ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Πέμπτη, 23 Ιουνίου 2005**
7.30 π.μ. – 10.30 π.μ.

ΛΥΣΕΙΣ
ΜΕΡΟΣ Α

1.	Δίνεται η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις x=2τοξεφt και $y=3t^2-2t+1$ Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με t=1. $\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{2}{1+t^2}\\ \frac{dy}{dt}&=6t-2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=(6t-2)\cdot\frac{1}{\frac{2}{1+t^2}}=\cancel{2}(3t-1)\frac{1+t^2}{\cancel{2}}=(3t-1)(1+t^2)$ $\lambda_{\varepsilon\varphi}=(3\cdot1-1)(1+1)=2\cdot2=4 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{\kappa\alpha\theta}=-\frac{1}{4}$ Αν t=1 $\Rightarrow$ x=2τοξεφ1=$2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ και y=3.1-2.1+1=2 εξ. Καθέτου: $y-2=-\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) \quad\Rightarrow 4y-8=-x+\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow 8y-16=-2x+\pi \quad\Rightarrow\quad 2x+8y=16+\pi$	
2.	Να βρείτε αριθμό $\xi\in(1, 2)$ για τον οποίο ισχύει το Θεώρημα της Μέσης Τιμής για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x-3}$ στο διάστημα [1, 2]. $f'(\xi)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=\frac{-2+\frac{1}{2}}{1}=-\frac{3}{2}$ $f'(x)=\frac{x-3-x}{(x-3)^2}=\frac{-3}{(x-3)^2}$ $\Rightarrow \frac{-3}{(\xi-3)^2}=-\frac{3}{2}\Rightarrow(\xi-3)^2=2\Rightarrow \xi-3=\pm\sqrt{2}$ $\Rightarrow \xi=3+\sqrt{2}$ απορρίπτεται και $\xi=3-\sqrt{2}$ δεκτή	
3.	.	

(ι) Πόσοι πενταψήφιοι αριθμοί μπορούν να σχηματιστούν με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4, αν δεν επιτρέπεται η επανάληψη ψηφίου.

(ιι) Πόσοι από τους αριθμούς αυτούς είναι ταυτόχρονα άρτιοι και μικρότεροι του 30 000.

(ι) $\boxed{4}\boxed{4}\boxed{3}\boxed{2}\boxed{1}$ =96

(ιι) Αν αρχίζει από 1 $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3}$ =18

Αν αρχίζει από 2 $\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{2}$ =12

Άρα έχω 30 αριθμούς άρτιους και μικρότερους του 30000

4.

Τα Α και Β είναι δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τέτοια ώστε $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(A'\cup B')=\frac{19}{20}$ και $P(A/B')=\frac{1}{4}$. Να δείξετε ότι $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$ και να βρείτε τις πιθανότητες P(B) και $P(A\cup B)$.

Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ανεξάρτητα.

$$P(A'\cup B')=P(A\cap B)'=\frac{19}{20} \quad \Rightarrow P\left(A\cap B\right)=1-P\left(A\cap B\right)'=1-\frac{19}{20}=\frac{1}{20}$$

$$P\left(A/B'\right)=\frac{P\left(A\cap B'\right)}{P\left(B'\right)}=\frac{P\left(A\right)-P\left(A\cap B\right)}{P\left(B'\right)}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{4}=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{20}}{P\left(B'\right)}\Rightarrow P\left(B'\right)=\frac{\frac{4}{20}}{\frac{1}{4}}\Rightarrow P\left(B'\right)=\frac{16}{20}=\frac{4}{5} \quad \Rightarrow P\left(B\right)=\frac{1}{5}$$

$$P\left(A\cup B\right)=P\left(A\right)+P\left(B\right)-P\left(A\cap B\right)$$

$$\Rightarrow P(A\cup B)=\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{20} \qquad \Rightarrow P(A\cup B)=\frac{8}{20}$$

