

ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΝΟΠΕΤΡΑΣΦΥΣΙΚΗ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΚΙΝΗΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ2. 1. ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΜΟΝΟ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣΓΕΝΙΚΑ

Οι εξισώσεις κίνησης σε ευθεία γραμμή με σταθερή επιτάχυνση είναι $\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{a}t$ και $\vec{y} = \vec{y}_0 + \vec{u}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$. Από αυτές προκύπτει και η σχέση $2(\vec{y} - \vec{y}_0) \cdot \vec{a} = u^2 - u_0^2$. Όταν το σώμα δεν αλλάζει φορά κίνησης η εξίσωση αυτή γράφεται, $u^2 = u_0^2 \pm 2as$, όπου s είναι το διάστημα που διανύει το σώμα στο χρονικό διάστημα που το μέτρο της ταχύτητας αλλάζει από u_0 σε u . Το πρόσημο (+) χρησιμοποιείται όταν το σώμα επιταχύνεται και το πρόσημο (-) χρησιμοποιείται όταν το σώμα επιβραδύνεται.

Για τις εξισώσεις της κατακόρυφης κίνησης ενός σώματος υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας της Γης θα θέτουμε:

- (1) Το σημείο αναφοράς $y = 0$ στο έδαφος, πάνω στην κατακόρυφο που κινείται το σώμα.
- (2) Τη φορά προς τα πάνω θετική.
- (3) Το μέτρο της επιτάχυνσης λόγω της βαρύτητας να έχει μέτρο, κατά προσέγγιση, ίσο με: $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Να σημειώσουμε ότι η επιλογή του σημείου αναφοράς για το διάνυσμα θέσης και η θετική φορά για όλα τα διανύσματα είναι ελεύθερη και δεν επηρεάζει τους νόμους της κίνησης αλλά μόνο τη μορφή των εξισώσεων κίνησης.

ΕΛΕΥΘΕΡΗ ΠΤΩΣΗ

Θεωρούμε την κίνηση ενός υλικού σημείου κοντά στην επιφάνεια της Γης, όπου η ένταση του πεδίου βαρύτητας είναι σταθερή.

Όταν αφήσουμε ένα σώμα να κινηθεί ελεύθερα, από κάποιο ύψος H από την επιφάνεια της Γης, θα κινηθεί σε ευθεία τροχιά, πάνω στην κατακόρυφο, και με σταθερή επιτάχυνση, που θέτουμε κατά προσέγγιση να έχει μέτρο $g = 10 \text{ m/s}^2$.

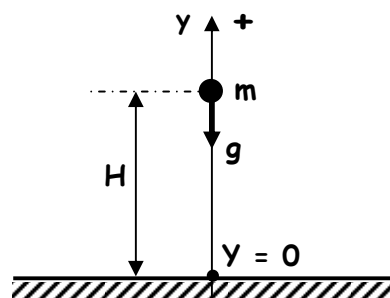
Θεωρούμε την αρχή του κατακόρυφου y άξονα να έχει την τιμή μηδέν στην επιφάνεια της Γης. Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$u_y = -gt \text{ και}$$

$$y = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

Στις εξισώσεις αυτές αντικαθιστούμε τα μέτρα των μεγεθών.

Στο έδαφος $y = 0$.



ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΒΟΛΗ ΠΡΟΣ ΤΑ ΚΑΤΩ

Στην κατακόρυφη βολή προς τα κάτω το σώμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα μέτρου u_{0y} και κινείται με σταθερή επιτάχυνση προς την επιφάνεια της Γης. Στο σώμα επιδρά μόνο το βάρος από τη Γη.

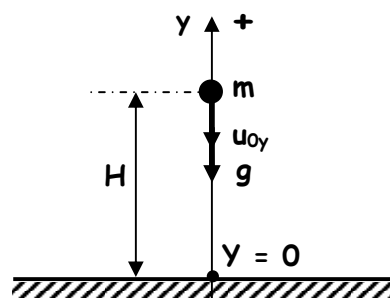
Έστω ότι το σώμα βάλλεται από κάποιο ύψος H πάνω από την επιφάνεια της Γης.

Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

$$u_y = -u_{0y} - gt, \quad y = H - u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Στις εξισώσεις αυτές αντικαθιστούμε τα μέτρα των μεγεθών.

Στο έδαφος $y = 0$.



ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΒΟΛΗ ΠΡΟΣ ΤΑ ΠΑΝΩ

Στην κατακόρυφη βολή προς τα πάνω το σώμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα να κινηθεί μακριά από την επιφάνεια της Γης, με την επίδραση μόνο του βάρους, με σταθερή επιτάχυνση, αυτή της βαρύτητας. Έστω ότι το σώμα βάλλεται από κάποιο ύψος H πάνω από την επιφάνεια της Γης. Το σώμα φτάνει σε κάποιο μέγιστο ύψος και επιστρέφει και πάλι προς την επιφάνεια της Γης.

Οι εξισώσεις κίνησης είναι:

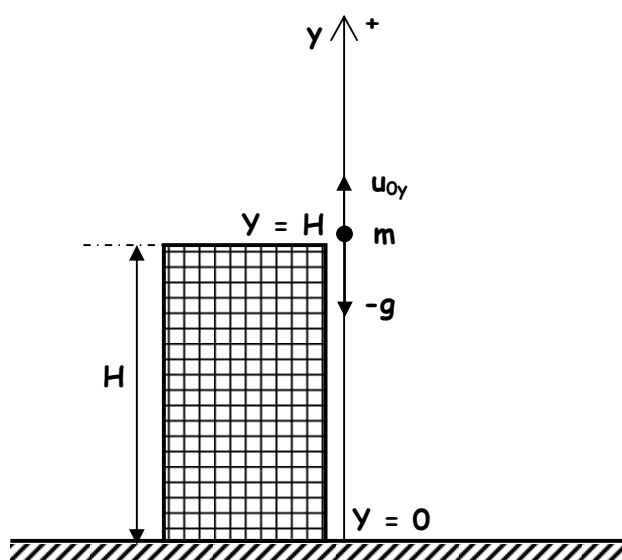
$$u_y = u_{0y} - gt,$$

$$y = H + u_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Στις εξισώσεις αυτές αντικαθιστούμε τα μέτρα των μεγεθών.

Στο μέγιστο ύψος, $u_y = 0$.

Στο έδαφος $y = 0$.



Πρόβλημα 73

Ένα πηγάδι έχει βάθος 125 m. Από το χείλος του πηγαδιού αφήνουμε να πέσει ελεύθερα ένα σώμα Α. Μετά από 2 s αφήνουμε από το ίδιο σημείο να πέσει ελεύθερα ένα δεύτερο σώμα Β. Να υπολογίσετε την απόσταση που θα απέχει από τον πυθμένα του πηγαδιού το σώμα Β, τη στιγμή που το σώμα Α φτάνει στον πυθμένα.

(Απάντηση: 80 m)

Πρόβλημα 74

Ένα σώμα βάλλεται από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα μέτρου 90 m/s.

(α) Να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται το σώμα να φτάσει στο μέγιστο ύψος.

(β) Να υπολογίσετε το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα.

