

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΛΕΥΚΩΣΙΑ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2005

ΛΥΚΕΙΑΚΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Α' ΣΕΙΡΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ	:	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΧΡΟΝΟΣ	:	2 ώρες και 30 λεπτά
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	:	6 Ιουνίου 2005
ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ	:	7.45 π.μ.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη **A** και **B**.
Να απαντήσετε σε **12 ΜΟΝΟ** ερωτήσεις του Μέρους **A** και σε **4 ΜΟΝΟ** του Μέρους **B**. Στην περίπτωση που θα απαντήσετε σε περισσότερες από τις ζητούμενες ερωτήσεις θα λαμβάνονται υπόψη στη βαθμολογία όσες απαντήσεις ζητούνται και μάλιστα εκείνες που εμφανίζονται πρώτες στο γραπτό σας.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων να γίνονται στο ειδικό φύλλο χαρτιού που δίνεται στο τετράδιο απαντήσεων.
- Να γράφετε καθαρά και επιμελημένα.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Η δολίευση τιμωρείται αυστηρά.
- Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- Θα δοθεί τυπολόγιο Μαθηματικών το οποίο θα επιστραφεί μετά το τέλος της εξέτασης. Στο τυπολόγιο δεν επιτρέπεται η αναγραφή οποιωνδήποτε σημειώσεων.

ΜΕΡΟΣ Α Να λύσετε 12 από τις 15 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int (6x^2 - 7) dx$.

2) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών αναγραμματισμών της λέξης ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με Δ και έχουν όλα τα Α μαζί;

3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{τοξ} \epsilon \phi x}{e^{2x} - 1}$.

4) Ο κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + 4y + \lambda = 0$ έχει ακτίνα $R=2$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου και την τιμή του λ .

5) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $x^2 - y^3 + xy - 5 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της $(2,1)$.

6) Η συνάρτηση f με εξίσωση $f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 1$ έχει σημείο καμπής το σημείο $A(-1,2)$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς a και b .

7) Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των εστιών της και την εκκεντρότητά της.

(β) Να δείξετε ότι το σημείο $T(3,-1)$ βρίσκεται πάνω στην έλλειψη και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο αυτό.

8) Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύουν: $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{12}$ και $P(A|B) = \frac{1}{5}$. Να δείξετε ότι $P(B) = \frac{5}{12}$ και να υπολογίσετε τις πιθανότητες: $P(A \cup B)$, $P(B-A)$ και $P(B|A')$.

9) Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ και $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Να βρείτε

τον πίνακα Δ που ορίζεται από τη σχέση $\Delta = \frac{1}{9}(A \cdot B - 3\Gamma)$ και να δείξετε ότι $\Delta^{-1} = \Delta$.

10) Με τη χρήση του μετασχηματισμού $u = \sqrt{6-2x}$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 x\sqrt{6-2x} dx$.

-
- 11) Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 - 3x$, $a > 0$ και τον άξονα $x'x$ ισούται με 8 τ.μ. Να βρείτε την τιμή του a .
- 12) Αν $x = 3\sin t - 1$ και $y = 2 + \eta\mu t$, να δείξετε ότι $9(y-2)\frac{d^2y}{dx^2} + 9\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$.
- 13) Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες με εξισώσεις $y^2 = 32x$ και $y = x^3$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $x'x$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.
- 14) (α) Να δείξετε ότι
$$\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^2(a-2).$$
- (β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης
$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$
- 15)(α) Να γράψετε τον ορισμό της παραβολής.
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής που έχει εστία το σημείο $E(-1,1)$ και διευθετούσα την ευθεία $4y - 3x = 0$.

ΜΕΡΟΣ Β Να λύσετε 4 από τις 6 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα ακρότατα και τις εξισώσεις των ασυμπτωτών της συνάρτησης, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

2. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{(2x^3 + 1)dx}{x^4 + x^2}$.

3. Σ' ένα κιβώτιο υπάρχουν 9 μπάλες αριθμημένες με τους αριθμούς 1-9. Παίρνω μια μπάλα στην τύχη, παρατηρώ τον αριθμό της και την επιστρέφω στο κιβώτιο. Επαναλαμβάνω τη διαδικασία αυτή τρεις φορές. Να υπολογίσετε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: « και στις τρεις φορές ο αριθμός της μπάλας είναι ο 5 ».

B: « και οι τρεις αριθμοί είναι ζυγοί ».

Γ: « οι τρεις αριθμοί έχουν άθροισμα μικρότερο του 5 ».

4. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης με εξίσωση $y = x^3 - 3x^2 + 5x$, στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης είναι ελάχιστη. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της κλίσης.

5. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ με εστία E και $A(at^2, 2at)$, $t \neq 0$, ένα σημείο της παραβολής. Η εφαπτομένη της παραβολής στο A τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Η ευθεία ΕΓ συναντά τη διευθετούσα της παραβολής στο Δ. Να δείξετε ότι:

(α) το Γ είναι το μέσο του AB.

(β) το AEBΔ είναι ρόμβος

Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του t για τις οποίες το AEBΔ είναι τετράγωνο.

6. Η εφαπτομένη της ισοσκελούς υπερβολής $xy = c^2$ στο σημείο της $A(ct, c/t)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B. Η ευθεία που περνά από το B και είναι κάθετη στον άξονα $x'x$ τέμνει την υπερβολή στο σημείο Γ.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής ΑΓ της υπερβολής είναι $2t^2y + x = 3ct$.

(β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη χορδή ΑΓ και την υπερβολή είναι ανεξάρτητο του t.