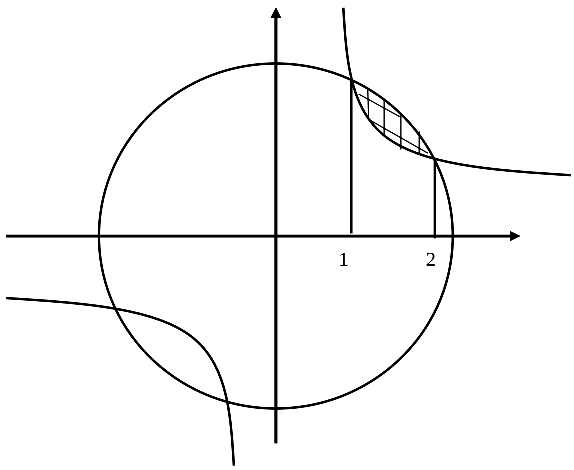
$$P\left(A\right)\cdot P\left(B\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{20}=P\left(A\cap B\right)$$ ⇒ Α και Β ανεξάρτητα

5.

Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}$.

(ι) Να βρείτε τους πίνακες A^2 και A^3 .

	(ιι) Να δείξετε ότι $A^{23} + A^{6} + A^{2005} = \mathbf{0}$, όπου **0** είναι ο μηδενικός πίνακας 2 x 2. $A^2 = A\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-7 & 2-3 \\ -14+21 & -7+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ $A^3 = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+7 & -3+3 \\ 14-14 & 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ $A^{23} + A^{6} + A^{2005} = (A^3)^7\cdot A^2 + \left(A^3\right)^2 + (A^3)^{668}\cdot A = I\cdot A^2 + I + I\cdot A$ $= A^2 + I + A = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$	
6.	Δίνεται ο κύκλος K_1 με εξίσωση $x^2 + y^2 = 16$ και το σημείο του Α(-4, 0). Αν Β είναι ένα άλλο σημείο του κύκλου K_1 τότε: (α) Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών ΑΒ του κύκλου K_1 βρίσκεται πάνω σε κύκλο K_2 του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα . (β) Να βρείτε τη θέση του κύκλου K_1 ως προς τον κύκλο K_2. Έστω σημείο Β(4συνθ, 4 ημθ) του κύκλου. $x_M = \frac{4συνθ-4}{2} = 2συνθ - 2$ και $y_M = \frac{4ημθ-0}{2} = 2ημθ$ $\Rightarrow συνθ = \frac{x+2}{2}$ και $ημθ = \frac{y}{2}$ $ημ^2θ + συν^2θ = 1 \Rightarrow \left(\frac{y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2 = 1 \quad (x+2)^2 + y^2 = 4$ εξ. κύκλου Κ(-2, 0) και R_2=2 Το κέντρο του κύκλου $x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow$ Λ(0, 0) και R_1=4 ΚΛ=$\sqrt{(0+2)^2 + (0-0)^2} = 2$ $R_1 - R_2 = 4 - 2 = 2 =$ ΚΛ $\Rightarrow$ οι δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά.	
7.	. Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες $x^2 + y^2 = 5$ και $xy = 2$ και βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο, περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα Ox. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.	



$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x^2+\left(\dfrac{2}{x}\right)^2=5 \\ y=\dfrac{2}{x} \end{array}\right\} \Rightarrow x^4-5x^2+4=0$$

$$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \qquad x^2=1 \Rightarrow x=\pm 1$$