(γ) Να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται το σώμα να φτάσει ξανά στην επιφάνεια της Γης.

Πρόβλημα 75

Ένα σώμα βάλλεται από την βάση ενός κτηρίου που έχει ύψος 30 m, τη χρονική στιγμή $t = 0$.

Ένας άντρας που βρίσκεται στην ταράτσα παρατηρεί το σώμα να περνά από μπροστά του με ταχύτητα μέτρου 5 m/s. Να υπολογίσετε

(α) τη χρονική στιγμή που το σώμα περνά μπροστά από τον άντρα.

(β) το μέτρο της αρχικής ταχύτητας με την οποία βάλλεται το σώμα.

(γ) το μέγιστο ύψος στο οποίο φτάνει το σώμα.

(Απάντηση: (α) 2 s, (β) 23 m/s, (γ) 31, 25 m)

Πρόβλημα 76

Από το έδαφος, τη χρονική στιγμή $t=0$, εκτοξεύουμε μια πέτρα κατακόρυφα προς τα πάνω με αρχική ταχύτητα μέτρου u_0 . Στη διάρκεια του 3^{ου} δευτερολέπτου της κίνησής της η πέτρα πέφτει προς τα κάτω κατά 5 m. Ζητούνται:

(α) Το μέτρο της αρχικής ταχύτητας της πέτρας.

(β) Το χρόνο ανόδου της πέτρας..

(γ) Το μέγιστο ύψος που θα φτάσει η πέτρα.

(δ) Το ύψος από το έδαφος που βρίσκεται η πέτρα τις χρονικές στιγμές 1 s και 3 s. Ποιες είναι αντίστοιχα οι τιμές της ταχύτητας τις στιγμές αυτές;

(ε) Να γίνουν τα διαγράμματα σε συνάρτηση με το χρόνο, της ταχύτητας της πέτρας και του ύψους, μέχρι τη στιγμή που θα ξαναπέσει στο έδαφος.

Πρόβλημα 77

Ένα σώμα Α βάλλεται από την επιφάνεια του εδάφους με αρχική ταχύτητα μέτρου 40 m/s. Την ίδια στιγμή αφήνεται να κινηθεί ελεύθερα στην ίδια κατακόρυφο, ένα δεύτερο σώμα Β, σε ύψος 20 m από το πρώτο σώμα.

(α) Να υπολογίσετε το χρόνο που απαιτείται για να συγκρουστούν.

(β) Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των σωμάτων την στιγμή της κρούσης.

Πρόβλημα 78

Ένα αερόστατο ανεβαίνει κατακόρυφα με σταθερή ταχύτητα μέτρου 4 m/s . Τη στιγμή που απέχει 20 m από το έδαφος αφήνεται ελεύθερα ένα σώμα. Να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται το σώμα να φτάσει στο έδαφος.

ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΝΟΠΕΤΡΑΣΦΥΣΙΚΗ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΚΙΝΗΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ2. 2. ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΟΛΗ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΜΟΝΟ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣΓΕΝΙΚΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΒΟΛΕΣ

Η κίνηση σωμάτων που ρίχνονται (βολές βλημάτων) στο πεδίο βαρύτητας ενός πλανήτη με αρχική ταχύτητα και στη συνέχεια κινούνται υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας, αποτελεί παράδειγμα κίνησης σε επίπεδο (κίνηση σε δύο διαστάσεις) με κατακόρυφη επιτάχυνση λόγω τη βαρύτητας, g . Η τροχιά του σώματος είναι καμπύλη στη γενική περίπτωση ενώ αναλύεται πολύ εύκολα αν κάνουμε τις δύο επόμενες υποθέσεις:

- Η επιτάχυνση της βαρύτητας, g , είναι σταθερή σε μέτρο και κατεύθυνση για όλη την τροχιά με κατεύθυνση προς τα κάτω. Η προσέγγιση αυτή είναι γενικά ικανοποιητική εφόσον το βεληνεκές και το ύψος της τροχιάς είναι μικρά, σε σύγκριση με την ακτίνα της Γης ($6,4 \times 10^6$ m). Δηλαδή, στην πράξη η παραπάνω υπόθεση είναι ισοδύναμη με την παραδοχή ότι η Γη είναι επίπεδη μέσα στα όρια της τροχιάς που μελετούμε.
- ότι μπορούμε να αγνοήσουμε την επίδραση που ασκεί η αντίσταση του αέρα. Αυτή η προσέγγιση δεν είναι καλή στην γενική περίπτωση, ειδικά μάλιστα για μεγάλες ταχύτητες. Επιπλέον, το στριφογύρισμα (σπινάρισμα) ενός βλήματος, όπως είναι η μπάλα του baseball, δημιουργεί επιπρόσθετα φαινόμενα αεροδυναμικής. Στην περίπτωση όμως που μελετούμε κινήσεις βλημάτων μικρών διαστάσεων με χαμηλές ταχύτητες, η προσέγγιση αυτή θεωρείται ικανοποιητική.

Βασιζόμενοι στις δύο προηγούμενες προσεγγίσεις είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε την τροχιά του σώματος, που είναι, με τις πιο πάνω υποθέσεις, πάντοτε παραβολή. Επιλέγουμε το σύστημα αναφοράς, δηλαδή το ορισμένο σύστημα συντεταγμένων που χρησιμοποιούμε, έτσι ώστε η θετική κατεύθυνση y να είναι κατακόρυφη προς τα πάνω. Τότε $a_y = -g$ και $a_x = 0$ (δεν λαμβάνεται υπόψη η αντίσταση του αέρα).

Η ανεξαρτησία των κινήσεων. Ο Γαλιλαίος θέλει να μάθει αν ο νόμος που διέπει τη βαλλιστική κίνηση (βολές) προκύπτει από τη σύνθεση των απλών ανεξάρτητων νόμων που διέπουν αντίστοιχα την οριζόντια κίνηση που οφείλεται στην αρχική ταχύτητα και την κατακόρυφη κίνηση που οφείλεται στη βαρύτητα. Ξέρει ότι αν αυτό αληθεύει τότε θα έρχονταν σε πλήρη αντίθεση με τον αριστοτελικό ισχυρισμό σχετικά με την ύπαρξη μόνο απλών κινήσεων στη φύση. Τα πειράματά του αναδεικνύουν ότι κάθε σώμα, είτε εκτοξευτεί οριζόντια με οποιαδήποτε ταχύτητα από κάποια θέση, είτε αφεθεί να πέσει ελεύθερα από την ίδια θέση, χρειάζεται ίδιο χρόνο έως ότου φτάσει στο έδαφος και οι όποιες διαφορές οφείλονται στην αντίσταση του αέρα. Αυτό σημαίνει ότι οι νόμοι που διέπουν την οριζόντια και την κατακόρυφη κίνηση λειτουργούν ανεξάρτητα και από το συνδυασμό τους προκύπτει ο νόμος της βαλλιστικής κίνησης. Έτσι, αποκαλύπτεται η *ανεξαρτησία των κινήσεων*.

ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΒΟΛΗ

Είναι η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν βάλλεται, από κάποιο ύψος H από την επιφάνεια της Γης, με αρχική οριζόντια ταχύτητα μέτρου u_{0x} .

