσταση ενός πηνίου και ενός πυκνωτή. Εφαρμόζουμε τη σύνθετη τάση και ρεύμα.

$$v = \tilde{V} e^{j\omega t}$$

$$i = \tilde{I} e^{j\omega t}$$

Θυμηθείτε ότι η πραγματική τάση και το ρεύμα δίνονται από $\text{Re}(v)$ και $\text{Re}(i)$. Οι φάσορες τάσης και ρεύματος (voltage and current phasors) δίνονται από το $\tilde{V}$ και $\tilde{I}$.

Ξέρουμε ότι στα άκρα του πηνίου

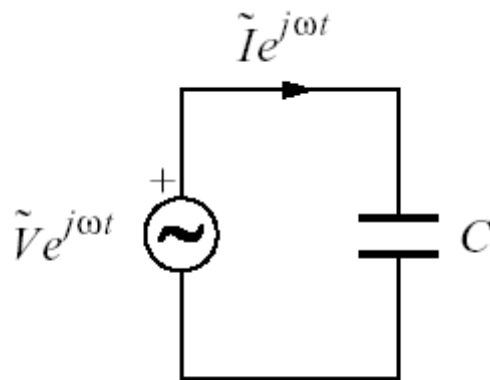
$$v = L \frac{di}{dt}$$

Παρεμβάλλοντας τη σύνθετη τάση και τα ρεύματα έχουμε

Η σύνθετη αντίσταση του πηνίου δίνεται από

$$Z = j\omega L = \omega L \angle 90^\circ$$

(ii) Πυκνωτές - Capacitors



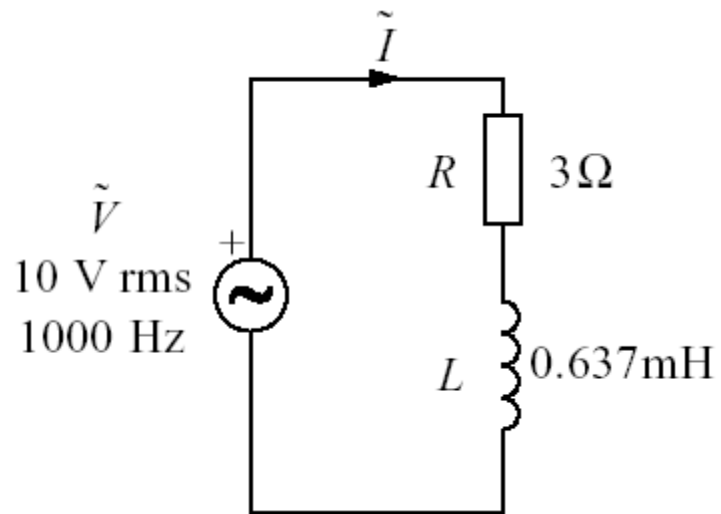
$$v = \frac{Q}{C} = \frac{1}{C} \int i dt$$

Όπου η σύνθετη αντίσταση του πυκνωτή δίνεται από

$$Z = \frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{\omega C} \angle -90^\circ$$

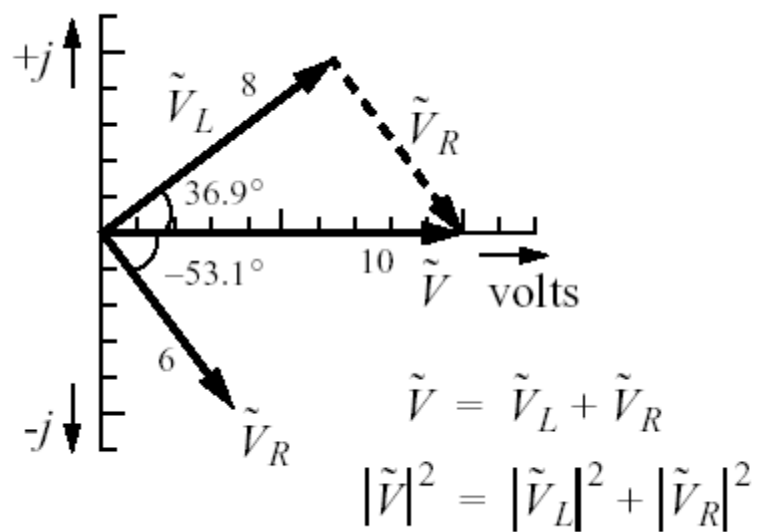
Παράδειγμα 7.2

Βρείτε το εύρος (amplitude) και τη φάση (phase) του ρεύματος στο ακόλουθο κύκλωμα. (camp121)



Παράδειγμα 7.3

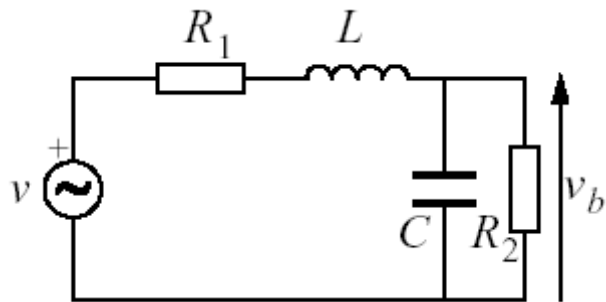
Ελέγξτε το προηγούμενο παράδειγμα με τη χάραξη των τάσεων σε ένα διάγραμμα phasor.



Παράδειγμα 7.4

Υπολογίστε την τάση v_b στα άκρα της R_2 στο πιο κάτω κύκλωμα όπου η εφαρμοσμένη τάση είναι

$$V = 60 \cos(1000t) \text{ Volts (camp125)}$$

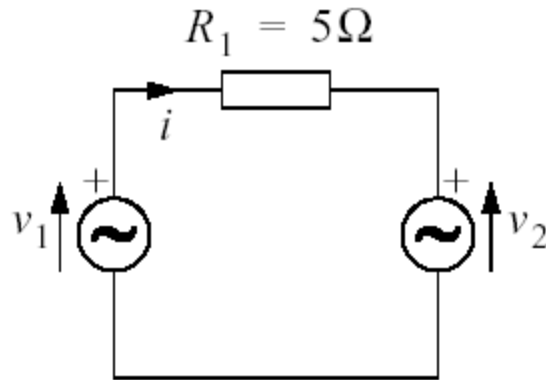


$$R_1 = 80\Omega \quad C = 2.5\mu\text{ F}$$

$$R_2 = 800\Omega \quad L = 0.14\text{ H}$$

Παράδειγμα 7.5

Βρείτε το ρεύμα i που περνά από την R_1 στο πιο κάτω κύκλωμα.
Οι τάσεις είναι σε r.m.s. (camp130)