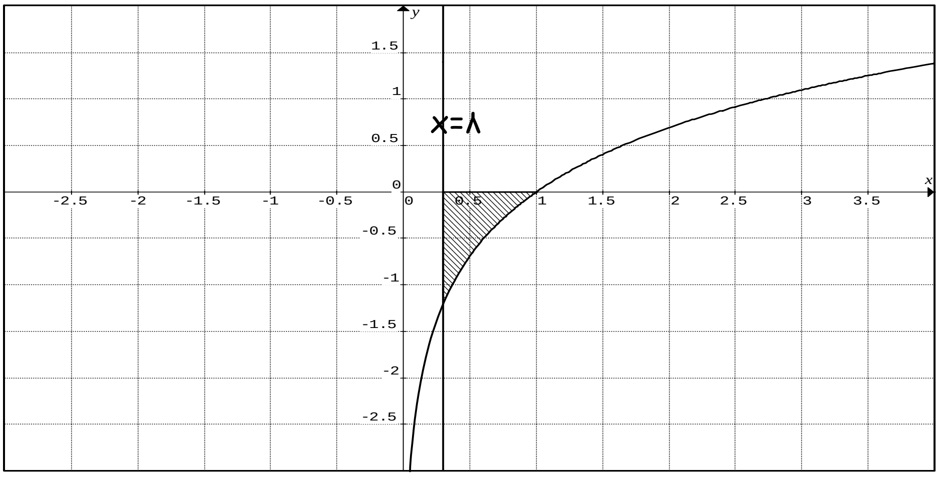
$$V=\pi\int_1^2\left[(5\text{-}x^2)-\left(\frac{2}{x}\right)^2\right]dx$$

$$=\pi\int_1^2\left(5\text{-}x^2-\frac{4}{x^2}\right)dx=\pi\left[5x-\frac{x^3}{3}+\frac{4}{x}\right]_1^2$$

$$V=\pi\left[\left(10\text{-}\frac{8}{3}+\frac{4}{2}\right)-\left(5-\frac{1}{3}+\frac{4}{1}\right)\right]=\pi\left[10\text{-}\frac{8}{3}+2-5+\frac{1}{3}-4\right]=\frac{2}{3}\pi \text{ κ.μ.}$$

8.	Να βρείτε συναρτήσει του λ το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη y = lnx, τον άξονα Ox και την ευθεία x = λ, όπου 0<λ<1.	

Στη συνέχεια να βρείτε το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+} E(\lambda)$.



$$E(\lambda) = -\int_{\lambda}^{1} \ln x\,dx = -x\cdot\ln x\Big]_{\lambda}^{1} + \int_{\lambda}^{1} x\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$= -x\cdot\ln x + x\Big]_{\lambda}^{1} = (-1\ln 1 + 1) - (-\lambda\ln\lambda + \lambda) = 1 + \lambda.\ln\lambda - \lambda$$

$$\lim_{\lambda\to 0^+} E(\lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+}(1+\lambda\cdot\ln\lambda - \lambda) = \lim_{\lambda\to 0^+} 1 + \lim_{\lambda\to 0^+}(\lambda\cdot\ln\lambda) - \lim_{\lambda\to 0^+}\lambda$$

$$= 1 - 0 + 0\cdot(-\infty) \quad \text{Α.Μ.}$$

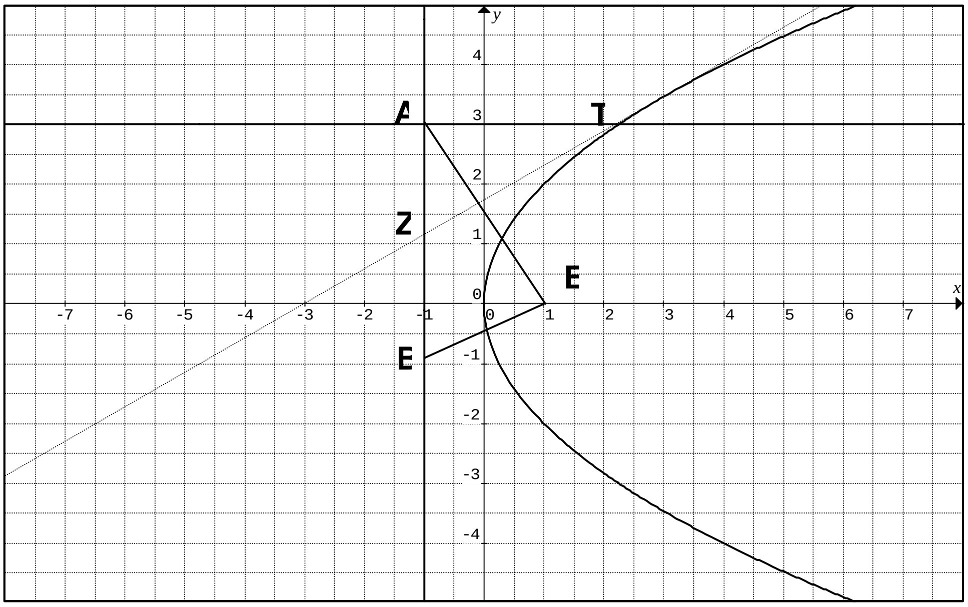
$$= 1 + \lim_{\lambda\to 0^+}\left(\frac{\ln\lambda}{\frac{1}{\lambda}}\right) = 1 + \frac{-\infty}{\infty} \quad \text{Α.Μ.} \quad (\text{καν.DLH})$$