Για τις εξισώσεις κίνησης της οριζόντιας βολής ενός σώματος υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας της Γης, επιλέγουμε:

(1) Το σημείο αναφοράς $x = 0$ και $y = 0$ στο έδαφος, πάνω στην κατακόρυφο που περνά από το σημείο βολής.

(2) Τη φορά προς τα πάνω θετική.

Όπως αναφέραμε, θεωρούμε την τροχιά που διαγράφει το σώμα να γίνεται σε μια περιοχή του πεδίου βαρύτητας της Γης όπου η έντασή της είναι σταθερή. Θεωρούμε, επίσης ότι η επιτάχυνση του σώματος λόγω της έντασης του πεδίου βαρύτητας, να έχει μέτρο $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Με βάση την ανεξαρτησία των κινήσεων που μπορούμε να εφαρμόσουμε στην περίπτωση αυτή, το σώμα μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτελεί ταυτόχρονα δύο ανεξάρτητες κινήσεις: Μια κίνηση στην οριζόντια x διεύθυνση η οποία γίνεται με σταθερή ταχύτητα, την ίδια με την αρχική οριζόντια ταχύτητα, και μια κίνηση με σταθερή επιτάχυνση, g , που γίνεται στην κατακόρυφη y διεύθυνση, χωρίς αρχική ταχύτητα, δηλαδή μια ελεύθερη πτώση. Η ταχύτητα στη x διεύθυνση είναι σταθερή, εφόσον στη διεύθυνση αυτή δεν επιδρά στο σώμα εξωτερική δύναμη.

Οι εξισώσεις κίνησης στην οριζόντια διεύθυνση είναι:

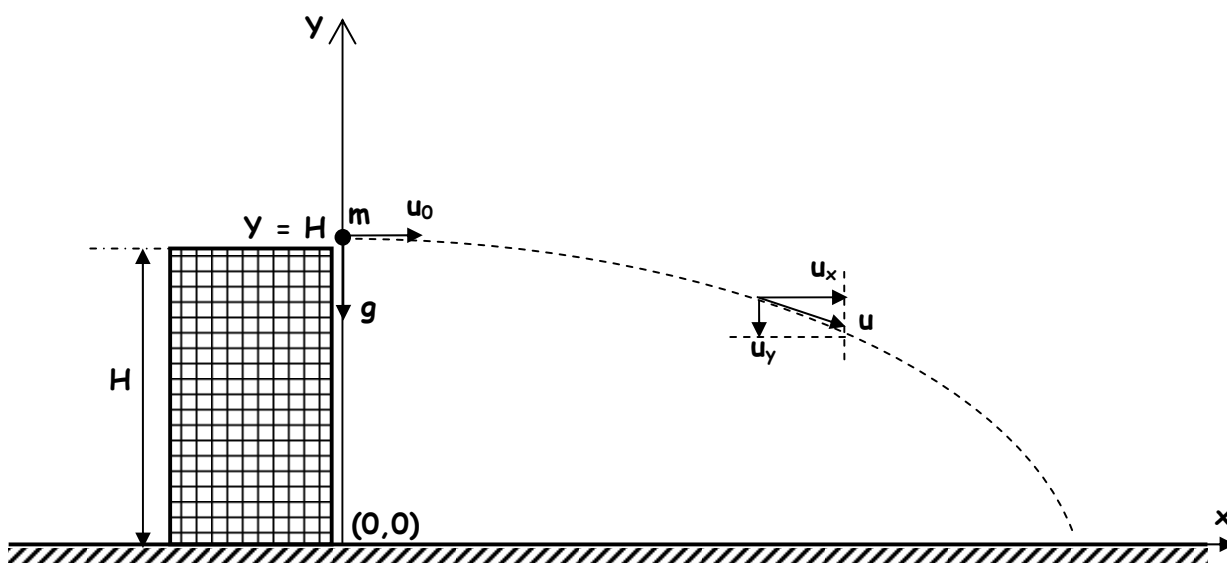
$$u_x = u_{0x}.$$

$$x = u_x t = u_{0x} t$$

Οι εξισώσεις κίνησης στην κατακόρυφη διεύθυνση είναι:

$$u_y = -gt \text{ και}$$

$$y = H - \frac{1}{2}gt^2$$



Η ταχύτητα του σώματος κάθε στιγμή είναι αποτέλεσμα των δύο συνιστωσών ταχυτήτων, u_x και u_y . Άρα, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι, $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Η διεύθυνση και η φορά μπορεί να καθοριστεί από τη γωνία θ που σχηματίζει η ταχύτητα με την οριζόντια διεύθυνση, $\epsilon\phi\theta = \frac{u_y}{u_x}$.

Η εξίσωση της τροχιάς του σώματος μπορεί να προκύπτει από τις εξισώσεις $x = u_{0x}t$ και $y = H - \frac{1}{2}gt^2$, με απαλοιφή του χρόνου. Άρα, $y = H - (\frac{g}{2u_{0x}^2})x^2$. Η γραφική παράσταση της εξίσωσης αυτής είναι παραβολή.

Όταν το σώμα φτάνει στο έδαφος, $y = 0$. Άρα, από την εξίσωση $y = H - \frac{1}{2}gt^2$ έχουμε για το

χρόνο πτήσης, $0 = H - \frac{1}{2}gt_\pi^2 \Rightarrow t_\pi = \sqrt{\frac{2H}{g}}$. Δηλαδή ο χρόνος πτήσης στην οριζόντια βολή

εξαρτάται μόνο από το ύψος H , δηλαδή μόνο από την κατακόρυφη κίνηση. Η μέγιστη οριζόντια απόσταση που διανύει το σώμα προκύπτει από την εξίσωση $x = u_{0x}t$ και το χρόνο πτήσης. Άρα,

$$x_{\max} = u_{0x} \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Πρόβλημα 79

Ένας μαθητής ρίχνει ένα σώμα με αρχική ταχύτητα $2,0 \text{ m/s}$ με οριζόντια διεύθυνση, από ύψος $12,5 \text{ m}$, από το έδαφος.

(α) Να υπολογίσετε το χρόνο πτήσης το σώματος.

(β) Να υπολογίσετε την οριζόντια απόσταση που καλύπτει το σώμα, όταν πέφτει στο έδαφος.

(γ) Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος όταν κτυπά στο έδαφος.

(Απάντηση: (α) $1,58 \text{ s}$, (β) $3,16 \text{ m}$)

Πρόβλημα 80

Από το ύψος ενός κτιρίου ένας άντρας εκσφενδονίζει οριζόντια ένα σώμα. Το σώμα συναντά το έδαφος σε χρόνο 2 s και σε απόσταση 25 m από το σημείο βολής.