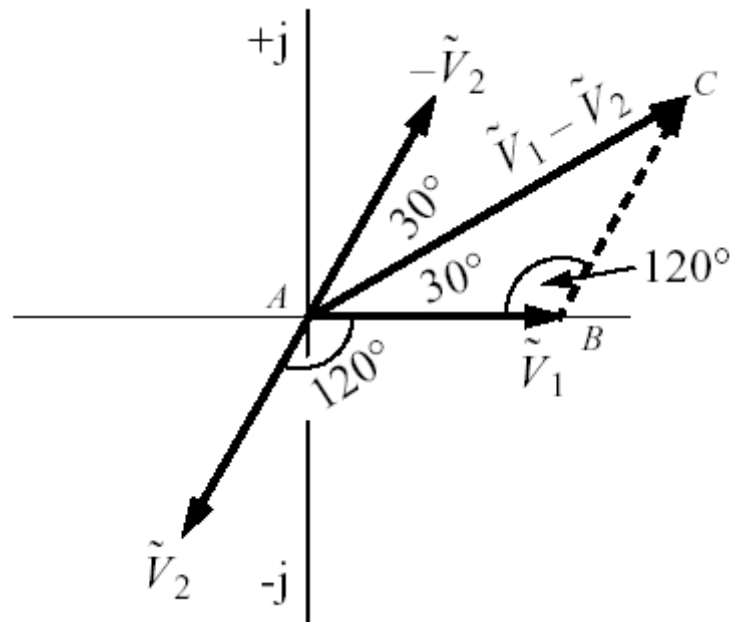


$$v_1 = 5\sqrt{2} \cos \omega t$$

$$v_2 = 5\sqrt{2} \sin(\omega t - 0.5236)$$

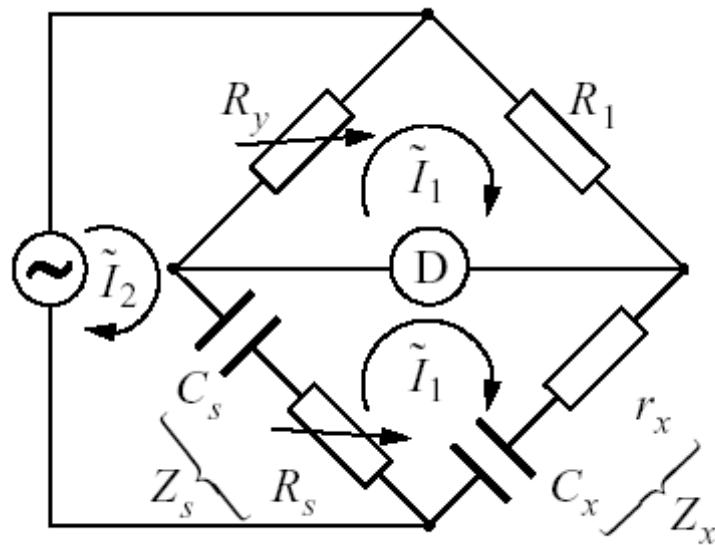
Παράδειγμα 7.6

Ελέγξτε το προηγούμενο παράδειγμα με τη χάραξη $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_2$ και $\tilde{V}_1 - \tilde{V}_2$ σε ένα διάγραμμα phasor. (camp133)



Παράδειγμα 7.7

Καθορίστε τους όρους ισορροπίας για τη γέφυρα πυκνωτών που παρουσιάζεται κατωτέρω. (11.4camp134)



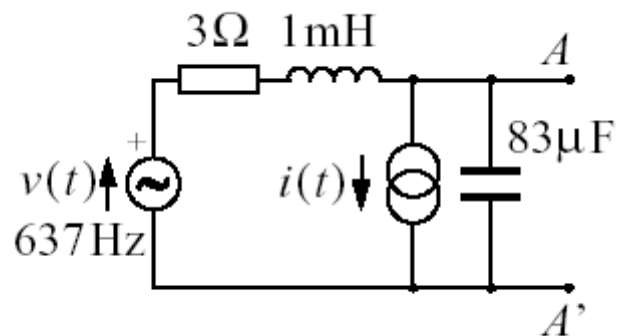
Παράδειγμα 7.8

Βρείτε το ισοδύναμο κύκλωμα Norton του ακόλουθου κυκλώματος όπου η πηγή τάσης και η πηγή ρεύματος είναι:

$$v(t) = 10 \cos(\omega t + 45^\circ) \text{ Volts}$$

$$i(t) = 2 \sin(\omega t - 30^\circ) \text{ Amps.}$$

Η συχνότητα είναι $f = 637 \text{ Hz}$.



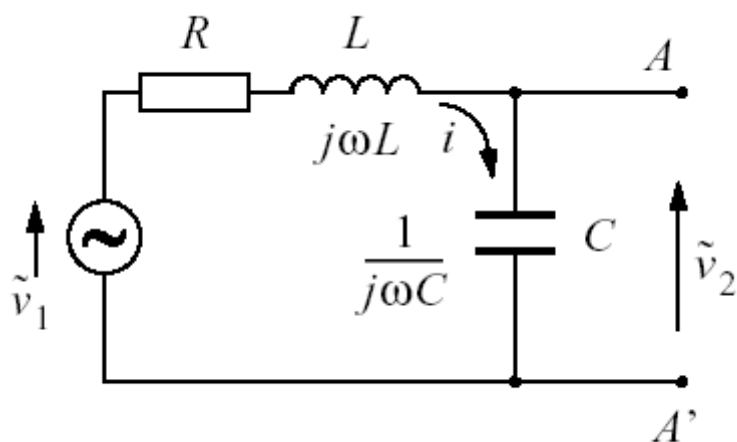
Κυκλώματα συντονισμού- Resonant Circuits

Συντονισμός (resonance) είναι ένα προεξέχον χαρακτηριστικό γνώρισμα της συμπεριφοράς ενός κυκλώματος που αποτελείται από πηνία και πυκνωτές. Το φαινόμενο του συντονισμού εφαρμόζεται σε διάφορους τομείς της επιστήμης και της εφαρμοσμένης μηχανικής. Ένας τρόπος κατανόησης του συντονισμού είναι να θεωρηθεί ως ταλάντωση της αποθηκευμένης ενέργειας από μια μορφή σε άλλη (στην ηλεκτρονική οι δύο μορφές είναι η μαγνητική (δυνάμεις του ρεύματος μέσω ενός πηνίου), και ηλεκτροστατική (φορτίο στις πλάκες ενός πυκνωτή)).