$$= 1 + \lim_{\lambda\to 0^+}\frac{\frac{1}{\lambda}}{-\frac{1}{\lambda^2}}$$

$$= 1 + \lim_{\lambda\to 0^+}\left(-\frac{\lambda^2}{\lambda}\right) = 1 + \lim_{\lambda\to 0^+}(-\lambda) = 1$$

9.

Η εφαπτομένη της παραβολής $y^2 = 4\alpha x$ ($\alpha>0$) στο σημείο της $T(\alpha t^2, 2\alpha t)$, όπου $t \neq 0$, τέμνει τη διευθετούσα της παραβολής στο Ζ. Η ευθεία που περνά από το Τ και είναι παράλληλη προς τον άξονα της παραβολής, τέμνει τη διευθετούσα στο σημείο Α. Αν Ε είναι η εστία της παραβολής και η κάθετος στο ΑΕ στο Ε, τέμνει τη διευθετούσα στο Β, να δείξετε ότι το Ζ είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.



Εξίσωση εφαπτομένης: $2\alpha ty=2\alpha t(x+\alpha t^2) \Rightarrow ty = x + \alpha t^2$

Εξίσωση διευθετούσας: $x = -\alpha$ $\Rightarrow$

$Z\left(-\alpha, \dfrac{-\alpha+\alpha t^2}{t}\right)$

Εξίσωση ΑΤ: $y=2\alpha t \Rightarrow A(-\alpha, 2\alpha t)$

$\Rightarrow \lambda_{AE} = \dfrac{2\alpha t-0}{-\alpha-\alpha} = -t \quad \Rightarrow \lambda_{EB} = \dfrac{1}{t}$

Εξίσωση ΒΕ: $y-0=\dfrac{1}{t}(x-\alpha) \Rightarrow ty = x-\alpha$

$\Rightarrow B\left(-\alpha, -\dfrac{2\alpha}{t}\right) \Rightarrow y_{\mu\varepsilon\sigma o\upsilon} = \dfrac{2\alpha t - \dfrac{2\alpha}{t}}{2} = \dfrac{\alpha t^2-\alpha}{t}$, $x_{\mu\acute{\varepsilon}\sigma o\upsilon} = -\alpha$

΄Αρα Ζ είναι το μέσο της ΑΒ.

10. Με χρήση του μετασχηματισμού x=2τεμθ, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}\,dx$.

$$x = 2τεμθ \Rightarrow dx=2τεμθ\cdot εφθ\,dθ$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx = \int \frac{\sqrt{4τεμ^2θ-4}}{4τεμ^2θ}2τεμθ\cdot εφθ\,dθ \quad = \int \frac{2εφθ\cdot 2τεμθ\cdot εφθ}{4τεμ^2θ}dθ$$

$$= \int \frac{εφ^2θ}{τεμ\ θ}dθ = \int \frac{ημ^2θ}{συνθ}dθ$$

$$= \int \frac{1\text{-}συν^2θ}{συνθ}dθ = \int (τεμθ\text{-}συνθ)dθ = \ln\left|τεμθ\text{+}εφθ\right| - ημθ\text{+}c$$

$$= \ln\left|τεμθ\text{+}\sqrt{τεμ^2θ\text{-}1}\right|\text{-}\sqrt{1\text{-}\frac{1}{τεμ^2θ}}+c$$

$$= \ln\left(\frac{x}{2}+\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right)-\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}+c$$

