ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Πέμπτη, 23 Ιουνίου 2005**
7.30 π.μ. – 10.30 π.μ.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις $x = 2\text{τοξεφ}t$ και $y = 3t^2-2t+1$. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με $t = 1$.

2. Να βρείτε αριθμό $\xi \in (1, 2)$ για τον οποίο ισχύει το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$ στο διάστημα $[1, 2]$.

3. (ι) Πόσοι πενταψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου;
   (ιι) Πόσοι από τους αριθμούς αυτούς είναι ταυτόχρονα άρτιοι και μικρότεροι του 30 000;

4. Τα Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τέτοια ώστε $P(A) = \dfrac{1}{4}$, $P(A' \cup B') = \dfrac{19}{20}$ και $P(A/B') = \dfrac{1}{4}$. Να δείξετε ότι $P(A \cap B) = \dfrac{1}{20}$ και να βρείτε τις πιθανότητες $P(B)$ και $P(A \cup B)$. Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

5. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$.
   (ι) Να βρείτε τους πίνακες A^2 και A^3.
   (ιι) Να δείξετε ότι $A^{23} + A^6 + A^{2005} = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{0}$ είναι ο μηδενικός πίνακας 2 x 2.

6. Δίνεται ο κύκλος K_1 με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ και το σημείο του Α(-4, 0).
Αν Β είναι ένα άλλο σημείο του κύκλου K_1, τότε:
(ι) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών ΑΒ του κύκλου K_1 βρίσκεται πάνω σε κύκλο K_2 του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.
(ιι) Να βρείτε τη θέση του κύκλου K_1 ως προς τον κύκλο K_2.

7. Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $x^2 + y^2 = 5$ και $xy = 2$ και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα Οx. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

8. Να βρείτε, συναρτήσει του λ, το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \ln x$, τον άξονα Οx και την ευθεία $x = \lambda$, όπου $0<\lambda<1$. Στη συνέχεια, να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} E(\lambda)$.

9. Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 4\alpha x$ $(\alpha>0)$ στο σημείο της $T(\alpha t^2, 2\alpha t)$, όπου $t \neq 0$, τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο Ζ. Η ευθεία που περνά από το Τ και είναι παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, τέμνει την διευθετούσα στο σημείο Α. Αν Ε είναι η εστία της παραβολής και η κάθετος στην ΑΕ στο Ε τέμνει τη διευθετούσα στο Β, να δείξετε ότι το Ζ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

10. Με χρήση του μετασχηματισμού $x=2\tau\varepsilon\mu\theta$, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$.

<u>ΜΕΡΟΣ Β΄:</u> Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = (x-1)^2 e^x$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

2. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, όπου $\alpha>\beta>0$, και σημείο της Μ(ασυνθ, βημθ) με $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Αν η εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ τέμνει τον άξονα Οx στο σημείο Ρ και τον άξονα Οy στο σημείο Γ, ενώ η κάθετη αυτής στο σημείο Μ τέμνει τον άξονα Οx στο σημείο Σ, να δείξετε ότι:
(ι) $\frac{\alpha^2}{(O P)^2}+\frac{\beta^2}{(O\Gamma)^2}=1$.
(ιι) $(OP)\,(O\Sigma) = \alpha^2\varepsilon^2$, όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης.

3. Η μεγάλη βάση ενός ισοσκελούς τραπεζίου έχει μήκος (2x+2) μέτρα, ενώ κάθε μια από τις υπόλοιπες τρεις πλευρές του έχει μήκος 2 μέτρα. Να βρείτε την τιμή του x ώστε το τραπέζιο να έχει μέγιστο εμβαδόν.

4. Ένα δοχείο $Δ_1$ περιέχει 3 λευκές και 5 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε τυχαία 4 μπάλες από το $Δ_1$ και τις τοποθετούμε στο κενό δοχείο $Δ_2$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:
   Α: «το $Δ_2$ περιέχει μόνο μαύρες μπάλες».
   Β: «το $Δ_2$ περιέχει ακριβώς 2 λευκές μπάλες».
   Γ: «το $Δ_2$ περιέχει τουλάχιστον 2 λευκές μπάλες».
   Στη συνέχεια, από το $Δ_2$ παίρνουμε 2 μπάλες. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου:
   Ε: «και οι δύο μπάλες είναι λευκές».

5. Να δείξετε ότι $\int \frac{ημx}{(1+συνx)^2}\,dx = \frac{1}{1+συνx} + c$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xημx}{(1+συνx)^2}\,dx$.

.....................Τ Ε Λ Ο Σ ....