Ο συντονισμός είναι ένα πολύ σημαντικό φαινόμενο στην ηλεκτρονική. Είναι το φαινόμενο που επιτρέπει τη διάκριση συχνότητας στα κυκλώματα επικοινωνιών. Τα κυκλώματα συντονισμού χρησιμοποιούνται σε πολλές εφαρμογές όπως η επιλογή του επιθυμητού σταθμού στους δέκτες ραδιοφώνων ή τηλεοράσεων.

Συντονισμός σε κυκλώματα σειράς - Series Resonance

Στα κυκλώματα συντονισμού σειράς το πηνίο L και ο πυκνωτής C είναι σε σειρά. Οποιοδήποτε πραγματικό πηνίο έχει αντίσταση λόγω της ειδικής αντίστασης των αγωγών που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή. Αυτό αντιπροσωπεύεται από την επιπρόσθετη αντίσταση R .



Οι σύνθετες αντιστάσεις του πηνίου L και πυκνωτή C στη συχνότητα ω είναι:

Για ένα σήμα εισαγωγής v_1 , το ρεύμα i είναι:

Το ρεύμα φθάνει σε ένα μέγιστο όταν

Έστω ότι η συχνότητα που αντιστοιχεί στο μέγιστο ρεύμα είναι ω_0 .

ω_0 ονομάζεται **συχνότητα συντονισμού (Resonant Frequency)** και

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{ή} \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Σε συντονισμό $\omega = \omega_0$ και $i = i_0 = v_1/R$

$$v_2 = iZ_C = \frac{v_1}{j\omega_0 CR} = \frac{v_1}{\omega_0 CR} \angle -90^\circ$$

Παραδείγματος χάριν εάν

$L = 4 \text{ mH}$, $C = 0.1 \text{ } \mu\text{F}$, $R = 5 \text{ } \Omega$ και $v = 10 \text{ V r.m.s.}$,

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} =$$

Σε συντονισμό $\omega = \omega_0$

Το γεγονός ότι αυτό είναι πολλές φορές μεγαλύτερο από το εφαρμοσμένο σήμα v_1 είναι μια ιδιαίτερα χρήσιμη ιδιότητα των κυκλωμάτων συντονισμού.

Συντελεστής Ποιότητας - Quality Factor

Η ενίσχυση της τάσης που επιτυγχάνεται στο κύκλωμα σειράς όταν είναι σε συντονισμό εξαρτάται από την αναλογία

$$\omega_0 L/R$$

Η R είναι η ωμική αντίσταση που συνδέεται με το πηνίο και σε ένα πηνίο καλής ποιότητας πρέπει να είναι πολύ μικρή. Η πιο πάνω αναλογία σαφώς συνδέεται με την ποιότητα του συστατικού για αυτό και το όνομα Συντελεστής Ποιότητας (**Quality Factor**). Σε τυπικές τιμές πηνίων ο συντελεστής ποιότητας κυμαίνεται μεταξύ 5-200.

Έτσι για ένα πηνίο

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

η επαγωγική αντίσταση / Αντίσταση απώλειας.

Το μέγεθος της τάσης παραγωγής (output voltage) είναι

$$v_2 = v_1 Q$$

Εάν το Q είναι μεγάλο, το κύκλωμα έχει σημαντική μεγέθυνση τάσης χωρίς την ανάγκη μιας πηγής. Για αυτό το κύκλωμα η μεγέθυνση και το Q θα είναι μέγιστα όταν η R είναι όσο το δυνατόν μικρότερη.

Εδώ έχουμε υποθέσει ότι όλες οι απώλειες προκύπτουν από το πηνίο. Στην πράξη, μπορούν επίσης να υπάρξουν απώλειες σε άλλα μέρη του κυκλώματος. Για αυτόν τον λόγο μπορούμε επίσης να ορίσουμε το **Συντελεστή Ποιότητας του Κυκλώματος (Circuit Quality Factor) Q'** ο οποίος είναι ο ίδιος με τον πιο πάνω αλλά με το R αντικατεστημένο με το $R' = R_{\text{tot_series}}$.

Εξάρτηση συχνότητας - Frequency Dependence

$$i = v_1 / (R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}))$$

Αντικαθιστώντας

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

έχουμε

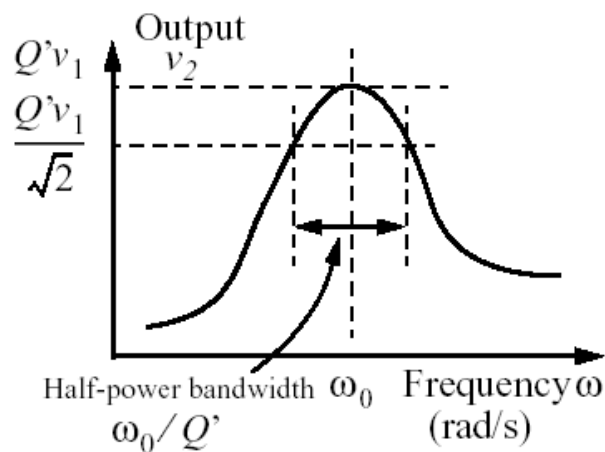
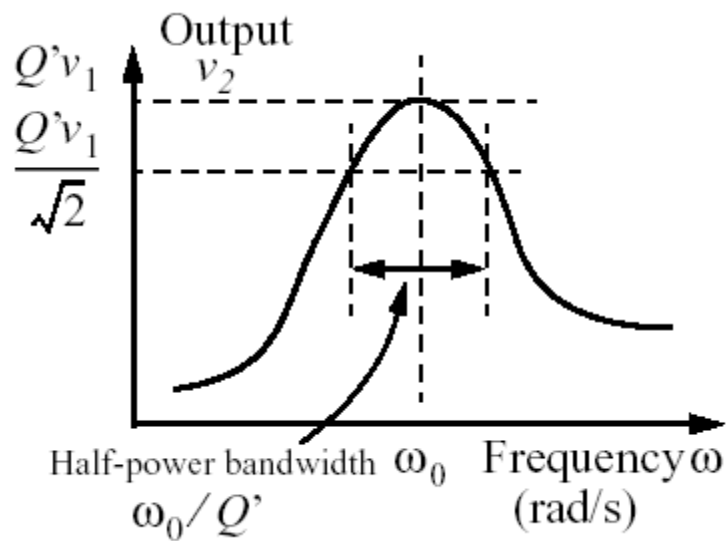
όπου

$$Q' = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

(Συντελεστής Ποιότητας Κυκλώματος -Circuit Quality Factor)