ΜΕΡΟΣ Β

1. . Δίνεται η συνάρτηση $y=(x\text{-}1)^2\,e^x$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Π.Ο. $x \in R$

Αν x=0 $\Rightarrow$ y=1 (0, 1)
Αν y=0 $\Rightarrow$ x=1 (1, 0)

$$y' = 2(x-1)\cdot e^x + (x-1)^2 e^x = e^x(x-1)(2+x-1) = e^x(x-1)(x+1)$$

$y' = 0 \Rightarrow x = 1$ και χ= -1

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y΄		+	0	-	0	+	
y		$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	

Αν x= -1 $\Rightarrow$ y=$\frac{4}{e}$ $\Rightarrow \max\left(-1,\ \frac{4}{e}\right)$

Αν x= 1 $\Rightarrow$ y=0 $\Rightarrow$ min (1, 0)

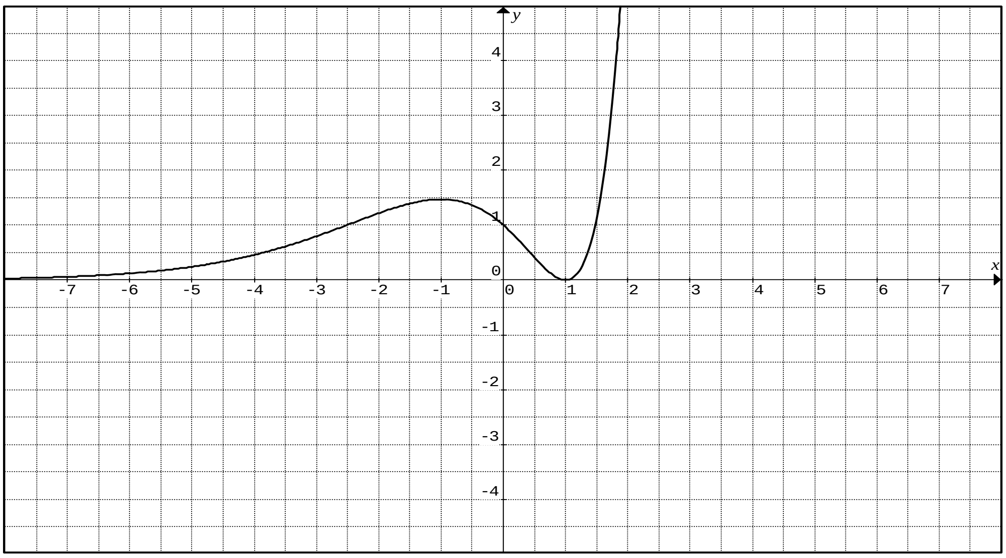
$$\lim_{x\to\infty}\left[\left((x-1)^2\cdot e^x\right)\right] = \infty\cdot\infty = \infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\left((x-1)^2\cdot e^x\right)\right] = \infty\cdot 0 \quad \text{Α. Μ.}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^2}{e^{-x}} = \frac{\infty}{\infty}\text{Α.Μ (καν. D.L.H)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2(x-1)}{-e^{-x}} = \frac{\infty}{-\infty}\text{Α.Μ. (καν.D.L.H)}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0 \quad \Rightarrow \quad y=0 \quad \text{Ο.Α.}$$

