ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα : **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 8**
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τετάρτη 1 Ιουλίου 1998
7:30 π.μ. - 10:30 π.μ.

ΜΕΡΟΣ Α

Να απαντήσετε σε όλες τις ασκήσεις . Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις του μέρους αυτού βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Για τις συντεταγμένες ενός τυχαίου σημείου P(x,y) πάνω σε μια καμπύλη (κ) ισχύει η σχέση : $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

και η καμπύλη περνά από το σημείο (4,0). Να βρείτε την εξίσωση της (κ), να την κατονομάσετε και να βρείτε τις ασύμπτωτές της. $x^2 - y^2 = 16$ $y = \pm x$

---

2) Να βρείτε πόσοι είναι οι δυνατοί αναγραμματισμοί της λέξης MAXIMUM. Αν πάρουμε στην τύχη έναν από αυτούς τους αναγραμματισμούς, να βρείτε την πιθανότητα αυτός ο αναγραμματισμός να έχει το ένα Μ στην αρχή, το δεύτερο Μ στο τέλος και το τρίτο Μ στο μέσο του. $P = \frac{1}{35}$

---

3) Αν οι συντελεστές των όρων α^2 και α^3 στο ανάπτυγμα του διωνύμου
$(1+\alpha)^\nu$, $\nu>2$,
είναι ίσοι, να βρείτε το ν. $\nu = 5$

---

4) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

α) $\int_0^{\pi/2} \eta\mu 2x \, e^{\eta\mu^2 x} dx$, (χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u = \eta\mu^2 x$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο). $I_\alpha = e-1$

β) $\int \eta\mu \sqrt[3]{x}\, dx$, (χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u = \sqrt[3]{x}$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο). $I_\beta = -3\sqrt[3]{x^2}\cdot\sigma\upsilon\nu\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[3]{x}\cdot\eta\mu\sqrt[3]{x} + 6\sigma\upsilon\nu\sqrt[3]{x} + C$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΟΜΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ

5) Σε ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά σε ένα τμήμα των 28 μαθητών υπολογίστηκε ότι ο (αριθμητικός) μέσος όρος των βαθμών και των 28 μαθητών ήταν 11,75. Για τους 10 μαθητές που συγκέντρωσαν τους πιο χαμηλούς βαθμούς ο μέσος όρος ήταν 7,3 και για τους 10 μαθητές με τις ψηλότερες βαθμολογίες ο μέσος όρος ήταν 16. Να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών των υπολοίπων 8 μαθητών, με τις ενδιάμεσες βαθμολογίες.

$\bar{x} = \mu = 12$

---

6) Σε ένα εργοστάσιο το 60% των εργαζομένων είναι γυναίκες. Επίσης το 5% των ανδρών είναι ψηλότεροι του 1,85 m ενώ το 2% των γυναικών είναι ψηλότερες του 1,85 m. Επιλέγουμε στην τύχη ένα άτομο και θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

A : το άτομο να είναι ψηλότερο του 1,85 m

B : το άτομο να είναι άνδρας.

Να βρείτε τις πιθανότητες $P(A)$, $P(A \cap B)$, $P(B/A)$

$P(A) = 3{,}2\% = \frac{4}{125}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{50} = 2\%$

$P(B/A) = \frac{5}{8} = 62{,}5\%$

---

7) Δίνεται η παραβολή $y^2=4x$. Να βρείτε την εστία, τη διευθετούσα και την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο της $A(1,-2)$. Αν η εφαπτομένη αυτή τέμνει την παραβολή $y^2 = -4(x+1)$ στα σημεία B και Γ, να βρείτε: $B(-1,0)$ $\Gamma(-5,4)$

α) Το εμβαδό του χωρίου που περιέχεται μεταξύ της χορδής ΒΓ και της παραβολής $y^2 = -4(x+1)$, και $E = 8/3$

β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται αν το χωρίο που καθορίζεται στο α) περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x. $V = \frac{32}{3}$

---

8) Δίνεται η καμπύλη που περιγράφεται από την εξίσωση

$$(\kappa): \quad 2x^2 + 6xy + 2y^2 = 1$$

και ο μετασχηματισμός, με πίνακα $M = \begin{pmatrix} ημ45° & συν45° \\ συν45° & -ημ45° \end{pmatrix}$ και ο οποίος σε κάθε σημείο $P(x,y)$ αντιστοιχεί το σημείο $P'(X,Y)$.

Να δείξετε ότι η καμπύλη (κ) μετατρέπεται από το μετασχηματισμό αυτό στην καμπύλη με εξίσωση $5X^2 - Y^2 = 1$.