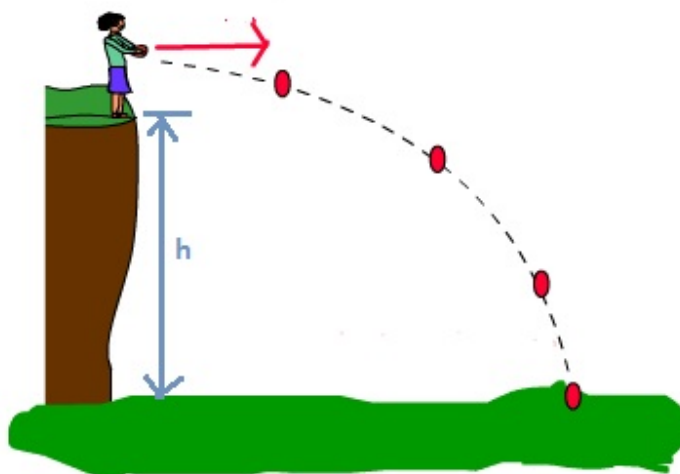
Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας και το ύψος του κτηρίου.

Πρόβλημα 81

Το κορίτσι στην εικόνα βρίσκεται στην άκρη ενός γκρεμού ύψους h . Εκσφενδονίζει οριζόντια ένα σώμα με αρχική ταχύτητα μέτρου 8 m/s , από ύψος $0,60 \text{ m}$ από το επίπεδο του γκρεμού. Ο χρόνος που απαιτείται να κινηθεί το σώμα από το σημείο βολής στο έδαφος είναι $1,8 \text{ s}$.

(α) Να υπολογίσετε την οριζόντια απόσταση που διανύει το σώμα.

(β) Να υπολογίσετε το ύψος του γκρεμού.

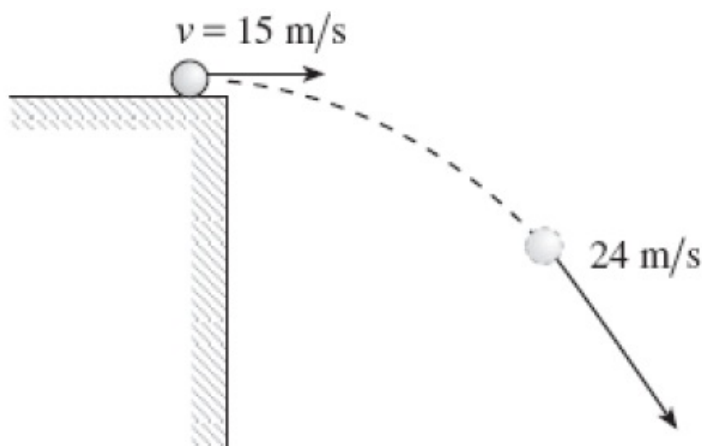


Πρόβλημα 82

Μια μπάλα αφήνει την άκρη μιας οριζόντιας οροφής με ταχύτητα μέτρου 15 m/s .

(α) Να υπολογίσετε την κατακόρυφη και την οριζόντια απόσταση που θα διανύσει η μπάλα όταν το μέτρο της ταχύτητας γίνει 24 m/s .

(β) Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα που θα περάσει από τη στιγμή που η μπάλα εγκαταλείπει την οροφή μέχρι τη στιγμή που το μέτρο της ταχύτητας γίνει 24 m/s .



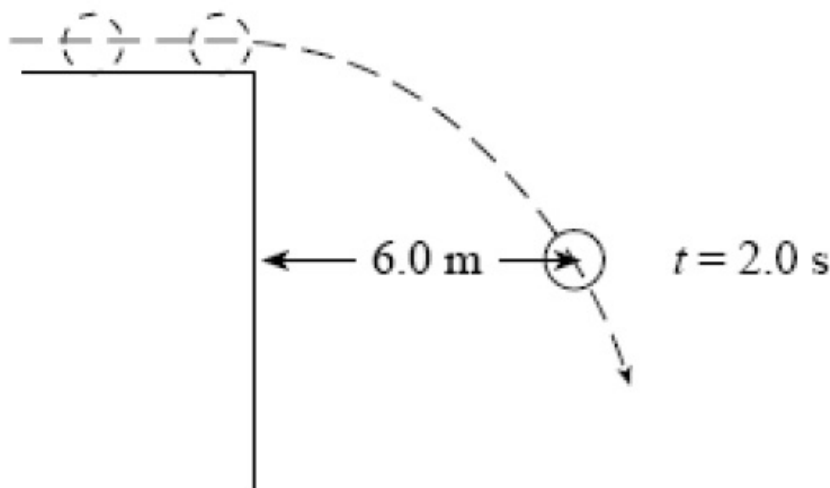
Πρόβλημα 83

Μια μπάλα εκτελεί οριζόντια βολή από την άκρη μιας οριζόντιας οροφής, τη στιγμή $t = 0$. Τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ s}$ η μπάλα απέχει από τον κατακόρυφο τοίχο $6,0 \text{ m}$, όπως δείχνει το σχήμα.

(α) Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας.

(β) Να υπολογίσετε την ταχύτητα της μπάλας τη στιγμή $t = 2 \text{ s}$.

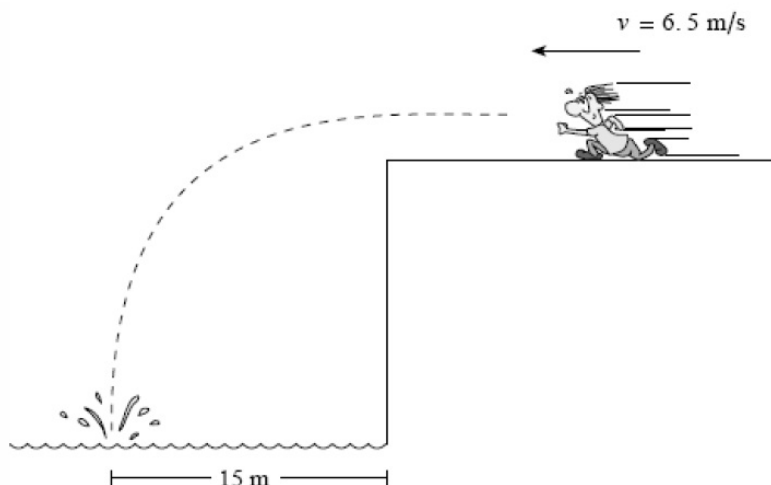
(γ) Να υπολογίσετε την απόσταση που θα απέχει η μπάλα από τον κατακόρυφο τοίχο τη στιγμή $t = 4 \text{ s}$.



Πρόβλημα 84

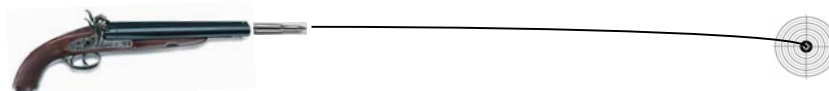
Στην εικόνα ο μαθητής τρέχει με σταθερή ταχύτητα και εγκαταλείπει την κορυφή ενός κατακόρυφου τοίχου με ταχύτητα μέτρου $6,5 \text{ m/s}$. Πέφτει στην πισίνα σε απόσταση 15 m από τον τοίχο. Να υπολογίσετε:

- (α) Το ύψος του τοίχου
(β) Το χρόνο που χρειάστηκε να πέσει στην πισίνα.