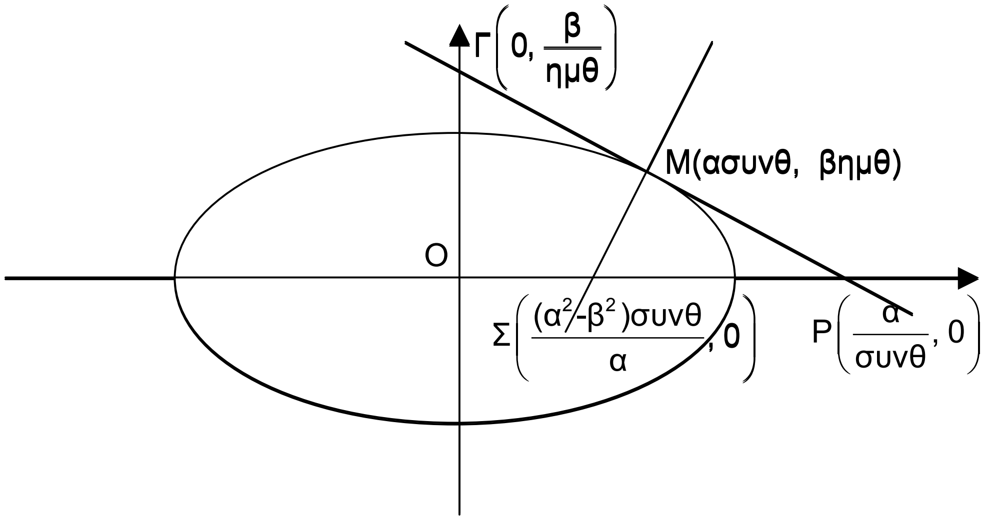


2. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{\psi^2}{\beta^2}=1$, όπου α>β>0, και σημείο της

Μ(ασυνθ, βημθ) με $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Αν η εφαπτομένη της έλλειψης στο Μ τέμνει τον άξονα Οx στο σημείο Ρ και τον άξονα Οy στο σημείο Γ, ενώ η κάθετη αυτής στο σημείο Μ τέμνει τον Οx στο σημείο Σ, να δείξετε ότι:

(ι) $\dfrac{\alpha^2}{(\mathrm{OP})^2}+\dfrac{\beta^2}{(\mathrm{O\Gamma})^2}=1$.

(ιι) (ΟΡ) (ΟΣ) = $\alpha^2\varepsilon^2$, όπου ε η εκκεντρότητα της έλλειψης



Εξ. Εφαπτομένης: $\dfrac{\alpha x\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha^2}+\dfrac{\beta y\eta\mu\theta}{\beta^2}=1 \Rightarrow \beta x\sigma\upsilon\nu\theta+\alpha y\eta\mu\theta=\alpha\beta$

Αν y=0 $\Rightarrow x=\dfrac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta} \Rightarrow P\left(\dfrac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta},0\right)$

Αν x=0 $\Rightarrow y=\dfrac{\beta}{\eta\mu\theta} \Rightarrow \Gamma\left(0,\dfrac{\beta}{\eta\mu\theta}\right)$

$\lambda_{\varepsilon\varphi}=-\dfrac{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha\eta\mu\theta} \Rightarrow \lambda_{\kappa\alpha\theta}=\dfrac{\alpha\eta\mu\theta}{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}$

εξ. Καθέτου: $y-\beta\eta\mu\theta=\dfrac{\alpha\eta\mu\theta}{\beta\sigma\upsilon\nu\theta}(x-\alpha\sigma\upsilon\nu\theta)$

$\Rightarrow \beta y\sigma\upsilon\nu\theta-\alpha x\eta\mu\theta=(\beta^2-\alpha^2)\eta\mu\theta\cdot\sigma\upsilon\nu\theta$