Στη συνέχεια να κατονομάσετε το είδος της καμπύλης και να προσδιορίσετε την εκκεντρότητα της. $\frac{x^2}{\frac{1}{5}} - \frac{y^2}{1} = 1$ $\quad e = \sqrt{6}$

---

9) Να βρείτε την τιμή της σειράς

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^2}{k!}\left(1 - \frac{e}{k+1}\right) = e^2(3e - e^2 - 1)$$

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΟΜΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ

10) Επίπεδο αποκόπτει από το τρισορθογώνιο σύστημα των θετικών ημιαξόνων Ox, Oy, Oz (O η αρχή των αξόνων) κανονική τριγωνική πυραμίδα ΟΑΒΓ (ΑΒΓ το ισόπλευρο τρίγωνο που αποτελεί τη βάση της πυραμίδας). Αν ΑΒ = α√2 cm να βρείτε :

α) Την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου. $x+y+z=a$

β) Την απόσταση του Ο από το επίπεδο, και $d=\frac{a}{\sqrt{3}}$ cm

γ) Τον όγκο της πυραμίδας. $V=\frac{1}{6}|a^3|$

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

ΜΕΡΟΣ Β

Να απαντήσετε σε όλες τις ασκήσεις . Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις του μέρους αυτού βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Δίνονται οι καμπύλες

(κ1) : $y=|x^2-4|$ και (κ2) : $y=|x+2|$

(α) Να κάμετε τις γραφικές παραστάσεις των καμπύλων (κ1) και (κ2) στο ίδιο διάγραμμα. Στο διάγραμμα να φαίνονται με σαφήνεια και ευανάγνωστα τα σημεία τομής με τους άξονες και τα σημεία τομής των καμπύλων.

(β) Να γραμμοσκιάσετε στο διάγραμμα εκείνο το χωρίο R που περικλείεται από τις δύο καμπύλες και αντιστοιχεί στις τιμές του x για τις οποίες είναι $|x+2|\geq|x^2-4|$.

(γ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου R. $E=4.\tau.\mu.$

2) Δίνονται τα σημεία Α(1,1,2), Β(−2,−6,3), Γ(−1,1,5) και Δ(2,4,2).

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$. $\vec{AB}=-3\vec{i}-7\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{A\Gamma}=-2\vec{i}+3\vec{k}$

β) Να αποδείξετε ότι τα τέσσερα σημεία ανήκουν στο ίδιο επίπεδο.

γ) Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τριάδα από τα τέσσερα σημεία αποτελείται από σημεία που δεν είναι συνευθειακά.

δ) Να βρείτε πόσα τρίγωνα σχηματίζονται με κορυφές τα σημεία Α,Β,Γ και Δ. 4

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΤΗΝ ΕΠΟΜΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ

3) Δίνονται η παραβολή $y^2 = 4x$, δύο σημεία $T(t^2,2t)$ και $\Sigma(s^2,2s)$ πάνω σ' αυτή και το σημείο $P(\kappa,\lambda)$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής ΤΣ είναι :

$$2x - (t+s)y + 2ts = 0$$

(β) Αν η χορδή ΤΣ περνά από το σημείο P, τότε να δείξετε ότι το σημείο τομής των εφαπτομένων της παραβολής στα σημεία Τ και Σ βρίσκεται πάνω στην ευθεία (ε): $2x - \lambda y + 2\kappa = 0$.

(γ) Αν $\kappa = \lambda = 2^{\nu}$ και αν (ε_0), (ε_1), (ε_2) οι ευθείες που αντιστοιχούν στα σημεία $P_\nu(2^\nu,2^\nu)$, για ν=0,1,2, σύμφωνα με τον τρόπο που καθορίστηκε στο (β), τότε να αποδείξετε ότι οι ευθείες αυτές περνούν όλες από το ίδιο σημείο, Κ, και να βρείτε τις συντεταγμένες του Κ. $(0,2)$

---

4) Δίνονται ο κύκλος (κ) : $x^2 + y^2 - 10x = 0$ και το σημείο του A(8,4).
Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο Α είναι η ευθεία (ε): $3x + 4y - 40 = 0$.

Μια έλλειψη της μορφής $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ περνά από το σημείο Α και η $\frac{3x^2}{320} + \frac{y^2}{40} = 1$ εφαπτομένη της σ' αυτό το σημείο συμπίπτει με την ευθεία (ε).
Να βρείτε τα a^2 και b^2 και να αποδείξετε ότι κάθε εσωτερικό σημείο του κύκλου (κ) είναι και εσωτερικό σημείο της έλλειψης.
Να γραμμοσκιάσετε το χωρίο που αποτελείται από τα σημεία που βρίσκονται στο πρώτο τεταρτημόριο, είναι εντός της έλλειψης, εκτός του κύκλου (κ) και μεταξύ των ευθειών x=0 και x=5 . Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του χωρίου αυτού γύρω από τον άξονα των x. $V = \frac{2425}{24}\pi$ κ.μ.

---

5) (α) Αν $w = \frac{dy}{dx}$, να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} = w\frac{dw}{dy}$

(β) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $w = \frac{dy}{dx}$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να λύσετε τη διαφορική εξίσωση :

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 3y\frac{dy}{dx} \quad , \quad \text{με } y = 1, \ \frac{dy}{dx} = 2 \ \text{ για } x = 0 \ . \quad y^3 + 1 = 2e^{3x}$$

(γ) Στη συνέχεια, αν y=f(x) η λύση της διαφορικής εξίσωσης που βρέθηκε στο (β), να βρείτε το $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+e^{3x}}{y^3} = \frac{1}{2}$

ΤΕΛΟΣ