ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 8**
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: 29 Ιουνίου 1999
7.30 π.μ. - 10.30 π.μ

ΜΕΡΟΣ Α΄
Να απαντήσετε σε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις του μέρους αυτού βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\text{συν}x}{x^2}$ $=\frac{1}{2}$ //

---

2) Για τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου $P(x, y)$ πάνω σε μια καμπύλη (κ) ισχύει η σχέση $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{4}{y}$ και η καμπύλη περνά από το σημείο (-2, 4). Να βρείτε την εξίσωση της (κ) και να την κατονομάσετε. $y^2=-8x$ //

---

3) Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y = f(x) = -x^3 + 3x^2$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής και των ακρότατων της.

β) Αν ρ_1, ρ_2 και ρ_3 είναι αντίστοιχα οι τετμημένες του σημείου καμπής, του τοπικού ελάχιστου και του τοπικού μέγιστου, να υπολογίσετε το

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} f(x)dx - \int_{\rho_2}^{\rho_3} f(x)dx \quad = -\frac{19}{4}$$

---

4) Αν οι αριθμοί α, β, γ, δ είναι ανά δύο διάφοροι μεταξύ τους να δείξετε ότι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha^2 & \beta^2 & \gamma^2 & \delta^2 \\ \alpha^3 & \beta^3 & \gamma^3 & \delta^3 \end{vmatrix} \neq 0 . \quad (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)(\gamma-\beta)(\delta-\beta)(\delta-\gamma)\neq 0$$

---

5) Σε ένα διαγωνισμό υπάρχουν τρεις ασκήσεις με διαφορετική δυσκολία. Η πιθανότητα να απαντηθεί ορθά, από ένα άτομο Α, η i άσκηση να είναι $\dfrac{4-i}{4}$, $i=1, 2, 3$ και το ενδεχόμενο να απαντηθεί ορθά μια από τις ασκήσεις είναι ανεξάρτητο από το αν απαντηθούν ορθά ή όχι οι άλλες δύο ασκήσεις. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Β: το άτομο Α να απαντήσει ορθά και τις τρεις ασκήσεις. $P(B)=\frac{3}{32}$

Γ: το άτομο Α να απαντήσει ορθά ακριβώς 2 από 3 ασκήσεις. $P(\Gamma)=\frac{13}{32}$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα 2

6) Δίνονται τα ολοκληρώματα : $A = \int_{\frac{1}{e}}^{\sigma\varphi x} \frac{dt}{t(1+t^2)}$ και $B = \int_{\frac{1}{e}}^{\varepsilon\varphi x} \frac{t\,dt}{1+t^2}$.

α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t = \frac{1}{z}$, να δείξετε ότι : $A = \int_{\varepsilon\varphi x}^{e} \frac{z\,dz}{1+z^2}$

β) Με τη βοήθεια του πιο πάνω αποτελέσματος ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το άθροισμα A+B $= 1$

---

7) Δίνεται το επίπεδο Π με εξίσωση $2x + y - 2z = 8$ και τα σημεία $A(2, -1, 4)$, $B(3,2,0)$ και $\Gamma(2,6,1)$. Μια ευθεία (ε) περνά από το σημείο Α και είναι κάθετη στο Π.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) σε παραμετρική μορφή, καθώς επίσης και τις συντεταγμένες του σημείου Δ, που αυτή τέμνει το επίπεδο Π.

β) Να δείξετε ότι η ευθεία που περνά από τα σημεία Β και Γ ανήκει στο Π.

α) $x = 2\lambda + 2$, $y = \lambda - 1$, $z = -2\lambda + 4$

$\Delta\left(\frac{44}{9}, \frac{4}{9}, \frac{10}{9}\right)$

---

8) Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της πιο κάτω κατανομής συχνοτήτων

x	1	2	3	4	...	ν-1	ν
f	m	m	m	m	...	m	m

όπου m, ν φυσικοί αριθμοί με ν >2 .

$\bar{x} = \frac{\nu+1}{2}$

$\sigma = \sqrt{\frac{\nu^2-1}{12}}$

---

9) Δίνεται η καμπύλη, (C) , με εξίσωση $y = f(x) = \frac{10-2x}{x-2}$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της (C).

β) Να αποδείξετε ότι η καμπύλη (C) αντιστοιχεί σε φθίνουσα συνάρτηση σ΄όλο το πεδίο ορισμού της.

γ) Αφού βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της (C) με τους άξονες συντεταγμένων, να κάμετε τη γραφική της παράσταση, και

δ) Να βρείτε το εμβαδό, Ε, του χωρίου που ορίζεται από τη (C), τον άξονα των x την ευθεία $x = \frac{5}{2}$. Να βάλετε την απάντηση στη μορφή $E = \ln a^c - b$, όπου a, b, c φυσικοί αριθμοί. $E = \ln 6^6 - 5$

---

10) Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα είναι εγγεγραμμένη σε σφαίρα ακτίνας R, έτσι ώστε όλες οι κορυφές της πυραμίδας να βρίσκονται πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας. Το ύψος της πυραμίδας είναι h.

α) Να δείξετε ότι οι τέσσερις κορυφές της βάσης της πυραμίδας βρίσκονται πάνω σε κύκλο ακτίνας r, όπου $r^2 = 2Rh - h^2$.