Πρόβλημα 85

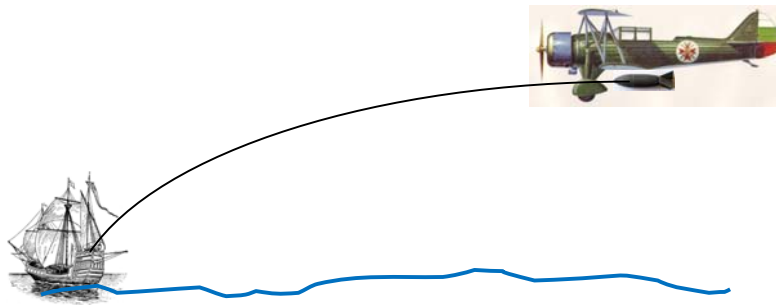
Ένα βλήμα εκτοξεύεται από το στόμιο της κάνης ενός όπλου με ταχύτητα μέτρου 700 m/s και στοχεύει το στόχο σε απόσταση 100 m . Να υπολογίσετε την κατακόρυφη απόσταση που διανύει το βλήμα όταν διανύσει όλη την απόσταση προς το στόχο. ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$)



(Απ. $0,1 \text{ m}$)

Πρόβλημα 86

Ένα βομβαρδιστικό ταξιδεύει με $89,4 \text{ m/s}$ (200 miles/h) σε οριζόντια διεύθυνση σε ύψος 305 m (1000 ft), από το επίπεδο της θάλασσας. Το βομβαρδιστικό σκοπεύει να ρίξει μια βόμβα σε εχθρικό πλοίο. Να υπολογίσετε την οριζόντια απόσταση από την οποία πρέπει να αφεθεί η βόμβα. ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$)



(Απ. 705 m)

ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΝΟΠΕΤΡΑΣΦΥΣΙΚΗ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΚΙΝΗΣΗ ΥΛΙΚΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ2.3 ΠΛΑΓΙΑ ΒΟΛΗ ΥΠΟ ΤΗΝ ΕΠΙΔΡΑΣΗ ΜΟΝΟ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ

Είναι η κίνηση που εκτελεί ένα σώμα όταν βάλλεται, από κάποιο ύψος H από την επιφάνεια της Γης ή από την επιφάνεια της Γης, με αρχική ταχύτητα μέτρου u_{0x} με διεύθυνση που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση.

Για τις εξισώσεις κίνησης της πλάγιας βολής ενός σώματος υπό την επίδραση μόνο της βαρύτητας της Γης, επιλέγουμε,

(1) το σημείο αναφοράς $x = 0$ και $y = 0$ στο έδαφος, πάνω στην κατακόρυφο που περνά από το σημείο βολής.

(2) τη φορά προς τα πάνω θετική.

Όπως αναφέραμε και στην οριζόντια βολή, θεωρούμε την τροχιά που διαγράφει το σώμα να γίνεται σε μια περιοχή του πεδίου βαρύτητας της Γης όπου η έντασή της είναι σταθερή. Θεωρούμε, επίσης ότι η επιτάχυνση του σώματος λόγω της έντασης του πεδίου βαρύτητας, να έχει μέτρο $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Με βάση την ανεξαρτησία των κινήσεων, που μπορούμε να εφαρμόσουμε στην περίπτωση αυτή, το σώμα μπορεί να θεωρηθεί ότι εκτελεί ταυτόχρονα δύο ανεξάρτητες κινήσεις: Μια κίνηση στην οριζόντια x διεύθυνση η οποία γίνεται με σταθερή ταχύτητα, την ίδια με την αρχική οριζόντια ταχύτητα, και μια κίνηση με σταθερή επιτάχυνση, g , που γίνεται στην κατακόρυφη y διεύθυνση και με αρχική ταχύτητα.

Οι αρχικές ταχύτητες στην οριζόντια και στην κατακόρυφη διεύθυνση είναι:

$$u_{0(x)} = u_0 \cos \theta \text{ και } u_{0(y)} = u_0 \sin \theta.$$

Η ταχύτητα στη x διεύθυνση είναι σταθερή, εφόσον στη διεύθυνση αυτή δεν επιδρά στο σώμα εξωτερική δύναμη.

Οι εξισώσεις κίνησης στην οριζόντια διεύθυνση είναι:

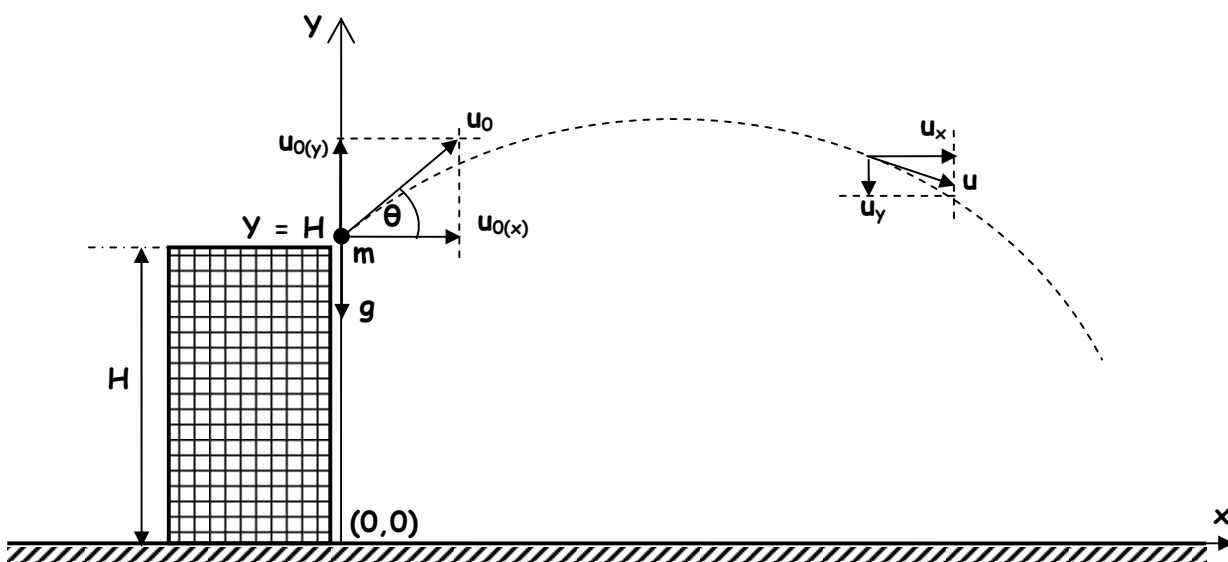
$$u_x = u_{0(x)} = u_0 \cos \theta.$$

$$x = u_x t = u_{0(x)} t = (u_0 \cos \theta) t$$

Οι εξισώσεις κίνησης στην κατακόρυφη διεύθυνση, με αρχική κατακόρυφη ταχύτητα προς τα πάνω, είναι:

$$u_y = u_{0(y)} - gt = u_0 \eta \mu \theta - gt \text{ και}$$

$$y = H + u_{0(y)} t - \frac{1}{2} gt^2 = H + (u_0 \eta \mu \theta) t - \frac{1}{2} gt^2.$$



Η ταχύτητα του σώματος κάθε στιγμή είναι αποτέλεσμα των δύο συνιστωσών ταχυτήτων, u_x και u_y . Άρα, το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι, $u = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$. Η διεύθυνση και η φορά μπορεί να καθοριστεί από τη γωνία θ που σχηματίζει η ταχύτητα με την οριζόντια διεύθυνση,

$$\varepsilon \phi \theta = \frac{u_y}{u_x}.$$

Η εξίσωση της τροχιάς του σώματος μπορεί να προκύπτει από τις εξισώσεις $x = u_{0(x)} t$ και $y = H + u_{0(y)} t - \frac{1}{2} gt^2$, με απαλοιφή του χρόνου.

$$\text{Άρα, } y = H + u_{0(y)} \frac{x}{u_{0(x)}} - \left(\frac{g}{2u_{0(x)}^2} \right) x^2, \text{ ή } y = H + (\varepsilon \phi \theta) x - \left(\frac{g}{2u_0^2 \sigma \nu \nu^2 \theta} \right) x^2.$$

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης αυτής είναι παραβολή.

Τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο μέγιστο ύψος $u_y = 0$. Τη στιγμή που το σώμα φτάνει ξανά στο επίπεδο βολής, $y = H$. Τη στιγμή που το σώμα φτάνει στο έδαφος, $y = 0$.

Άρα, από την εξίσωση $u_y = 0$ υπολογίζουμε το χρόνο ανόδου, δηλαδή το χρόνο που χρειάζεται το σώμα να φτάσει στο μέγιστο ύψος. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μέγιστο ύψος.

Από την εξίσωση $y = 0$ υπολογίζουμε το χρόνο πτήσης. Στη συνέχεια υπολογίζουμε την οριζόντια απόσταση που διανύσει από το σημείο βολής μέχρι το σώμα να φτάσει στο έδαφος.

Πρόβλημα 87

Ένα σώμα βάλλεται από την επιφάνεια του εδάφους με αρχική ταχύτητα μέτρου u_0 που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση. Να αποδείξετε ότι ο χρόνος πτήσης δίνεται από τη σχέση $t_{\pi} = \frac{2u_0 \eta \mu \theta}{g}$.

Πρόβλημα 88

Ένα σώμα βάλλεται από την επιφάνεια του εδάφους με αρχική ταχύτητα μέτρου u_0 που σχηματίζει γωνία θ με την οριζόντια διεύθυνση.

(α) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη οριζόντια απόσταση που διανύει το σώμα (βεληνεκές) δίνεται από τη σχέση $R = \frac{u_0^2 \eta \mu 2\theta}{g}$.

(β) Να δείξετε ότι:

(i) το βεληνεκές παίρνει μέγιστη τιμή όταν $\theta = 45^\circ$.

(ii) το βεληνεκές παίρνει την ίδια τιμή για την ίδια σε μέτρο αρχική ταχύτητα, για δύο γωνίες βολής, με θ και $90-\theta$.

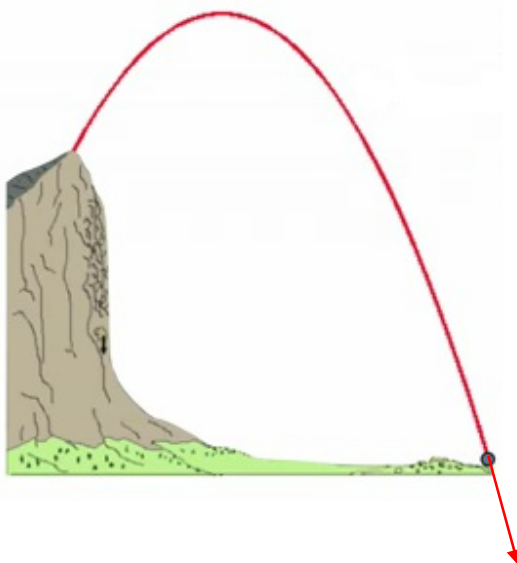
Πρόβλημα 89

Μια πέτρα βάλλεται από την κορυφή ενός γκρεμού ύψους 265 m, με αρχική ταχύτητα μέτρου 45 m/s που σχηματίζει 60° με την οριζόντια διεύθυνση. Στο σχήμα φαίνεται η τροχιά της πέτρας. Να υπολογίσετε:

(α) το χρόνο πτήσης της πέτρας.

(β) το μέγιστο ύψος από το έδαφος στο οποίο φτάνει η πέτρα.

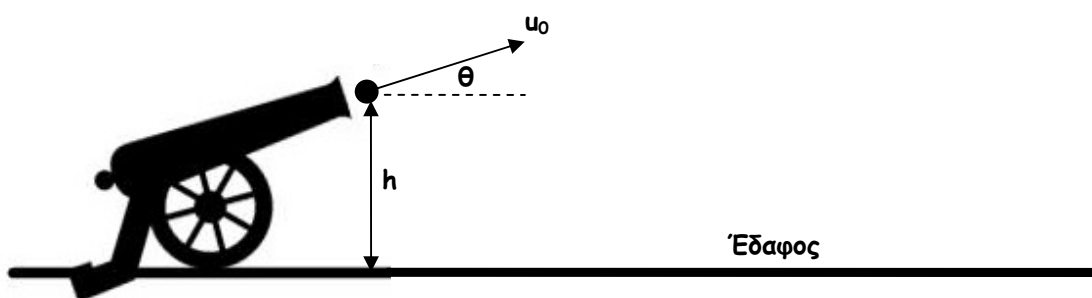
(γ) την ταχύτητα της πέτρας τη στιγμή που φτάνει στο έδαφος.



Πρόβλημα 90

Ένα κανόνι βρίσκεται στο έδαφος και βάλλει ένα βλήμα το οποίο φεύγει από το στόμιο του κανονιού, που βρίσκεται σε απόσταση $h = 1,80 \text{ m}$ από το έδαφος, με αρχική ταχύτητα μέτρου $u_0 = 100 \text{ m/s}$, με γωνία $\theta = 20^\circ$ από το οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίσετε:

- (α) το χρόνο πτήσης του βλήματος.
- (β) τη μέγιστη οριζόντια απόσταση που διανύει το βλήμα.
- (γ) την ταχύτητα που φτάνει το βλήμα στο έδαφος.

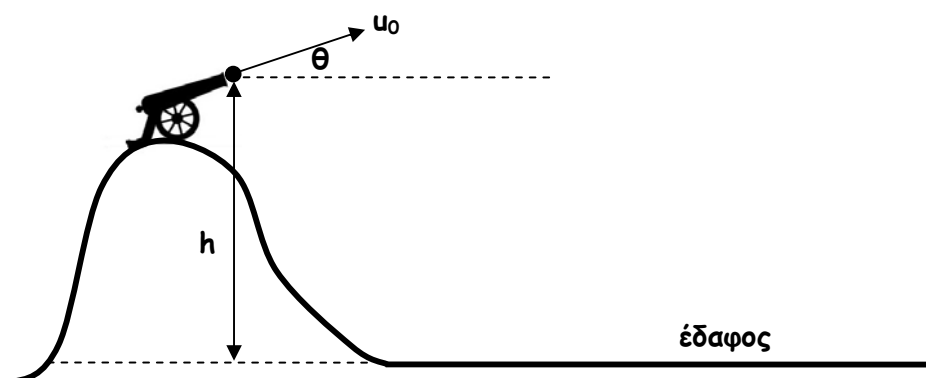


Πρόβλημα 91

Στο σχήμα το βλήμα βάλλεται από ύψος $h = 60 \text{ m}$ από την επιφάνεια του εδάφους με αρχική ταχύτητα μέτρου $u_0 = 25 \text{ m/s}$ και με γωνία βολής θ , όπου $\eta\mu\theta = 0,8$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = 0,6$.

