ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 8**
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: **Τετάρτη, 4 Ιουλίου 2001**
7.30 π.μ. – 10.30 π.μ.

Το δοκίμιο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις του μέρους Α βαθμολογείται με 5 μονάδες και κάθε μια από τις 5 ασκήσεις του μέρους Β βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΜΕΡΟΣ Α

1. Η καμπύλη με εξίσωση $y = e^{\alpha x} + x + \beta$ έχει ακρότατο το σημείο Α (0,3). Να βρείτε τα α και β. $a=-1$, $b=2$ //

2. Να βρείτε τον όρο τον ανεξάρτητο του x στο ανάπτυγμα του $\left(2x+\frac{1}{x}\right)^8$. $T_5=35\cdot 2^5$ //

3. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τα ημερήσια έξοδα σε σεντ των μαθητών του τμήματος A_1 ενός Γυμνασίου.

Έξοδα σε σεντ	45	50	52	62	70	85
Αριθμός μαθητών	2	5	4	1	2	6

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των ημερήσιων εξόδων.
$\bar{x}=63$ $\sigma=15,78$ //

4. Το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες με εξισώσεις y = ημx, y = συνx, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και τον ημιάξονα Oy, στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται. $V=\frac{\pi}{2}$ κ.μ. //

5. Μεταξύ 10 μαθητών οι τέσσερεις έχουν το ίδιο ανάστημα και οι υπόλοιποι διαφορετικό. Να βρείτε:

   (α) Με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε δύο μαθητές με το ίδιο ανάστημα. 6 //

   (β) Την πιθανότητα του ενδεχομένου Ε: «να επιλέξουμε δύο μαθητές που να έχουν διαφορετικό ανάστημα». $p(E)=\frac{13}{15}$ //

6. Να λύσετε την εξίσωση: $\text{Τοξημ}\left(x-\frac{1}{2}\right)+\text{Τοξημ}\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$. $x=1/2$ //

7. Να δείξετε ότι: $\Delta = \begin{vmatrix} x+\alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & x+\beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & x+\gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & x+\delta \end{vmatrix} = x^3(x+\alpha+\beta+\gamma+\delta)$.

8. Δίνεται το επίπεδο (Π) : $2x - y + 2z + 4 = 0$ και το σημείο $P\,(3, 2, -1)$. Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου (Σ) που είναι παράλληλο προς το επίπεδο (Π) και απέχει εξίσου από το (Π) και το P. (Σ) $2x-y+2z+1=0$ //

9. Η πυραμίδα Κ.ΑΒΓΔ έχει βάση τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά 4α και κορυφή Κ. Η ακμή ΚΑ είναι κάθετη στη βάση ΑΒΓΔ και ισούται με 3α. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας συναρτήσει του α.
$V=16a^3$ // $E_{ολ}=48a^2$ //

10. Δίνεται ο μετασχηματισμός φ που ορίζεται από τον πίνακα $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ και οι ευθείες (ε_1): $2x + y = 3$ και (ε_2): $x - 2y = -1$.

(α) Να βρείτε τις εικόνες των ευθειών (ε_1) και (ε_2) μέσω του μετασχηματισμού φ.
(ε_1) $x+y=3$ (ε_2) $3x-2y=1$ //

(β) Να δείξετε ότι η γωνία των ευθειών (ε_1) και (ε_2) ισούται με 90° και να εξετάσετε κατά πόσο ο μετασχηματισμός φ διατηρεί τη γωνία των δύο ευθειών αναλλοίωτη.

(γ) Να βρείτε τις ευθείες του επιπέδου που παραμένουν αναλλοίωτες μέσω του μετασχηματισμού φ. $x=a$ //

ΜΕΡΟΣ Β

1. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y = 2x + 1 + \frac{2}{x+1}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες της καμπύλης και στη συνέχεια να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να δείξετε ότι τα ακρότατα και το σημείο τομής των ασυμπτώτων της καμπύλης είναι συνευθειακά. min A(0,3) max B(-2,-5) T(-1,1) //

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη και την ευθεία y=4. $E=\frac{15}{4}-4\ln 2$ //

2. Δίνεται η παραβολή $y^2=x$ και ο κύκλος $x^2+y^2=\alpha^4+\alpha^2$, $\alpha \neq 0$. Έστω P σημείο τομής των δύο καμπυλών. Η εφαπτόμενη της παραβολής στο σημείο P τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο A και η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο P τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο B.

   (α) Αν M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία κινείται το M, καθώς το α μεταβάλλεται στο R - {0}. $2x = 16y^2 + 1$

   (β) Να δείξετε ότι η γωνία APB είναι αμβλεία. $\varepsilon\varphi(\widehat{APB}) = -2\alpha^2 - \frac{1}{\alpha} < 0$ //

3. Η κορυφή ορθού κυκλικού κώνου είναι το σημείο P (4, 0, 2) και ο άξονας του κώνου έχει εξίσωση (ε) : $\frac{x-2}{2} = 1-y = \frac{z}{2}$. Αν το σημείο A (9, 1, 2) ανήκει στην περιφέρεια της βάσης του κώνου, να βρείτε:

   (α) Τη διανυσματική εξίσωση της γενέτειρας AP του κώνου. $\vec{r} = 4\vec{i} + 2\vec{k} + t(5\vec{i} + \vec{j})$

   (β) Την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου της βάσης του κώνου. $2x - y + 2z - 21 = 0$ //

   (γ) Τις συντεταγμένες του κέντρου K της βάσης του κώνου. $K(6,-1,4)$ //

   (δ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου.

   $E_{ολ} = \pi(7+\sqrt{442})$ //

4. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = e^{-y} + x^{-1}$, $x > 0$ (1).

   (α) Να δείξετε ότι η αντικατάσταση $y = \ln u$, όπου u συνάρτηση του x, μετασχηματίζει τη διαφορική εξίσωση (1) στη διαφορική εξίσωση
   $$x\frac{du}{dx} = u + x.$$

   (β) Στη συνέχεια να βρείτε την ειδική λύση της (1) στη μορφή $y = f(x)$, για την οποία είναι $y = 1$ όταν $x = 1$. $y = \ln(x\ln x + ex)$ // $x > e^{e}$

5. Για κάθε τιμή του $m = 2,3,4,\ldots$, θεωρήστε τα σημεία α_n του διαστήματος $[1,2]$, που ορίζονται από τη σχέση $\alpha_n = 2^{\frac{n}{m}}$, $n = 0,1,\ldots,m$. Έστω Δ_n το μήκος του διαστήματος $[\alpha_n, \alpha_{n+1}]$, $n = 0,1,\ldots,m-1$.

   (α) Να δείξετε ότι $\Delta_n = 2^{\frac{n}{m}}\left(2^{\frac{1}{m}} - 1\right)$, $n = 0,1,\ldots,m-1$.

   (β) Αν $f(x) = x^2$, να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $A_m = \sum_{n=0}^{m-1} f(\alpha_n)\Delta_n = \frac{7}{2^{2/m} + 2^{1/m} + 1}$ //

   (γ) Να δείξετε ότι $\lim_{m\to+\infty} A_m = \int_1^2 f(x)\,dx$, όπου $f(x) = x^2$.

---------------*ΤΕΛΟΣ*---------------