

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 4**

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Δευτέρα, 21 Ιουνίου 1999  
7.30 π.μ. - 10.30 π.μ.

**ΜΕΡΟΣ Α**

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Η καμπύλη με εξίσωση  $\psi = (x^2 + \alpha x + \beta)e^x$  έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο  $(-1, -\frac{8}{e})$ . Να βρείτε την τιμή των  $\alpha$  και  $\beta$ .  $\beta = 1$   $\alpha = 10$

2. Κάποιος αγοράζει λαμπτήρες προς £72 τη δωδεκάδα. Από αυτούς, ποσοστό 10% σπάζει κατά τη μεταφορά και πωλεί τους υπόλοιπους προς £7 τον ένα. Να βρείτε το επί τοις εκατό (%) κέρδος του.

5%

3. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς που πήραν οι 30 μαθητές ενός τμήματος σε κάποιο διαγώνισμα Μαθηματικών:

12	9	15	11	16	18	15	12	18	11
15	11	16	12	18	9	18	15	12	15
15	18	9	11	15	20	11	16	9	18

Να βρείτε το μέσο όρο και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. (Η

τυπική απόκλιση να δοθεί με τρία δεκαδικά ψηφία).  $\bar{x} = 14$   $s = 3,225$

4. Δίνεται ο πίνακας  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ . Να δείξετε ότι:

α)  $A^3 = -I$  όπου  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\beta) A^2 - A + I = (O) \text{ όπου } (O) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma) (A-I)^{19} = A^{19} - I.$$

5. Δίνεται η συνάρτηση  $\psi = f(x)$  της οποίας υπάρχουν η πρώτη παράγωγος  $f'(x)$  και η δεύτερη παράγωγος  $f''(x)$  στο διάστημα  $[a, \beta]$  και είναι συνεχείς. Η εφαπτόμενη της καμπύλης με εξίσωση  $\psi = f(x)$ , στο σημείο με τετμημένη  $x=a$  σχηματίζει προσανατολισμένη γωνιά  $\frac{\pi}{4}$  ακτινίων με τον άξονα  $Ox$  και η εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο με τετμημένη  $x=\beta$  σχηματίζει προσανατολισμένη γωνιά  $\frac{\pi}{3}$  ακτινίων με τον

άξονα  $Ox$ . Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int_a^\beta f''(x) dx = \underline{\underline{\sqrt{3}-1}}$

6. Δυο μαθητές A και B βρίσκονται σε διαφορετικές αίθουσες και προσπαθούν να λύσουν ένα πρόβλημα. Η πιθανότητα να λύσει το πρόβλημα ο μαθητής B είναι  $\frac{1}{3}$  και η πιθανότητα να το λύσει

τουλάχιστον ο ένας από τους δυο είναι  $\frac{1}{2}$ . Να βρείτε την πιθανότητα:

- α) Να λύσει το πρόβλημα ο μαθητής A.  $\underline{\underline{p(A) = 1/4}}$   
 β) Τουλάχιστον ο ένας από τους δυο μαθητές, να μη λύσει το πρόβλημα.  $\underline{\underline{p(A' \cap B') = 1/2}}$   
 γ) Να λύσει το πρόβλημα μόνο ο ένας από τους δυο μαθητές.

$$\underline{\underline{p(A \cap B') + p(A' \cap B) = 1/2}}$$

7. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη  $\psi = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , τον άξονα

των  $x$  και τις ευθείες  $x = a$  και  $x = a\sqrt{3}$ ,  $a > 0$  περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των  $x$ . Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται

είναι  $\frac{\pi^2}{6}$  κ.μ. να βρείτε την τιμή του  $a$ .

$$\underline{\underline{a = 1/2}}$$

8. Δίνονται οι κύκλοι:

$$κ_1: x^2 + y^2 = 20$$

$$κ_2: x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$$

α) Να βρείτε τα κέντρα και τις ακτίνες των δυο κύκλων.

β) Να δείξετε ότι οι δυο κύκλοι τέμνονται σε δυο σημεία Α και Β και να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων αυτών.

$$A(2, -4) \quad B(4, 2) //$$

γ) Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι διάμετρος του κύκλου  $\kappa_2$ .

δ) Να υπολογίσετε την οξεία γωνιά που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των δυο κύκλων στο σημείο Α.

$$\hat{\omega} = 45^\circ //$$

9. Σε μια σφαίρα ακτίνας  $R = a \text{ cm}$  εγγράφουμε ορθό κυκλικό κώνο ύψους  $(a+x) \text{ cm}$ .

