

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ  
ΔΕΙΓΜΑ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Διάρκεια : 3 ώρες

Το δοκίμιο αποτελείται από δύο σελίδες.

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις του Α' μέρους βαθμολογείται με 5 μονάδες και κάθε μια από τις 5 ασκήσεις του Β' μέρους βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΜΕΡΟΣ Α'

1. Να βρεθεί το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\eta \mu^2 2x}$

9/8

2. Μια καμπύλη ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις :  $x = t \cos t$  και  $y = \ln(1+t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε τις παραγώγους :

i)  $\frac{dy}{dx}(2t)$  ii)  $\frac{d^2y}{dx^2}(2(1+t^2))$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με  $t = 1$ .

$y - 2x = \ln 2 - \frac{1}{2}$

3. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Να βρείτε:

α) τις εστίες, τις κορυφές και τις διευθετούσες της έλλειψης.

β) την εξίσωση της υπερβολής η οποία έχει κορυφές τις εστίες της έλλειψης και εστίες τις κορυφές της έλλειψης.

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

4. Σε ένα κείμενο 200 δακτυλογραφημένων σελίδων μετρήθηκαν τα τυπογραφικά λάθη κάθε σελίδας.

Αν  $x_i$  είναι ο αριθμός των λαθών της  $i$  σελίδας,  $\sum_{i=1}^{200} x_i = 920$  και  $\sum_{i=1}^{200} x_i^2 = 5032$ .

να βρείτε το μέσο όρο των λαθών ανά σελίδα και την τυπική απόκλιση της κατανομής.

$\sigma = 2, \bar{x} = \frac{920}{200}$

5. Αν  $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1+\lambda \\ 1-\lambda & -\lambda \end{pmatrix}$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

α) να δείξετε ότι  $A^2 = I$  και  $A^{-1} = A$ , όπου  $I$  ο μοναδικός πίνακας  $2 \times 2$

β) για  $\lambda = 2$  να βρείτε ένα πίνακα  $X$  για τον οποίο να ισχύει :  $A^{2003} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

6. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από το σημείο  $A(-1,2)$ , έχει το κέντρο του στην ευθεία  $x = -3y$  και τέμνει ορθογώνια τον κύκλο

$x^2 + y^2 + 8x + 10y + 9 = 0$

$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0$

7. Αν  $\alpha_x = \int_x^{\frac{1}{2}} 2dx$  να βρείτε το  $n \in \mathbb{N}$  ώστε  $\sum_{x=1}^n \alpha_x = -40$

$n = 10$

8. Αν η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο  $[a, b]$  και παραγωγίσιμη στο  $(a, b)$  με

$$\text{και } f(k) = \sqrt{3}x$$

-53-

$f(a) = \sqrt{3}$  β να δείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (a, \beta)$  τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης της  $f$  σε σημείο  $((x_0, f(x_0)))$  να σχηματίζει με τον άξονα των  $x$  γωνία ίση με  $\frac{2\pi}{3}$ .

9. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη  $\psi = \ln x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $\psi = 1$  κάμνει πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των  $x$ .

Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.  $V_x = \frac{1}{2} \pi$

10. Ο βαθμός μιας πολυωνυμικής συνάρτησης  $\psi = f(x)$  είναι ίσος με την ένδειξη ενός ζαριού όταν το ρίζουμε μια φορά.

α) Να βρείτε την πιθανότητα η συνάρτηση  $g(x) = \frac{x^2 + 1}{f(x)}$  να έχει οριζόντια ασύμπτωτη.

β) Αν η  $g(x)$  έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία  $\psi = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$  και  $f'(0) = -2$  να βρείτε την πολυωνυμική συνάρτηση  $\psi = f(x)$ .  $f(x) = x^2 - 2x + 2$

#### ΜΕΡΟΣ Β'

1. Δίνεται η συνάρτηση  $\psi = \frac{(x+1)^2}{x-2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες και να κάμνετε τη γραφική της παράσταση.

β) Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και τις ευθείες  $\psi = x + 4$ ,  $x = 5$  και  $x = a$ ,  $2 < a < 5$ , να βρείτε την τιμή του  $a$  ώστε να είναι  $E = 9 \ln 3$ .  $a = 3$

2. Η συνάρτηση  $\psi = f(x)$  είναι συνεχής στο  $[0, a]$ .

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό  $t = a - x$

να δείξετε ότι  $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$ .

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta \mu^2 x}{\eta \mu^5 x + \sigma \upsilon \nu^5 x} dx$ .  $\frac{7}{4}$

3. Δίνεται η παραβολή  $\psi^2 = 4ax$  και τα σημεία της  $T(at^2, 2at)$ ,  $P(ap^2, 2ap)$ .

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής  $TP$  είναι  $2x - (t+p)\psi + 2atp = 0$

β) Αν η προέκταση της χορδής  $TP$  περνά από το σημείο  $(0, 2a)$  να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γ.τ. του μέσου  $M$  της χορδής  $TP$ .

4. Γεωργός θέλει να κατασκευάσει ντεπόζιτο, νερού χωρητικότητας  $10m^3$  που να έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου ανοικτού στο πάνω μέρος και του οποίου η βάση να είναι τετράγωνο πλευράς  $X$  m. Αν το κόστος κατασκευής είναι για μεν τη βάση  $\text{€}5$  το τετραγωνικό μέτρο, ενώ για τα πλάγια τοιχώματα  $\text{€}2$  το τετραγωνικό μέτρο,

α) να δείξετε ότι το κόστος κατασκευής  $\psi$  είναι  $\psi = 5X^2 + \frac{80}{X}$

β) να βρείτε τις διαστάσεις που πρέπει να έχει το ντεπόζιτο ώστε το κόστος κατασκευής να είναι ελάχιστο.  $2, 2, 10/4$

5. Πάνω σε ένα τραπέζι υπάρχουν 5 επιστολές οι οποίες απευθύνονται σε 5 διαφορετικά

πρόσωπα και οι αντίστοιχοι φάκελοι με τις διευθύνσεις των 5 προσώπων.

Αν σε κάθε φάκελο τοποθετήσουμε μια επιστολή τυχαία, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: Μόνο 2 από τις επιστολές να μπουν στο δικό τους φάκελο.  $1/6$

B: Τουλάχιστον 3 από τις επιστολές να μπουν στο δικό τους φάκελο.  $11/120$