

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ & ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Ε Ξ Ε Τ Α Σ Ε Ι Σ

ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ & ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 29 Ιουνίου 1998

7.30 π.μ. - 10.30 π.μ.

ΜΕΡΟΣ Α

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση $\tan x + \tan \frac{x}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3\pi}{4}$.

$x = \frac{\pi}{4}$

2. Αν $x = \frac{t^2}{2} - e^t + t$ και $\psi = \eta \mu t - t$, να βρείτε την παράγωγο $\frac{d\psi}{dx}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{d\psi}{dx} = 1$$

3. Αν τα ενδεχόμενα A και B ανήκουν στον ίδιο δειγματικό χώρο και $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$,

$P(B|A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{4}{5}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ και $P(B|A')$.

$P(A) = \frac{1}{5}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$, $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$
 $P(B|A') = \frac{7}{10}$

4. Δίνεται η παράσταση $K = x^2 \cdot \ln \psi$.

α) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dK}{dx} = 4 \sin 2x$

β) Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$2x \cdot \ln \psi + \frac{x^2}{\psi} \cdot \frac{d\psi}{dx} = 4 \sin 2x.$$

$$x^2 \ln \psi = 2 \sin 2x + C$$

.../2...

5. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των παιδιών
30 οικογενειών.

2	1	4	2	3	1	0	2	3	2
1	2	5	1	0	3	1	2	3	2
3	0	2	3	2	1	0	3	2	4

α) Να κατασκευάσετε το πολύγωνο συχνοτήτων.

β) Να βρείτε το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση των
παρατηρήσεων. $\bar{x} = 2$ $s \approx 1,24$

6. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 22 & -1 \end{pmatrix}$.

α) Να δείξετε ότι $A^2 - 6A + 11 \cdot I = 0$ (I ο μοναδιαίος και 0 ο
μηδενικός 2×2 πίνακας).

β) Να βρείτε ένα πίνακα X, 2×2 , έτσι ώστε $A \cdot X = B$. $X = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

7. Για μια καμπύλη $\psi = f(x)$ το σημείο $A(2,1)$ είναι σημείο καμπής και

$$\frac{d\psi}{dx} = x + \frac{a}{x^2} \quad \text{Να βρείτε την τιμή του } a \text{ και την εξίσωση της}$$

καμπύλης. $a = 4$ $\psi = \frac{x^2}{2} - \frac{4}{x} + 1$

8. Δίνεται η υπερβολή $x\psi = 2$ και το σημείο της $A(2,1)$. Η κάθετη
της υπερβολής στο A τέμνει ξανά την υπερβολή στο σημείο B. Να
βρείτε την εξίσωση του κύκλου με κέντρο το B και ακτίνα 3 μονάδες.

9. Δίνεται:

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2+x & \ln x & 1 \\ 1 & \ln x & 0 \\ 1 & \ln x & 1 \end{vmatrix}$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = (x+1)\ln x$.

β) Να βρείτε την τιμή του $\int_1^e f(x) dx$ ως συνάρτηση του e. $= \frac{e^2 + 5}{4}$
.../3...

10. Σε μια συγκέντρωση βρίσκονται 3 παντρεμένα ζευγάρια, 5 ελεύθεροι άντρες και 2 ελεύθερες γυναίκες. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούμε να σχηματίσουμε ομάδα 4 ατόμων

α) χωρίς περιορισμό

$$715 //$$

β) αν η ομάδα θα περιέχει τουλάχιστο ένα άντρα και τουλάχιστο μια γυναίκα

$$640 //$$

γ) αν η ομάδα θα περιέχει ακριβώς ένα παντρεμένο ζευγάρι.

$$159 //$$

ΜΕΡΟΣ Β

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Ένας κύκλος (Κ) περνά από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(8,0)$ και έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $\psi = \frac{3}{4}x$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωσή του μπορεί να πάρει τη μορφή $x^2 + \psi^2 - 8x - 6\psi = 0$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Β, αν ΟΒ διάμετρός του.

$$3\psi + 4x - 50 = 0 \quad B(8,6)$$

2. Σε μια σφαίρα ακτίνας $R = 2\sqrt{3}\text{cm}$, εγγράφουμε ορθό κυκλικό κύλινδρο ύψους $2x$.

α) Να δείξετε ότι η διαφορά, V , των όγκων των δυο στερεών δίνεται από τη σχέση $V = 2\pi(x^3 - 12x + 16\sqrt{3})$.

β) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε το V να γίνει ελάχιστο, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

$$x = 2 //$$

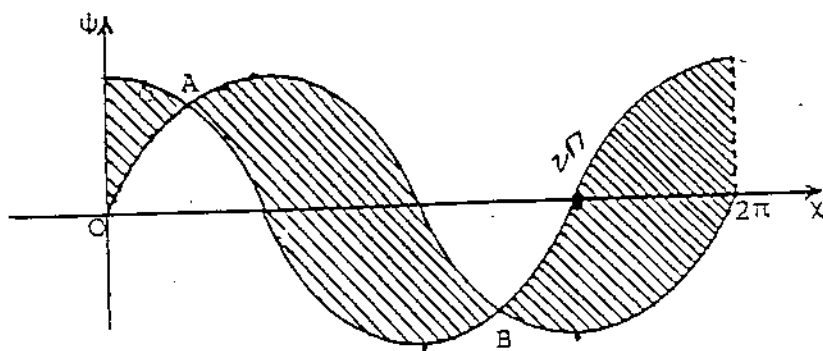
3. Η κλίση της εφαπτομένης μιας καμπύλης $\psi = f(x)$ στο τυχαίο σημείο

της (x, ψ) ικανοποιεί την εξίσωση $\frac{d\psi}{dx} = \frac{e^{2x}}{\psi \cdot e^{\psi^2}}$.

α) Αν είναι γνωστό ότι η καμπύλη περνά από το σημείο $A(\frac{1}{2}, 1)$, να δείξετε ότι η εξίσωσή της είναι $\psi^2 = 2x$.

.../4...

- β) Η κάθετη της $\psi^2=2x$ στο σημείο $A(\frac{1}{2}, 1)$, τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο B . Το χωρίο, που ορίζεται από το τόξο OA της καμπύλης και τα ευθύγραμμα τμήματα OB και AB , στρέφεται ολόκληρη στροφή γύρω από τον άξονα των x . Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται. $V = \frac{7}{12}\pi$



Στο πιο πάνω σχήμα δίνονται τα διαγράμματα των καμπύλων με εξισώσεις $f(x)=\eta \sin x$, $g(x)=\psi^2=2x$, $x \in [0, 2\pi]$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A , B , στα οποία τέμνονται οι δυο καμπύλες. $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ $(\frac{5\pi}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$

- β) Να βρείτε το εμβαδό του γραμμοσκιασμένου χωρίου. $E = 4\sqrt{2} \pi$

5. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\psi = 1 - \frac{16}{(x-4)^2}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τις τομές με τους άξονες, τις ασύμπτωτες, τυχόν ακρότατα και να την παραστήσετε γραφικά.

- β) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη, τον άξονα των x και την ευθεία $x=20$. $E = 9 \pi$