Παίρνοντας την συχνότητα $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ κοντά στην ω_0 και χρησιμοποιώντας το Διωνυμικό θεώρημα (Binomial Theorem) τότε μπορούμε να γράψουμε

Απόκριση συχνότητας - Frequency Response



Το απλό παράδειγμα που παρουσιάσαμε νωρίτερα έδειξε το φαινόμενο της μεγέθυνσης της τάσης (η τάση που μετρήθηκε στα άκρα του πηνίου ή του πυκνωτή ήταν 400 V, ενώ το εύρος της εφαρμοσμένης τάσης ήταν 10 V).

Ξέρουμε ήδη ότι

$$i = v_1 / R[1 + jQ'(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})]$$

Όταν το φανταστικό μέρος είναι ίσο με το πραγματικό μέρος και αν το Q' είναι 10 ή μεγαλύτερο τότε

$$1 = 2Q' \delta\omega / \omega_0 \quad \text{ή} \quad \delta\omega = \omega_0 / 2Q' \quad \text{το οποίο δίνει}$$

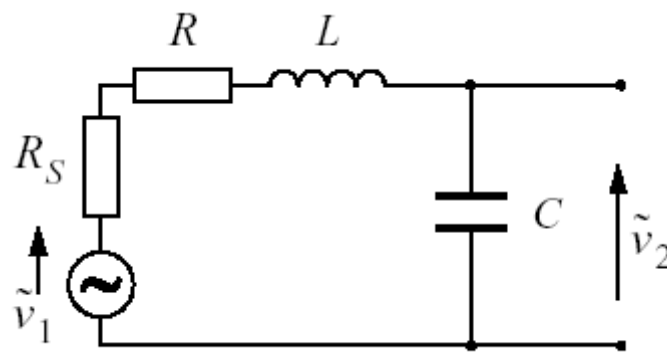
$$i = \frac{v_1}{\sqrt{2}R}$$

Παράδειγμα 7.9

Η εισαγωγή ενός κυκλώματος ράδιο-δέκτη (radio receiver input circuit) παρουσιάζεται κατωτέρω. Η τιμή του πηνίου L είναι $200\mu\text{H}$ σε σειρά με μια αντίσταση R 25Ω ; Το v_1 είναι μια πηγή 0.1mV με εσωτερική αντίσταση $R_S = 25\Omega$ το οποίο αντιπροσωπεύει το σήμα από την αντένα. Χρειαζόμαστε ένα κύκλωμα συντονισμού με συχνότητα συντονισμού 1 MHz (μεσαία κύματα - Medium wave band).

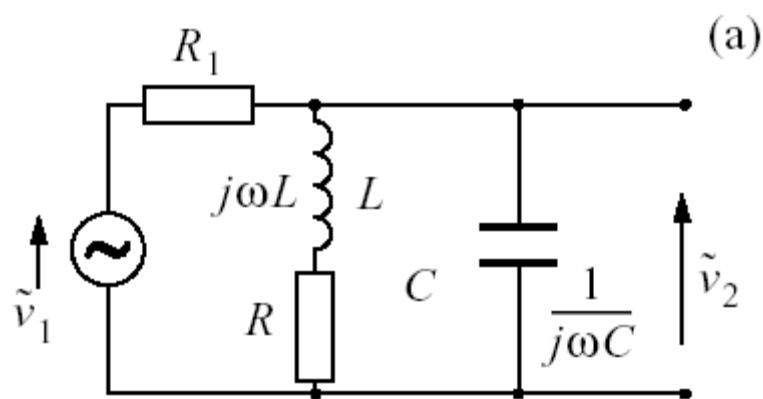
Βρείτε

- (i) την αξία του πυκνωτή C που απαιτείται
- (ii) τον παράγοντα ποιότητας του κυκλώματος Q
- (iii) την τάση εξόδου v_2 όταν το κύκλωμα είναι σε συντονισμό
- (iv) το εύρος ζώνης όταν γίνει η ισχύς μισή (half-power bandwidth). (camp149)

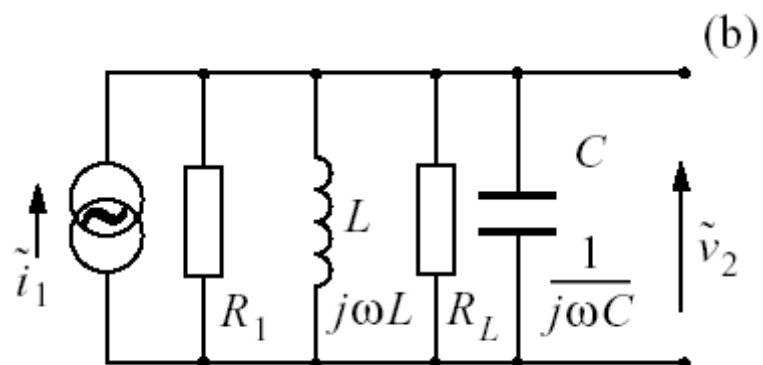


Παράλληλο κύκλωμα συντονισμού The Parallel Resonant Circuit

Στο σε σειρά κύκλωμα συντονισμού όλα τα στοιχεία RCL θεωρήθηκαν ότι ήταν σε σειρά. Σε γενικές γραμμές, ένα καθαρά παράλληλο κύκλωμα συντονισμού είναι επίσης δυνατό, και με τα τρία στοιχεία συνδεδεμένα παράλληλα. Εντούτοις, αυτό δεν απεικονίζει ακριβώς την πρακτική κατάσταση. Τα πηνία έχουν μια εγγενή αντίσταση σειράς και όλα τα καλώδια έχουν επίσης κάποια αντίσταση σειράς. Ως εκ τούτου ένα πρακτικό παράλληλο κύκλωμα συντονισμού είναι όπως παρουσιάζεται κατωτέρω.



