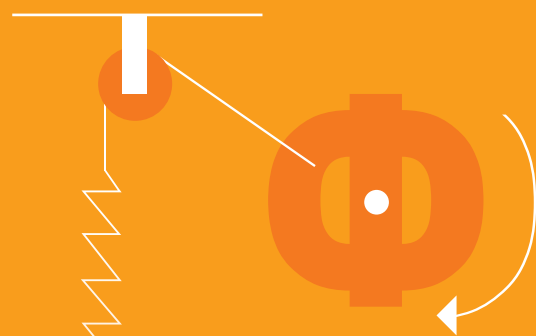




► **ΛΥΜΕΝΕΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΦΥΣΙΚΗΣ**

για υποψηφίους
Πολυτεχνικών Σχολών
και **Σχολών Θετικών Επιστημών**

ISBN 978-9963-9609-0-3

Θεόδωρος Γ. Παπαγιάννης

 **mavromatis**
Books 'n Stationery

Θεόδωρος Γ. Παπαγιάννης

για υποψηφίους **Πολυτεχνικών Σχολών**
και **Σχολών Θετικών Επιστημών**

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

**ΛΥΜΕΝΕΣ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ
ΦΥΣΙΚΗΣ**

Θεόδωρος Γ. Παπαγιάννης

Λύσεις

για
υποψηφίους
**Πολυτεχνικών
Σχολών**
και
**Σχολών
Θετικών
Επιστημών**

 **mavromatis**
Books 'n Stationery

Λυμένες Ασκήσεις Φυσικής
για υποψηφίους Πολυτεχνικών Σχολών και
Σχολών Θετικών Επιστημών

Θεόδωρος Γ. Παπαγιάννης

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος του βιβλίου με οποιοδήποτε μέσο (φωτοτυπία, εκτύπωση, αποθήκευση σε αρχείο πληροφοριών ή άλλη μηχανική ή ηλεκτρονική μέθοδο) χωρίς την έγγραφη άδεια του συγγραφέα.

Copyright © 2009 Εκδόσεις Mavromatis Books & Stationery Ltd

ISBN 978-9963-9609-0-3



Κεντρικά Γραφεία: Προδρόμου 121, 2064 Στρόβολος
Τ.Κ. 25042, 1306 Λευκωσία, Κύπρος
Τηλ: 00357 77777650, Φαξ: +357 22873037
E-mail: mavromatisbookshops@cytanet.com.cy

Αφιερωμένο

Στους γονείς μου, Γιώργο, Αλίκη,
τον αδερφό μου Κωνσταντίνο,
αλλά και σε εκείνους που τολμούν
και κάνουν επιλογές δίχως να φοβούνται
το λάθος.

Πρόλογος

Το παρόν σύγγραμμα, απευθύνεται στους μαθητές της Γ' Λυκείου και της Γ' τάξης Τεχνικών Σχολών. Αποτελεί ένα βοήθημα για τον σπουδαστή που έχει διαλέξει το μάθημα της ενισχυμένης Φυσικής. Σκοπό έχει, να επεξηγήσει με σαφήνεια και ακρίβεια την μεθοδολογία επίλυσης των ασκήσεων και να βοηθήσει το σπουδαστή ν' αποκτήσει αυτοπεποίθηση και σιγουριά στην επίλυση τους. Στόχος να βοηθηθεί ο σπουδαστής στην εξασφάλιση θέσης σε Ανώτατα Εκπαιδευτικά Ιδρύματα Κύπρου και Ελλάδος.