Να υπολογίσετε:

- (α) Το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα από το έδαφος.
- (β) Το χρόνο πτήσης του βλήματος.
- (γ) Τη μέγιστη οριζόντια απόσταση που διανύει.

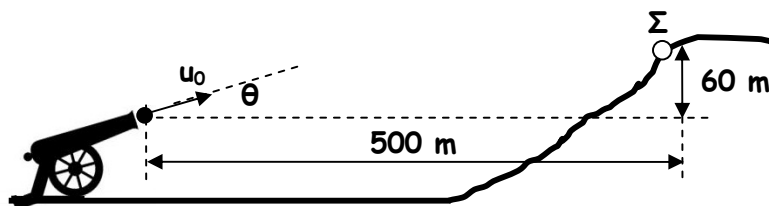


Πρόβλημα 92

Ένα κανόνι εκτελεί βολή και θέλει να κτυπήσει το στόχο Σ που βρίσκεται στο απέναντι βουνό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το βλήμα φεύγει από το κανόνι υπό γωνιά $\theta = 20^\circ$.

Να υπολογίσετε:

- (α) το μέτρο της ταχύτητας με την οποία πρέπει να φύγει το βλήμα από το κανόνι.
- (β) την ταχύτητα με την οποία το βλήμα κτυπά το στόχο.



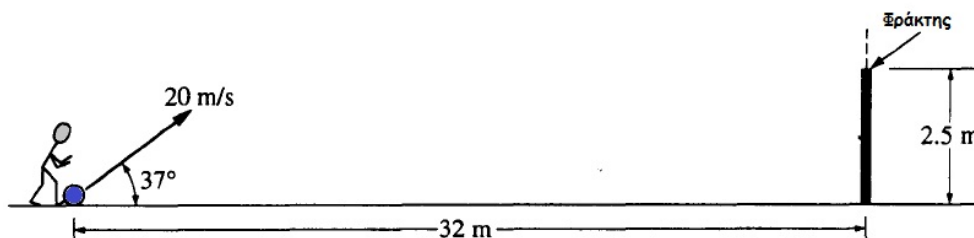
Πρόβλημα 93

Ένας ποδοσφαιριστής κτυπά μια μπάλα και της δίνει αρχική ταχύτητα μέτρου 20 m/s , η οποία σχηματίζει γωνία 37° με την οριζόντια διεύθυνση.

(Θεωρήστε: $\sin 37^\circ = 0,6$, $\cos 37^\circ = 0,8$ και $\tan 37^\circ = 0,75$).

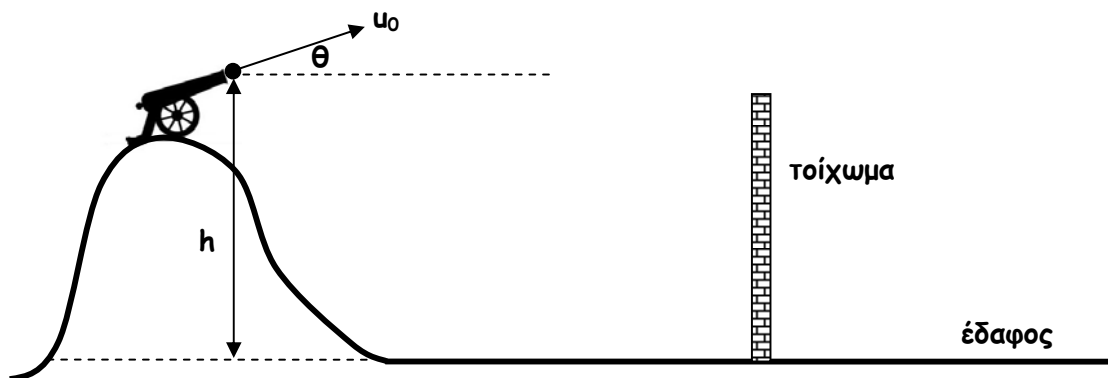
Σε οριζόντια απόσταση 32 m από το σημείο βολής υπάρχει φράκτης ύψους $2,5 \text{ m}$, όπως δείχνει το σχήμα. Ο φράκτης βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με αυτό της βολής.

- (α) Να αποδείξετε ότι η μπάλα περνά πάνω από το φράκτη.
- (β) Να υπολογίσετε το χρόνο που χρειάζεται η μπάλα να φτάσει πάνω από το φράκτη.
- (γ) Να υπολογίσετε την απόσταση που πέφτει η μπάλα πίσω από το φράκτη.



Πρόβλημα 94

Ένα βλήμα πυροβόλου όπλου βάλλεται υπό γωνία 30° ως προς την οριζόντια διεύθυνση, με αρχική ταχύτητα μέτρου 16 m/s και από ύψος 10 m από το έδαφος. Η τροχιά του βλήματος είναι τέτοια ώστε μόλις που περνά από κατακόρυφο τοίχωμα, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ο χρόνος που χρειάστηκε το βλήμα από τη στιγμή της βολής μέχρι τη στιγμή που περνά πάνω από το τοίχωμα είναι 1 s .

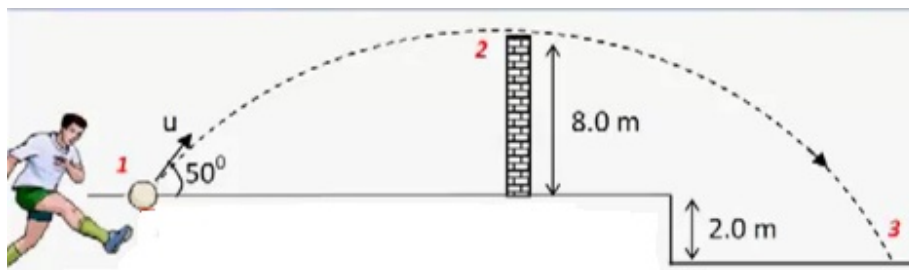
Να υπολογίσετε:

- (α) Το ύψος του τοιχώματος.
- (β) Την οριζόντια απόσταση πέρα από το τοίχωμα στην οποία το βλήμα συναντά το έδαφος.
- (γ) Την ταχύτητα (μέτρο και διεύθυνση) με την οποία το βλήμα συναντά το έδαφος.

Πρόβλημα 95

Στο σχήμα ο ποδοσφαιριστής κλωτσά τη μπάλα με αρχική ταχύτητα μέτρου u υπό γωνία 50° , ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Η μπάλα μόλις που περνά ένα τοίχωμα ύψους $8,0 \text{ m}$, στο μέγιστο σημείο της τροχιάς της. Η μπάλα προσγειώνεται στο σημείο 3 του σχήματος $2,0 \text{ m}$ κάτω από το οριζόντιο επίπεδο βολής. ($g = 9,8 \text{ m/s}^2$)

- (α) Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας της μπάλας, u .
- (β) Να υπολογίσετε το χρόνο πτήσης.



