

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4**

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης : **Δευτέρα, 2 Ιουλίου 2001**
7.30 π.μ – 10.30 π.μ.

ΤΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = (x - \alpha)e^{-x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε την τιμή του α , ώστε να ισχύει η σχέση $\frac{d^2y}{dx^2} = (x + 1)e^{-x}$. $\alpha = -3 //$

2. Έμπορος εισάγει αυτοκίνητα και τα πωλεί με κέρδος 20% πάνω στην τιμή κόστους τους. Ένας καταναλωτής αγοράζει ένα αυτοκίνητο πληρώνοντας επιπλέον 10% Φ.Π.Α. επί της αναγραφόμενης τιμής πώλησης. Αν ο καταναλωτής αγόρασε το αυτοκίνητο προς £2112 να βρείτε την τιμή στην οποία αγόρασε ο έμπορος το αυτοκίνητο. $\pounds 1600 //$

3. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$(x^2 - 9) \frac{dy}{dx} = y. \quad y^6 = c \cdot \frac{x-3}{x+3} //$$

4. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που έχει το κέντρο του πάνω στην ευθεία $y=2x$ και εφάπτεται του άξονα των y στο σημείο $(0,3)$. $(x-3/2)^2 + (y-3)^2 = 9/4 //$

5. Να δείξετε ότι $2 \operatorname{Toxep} \frac{1}{3} + \operatorname{Toxep} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$.

6. Με πόσους τρόπους μπορούμε να μοιράσουμε 9 διαφορετικά δώρα σε τέσσερα παιδιά αν θα δώσουμε πρώτα στο πιο μικρό παιδί 3 δώρα και στα άλλα 3 παιδιά από 2 δώρα στο καθένα. $7560 //$
(Μπορείτε να αφήσετε την απάντησή σας σε παραγοντική μορφή).

7. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\int_e^x \ln t \, dt}{x - e} = 1 //$

8. Δίνεται ο πίνακας $A(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ x \ln x & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^+$.

α) Να δείξετε ότι $A(x) \cdot A(y) = A(xy)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $A^3(x) = I$, όπου I ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας. $x=1 //$

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}^+$, για την οποία ισχύει: $\lambda=2 //$
 $A(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = A(\lambda) \cdot A\left(\frac{1}{\lambda}\right)$.

9. Δίνεται η παραβολή $y = x^2$ και τα σημεία της $A(-1, 1)$ και $B(2, 4)$. Να βρείτε το σημείο Γ της παραβολής στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία AB . Στη συνέχεια να δείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της χορδής AB και της παραβολής ισούται με τα $\frac{4}{3}$ του εμβαδού του τριγώνου $AB\Gamma$. $\Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) //$

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - \frac{x}{x^2 + a}, a \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ έχει ακρότατα τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη και αν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τότε δεν έχει ακρότατα.

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{x-2}{x+1}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της με τους άξονες των συντεταγμένων, τις εξισώσεις των ασυμπτωτών της και τα διαστήματα μονοτονίας της, και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Σε ξεχωριστό σύστημα αξόνων να κάνετε τη γραφική παράσταση της καμπύλης με εξίσωση $y = \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου που ορίζεται από την καμπύλη $y = \left| \frac{x-2}{x+1} \right|$, την οριζόντια ασύμπτωτή της και την ευθεία $x=1$.

$E = 1 + 3 \ln \frac{3}{4} //$
 $y = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow x-2 = y(x+1) \Rightarrow x-2 = yx+y \Rightarrow x-yx = y+2 \Rightarrow x(1-y) = y+2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{1-y}$
 $E = \int_{1/2}^1 \left(1 + \frac{x-2}{x+1} \right) dx = \int_{1/2}^1 \frac{2x-1}{x+1} dx = \int_{1/2}^1 \left(2 - \frac{3}{x+1} \right) dx = 2x - 3 \ln(x+1) \Big|_{1/2}^1 = 2 - 3 \ln 2 - 1 + 3 \ln \frac{3}{2} = 1 + 3 \ln \frac{3}{2} //$

2. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $x^2 \frac{dy}{dx} + 2y^2 = 3xy$, $x > 0$.

Να δείξετε ότι με την αντικατάσταση $y = \frac{1}{z}$ (z συνάρτηση του x) η εξίσωση

μετασχηματίζεται στη $x^2 \frac{dz}{dx} + 3xz = 2$.

Στη συνέχεια να βρείτε, στη μορφή $y = f(x)$, την ειδική λύση της εξίσωσης

$x^2 \frac{dy}{dx} + 2y^2 = 3xy$ για την οποία είναι $y=1$ όταν $x=1$. $y=x$ //

3. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ και το σημείο της $P(at^2, 2at)$, $t \in \mathbb{R} - \{0\}$.

