ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΓΙΑ ΤΑ ΑΝΩΤΕΡΑ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΙΔΡΥΜΑΤΑ

Μάθημα: Μαθηματικά 8 Δείγμα.

Διάρκεια: 3 ώρες

ΜΕΡΟΣ Α

Να απαντήσετε σε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 10 ασκήσεις βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου ισχύουν $3P(A')=P(A)$ και $2P(B)=1+P(A')$.
Αν είναι γνωστόν ότι $P(A\cap B)=1/2$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A\cup B)$, $P(A/B)$ και $P(A-B)$. $7/8,\ 4/5,\ \frac{1}{4}$

2. Να βρείτε το άθροισμα των ν όρων της σειράς 1.4+3.9+5.16+.... $\frac{\nu}{2}\left(\nu^3+4\nu^2+4\nu-1\right)$

3. Δίδεται η έλλειψη $\frac{x^2}{4}+\psi^2=1$ και η ευθεία $\psi=\lambda x+2$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία να εφάπτεται της έλλειψης. Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου επαφής. $\lambda=\pm\sqrt{3}/2$ $A\left(\sqrt{3},\ 1/2\right)$ $B\left(-\sqrt{3},\frac{1}{2}\right)$

4. Θέτοντας $2x=\eta\mu\theta$ να βρείτε την τιμή του ορισμένου ολοκληρώματος

$$I=\int_0^{\frac{1}{4}}\frac{x^2}{\sqrt{1-4x^2}}dx \quad = \pi/96-\frac{\sqrt{3}}{64}$$

5. Δίδονται οι αριθμοί 1,2,3,4,5.
   α) Πόσοι τριψήφιοι αριθμοί, χωρίς επαλαμβανόμενα ψηφία, μπορούν να σχηματιστούν; 60

   β) Αν πάρω στην τύχη, χωρίς επανατοποθέτηση, δύο από τους πιο πάνω αριθμούς ποια η πιθανότητα ο ένας να είναι άρτιος και ο άλλος περιττός. $\frac{144}{295}$

6. Δίδεται η ευθεία (ε): $\frac{x-3}{2}=\frac{\psi-4}{5}=-Z-3$ και το επίπεδο
$(\pi): x-3\psi+5Z-12=0$

   α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της ευθείας και του επιπέδου. $A(-1,-6,-1)$

β) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που είναι κάθετο στην ευθεία (ε) και περνά από το σημείο (-1,-6,-1). $2x+5y-z=-31$

7. Δίδεται η έλλειψη $\frac{x^2}{12}+\frac{\psi^2}{4}=1$ και ο πίνακας $A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

α) Να βρείτε τις εστίες, την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των διευθετουσών της έλλειψης. $E(2\sqrt{2},0)$ $E'(-2\sqrt{2},0)$ $x=\pm\frac{6}{\sqrt{2}}$

β) Να βρείτε την εικόνα της έλλειψης στο μετασχηματισμό που ορίζεται από τον πίνακα Α. $x^2+y^2+xy-6=0$

8. Δίδεται η ευθεία $\psi=-8x$ και η καμπύλη $\psi=9-x^2$
α) Αφού βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας και της καμπύλης να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται απ' αυτές.

β) Να κάμετε στο ίδιο σχήμα τη γραφική παράσταση της $\psi_1=9-x^2$

και της $\psi_2=\frac{1}{9-x^2}$ ώστε να φαίνονται τα σημεία τομής με τους
άξονες και τυχόν ασύμπτωτες. Να κάμετε επίσης τη γραφική

παράσταση της συνάρτησης $\psi_3=\left|\frac{1}{9-x^2}\right|$

9. Απ' όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν τις δυο διαδοχικές κορυφές τους πάνω στον άξονα των χ και τις άλλες δυο πάνω στον κύκλο με κέντρο την αρχή Ο των αξόνων και ακτίνα 2, να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου που έχει το πιο μεγάλο εμβαδό. $a=2\sqrt{2}$ $b=\sqrt{2}$

10. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $u=\frac{d\psi}{dx}$

να βρείτε τη γενική λύση της διαφορετικής εξίσωσης $x\cdot\frac{d^2\psi}{dx^2}-2\frac{d\psi}{dx}=x^{\frac{7}{2}}$ $y=\frac{4}{27}x^{9/2}+cx^3+K$

Να βρείτε επίσης την ειδική λύση της εξίσωσης αν, για χ=0 ψ=1 και για χ=1 ψ=0. $y=\frac{4}{27}x^{9/2}-\frac{31}{9}\frac{x^3}{3}+1$

<u>ΜΕΡΟΣ Β</u>

Να απαντήσετε σε όλες τις ασκήσεις. Κάθε μια από τις 5 ασκήσεις βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίδεται η συνάρτηση $\psi=\frac{x-2}{e^x}$

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες συντ/νων, τα τοπικά ακρότατα και ασύμπτωτες και να την παραστήσετε γραφικά.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη και τους άξονες των συντεταγμένων. $E=\frac{e^2+1}{e^2}$ τ.μ.

2. Δίδεται η υπερβολή $x\psi = c^2$ και το σημείο της $P(ct, \frac{c}{t})$

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της υπερβολής στο σημείο P είναι

$$t^3x - t\psi = c(t^4 - 1)$$

β) Αν η εφαπτομένη της υπερβολής στο P τέμνει τον άξονα των χ στο Α και η κάθετη στο P τέμνει τον άξονα των ψ στο Β, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ του ΑΒ. $y = \frac{c^4 - x^4}{2c^2x}$

3. α) Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2\psi}{dx^2} + 4\psi = 4$

$\psi = A\sigma\upsilon\nu 2x + B\eta\mu 2x +$

β) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό ψ=χυ, όπου υ συνάρτηση του χ, να μετασχηματίσετε τη διαφορικήν εξίσωση

$$x^2 \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} - 2x\frac{d\psi}{dx} + (4x^2 + 2)\psi = 4x^3$$

σε άλλη μεταξύ χ και υ. Στη συνέχεια να βρείτε το ψ συναρτήσει

του χ, αν ψ=0, $\frac{d\psi}{dx} = 0$, όταν $x = \frac{\pi}{2}$ $y = x\sigma\upsilon\nu 2x + x$

4. Ένας κύκλος έχει το κέντρο του Κ, πάνω στο θετικό άξονα των χ και περνά από τα σημεία Α(0,4) και Β(8,0).

α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$

β) Αν Γ είναι σημείο του πιο πάνω κύκλου να βρείτε το μέγιστο εμβαδό του τριγώνου ΑΒΓ. $E = 4\sqrt{16 + 6x - x^2} + 2x - 16 \Rightarrow x = 3 \pm \sqrt{15}$.

5. α) Να αποδείξετε ότι για $K \geq 1$ ισχύει η σχέση

$$\text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2\kappa - 1}\right) - \text{τοξεφ}\left(\frac{1}{2\kappa + 1}\right) = \text{τοξεφ}\frac{1}{2\kappa^2}$$

β) Αν $a_\kappa = \text{τοξεφ}\frac{1}{2\kappa^2}$ να δείξετε ότι $\sum_{\kappa=1}^{2\nu} a_\kappa = \frac{\pi}{4} - \text{τοξεφ}\frac{1}{4\nu + 1}$

γ) Να υπολογίσετε το $\sum_{\kappa=1}^{\infty} a_\kappa$ $\pi/4$