Το κύκλωμα αναλύεται ευκολότερα εάν η τάση αντικαθίσταται από μια πηγή ρεύματος (Θεώρημα Norton)



Όπου $\tilde{i}_1 = \tilde{v}_1/R_1$

Η R_L περιγράφει τις απώλειες στο πηνίο ως **παράλληλη** αντίσταση. Ως εκ τούτου η παράλληλη αντίσταση R_L στο κύκλωμα (b) πρέπει να είναι ισοδύναμη με την αντίσταση σειράς R στο κύκλωμα (a).

$$R + j\omega L = \frac{R_L * j\omega L}{R_L + j\omega L}$$

Αυτή η έκφραση ισχύει για τα πηνία καλής ποιότητας όπου το Q είναι πάνω από 20.

Για να βρούμε το v_2 , βρίσκουμε τα ρεύματα στις τέσσερις παράλληλες πορείες και εφαρμόζουμε το νόμο του Kirchhoff για τα ρεύματα.

Εάν η τάση εξόδου είναι v_2 , τα ρεύματα είναι:

$-v_2/R_1$, $v_2*j\omega C$, $v_2/j\omega L$ and v_2/R_L .

Εφαρμόζοντας τον KCL έχουμε:

$$i_1 = v_2 \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_L} + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) \right)$$

Για ένα δεδομένο i_1 , το v_2 είναι μέγιστο όταν ο φανταστικός όρος είναι 0. Αυτό συμβαίνει στην συχνότητα συντονισμού $\omega=\omega_0$, όταν:

Αυτό είναι παρόμοιο με τον όρο για συντονισμό στο κύκλωμα σειράς. Οι παράλληλες αντιστάσεις R_1 και R_L μπορούν να αντικατασταθούν με μια ενιαία αντίσταση R_p όπου

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_L}$$

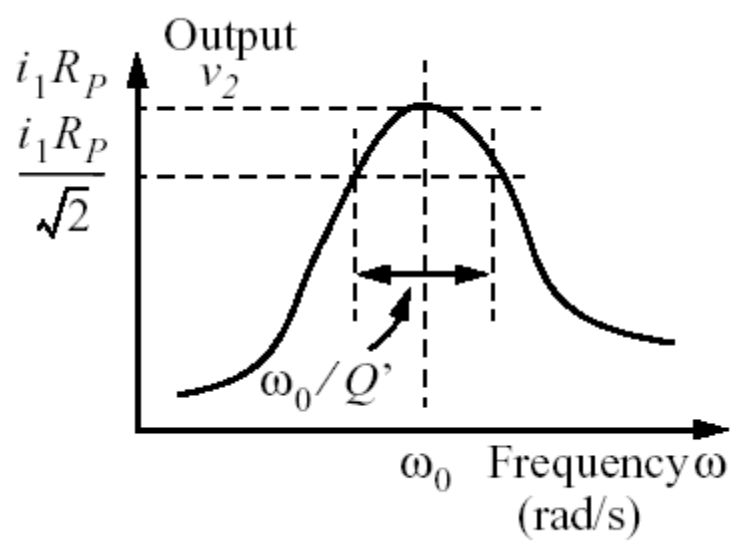
Τότε η μέγιστη τάση εξόδου v_2 δίδεται από:

$$v_2 = i_1 R_p$$

Ο παράγοντας ποιότητας του κυκλώματος Q' για το παράλληλο το κύκλωμα συντονισμού ορίζεται ως:

$$Q' = \frac{R_p}{\omega_0 L} = R_p \omega_0 C$$

Η συχνότητα απόκρισης (frequency response) γύρω από την συχνότητα συντονισμού μοιάζει με αυτής για ένα κύκλωμα σειράς.

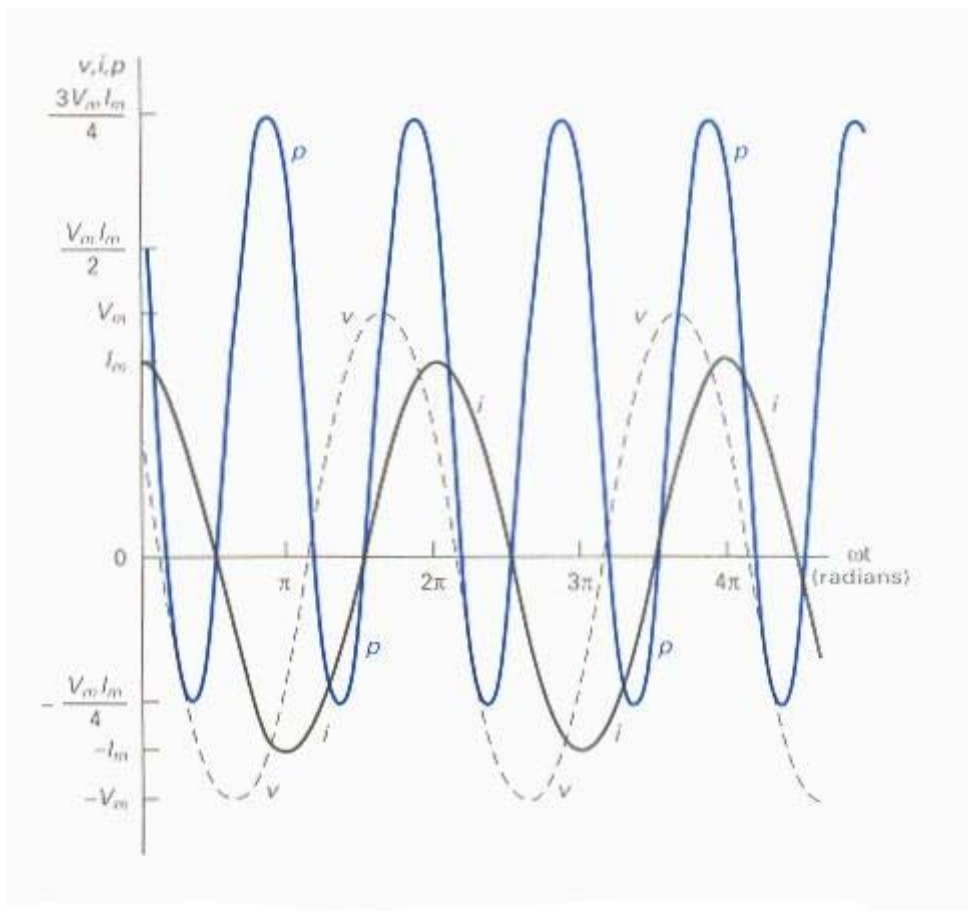


Ο συντελεστής ποιότητας του κυκλώματος Q' θα είναι ο υψηλότερος για μια υψηλή τιμή της αντίστασης πηγής R_1 .