Στο βιβλίο αυτό αναπτύσσεται:

- η απαιτούμενη θεωρία που πρέπει να γνωρίζει ο σπουδαστής έτσι ώστε να κατανοήσει και να λύσει την άσκηση
- η μεθοδολογία που πρέπει να ακολουθηθεί, έτσι ώστε να επιλυθεί η εκάστοτε άσκηση
- και η αναλυτική επίλυση της με τρόπον ώστε να γίνεται σαφής και κατανοητή η μεθοδολογία επίλυσης της

Ο σπουδαστής καλείται πρώτα να προσπαθήσει μόνος την επίλυση κάθε άσκησης και τότε μόνον ν' ανατρέχει στην επίλυση όταν αντιμετωπίζει δυσκολίες. Με τον τρόπο αυτό θα καταφέρει να κατανοήσει και ν' αφομοιώσει καλύτερα τις ασκήσεις. Η επιλογή των ασκήσεων έγινε από βιβλία του δημοσίου καθώς επίσης και από εξεταστικά δοκίμια ενιαίων και εισαγωγικών εξετάσεων. Οι γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζονται χαράχθηκαν με τη βοήθεια του λογισμικού Matlab ενώ η συγγραφή του βοηθήματος έχει γίνει με τη βοήθεια του λογισμικού L^AT_EX.

Θερμές ευχαριστίες θα ήθελα να εκφράσω στην οικογένεια μου για την ενθάρρυνση να γράψω το παρόν σύγγραμμα. Τη μητέρα μου Αλίκη Παπαγιάννη που είχε την ευγενική διάθεση να διαβάσει και να διορθώσει τα κείμενα. Την Μέλανη Ευσταθιάδου και την Ελένη Ζαμπέλα για τις πολύτιμες συμβουλές που μου έδωσαν, την υπομονή και τον ζήλο που έδειξαν για την εκτύπωση του παρόντος βοηθήματος καθώς επίσης και τους νομικούς Γιώργο Γεωργίου και Αγαθοκλή Κορέλλη για τις πολύτιμες νομικές υποδείξεις και συμβουλές.

Ο υποφαινόμενος προτρέπει τον αναγνώστη να του υποβάλει τις παρατηρήσεις και τα σχόλια του για το παρόν βοήθημα.

Θεόδωρος Γ. Παπαγιάννης,
Φυσικός, Αριστοτελείου Πανεπιστημίου Θεσσαλονίκης

Email: Thpapagiannis@Hotmail.com

Τηλέφωνο: 99458362

Κεφάλαιο 1

Μηχανική Συστήματος Σωμάτων σε μια διάσταση

1.1 Ερωτήσεις

1. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 1 σελίδα 109:

Να οριστούν τα μεγέθη: Ορμή υλικού σημείου - Ορμή Σώματος

Λύση:

Υλικό σημείο ονομάζεται ένα σώμα το οποίο φέρει μάζα αλλά έχει αμελητέες διαστάσεις. Ορμή του υλικού σημείου μάζας m και ταχύτητας $\vec{v}$ ορίζεται το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο το γινόμενο της μάζας επί την ταχύτητα:

$$\vec{P} = m \times \vec{v}$$

Στερεό σώμα θεωρείται ένα αντικείμενο το οποίο φέρει μάζα και έχει και διαστάσεις. Πρακτικά, ένα στερεό σώμα είναι ένα σύνολο υλικών σημείων. Με βάση τα προηγούμενα, ορμή στερεού σώματος μπορεί να οριστεί ως το άθροισμα των ορμών των υλικών σημείων που το αποτελούν. Θεωρώντας λοιπόν ότι το στερεό σώμα αποτελείται από n υλικά σημεία η ορμή του θα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= m_1 \times \vec{v} + m_2 \times \vec{v} + \dots + m_n \times \vec{v} \\ \vec{P} &= (m_1 + m_2 + \dots + m_n) \times \vec{v}\end{aligned}$$

2. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 2 σελίδα 109:

Γιατί η πτώση από ορισμένο ύψος είναι λιγότερο επικίνδυνη πάνω σε στρώμα σφουγγαριού παρά η πτώση πάνω στο έδαφος;

Λύση:

Η γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής απαντά στο πιο πάνω ερώτημα :

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

Το σφουγγάρι αυξάνει το χρόνο επαφής με το έδαφος, δηλαδή, στην πιο πάνω εξίσωση ο παρονόμαστης γίνεται μεγαλύτερος και άρα ο λόγος μικρότερος. Συνεπώς η δύναμη που ασκείται στον άνθρωπο κατά την πτώση είναι μικρότερη.

3. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 3 σελίδα 109:

Είναι δυνατόν να ασκήσει κάποιος δύναμη μεγαλύτερη του βάρους του πάνω στο έδαφος ;

Λύση:

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό μπορεί να προκύψει από τη γενικότερη διατύπωση του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής.

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι, ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ισούται με τη δύναμη που ασκεί ο άνθρωπος στο έδαφος. Αν η μεταβολή της ορμής συμβεί σε μικρό χρονικό διάστημα ή αν συμβεί μεγάλη μεταβολή ορμής ή ακόμη αν συμβούν και τα δύο ταυτόχρονα, τότε ναι, μπορεί να ασκηθεί στο έδαφος δύναμη μεγαλύτερη από αυτή του βάρους του ανθρώπου.

4. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 4 σελίδα 109:

Γιατί συνίσταται να στηρίζεται καλά το όπλο στον ώμο κατά την στιγμή της εκπυροσκοκρότησης;

Λύση:

Κρατώντας το όπλο καλά στον ώμο, το σύστημα όπλο-σώμα θεωρείται σαν ένα ενιαίο κομμάτι. Έτσι η ορμή η μάζα του συστήματος αυξάνεται και κατά τη στιγμή της εκπυροσκοκρότησης όπου ισχύει το θεώρημα διατήρησης της ορμής η εκτίναξη προς τα πίσω του συστήματος είναι μικρότερη.

5. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 5 σελίδα 109:

Σε ποιά μορφή ενέργειας μετατρέπεται μέρος της μηχανικής ενέργειας, κατά τις μή ελαστικές κρούσεις ;

Λύση :

Σε θερμότητα !!!

6. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 6 σελίδα 109:

Αφού μόνο εξωτερική δύναμη μπορεί να αλλάξει την κινητική κατάσταση ενός σώματος, πώς γίνεται η εσωτερική δύναμη των φρένων να ακινητοποιεί το αυτοκίνητο ;

Λύση :

Όταν ο οδηγός φρενάρει, η ρόδα του αυτοκινήτου σταματά να περιστρέφεται. Αυτό αυξάνει την δύναμη τριβής μεταξύ αυτοκινήτου και οδοστρώματος και η δύναμη τριβής ως εξωτερική δύναμη ακινητοποιεί το αυτοκίνητο !

7. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 7 σελίδα 109:

Μπορεί ένα σώμα να έχει ενέργεια χωρίς να έχει ορμή ; Να εξηγήσετε.

Λύση :

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ορμή είναι το γινόμενο της μάζας ενός σώματος επί την ταχύτητα του. Συνεπώς για να μην έχει ορμή ένα σώμα με συγκεκριμένη μάζα δεν πρέπει να έχει ταχύτητα. Αυτό όμως δεν σημαίνει ότι το σώμα δεν έχει και ενέργεια. Ένα απλό παράδειγμα που καταδεικνύει τα προαναφερθέντα είναι: δύο βιβλία ακίνητα, το ένα πάνω στο τραπέζι και το άλλο στο έδαφος. Έχουν και τα δύο μηδενική ορμή (γιατί δεν έχουν ταχύτητα) άλλα το βιβλίο πάνω στο τραπέζι έχει μεγαλύτερη δυναμική ενέργεια.

8. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 8 σελίδα 109:

Να βρείτε σχέση που να συνδέει την κινητική ενέργεια ενός σώματος με την ορμή του.

