

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ**

**Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ**

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** (Για αποφοίτους Τεχνικών Σχολών)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Πέμπτη, 30 Ιουνίου 2005
11.00 π.μ. – 2.00 μ.μ.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

Σημείωση: α) *Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.*
β) *Χορηγείται τυπολόγιο Μαθηματικών.*

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + x - 1}{x}$.
2. α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΘΑΛΑΣΣΑ.
β) Σε πόσους από τους αναγραμματισμούς του ερωτήματος (α) τα τρία Α είναι μαζί.
3. Να βρείτε τα ολοκληρώματα:
α) $\int (5x^3 + \frac{2}{x^2} + 1) dx$
β) $\int \eta \mu^5 x \sigma \upsilon \nu x dx$
4. Καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις:
 $x = t^2 + 5$ και $y = 2t^3 + 3$, $t \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$.

5. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$.
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου και την ακτίνα του κύκλου.
- β) Να δείξετε ότι το σημείο $A(0,2)$ βρίσκεται πάνω στον κύκλο.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $A(0,2)$.
6. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$.
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών και των εστιών της έλλειψης.
- β) Να σχεδιάσετε την έλλειψη και να σημειώσετε τις κορυφές και τις εστίες της.
7. Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{1}{(x+1)(2x+1)} dx$
8. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$
- α) Να βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα A , αν υπάρχει.
- β) Να βρείτε τον 2×2 πίνακα X για τον οποίο ισχύει $A \cdot X = B$.
9. α) Πόσους τετραψήφιους αριθμούς μπορούμε να σχηματίσουμε χρησιμοποιώντας τα ψηφία 1, 2, 3, 4, 5, 6 αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη των ψηφίων.
- β) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα από τους πιο πάνω τετραψήφιους αριθμούς, να βρείτε την πιθανότητα ο αριθμός αυτός να είναι μεγαλύτερος του 5000.
10. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = 1 - x^2$ και τον άξονα των x .

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}$.
Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τις συντεταγμένες των σημείων τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τις συντεταγμένες των ακροτάτων, τις εξισώσεις των ασυμπτώτων και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.
2. Να βρείτε το ολοκλήρωμα: $\int 2x \ln x \, dx$
3. Από τους 11 ποδοσφαιριστές μιας ομάδας οι 3 είναι ξένοι. Εκλέγουμε τυχαία 3 ποδοσφαιριστές. Να βρείτε:
 - α) Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει η εκλογή.
 - β) Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:
 Α: «Να μην εκλεγεί ξένος».
 Β: «Να εκλεγεί ένας ξένος μόνο».
 Γ: «Να εκλεγούν και οι 3 ξένοι».
4. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με βάση τετράγωνο πλευράς x και ύψους u , $x > 0$ και $u > 0$, έχει όγκο 27 cm^3 .
 - α) Να εκφράσετε το ύψος του u συναρτήσει του x .
 - β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του είναι $E(x) = 2x^2 + \frac{108}{x}$.
 - γ) Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας γίνεται ελάχιστο, καθώς και την ελάχιστη τιμή του εμβαδού της ολικής επιφάνειάς του.
5. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $xy = 9$ και το σημείο της $A\left(3t, \frac{3}{t}\right)$, $t > 0$.
 - α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο Α είναι $x + t^2y = 6t$.
 - β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της υπερβολής στο σημείο Α είναι $t^3x - ty = 3t^4 - 3$.
 - γ) Αν η εφαπτόμενη και η κάθετη στο σημείο Α τέμνουν τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Κ και Λ αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση του σχήματος πάνω στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ΚΛ.

Τ Ε Λ Ο Σ