(α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο P έχει εξίσωση $x - ty + at^2 = 0$

(β) Η εφαπτομένη της παραβολής τέμνει τον άξονα των y στο σημείο T . Να δείξετε ότι ο κύκλος ο οποίος διέρχεται από τα σημεία P , T και την αρχή O των αξόνων έχει κέντρο το σημείο $K\left(\frac{at^2}{2} + a, \frac{at}{2}\right)$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου K , καθώς το t μεταβάλλεται. $y^2 = \frac{a}{2}(x-a)$ //

4. Οι έδρες ενός πράσινου ζαριού φέρουν ενδείξεις τους αριθμούς 1,1,1,2,2,3 και οι έδρες ενός κόκκινου ζαριού, τους αριθμούς 1,2,2,3,3,3.

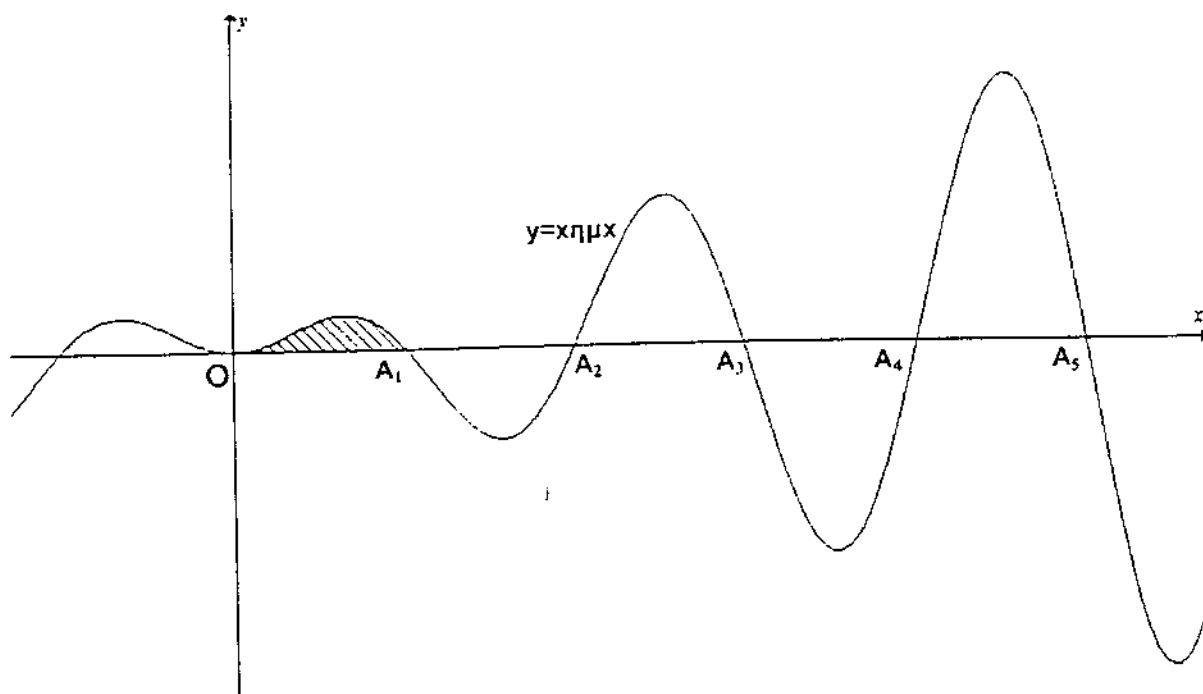
(α) Ρίχνουμε ταυτόχρονα τα δύο ζάρια.

(i) Να υπολογίσετε την πιθανότητα να φέρουμε άθροισμα ενδείξεων μεγαλύτερο από το 4. $P(i) = \frac{11}{36}$ //

(ii) Να δείξετε ότι η πιθανότητα να φέρουμε την ίδια ένδειξη και στα δύο ζάρια είναι $\frac{10}{36}$. $P(ii) = \frac{10}{36}$ //

(β) Ρίχνουμε τα ζάρια ταυτόχρονα και επαναλαμβάνουμε μέχρι να φέρουμε την ίδια ένδειξη και στα δύο ζάρια. Να υπολογίσετε την πιθανότητα να το επιτύχουμε για πρώτη φορά στο τρίτο ρίξιμο. $P(6) = \frac{845}{5832}$ //

5.



Στο πιο πάνω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με εξίσωση $y = x\eta\mu x$. Η γραφική παράσταση τέμνει τον ημιάξονα Ox στα σημεία O, A_1, A_2, A_3, \dots . Το γραμμοσκιασμένο χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη και το τμήμα OA_1 του άξονα των x περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

$$V = \frac{\pi^4}{6} - \frac{\pi^2}{4} //$$

Τ Ε Λ Ο Σ