8. Στιγμιαία ισχύς - Instantaneous Power

Η Εφαρμοσμένη μηχανική ενέργειας (Power Engineering) έχει εξελιχθεί σε μια από τους πιο σημαντικούς τομείς στην ηλεκτρολογία. Το εύρος των προβλημάτων με το οποίο καταπιάνεται η εφαρμοσμένη μηχανική ενέργειας (power engineering) περιλαμβάνει την παράδοση ενέργειας (Power delivery) τον καθορισμό της ισχύς μέσα στην οποία μια συσκευή λειτουργεί ασφαλώς και αποτελεσματικά, το σχεδιασμό μιας απέραντης σειράς γεννητριών, μετασχηματιστών και καλωδίων που παρέχουν την ηλεκτρική ενέργεια στην οικογένεια και το βιομηχανικό καταναλωτή.

Σχεδόν όλη η ηλεκτρική ενέργεια παρέχεται υπό μορφή ημιτονοειδών τάσεων και ρευμάτων. Ενδιαφερόμαστε πρώτιστα για τη μέση ισχύ που παραδίδεται ή που παρέχεται από ένα ζευγάρι τερματικών ως αποτέλεσμα των ημιτονοειδών τάσεων και των ρευμάτων.



Μέση και Άεργη Ισχύ Average and Reactive Power

$$p = P + P \cos 2\omega t - Q \sin 2\omega t \quad (p)$$

όπου

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) \text{ και } Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

P είναι η **μέση ισχύ** και Q είναι η **άεργη ισχύ**.

Η ισχύ P κάποτε ονομάζεται και πραγματική ισχύ (real power) επειδή περιγράφει την ισχύ σε ένα κύκλωμα που μετασχηματίζεται από ηλεκτρική σε μη ηλεκτρική ενέργεια.

Είναι εύκολο να φανεί γιατί το P καλείται μέση ισχύ (average power). Η μέση ισχύ που συνδέεται με τα ημιτονοειδή σήματα είναι ο μέσος όρος της στιγμιαίας ισχύς κατά τη διάρκεια μιας περιόδου.

$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} P dt$$

όπου T είναι η περίοδος της ημιτονοειδούς συνάρτησης. Κάνοντας το ολοκλήρωμα καταλήγουμε στο πιο πάνω αποτέλεσμα.

Ισχύς για καθαρώς ωμικά κυκλώματα

Power for purely resistive circuits

Εάν το κύκλωμα είναι καθαρώς ωμικό τότε η τάση και το ρεύμα είναι σε φάση. Έτσι $\theta_v = \theta_i$ έτσι από την εξίσωση (p) έχουμε

$$p = P + P \cos 2\omega t$$

Σημείωση: Δεν μπορεί ποτέ να είναι αρνητική. Όλη η ενέργεια απελευθερώνεται υπό μορφή θερμικής ενέργειας.

Ισχύς για καθαρώς επαγωγικά κυκλώματα

Power for purely inductive circuits

Εάν το κύκλωμα μεταξύ των τερματικών είναι καθαρώς επαγωγικό η τάση και το ρεύμα είναι έχουν διαφορά φάσης 90° . Η τάση προπορεύεται του ρεύματος κατά 90° . Έτσι

$$\theta_i = \theta_v - 90$$

Ως εκ τούτου η στιγμιαία ισχύ γίνεται από την εξίσωση (p):

$$p = -Q \sin 2\omega t$$

Σε ένα καθαρώς επαγωγικό κύκλωμα η μέση ισχύ (average power) είναι 0. Επομένως κανένας μετασχηματισμός από ηλεκτρική σε μη ηλεκτρική ενέργεια δεν πραγματοποιείται. Αντί αυτού η στιγμιαία ισχύς στα τερματικά σε ένα καθαρώς επαγωγικό κύκλωμα ανταλλάσσεται συνεχώς μεταξύ του κυκλώματος και της πηγής που οδηγούν το κύκλωμα σε συχνότητα 2ω . Με άλλα λόγια, όταν η p είναι θετική η ενέργεια αποθηκεύεται στα μαγνητικά πεδία που συνδέονται με τα επαγωγικά στοιχεία και όταν η p είναι αρνητική, η ενέργεια εξάγεται από τα μαγνητικά πεδία.

Ένα μέτρο της ισχύς που συνδέεται με τα καθαρώς επαγωγικά κυκλώματα είναι η άεργη ισχύ (reactive power) Q .

Σημειώστε ότι η μέση ισχύ P και η άεργη ισχύ Q έχουν τις ίδιες διαστάσεις. Για να διακρίνουμε μεταξύ της μέσης και άεργης ισχύς χρησιμοποιούμε τη μονάδα **Watt (W)** για τη μέση ισχύ και **Var** για την άεργη ισχύ.

Ισχύς για καθαρώς χωρητικά κυκλώματα **Power for purely capacitive circuits**

Αυτή τη φορά το ρεύμα προπορεύεται της τάσης κατά 90° .

$$\theta_i = \theta_v + 90$$

$$p = +Q \sin 2\omega t$$

Η μέση ισχύ είναι ακόμα μια φορά 0 έτσι δεν υπάρχει κανένας μετασχηματισμός από ηλεκτρική σε μη ηλεκτρική ενέργεια. Η ισχύ ανταλλάσσεται συνεχώς μεταξύ της πηγής που οδηγεί το κύκλωμα και το ηλεκτρικό πεδίο που συνδέεται με τα χωρητικά στοιχεία (capacitive elements).

Για τα πηνία το Q είναι θετικό. Τα πηνία απορροφούν Vars. Για τους πυκνωτές το Q είναι αρνητικό. Οι πυκνωτές παραδίδουν Vars.

Ο συντελεστής ισχύς - The Power Factor

$$\theta_v - \theta_i$$

είναι η γωνιά του συντελεστή ισχύς (power factor angle).

Συντελεστής Ισχύς (Power factor) είναι: $\cos(\theta_v - \theta_i)$

Εντούτοις, η γνώση του συντελεστή ισχύς δεν μας λέει την τιμή της γωνίας του συντελεστή ισχύς επειδή

$$\cos(\theta_v - \theta_i) = \cos(\theta_i - \theta_v)$$

Για να περιγράψουμε εντελώς αυτήν την γωνία, χρησιμοποιούμε τις περιγραφικές φράσεις **καθυστερούν συντελεστής ισχύς (lagging power factor)** και **οδηγούν συντελεστής ισχύς (leading power factor)**.

