

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ  
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ  
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΠΑΛΙΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Θέμα Μαθηματικά 4

Δείγμα.

Διάρκεια: 3 ώρες

ΜΕΡΟΣ Α

Να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 4x + \chi \eta \mu x}{10x^2} = 9/10 //$

2. Να λύσετε την εξίσωση:  $2 \tan \frac{x}{3} + \tan \frac{\sqrt{3}}{3} x = \frac{\pi}{2}$   $x=0 \quad x=\pm 3/2 //$

3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int \frac{x - \ln x}{x^2} dx = \ln x + \frac{1}{x} \ln x + \frac{1}{x} + C //$

4. Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ (2,-3) και με ακτίνα R=√8. Να βρείτε:

- (i) την εξίσωση του κύκλου.
- (ii) Τις εξισώσεις των εφαπτομένων του κύκλου στα σημεία όπου ο κύκλος τέμνει τον άξονα ψΟψ'.  $(0, -5) (0, -1) //$
- (iii) Το σημείο τομής των εφαπτομένων που βρήκατε.  $(-2, -3) //$
- (iv) Τη γωνία που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες.  $\epsilon_1 \perp \epsilon_2 //$

5. Για τα ενδεχόμενα Α και Β του ίδιου δειγματικού χώρου δίνονται οι πιθανότητες,  $P(A \cap B) = 1/2$ ,  $P(A/B) = 1/3$ ,  $P(B^c/A) = 1/4$ .  $\lambda \epsilon \theta \omicron \varsigma \delta \omega \sigma \omicron \mu \epsilon \nu \alpha.$

Να δείξετε ότι τα Α και Β είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα και να βρείτε την πιθανότητα  $P(A \cup B)$ .

6. Να λύσετε τη διαφ. εξίσωση:  $\frac{d\psi}{dx} - \psi \sigma \phi x = \sigma \phi x$   $\frac{\psi}{\eta \mu x} = -\frac{1}{\eta \mu x} + C //$

7. Προς ποίο επιτόκιο κεφάλαιο €12000 έδωσε τόκον €1250 εις χρόνον ίσον προς τον χρόνο κατά τον οποίον ετοκίσθησαν €3600 πρς 4% και έγιναν με τον τόκο τους €4000.  $\epsilon = 3,75\% //$

8. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $\int \frac{4x^2 - 3x - 4}{x^4 + x^2 - 2x} dx = -2\ln|x| + 3\ln|x+2| - \ln|x-1| + C$

9. Δίνονται οι συναρτήσεις  $\psi = 1 + 2e^x$  και  $\varphi = e^{-x}$

α) Να βρείτε το σημείο τομής τους και να τις παραστήσετε γραφικά.

β) Αν το χωρίο που ορίζεται από τις δύο καμπύλες και τον άξονα των  $\psi$  στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των  $x$  να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.  $V_x = \pi(2 + \ln 2)$

10. Δίνεται κύβος ακμής 2α cm. Με πρίονι αποκόπτομε από κάθε κορυφή κομμάτια έτσι ώστε οι τομές να περνούν από τα μέσα των τριών ακμών που ορίζουν κάθε κορυφή. Να δείξετε ότι η ολική επιφάνεια του στερεού που θα απομείνει θα έχει εμβαδό  $E = a^2 (12 + 4\sqrt{3})$

## ΜΕΡΟΣ Β

Να απαντήσετε σε όλες τις ερωτήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίδεται η ορίζουσα  $\Delta = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+e^x \end{vmatrix} = + 2xe^{2x} + 2xe^x + x^2 e^{2x}$

Να υπολογίσετε το  $\int \Delta dx = \left(xe^{\frac{2x}{2}} - \frac{e^{2x}}{2}\right) + (2xe^x - 4xe^x + 4e^x) + \left(\frac{x^2 e^{2x}}{2} - \frac{x e^{2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{4}\right) + C$

2. Να υπολογίσετε το εμβαδό που περιορίζεται από την παραβολή  $2\psi = \chi^2$  και την ευθεία  $\chi + \psi = 4$ .

Να δείξετε ότι ο άξονας των  $\psi$  χωρίζει το εμβαδό αυτό σε δυο μέρη που έχουν λόγο 20:7.

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των  $\chi$  του μικρότερου τμήματος του εμβαδού.  $V = \frac{2560}{15} \pi$

3. Γεωργός έχει συρματοπλέγμα φράκτη μήκους 200m. Με αυτό θέλει να φράξει από τις τρεις πλευρές μάντρα σχήματος ορθογωνίου. Μακρύς τοίχος που υπάρχει θα χρησιμεύσει ως τέταρτη πλευρά της μάντρας. Ποιές διαστάσεις θα δώσουν το μέγιστο εμβαδό της μάντρας.  $a = 50m$   $b = 100m$

4. Δίνεται σφαίρα (O,R) και ισόπλευρος κώνος ΚΑΒ περιγεγραμμένος περί την σφαίρα. Αν  $V_1$  και  $V_2$  είναι αντίστοιχα οι όγκοι της σφαίρας και του κώνου και  $E_1$ ,  $E_2$  τα εμβαδά των επιφανειών των

δύο στερεών να δείξετε ότι:  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{E_1}{E_2}$

5. (α) Δίνεται η καμπύλη  $\psi=5-x^2$ . Αν  $0 < a < \sqrt{5}$  η ευθεία  $x=a$  συναντά τον άξονα  $Ox$  στο  $T$  και την καμπύλη στο  $P$ . Η από το  $P$  παράλληλη προς τον άξονα  $Ox$  συναντά τον άξονα των  $\psi$  στο  $\Sigma$ . Το ορθογώνιο  $OTPS$  περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των  $x$  και παράγει κύλινδρο όγκου  $V$ .  
Να προσδιορίσετε το  $a$  ώστε ο όγκος  $V$  να είναι μέγιστος.  $a=1$

- (β) Η ευθεία  $\psi=4$  τέμνει την καμπύλη  $\psi=5-x^2$  στα  $A$  και  $B$ . Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατό την πλήρη περιστροφή της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη και την ευθείαν  $AB$  όταν: (i) άξονας περιστροφής είναι ο άξονας των  $x$  και (ii) άξονας περιστροφής είναι η ευθεία  $\psi=4$

$$V_x = \frac{1}{15} \cdot \frac{88\pi}{15} - \frac{176\pi}{15} \quad V_y = 4 = \frac{18\pi}{15}$$