

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΛΕΥΚΩΣΙΑ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2005

ΛΥΚΕΙΑΚΟΥ ΚΥΚΛΟΥ

Β' ΣΕΙΡΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ	:	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΧΡΟΝΟΣ	:	2 ώρες και 30 λεπτά
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ	:	7 Ιουνίου 2005
ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ	:	10.45 π.μ.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη **A** και **B**.
Να απαντήσετε σε **12 ΜΟΝΟ** ερωτήσεις του Μέρους **A** και σε **4 ΜΟΝΟ** του Μέρους **B**. Στην περίπτωση που θα απαντήσετε σε περισσότερες από τις ζητούμενες ερωτήσεις θα λαμβάνονται υπόψη στη βαθμολογία όσες απαντήσεις ζητούνται και μάλιστα εκείνες που εμφανίζονται πρώτες στο γραπτό σας.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων να γίνονται στο ειδικό φύλλο χαρτιού που δίνεται στο τετράδιο απαντήσεων.
- Να γράφετε καθαρά και επιμελημένα.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Η δολίευση τιμωρείται αυστηρά.
- Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- Θα δοθεί τυπολόγιο Μαθηματικών το οποίο θα επιστραφεί μετά το τέλος της εξέτασης. Στο τυπολόγιο δεν επιτρέπεται η αναγραφή οποιωνδήποτε σημειώσεων.

ΜΕΡΟΣ Α Να λύσετε 12 από τις 15 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int (4x + \frac{4}{x}) dx$.
- 2) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2}{e^{2x} - 2x - 1}$.
- 3) Δίνεται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 2x + y + 1 = 0$.
(α) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου.
(β) Να δείξετε ότι το σημείο $(1, -1)$ βρίσκεται πάνω στον κύκλο και να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο αυτό.
- 4) Το σημείο $(1, 3)$ είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης $y = ax^2 - \frac{\beta}{x}$. Να υπολογίσετε τις τιμές των a και β και να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου.
- 5) Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών τριψήφιων αριθμών που μπορούν να σχηματιστούν με τα ψηφία 0, 1, 2, 3, 4 χωρίς επανάληψη ψηφίου. Να βρείτε πόσοι από αυτούς είναι μεγαλύτεροι από 200.
- 6) Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\lambda^2} = 1$. Αν η μια εστία της έχει συντεταγμένες $(4, 0)$, να βρείτε την τιμή του λ και την εκκεντρότητα της έλλειψης.
- 7) Αν $x = \eta \mu 2t$ και $y = e^{-t}$, να βρείτε την τιμή της $\frac{d^2 y}{dx^2}$ στο σημείο της καμπύλης για το οποίο $t=0$.
- 8) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2 = 4ax$ στο σημείο της $A(x_1, y_1)$ είναι $yy_1 = 2a(x+x_1)$.
- 9) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την ευθεία $x+y=5$ και την ισοσκελή υπερβολή $xy = 4$.
- 10) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+4}{x^2+x} dx$.
- 11) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$, να δείξετε ότι $\int_a^\beta f(\beta + a - x) dx = \int_a^\beta f(x) dx$.

- 12) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες

η ορίζουσα του πίνακα $A^2 - \lambda I$ ισούται με 0 (όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας 3×3).

- 13) Το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x$ και τον άξονα $x'x$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $x'x$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.
- 14) Από 7 αγόρια και 3 κορίτσια σχηματίζεται μια τετραμελής ομάδα. Να υπολογίσετε τον αριθμό των διαφορετικών ομάδων που μπορούν να σχηματιστούν. Παίρνω τυχαία μια ομάδα. Να υπολογίσετε την πιθανότητα στην ομάδα να συμμετέχουν:
- (α) 2 αγόρια και 2 κορίτσια
- (β) 4 αγόρια
- (γ) το πολύ 1 κορίτσι.

- 15) Να βρείτε τον αριθμό $\xi \in (0, 1)$ για τον οποίο ισχύει το Θεώρημα της Μέσης

Τιμής για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}$.

ΜΕΡΟΣ Β Να λύσετε 4 από τις 6 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα ακρότατα και τις εξισώσεις των ασυμπτωτών της συνάρτησης, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

2. Σε μια κλήρωση υπάρχουν συνολικά 24 λαχνοί και θα κληρωθούν διαδοχικά δύο δώρα. Τέσσερα άτομα Α, Β, Γ και Δ αγοράζουν αντίστοιχα 8, 6, 6 και 4 λαχνούς. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Χ: «ο Α κερδίζει και τα δύο δώρα».

Υ: «ο Α δεν κερδίζει κανένα από τα δώρα».

Ζ: «τα δύο δώρα κερδίζονται από διαφορετικά άτομα».

-
3. Με τη χρήση του μετασχηματισμού $x = a \sin \theta$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$.
4. Ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει $AB = A\Gamma = 4\text{cm}$ και ύψος AD . Να υπολογίσετε το μήκος του AD ώστε το τρίγωνο να έχει μέγιστο εμβαδόν.
5. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ με εστία E . Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο της $A(at^2, 2at)$, $t \neq 0$, τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο B και η ευθεία που περνά από το A και είναι παράλληλη με τον άξονα της παραβολής συναντά την EB στο Γ . Να δείξετε ότι
- (α) το Γ βρίσκεται πάνω στη διευθετούσα της παραβολής
 - (β) το B είναι το μέσο της $E\Gamma$
 - (γ) το τρίγωνο $A\epsilon\Gamma$ είναι ισοσκελές
- Να βρείτε για ποιες τιμές του t το τρίγωνο $A\epsilon\Gamma$ είναι ισόπλευρο.
6. Δίνεται η υπερβολή $xy = c^2$ και το σημείο της $A(ct, c/t)$, $t \neq \pm 1$. Η εφαπτομένη της υπερβολής στο A τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Η κάθετη της υπερβολής στο A τέμνει τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να δείξετε ότι
- (α) το A είναι το μέσο της $B\Gamma$ και της ΔE .
 - (β) το $\Gamma\Delta B\epsilon$ είναι τετράγωνο.

Τ Ε Λ Ο Σ