Λύση :

Για να επιλυθεί η άσκηση αυτή δίνονται η σχέσης κινητικής ενέργειας και ορμής:

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \quad (1.1)$$

$$P = m \cdot v \quad (1.2)$$

Υψώνοντας την 1.2 στο τετράγωνο:

$$P^2 = m^2 \cdot v^2 \quad (1.3)$$

Πολλαπλασιάζοντας την 1.1 με m:

$$E_{κιν} \cdot m = \frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot v^2 \quad (1.4)$$

Από τις 1.3 και 1.4 προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} E_{κιν} \cdot m &= \frac{1}{2} \cdot P^2 \Rightarrow \\ E_{κιν} &= \frac{P^2}{2m} \end{aligned}$$

9. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 10 σελίδα 109:

Δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 έχουν ίσες κινητικές ενέργειες. Αν $m_2 < m_1$ ποιο από τα δύο σώματα έχει τη μεγαλύτερη ορμή;

Λύση:

Χρησιμοποιώντας τη σχέση της ερώτησης 8 και το δεδομένο της άσκησης ότι οι ενέργειες είναι οι ίδιες προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} E_{κιν} &= \frac{P^2}{2m} \\ E_{κιν1} &= E_{κιν2} \Rightarrow \frac{P_1^2}{2m_1} = \frac{P_2^2}{2m_2} \Rightarrow \\ \frac{P_1^2}{P_2^2} &= \frac{m_1}{m_2} \Rightarrow \frac{P_1^2}{P_2^2} > 1 \Rightarrow |P_1| > |P_2| \end{aligned}$$

Συνεπώς το δεύτερο σώμα έχει μικρότερη ορμή.

10. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 11 σελίδα 109:

Δύο σώματα με μάζες m_1, m_2 έχουν ίσες ορμές. Να βρείτε το λόγο $\frac{E_1}{E_2}$ της κινητικής ενέργειας των σωμάτων.

Λύση:

Χρησιμοποιώντας τη σχέση της ερώτησης 8 και το δεδομένο της άσκησης ότι οι ορμές είναι οι ίδιες προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} E_{κιν} &= \frac{P^2}{2m} \\ P_1 &= P_2 \Rightarrow E_{κιν1} \cdot 2m_1 = E_{κιν2} \cdot 2m_2 \Rightarrow \\ P_1 &= P_2 \end{aligned}$$

$$\frac{E_{κιν1}}{E_{κιν2}} = \frac{m_2}{m_1}$$

11. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 12 σελίδα 109:

Πότε ένα σύστημα σωμάτων που κινούνται δεν έχει ορμή;

Λύση:

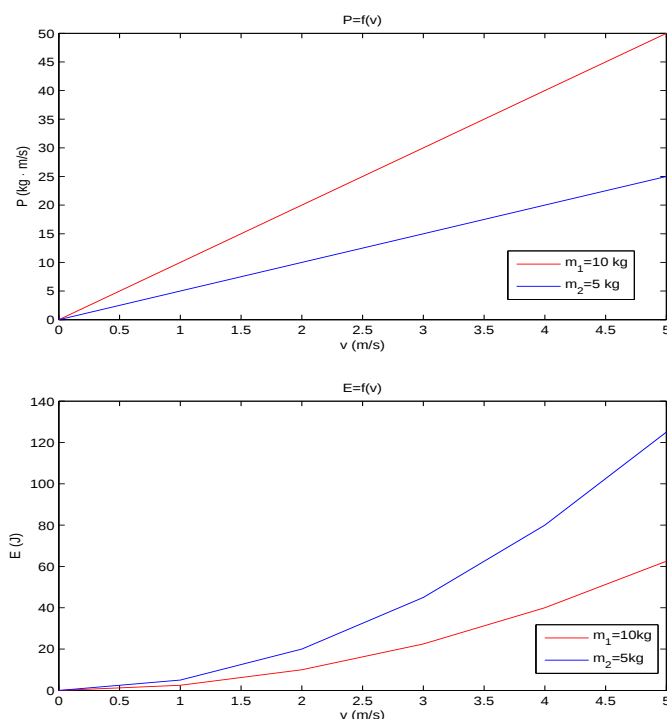
Ένα σύστημα σωμάτων που κινούνται δεν έχει ορμή όταν το κέντρο μάζας του παραμένει ακίνητο.

12. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 13 σελίδα 109:

Να χαράξετε τα διαγράμματα $P = f(v)$ και $E_k = f(P)$

Λύση:

Πρωτού χαραχθούν τα διαγράμματα, δίνονται οι σχέσεις που συνδέουν τα μεγέθη: $P = m \cdot v$ και $E_k = \frac{P^2}{2m}$. Απο τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι η πρώτη γραφική θα είναι ευθεία που θα έχει κλίση τη μάζα του σώματος ενώ η δεύτερη θα είναι μια παραβολή. Στα διαγράμματα του σχήματος 1.1 με την κόκκινη γραμμή απεικονίζεται ένα σώμα με μάζα 10 ενώ με μπλέ ένα σώμα με μάζα 5 κιλών.



Σχήμα 1.1: Διαγράμματα $P = f(v)$, $E = f(p)$

13. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 14 σελίδα 109:

Τι είναι ώθηση δύναμης F κατά τη διάρκεια του χρόνου Δt ;

Λύση:

Ώθηση δύναμης ορίζεται ως το γινόμενο της δύναμης επί το χρόνο Δt που αυτή ενεργεί πάνω σε ένα σώμα. Συμβολίζεται με το γράμμα Ω . Συνεπώς με βάση και τον εναλλακτικό τρόπο γραφής του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής, ώθηση της δύναμης είναι η μεταβολή της ορμής που υφίσταται ένα σώμα.

$$\Omega = F \cdot \Delta t = \Delta P.$$

14. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 17 σελίδα 109:

Ένα βλήμα εκρήγνυται:

- (α') Γιατί η ολική κινητική ενέργεια των τμημάτων στα οποία χωρίστηκε το βλήμα είναι πιο μεγάλη από την αρχική ενέργεια του βλήματος;
- (β') Πόση είναι η ολική ορμή των τμημάτων στα οποία χωρίστηκε το βλήμα;
- (γ') Ποιά τροχιά ακολουθεί το κέντρο μάζας των τμημάτων στα οποία χωρίστηκε το βλήμα;

Λύση:

Όταν το βλήμα εκραγεί χωρίζεται σε περισσότερα του ενός κομμάτια που κινούνται σε τυχαίες διευθύνσεις με μάζες μικρότερες της αρχικής το κάθε ένα.

- (α') Εφόσον οι μάζες των σωματιδίων μετά την έκρηξη είναι μικρότερες από την αρχική, πρέπει οι ταχύτητες να είναι μεγαλύτερες από την ταχύτητα του αρχικού κομματιού, για να ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής. Στην κινητική ενέργεια όμως, η ταχύτητα είναι υψωμένη στο τετράγωνο και έτσι η ολική κινητική ενέργεια των τμημάτων στα οποία χωρίστηκε το βλήμα είναι μεγαλύτερη από την αρχική.
- (β') Η ολική ορμή των τμημάτων στα οποία χωρίστηκε το βλήμα είναι η ίδια με την αρχική.
- (γ') Η τροχιά του κέντρου μάζας των σωματιδίων στα οποία έχει χωριστεί το βλήμα είναι η ίδια με την τροχιά που θα ακολουθούσε το βλήμα πριν από την έκρηξη.

1.2 Ασκήσεις Κατηγορίας Β

1. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 11 σελίδα 7:

Με ένα λάστιχο νερού εκτοξεύουμε νερό το οποίο κτυπά οριζόντια σε κατακόρυφο τοίχο με ταχύτητα $1,2 \text{ m/s}$. Μετά την πρόσκρουση το νερό κινείται κατακόρυφα (δηλαδή παράλληλα με τον τοίχο). Αν πέφτουν 50 g νερού σε κάθε δευτερόλεπτο να υπολογίσετε τη δύναμη που ασκεί το νερό στον τοίχο.

Λύση:

Η δύναμη που ασκεί το νερό στον τοίχο θα υπολογιστεί από το γενικευμένο θεώρημα της μηχανικής $F = \frac{\Delta P}{\Delta t}$. Πρέπει λοιπόν να υπολογιστεί η μεταβολή της ορμής ανά μονάδα χρόνου. Για τον υπολογισμό της ορμής (τελικής και αρχικής) θα γίνει χρήση των δεδομένων της άσκησης.