β) Αν η ακτίνα R είναι σταθερή το δε ύψος h μεταβάλλεται, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του όγκου, V, της πυραμίδας. $V_{max} = \frac{64}{81}R^3$

$h = 4/3R$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα 3

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να απαντήσετε σε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις του μέρους αυτού βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $y = z^{-\frac{1}{2}}$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{dy}{dx} = y - xe^{-2x}y^3 .$$

$y^2 = \dfrac{e^{2x}}{x^2+K}$

Για τη λύση, y, που έχετε προσδιορίσει να βρείτε το $\lim\limits_{x \to -\infty} y$. $= 0$ //

---

2) α) Να βρείτε το ανάπτυγμα της συνάρτησης $g(x)=\left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}$ σε σειρά Maclaurin, μέχρι και τον όρο x^4, και να προσδιορίσετε τις τιμές του x για τις οποίες αυτό το ανάπτυγμα έχει έννοια.

β) Αν $x > 0$ και αν οι γωνίες που εμπλέκονται στην πιο κάτω έκφραση είναι όλες οξείες, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση

$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{32} + \dots\right)$

$$\text{συν}\{\text{τοξεφ}\{\text{ημ}\,(\tfrac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}x)\}\} = \left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$|x^2|<1$ $\quad |x|<1$

$\left|\frac{x^2}{2}\right|<1$

γ) Θεωρώντας το ανάπτυγμα που βρήκατε στο α), να υπολογίσετε με προσέγγιση χιλιοστού την τιμή του

$g(0{,}1)$

$$\text{συν}\{\text{τοξεφ}\{\text{ημ}\,(\tfrac{\pi}{2} - \text{τοξεφ}(0{,}1))\}\}$$

$A(0{,}1) \simeq 0{,}709$

---

3) Δίνονται ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, σταθερού μήκους 7 μονάδων, και σημείο Ρ πάνω σ΄αυτό έτσι ώστε $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{3}{4}$. Το σημείο Α κινείται πάνω στον άξονα των x και το σημείο Β πάνω στον άξονα των y, σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων xOy.

α) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ρ. $\dfrac{x^2}{4^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$

β) Να προσδιορίσετε το είδος της καμπύλης αυτής, και

γ) Δοθέντος ότι η καμπύλη αυτή κάτω από το γραμμικό μετασχηματισμό, που περιγράφεται από τον πίνακα $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, a>0, b>0, μετασχηματίζεται στον κύκλο $x^2+y^2=1$, να βρείτε τις τιμές των a, b. $\alpha = \frac{1}{4}$ $\quad b = \frac{1}{3}$

Συνέχεια στην επόμενη σελίδα 4

4) α) Δίνονται η καμπύλη $y = e^{-x}$ και σημείο $P(t, e^{-t})$ πάνω σ' αυτή. Να βρείτε την εξίσωση της καθέτου της καμπύλης στο σημείο P. Αν η κάθετος στο P τέμνει τον άξονα των x στο σημείο K να βρείτε την εξίσωση του κύκλου ο οποίος έχει κέντρο το K και εφάπτεται της καμπύλης $y = e^{-x}$ στο σημείο P.

β) Αν τώρα $P_\nu\ (\nu, e^{-\nu})$, $\nu=1,2,3,\ldots$ μια ακολουθία σημείων πάνω στην καμπύλη $y = e^{-x}$, K_ν τα αντίστοιχα κέντρα των κύκλων, που προκύπτουν όπως στο α), και E_ν τα αντίστοιχα εμβαδά των κυκλικών δίσκων που ορίζονται, να βρείτε την τιμή της σειράς $\sum_{\nu=1}^{\infty} E_\nu$.

$K(t-e^{-2t}, 0)$

$y = e^{t}x + e^{-t} - te^{t}$

$R^2 = e^{-4t} + e^{-2t}$

Επί πλέον να αποδείξετε ότι οι κύκλοι $(K_\nu,\ K_\nu P_\nu)$ $\nu=1,2,3,\ldots$ δεν τέμνονται ανά δύο.

$K:\ (x-t+e^{-2t})^2 + y^2 = e^{-4t} + e^{-2t}$

$\delta = e^{2} e^{-2\nu} - e^{-2\nu} + 1$

$r_1 + r_2 =$
$e^{-\nu}\sqrt{e^{-2\nu}+1} + e^{-\nu}\sqrt{e^{-2\nu+4}+e}$

5) Δίνονται τα πιο κάτω επίπεδα:

$(\Pi_1)\ :\ \bar{r}\cdot(\bar{j}+\bar{k}) = 0$

$(\Pi_2)\ :\ \bar{r}\cdot(\bar{j}+\bar{k}) = 10\sqrt{2}$

$(\Pi_3)\ :\ \bar{r}\cdot\bar{i} = 0$

$(\Pi_4)\ :\ \bar{r}\cdot(\bar{j}-\bar{k}) = 0$

$(\Pi_5)\ :\ \bar{r}\cdot(4\sqrt{2}\,\bar{i} + 3\bar{j} - 3\bar{k}) = 12\sqrt{2}$

α) Να δείξετε ότι τα επίπεδα αυτά ορίζουν τις έδρες ενός ορθού τριγωνικού πρίσματος.

β) Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας αυτού του πρίσματος.

$E_{ολ} = 132$ τ.μ. $\quad V_{πρ} = 60$ κ.μ.

ΤΕΛΟΣ