Καθυστερούν συντελεστής ισχύς υπονοεί ότι το ρεύμα είναι καθυστερημένο σε σχέση με την τάση (επαγωγικό φορτίο) (the current lags the voltage)

Οδηγούν συντελεστής ισχύς υπονοεί ότι το ρεύμα προπορεύεται της τάσης (χωρητικό φορτίο) (current leads the voltage (capacitive load)).

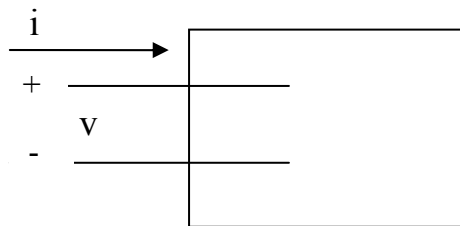
Παράδειγμα 8.1

a) Υπολογίστε τη μέση ισχύ (average power) και την άεργη ισχύ (reactive power) στα τερματικά του δικτύου εάν

$$v = 100 \cos(\omega t + 15^\circ) \text{ V} \qquad i = 4 \sin(\omega t - 15^\circ) \text{ A}$$

b) Δηλώστε κατά πόσο το δίκτυο μέσα στο κιβώτιο απορροφά ή παραδίδει μέση ισχύ.

c) Δηλώστε κατά πόσο το δίκτυο μέσα στο κιβώτιο απορροφά ή παραδίδει άεργη ισχύ. (10.1 p494)



Ισχύς Λειτουργίας Συσκευών – Appliance Ratings

Η μέση ισχύ χρησιμοποιείται για να εκφράσει τις ανάγκες σε ποσοστά από απόψεως ισχύς των οικιακών συσκευών. Η μέση ισχύ λειτουργίας (average power rating) και η κατ' εκτίμηση ετήσια kilowatt-hour κατανάλωση (estimated annual kilowatt-hour consumption) μερικών κοινών συσκευών παρουσιάζεται κατωτέρω.

Οι τιμές κατανάλωσης ενέργειας λαμβάνονται με τον υπολογισμό τον αριθμό ωρών ετησίως που οι συσκευές είναι σε χρήση. Παραδείγματος χάριν μια καφετιέρα (coffeemaker) έχει μια κατ' εκτίμηση κατανάλωση 140kWh και μια μέση κατανάλωση ισχύος κατά τη διάρκεια της λειτουργίας της 1.2kW. Επομένως η καφετιέρα υποτίθεται ότι ήταν σε λειτουργία για 140/1.2 ή 116.67 ώρες ετησίως ή περίπου 19 λεπτά ανά ημέρα.

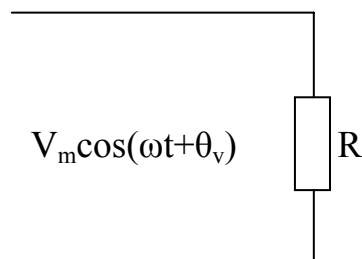
Ετήσιες σε ενέργεια ανάγκες των ηλεκτρικών οικιακών συσκευών

Annual Energy Requirements of Electrical Household Appliances

Appliance	Average Wattage (W)	Estimated kWh Consumed Annually
Coffeemaker	1200	140
Dishwasher	1201	165
Microwave	1450	190
Clothes Dryer	4856	993
Washing Mac	512	103
Hair Dryer	600	25
Radio	71	86
TV	240	528
Water Heater	2475	4219

Τιμές RMS και υπολογισμός ισχύς RMS Value and Power Calculations

Υποθέστε ότι μια ημιτονοειδής τάση εφαρμόζεται στα τερματικά μιας αντίστασης και θέλουμε να καθορίσουμε τη μέση ισχύ (average power) που παραδίδεται στην αντίσταση.



$$P = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} VI dt =$$

$$V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \text{ και } I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Η τιμή rms ονομάζεται και ενεργός τιμή (effective).

Για ένα ισοδύναμο φορτίο αντίστασης R και ένα χρονικό διάστημα T , η τιμή rms μιας ημιτονοειδούς πηγής παραδίδει την ίδια ενέργεια στην R όπως μια συνεχής πηγή της ίδιας αξίας.

Οι τιμές rms χρησιμοποιούνται ευρέως. Παραδείγματος χάριν η οικιστική πηγή τάσης είναι 240 V. Αυτή η τάση είναι η τάση rms.

Παράδειγμα 8.2

- (a) Μια ημιτονοειδής τάση που έχει ένα μέγιστο εύρος (amplitude) 625 V εφαρμόζεται στα τερματικά μίας αντίστασης 50 Ω. Βρείτε τη μέση ισχύ που παραδίδεται στην αντίσταση.
- (b) Επαναλάβετε το (a) αφού πρώτα βρείτε το ρεύμα στην αντίσταση. (10.3p499)

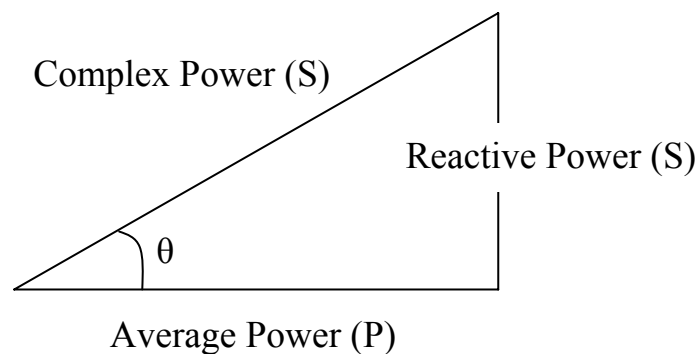
Μιγαδική Ισχύ- Complex Power

Η μιγαδική ισχύ επιτρέπει τον υπολογισμό της μέσης (average) και άεργης ισχύς (reactive power) στα ημιτονοειδή σήματα σταθερής κατάστασης (steady state signals).