- Η αρχική ταχύτητα είναι $v_{\alpha\epsilon\chi} = 1,2 \text{ m/s}$
- Η τελική ταχύτητα είναι $v_{\tau\epsilon\lambda} = 0 \text{ m/s}$ Γιατί κινείται κατακόρυφα με τον τοίχο και άρα δεν έχει οριζόντια συνιστώσα ταχύτητας.

Η δύναμη που δέχεται το νερό από τον τοίχο είναι:

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m \cdot (v_{\tau\epsilon\lambda} - v_{\alpha\epsilon\chi})}{\Delta t} \Rightarrow$$

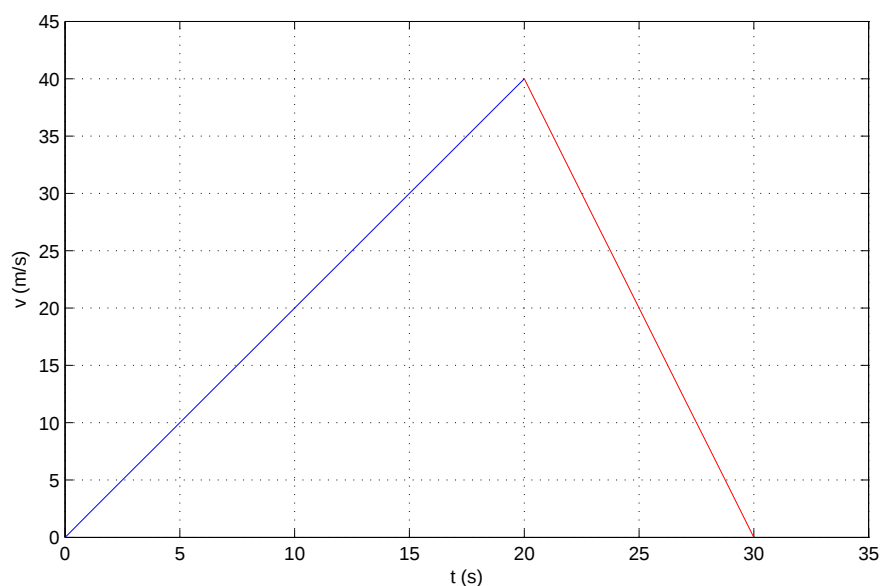
$$F = \frac{0,05 \cdot (0 - 1,2)}{1} = -0,06 \text{ N}$$

Επομένως η δύναμη που δέχεται ο τοίχος από το νερό θα είναι ίση και αντίθετη.

2. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 12 σελίδα 7:

Ένα σώμα το οποίο αρχικά ηρεμεί, έχει μάζα 5 Kg . Κάποια στιγμή ασκείται στο σώμα δύναμη F σταθερής διεύθυνσης. Με την επίδραση της δύναμης αυτής η ταχύτητα v του σώματος μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2.

- Να κατασκευάσετε τα διαγράμματα $F = f(t)$, $F = f(x)$ όπου x η θέση του σώματος.
- Πώς μεταβάλλονται η ορμή P του σώματος και η κινητική του ενέργεια $E_{κιν}$ κατά τη διάρκεια της κίνησης του; Να δώσετε αριθμητικές τιμές για τα χρονικά διαστήματα $0 - 20s$ και $20 - 30s$.
- Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις $P = f(t)$ και $E_{κιν} = f(t)$



Σχήμα 1.2: Διάγραμμα $v = f(t)$

Λύση:

Από τη γραφική παράσταση που δίνεται λαμβάνονται τα δεδομένα τα οποία θα βοηθήσουν στην επίλυση της άσκησης. Σημαντικές παρατηρήσεις που πρέπει να γίνουν είναι οι ακόλουθες:

- Η γραφική παράσταση αποτελείται από 2 ευθύγραμμα τμήματα, για χρόνο από $0 - 20s$ και για χρόνο από $20 - 30s$
- Από την κλίση των ευθύγραμμων τμημάτων μπορεί να υπολογιστεί η επιτάχυνση η οποία είναι σταθερή για κάθε ένα από τα δύο τμήματα ξεχωριστά.
- Εφόσον η επιτάχυνση είναι σταθερή και η δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα θα είναι σταθερή.