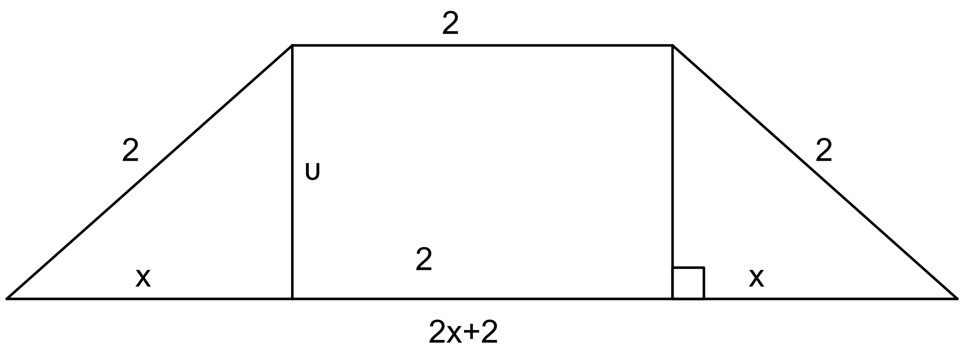
Αν y=0 $\Rightarrow x=\dfrac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha} \Rightarrow \Sigma\left(\dfrac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)\sigma\upsilon\nu\theta}{\alpha},0\right)$

$$\frac{\alpha^2}{(\mathrm{OP})^2}+\frac{\beta^2}{(\mathrm{O\Gamma})^2}=\frac{\alpha^2}{\left(\dfrac{\alpha}{\sigma\upsilon\nu\theta}\right)^2}+\frac{\beta^2}{\left(\dfrac{\beta}{\eta\mu\theta}\right)^2}=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\eta\mu^2\theta=1$$

$$(\mathrm{OP})(\mathrm{O\Sigma})=\frac{\cancel{\alpha}}{\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}}\cdot\frac{(\alpha^2-\beta^2)\cancel{\sigma\upsilon\nu\theta}}{\cancel{\alpha}}=\gamma^2=\alpha^2\varepsilon^2$$

3.

Η μεγάλη βάση ενός ισοσκελούς τραπεζίου έχει μήκος (2x+2) μέτρα, ενώ κάθε μια από τις υπόλοιπες τρεις πλευρές του έχει μήκος 2 μέτρα. Να βρείτε την τιμή του x ώστε το τραπέζιο να έχει μέγιστο εμβαδόν



$0 < x < 2$

$x^2+υ^2=4 \Rightarrow υ=\sqrt{4-x^2}$

$$E=\frac{(2x+2+2)\sqrt{4-x^2}}{2}=(x+2)\sqrt{4-x^2}$$

$$E'=\sqrt{4-x^2}+\frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}(x+2)$$

$$E'=0 \Rightarrow \sqrt{4-x^2}-\frac{x^2+2x}{\sqrt{4-x^2}}=0 \quad \Rightarrow \frac{4-x^2-x^2-2x}{\sqrt{4-x^2}}=0$$

$$\Rightarrow -2x^2-2x+4=0 \quad \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow x=-2 \quad \text{απορ.} \quad \text{και} \quad x=1$$

x	0^+		1		2^-
E΄		+	0	-	
E		↗		↘	

΄Αρα για x=1 έχει μέγιστο Εμβαδόν

4.

Ένα δοχείο $Δ_1$ περιέχει 3 λευκές και 5 μαύρες μπάλες. Παίρνουμε τυχαία 4 μπάλες από το $Δ_1$ και τις τοποθετούμε στο κενό δοχείο $Δ_2$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