Η μιγαδική ισχύ είναι το μιγαδικό σύνολο της μέσης ισχύς (average power) και της άεργης ισχύς (reactive power)

$$S = P + jQ$$

Μονάδες	Ορισμός	Σύμβολο
Volt-Amps (VA)	Complex Power	S
Watts (W)	Real Power	P
VARs (VAR)	Reactive Power	Q



Το θ είναι η γωνία του συντελεστή ισχύς $\theta_v - \theta_i$

Η απαιτούμενη μιγαδική ισχύς μιας συσκευής που έχει σκοπό να μετατρέψει την ηλεκτρική ενέργεια σε μη-ηλεκτρική μορφή είναι σημαντικότερη από τη απαιτούμενη μέση ισχύ. Αν και η μέση ισχύ αντιπροσωπεύει τη χρήσιμη ενέργεια που παράγει η συσκευή, η μιγαδική ισχύς αντιπροσωπεύει τα Volt-Amps που απαιτούνται για να παραχθεί η μέση ισχύ. Όπως μπορείτε να δείτε από το τρίγωνο, εκτός αν η γωνία του συντελεστή ισχύς είναι 0° (η συσκευή είναι καθαρώς ωμική $pf = 1$ και $Q = 0$) τα απαιτούμενα volt-amp που χρειάζεται η συσκευή είναι μεγαλύτερα της μέσης ισχύς που χρησιμοποιείται από τη συσκευή. Επίσης θα ήταν λογικό να λειτουργά η συσκευή σε συντελεστή ισχύς κοντά στην μονάδα. Πολλές συσκευές (ψυγεία, air-conditioners) λειτουργούν σε καθυστερούν συντελεστή ισχύς (lagging power factor) και αυτό διορθώνεται με την προσθήκη ενός πυκνωτή στα τερματικά τους.

Παράδειγμα 8.3

Ένα ηλεκτρικό φορτίο λειτουργεί στα 240 Vrms. Το φορτίο απορροφά μια μέση ισχύ 8 kW με έναν καθυστερούν συντελεστή ισχύς (lagging power factor) 0.8.

a) Υπολογίστε τη μιγαδική ισχύ του φορτίου.

b) Υπολογίστε τη σύνθετη αντίσταση του φορτίου. (10.4p501)

Υπολογισμοί Ισχύς - Power Calculations

Εδώ αναπτύσσουμε τις πρόσθετες εξισώσεις που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να υπολογίσουν ευκολότερα την ισχύ.

$$S = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\theta_v - \theta_i) + j \frac{V_m I_m}{2} \sin(\theta_v - \theta_i)$$

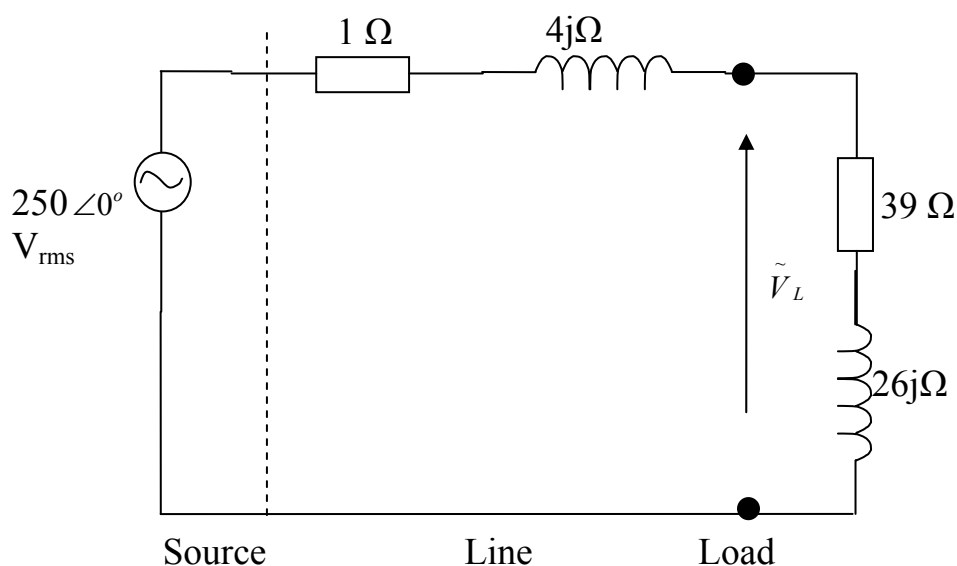
Αυτή η εξίσωση είναι πολύ σημαντική επειδή δίνει την ισχύ σε σχέση με το φάσορα ρεύματος και τάσης (phasor current and voltage).

$$S = \frac{1}{2} \tilde{V} \tilde{I}^*$$

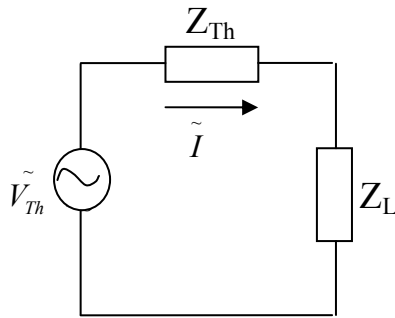
Παράδειγμα 8.4

Στο κύκλωμα που παρουσιάζεται ένα φορτίο που έχει μια σύνθετη αντίσταση $39+j26\Omega$ τροφοδοτείται από μια πηγή τάσης μέσω μιας γραμμής που έχει μια σύνθετη αντίσταση $1+4j\Omega$. Η τιμή rms της τάσης είναι 250 V.

- Υπολογίστε το ρεύμα φορτίου $\tilde{I}_L$ και την τάση $\tilde{V}_L$
- Υπολογίστε τη μέση και άεργη ισχύ (average and reactive power) που παραδίδεται στο φορτίο.
- Υπολογίστε την άεργη ισχύ που παραδίδεται στη γραμμή.
- Υπολογίστε τη μέση και άεργη ισχύ (average and reactive power) που παρέχεται από την πηγή. (10.5p505)



Μέγιστη μεταφορά ισχύς - Maximum Power Transfer



Για μέγιστη μεταφορά ισχύς

$$\tilde{Z}_L = \tilde{Z}_{th}^*$$

Μέγιστη μεταφορά ισχύς

$$P_{\max} = \frac{|\tilde{V}_{th}|^2 R_L}{4R_L^2} = \frac{1}{4} \frac{|\tilde{V}_{th}|^2}{R_L} \text{ (τιμές rms)}$$

ή

$$P_{\max} = \frac{1}{8} \frac{V_m^2}{R_L}$$

Παράδειγμα 8.5

(a) Για το κύκλωμα που παρουσιάζεται καθορίστε τη σύνθετη αντίσταση Z_L που προσφέρει τη μέγιστη μέση ισχύ στο φορτίο Z_L .

(b) Υπολογίστε τη μέγιστη μέση ισχύ που μεταφέρεται στη σύνθετη αντίσταση του φορτίου που υπολογίσατε στο (a).
(10.8p514)