(Απ. (α) $16,4 \text{ m/s}$, (β) $2,7 \text{ s}$)

Πρόβλημα 96

Ο Κώστας, σε μια επίδειξη δεξιότητας, κλώτσησε την μπάλα δίνοντάς της αρχική ταχύτητα μέτρου $u_0 = 8 \text{ m/s}$ και κατάφερε να την περάσει ξυστά πάνω από το εμπόδιο, ενώ αυτή κινείται με οριζόντια ταχύτητα μέτρου $u_A = 4,8 \text{ m/s}$, όπως φαίνεται στο σχήμα.

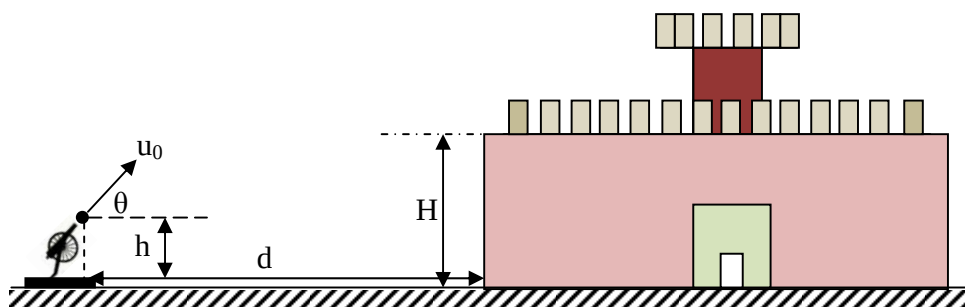


Να υπολογίσετε:

- (α) τη γωνία βολής ϕ .
- (β) το βεληνεκές της μπάλας.
- (γ) την απόσταση του εμποδίου από το σημείο βολής.
- (δ) το ύψος H του εμποδίου.
- (ε) την ταχύτητα της μπάλας τη χρονική στιγμή $t = 1 \text{ s}$.

Πρόβλημα 97

Ένα βλήμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα μέτρου $u_0 = 22 \text{ m/s}$ υπό γωνία $\theta = 45^\circ$ ως προς την οριζόντια διεύθυνση, με στόχο ένα κάστρο. Το βλήμα εξέρχεται από την κάνη σε ύψος $h = 2 \text{ m}$ από το έδαφος, όπως δείχνει το σχήμα. Το κάστρο βρίσκεται σε απόσταση $d = 45 \text{ m}$ μακριά από το σημείο βολής και το τοίχος του έχει ύψος, $H = 22 \text{ m}$, από το έδαφος. Να εξηγήσετε αν το βλήμα θα καταφέρει να περάσει πάνω από το τοίχος του κάστρου.

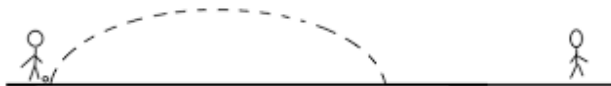


Πρόβλημα 98

Ένα κανόνι εκτελεί βολή και θέλει να πετύχει ένα άρμα μάχης που απομακρύνεται από αυτό με σταθερή ταχύτητα μέτρου 5 m/s . Όταν το βλήμα φεύγει από το κανόνι η μεταξύ τους απόσταση είναι 500 m και η βολή γίνεται με γωνία 45° με την οριζόντια διεύθυνση. Το σημείο της βολής και το άρμα βρίσκονται στην ίδια οριζόντια ευθεία. Να υπολογίσετε το μέτρο της αρχικής ταχύτητας του βλήματος.

Πρόβλημα 99

Δύο ποδοσφαιριστές αρχικά απέχουν μεταξύ τους απόσταση 40 m. Ο ένας κλωτσά την μπάλα ώστε ο άλλος να κάνει κεφαλιά. Το ύψος των δύο ποδοσφαιριστών είναι 1,70 m. Η μπάλα φεύγει από τα πόδια του πρώτου ποδοσφαιριστή με ταχύτητα μέτρου 18 m/s με γωνιά 37° με το οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίσετε το μέτρο της μέσης ταχύτητας με την οποία πρέπει να κινείται ο δεύτερος ποδοσφαιριστής ώστε να κάνει κεφαλιά.

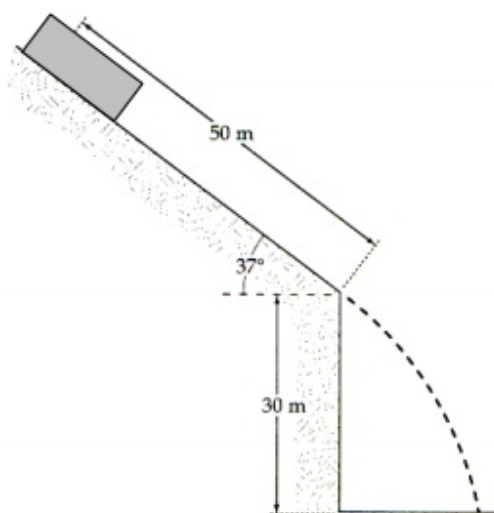


Πρόβλημα 100

Ένα σώμα αφήνεται ελεύθερο να ολισθήσει σε κατηφοριά μπροστά από γκρεμό προς τη θάλασσα. Η κατηφοριά έχει γωνία 37 μοίρες σε σχέση με τον ορίζοντα. Το σώμα κινείται με σταθερή επιτάχυνση 4.0 m/s^2 και διανύει 50 m μέχρι την άκρη του γκρεμού. Ο γκρεμός έχει βάθος 30 m μέχρι τη θάλασσα, όπως δείχνει το σχήμα.

Ζητούνται:

- (α) Η ταχύτητα του σώματος όταν φθάνει στην άκρη του γκρεμού και το χρόνο που χρειάζεται για να φθάσει εκεί.
- (β) Η ταχύτητα που έχει το σώμα όταν φθάνει στη θάλασσα.
- (γ) Ο συνολικός χρόνος που κινείται το σώμα.
- (δ) Η απόσταση από τη βάση του γκρεμού όπου προσθαλασσώνεται το σώμα.
- (ε) Ο συντελεστή τριβής ολίσθησης της κατηφοριάς.



Πρόβλημα 101

Δύο βλήματα Α και Β βάλλονται από το ίδιο σημείο ενός λόφου ύψους 10 m, με την ίδια σε μέτρο ταχύτητα, $5\sqrt{3}$ m/s με κάποια χρονική διαφορά. Το βλήμα Α βάλλεται οριζόντια και το βλήμα Β πλάγια προς τα πάνω με γωνία 60° , ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Τα δύο βλήματα συγκρούονται στον αέρα σε κάποιο σημείο Ρ. Να υπολογίσετε:

(α) Το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο βολών.

(β) Τις συντεταγμένες του σημείου Ρ.

(Απ. (α) 1 s, (β) $x = 5\sqrt{3}$ m, $y = 5$ m)