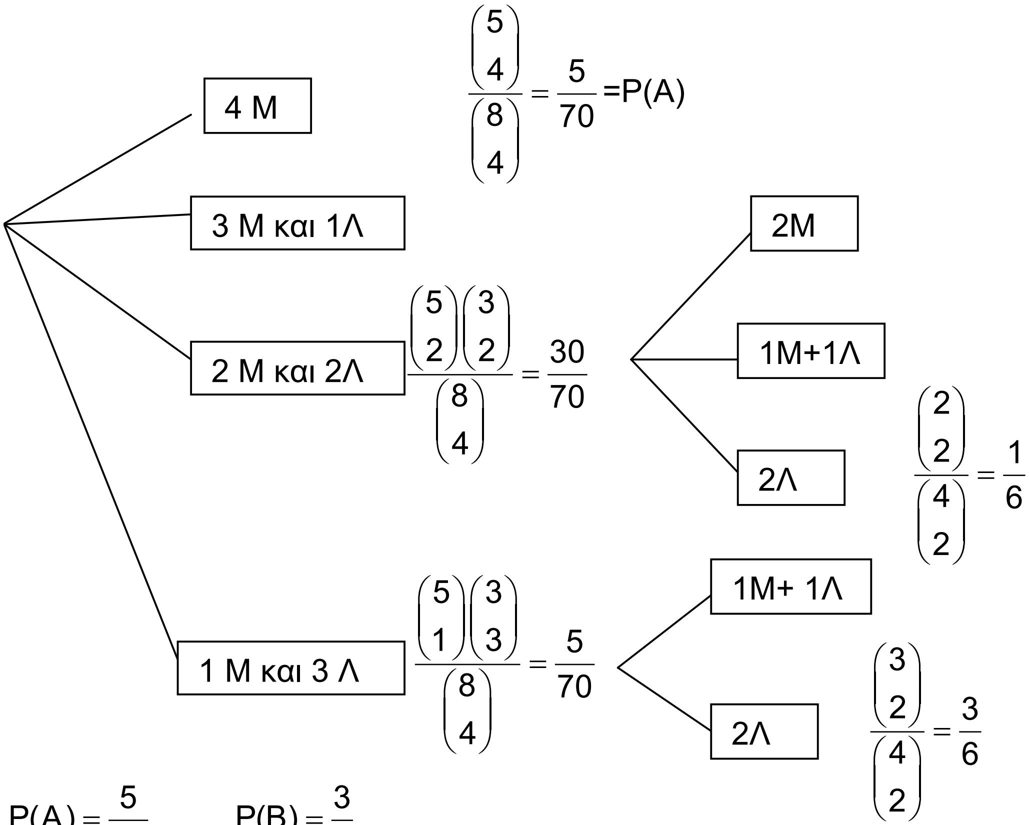
Α: «το $Δ_2$ περιέχει μόνο μαύρες μπάλες».

Β: «το $Δ_2$ περιέχει ακριβώς 2 λευκές μπάλες».

Γ: «το $Δ_2$ περιέχει τουλάχιστο 2 λευκές μπάλες».

Στη συνέχεια, από το $Δ_2$ παίρνουμε 2 μπάλες. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου

Ε: «και οι δύο μπάλες είναι λευκές»



$P(A)=\frac{5}{70}$ $\qquad P(B)=\frac{3}{7}$

$P(Γ)=\frac{30}{70}+\frac{5}{70}=\frac{35}{70}=\frac{1}{2}$

$P(E)=\frac{30}{70}\cdot\frac{1}{6}+\frac{5}{70}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{14}+\frac{1}{28}=\frac{3}{28}$

5. Να δείξετε ότι $\int \frac{ημx}{(1+συνx)^2}dx=\frac{1}{1+συνx}+c$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\etaμx}{(1+συνx)^2}dx$.

Θέτω συνx=u $\Rightarrow$ -ημx dx=du

$$\Rightarrow \int \frac{ημx}{(1+συνx)^2}dx = \int \frac{-du}{(1+u)^2} = \frac{1}{1+u} + c = \frac{1}{1+συνx} + c$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{xημx}{(1+συνx)^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x\left(\frac{1}{1+συνx}\right)' dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x d\left(\frac{1}{1+συνx}\right)$$

$$= x\left(\frac{1}{1+συνx}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+συνx}dx = x\left(\frac{1}{1+συνx}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+2συν^2\frac{x}{2}-1}dx$$

$$= x\left(\frac{1}{1+συνx}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2συν^2\frac{x}{2}}dx = x\left(\frac{1}{1+συνx}\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} τεμ^2\frac{x}{2}dx$$

$$= x\left(\frac{1}{1+συνx}\right) - \frac{1}{2}\cdot 2\cdot εφ\frac{x}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{1+συν\frac{\pi}{2}}\right) - εφ\frac{\pi}{4}\right) - (0) = \frac{\pi}{2} - 1$$