α) Να δείξετε ότι ο όγκος του κώνου είναι  $V = \frac{1}{3} \pi (a-x)(a+x)^2$ .

β) Να βρείτε συναρτήσει του  $a$ , την τιμή του  $x$  για την οποία ο όγκος  $V$  του κώνου γίνεται μέγιστος.

$$x = a/3 //$$

γ) Να βρείτε συναρτήσει του  $a$  τον μέγιστο αυτό όγκο.

$$V = \frac{32\pi a^3}{81} //$$

10. Δίνεται η καμπύλη, με παραμετρικές εξισώσεις:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \left[ \ln\left(\sigma\phi \frac{\theta}{2}\right) - \sigma\eta\theta \right] \\ \psi &= a\eta\mu\theta \end{aligned} \right\} \quad a > 0, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

α) Να δείξετε ότι  $\frac{d\psi}{dx} = -\epsilon\phi\theta$ .

β) Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο  $P(a [\ln(\sigma\phi \frac{\theta}{2}) - \sigma\eta\theta], a\eta\mu\theta)$  τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο  $T$ . Να δείξετε ότι  $(PT) = a$ .

## ΜΕΡΟΣ Β

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση  $\psi = \frac{x^3}{(x-2)^2}$ .

Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα, τα σημεία καμπής, τις ασύμπτωτες και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

2. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση  $\frac{d\psi}{dx} = u$  να βρείτε τη γενική λύση

της διαφορικής εξίσωσης:  $x \frac{d^2\psi}{dx^2} - 2 \frac{d\psi}{dx} = x^3 \sin x$ .

$$y = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + \frac{x^3}{3} + C$$

3. Δίνεται η καμπύλη  $\psi = x^2 - \lambda x$ ,  $\lambda > 0$  και η ευθεία  $\psi = 2x$ . Ονομάζουμε  $E_1$  το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη  $\psi = x^2 - \lambda x$ , την ευθεία  $\psi = 2x$  και τον άξονα των  $x$  και  $E_2$  το εμβαδόν που περικλείεται από την καμπύλη  $\psi = x^2 - \lambda x$  και τον άξονα των  $x$ . Αν  $E_1 = 7E_2$  να υπολογίσετε την τιμή του  $\lambda$ .

$$\lambda = 2 //$$

4. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή  $xy = 16$  και τα σημεία  $T(4t, \frac{4}{t})$  και

$P(4\rho, \frac{4}{\rho})$  αυτής.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $TP$ .

β) Αν τα σημεία  $T$  και  $P$  κινούνται πάνω στην υπερβολή έτσι ώστε η ευθεία  $TP$  να περνά από το σημείο  $\Gamma(8,4)$  να βρείτε στη μορφή  $\psi = f(x)$  την εξίσωση της καμπύλης ( $\kappa$ ) πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου  $M$  της χορδής  $TP$ .

$$y = \frac{2x}{x-4}$$

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της καμπύλης ( $\kappa$ ).

5. Μια έρευνα έδειξε ότι 16% του συνολικού πληθυσμού μιας πόλης είναι συνταξιούχοι και 18% του συνολικού πληθυσμού έχει πρόβλημα ακοής. Επίσης 65% των συνταξιούχων έχει πρόβλημα ακοής.

(i) Αν επιλέξουμε τυχαία ένα άτομο από τον πληθυσμό της πόλης, να βρείτε με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων την πιθανότητα το άτομο αυτό:

$$\begin{aligned} \alpha) & P(\xi \cap \eta) = 0,076 \quad \beta) P(\xi | \eta) = 0,056 \quad \gamma) P(\xi / \eta) = 0,068 \\ \delta) & P(\xi \cup \eta) = 0,236 \quad \epsilon) P(\bar{\xi}) = 0,206 // \end{aligned}$$

α) να μην είναι συνταξιούχο και να έχει πρόβλημα ακοής.

β) να είναι συνταξιούχο και να μην έχει πρόβλημα ακοής.

γ) να είναι συνταξιούχο δεδομένου ότι δεν έχει πρόβλημα ακοής.

δ) να είναι συνταξιούχο ή να έχει πρόβλημα ακοής ή και τα δυο.

(ii) Αν επιλέξουμε τυχαία δυο άτομα από τον πληθυσμό της πόλης, να βρείτε με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων την πιθανότητα του ενδεχομένου:

H: "τουλάχιστον το ένα από αυτά να είναι συνταξιούχο και τουλάχιστον το ένα από αυτά να έχει πρόβλημα ακοής".

**Τ Ε Λ Ο Σ**