Υπολογίζεται η επιτάχυνση για το πρώτο κομμάτι:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{40 - 0}{20 - 0} = 2 \text{ m/s}$$

και η δύναμη για το διάστημα αυτό θα είναι:

$$F = m \cdot a = 5 \cdot 2 = 10 \text{ N}$$

Υπολογίζεται η επιτάχυνση για το δεύτερο κομμάτι:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0 - 40}{30 - 20} = -4 \text{ m/s}$$

και η δύναμη για το διάστημα αυτό θα είναι:

$$F = m \cdot a = 5 \cdot (-4) = -20 \text{ N}$$

Στη συνέχεια για τα δύο τμήματα πρέπει να υπολογιστούν οι αποστάσεις που θα διανύσουν τα δύο σώματα και να χαραχθεί η γραφική παράσταση. Υπολογίζεται η θέση για το πρώτο κομμάτι:

$$x = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 20^2 = 400 \text{ m}$$

η ταχύτητα μόλις σταματά να επιδρά η πρώτη δύναμη είναι 40 m/s . Υπολογίζεται τώρα η θέση που θα έχει το σώμα μετά το πέρας της επιβολής της δεύτερης δύναμης:

$$\begin{aligned} x_{30s} &= x_{20s} + v_{20s} \cdot \Delta t - \frac{1}{2} \cdot a \cdot \Delta t^2 \\ &= 400 + 40 \cdot 10 - 200 \\ x_{30s} &= 600 \text{ m} \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση για τη δύναμη αυτή δίνεται στο σχήμα 1.3.

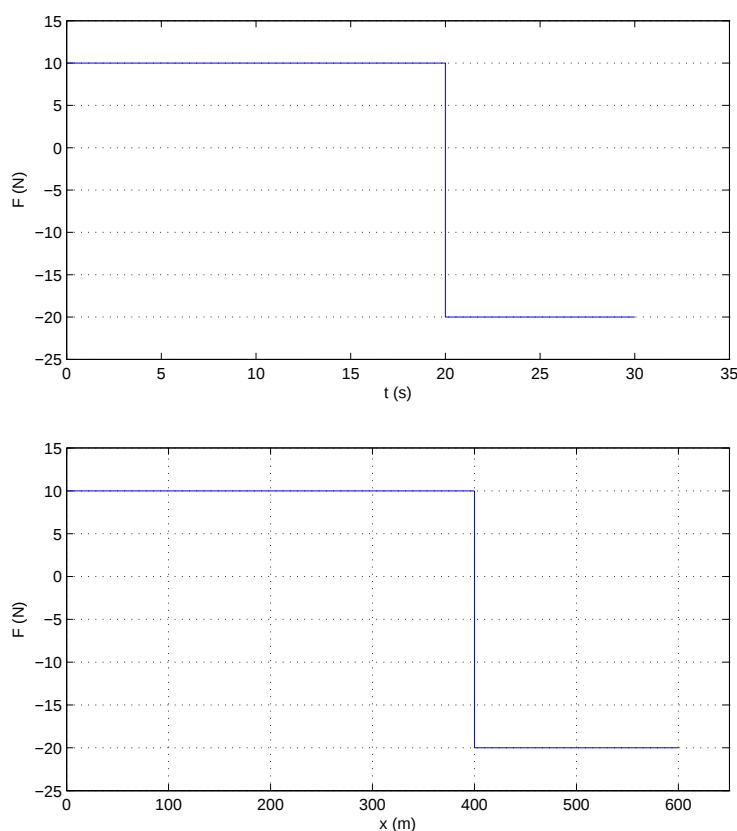
Στο δεύτερο σκέλος της άσκησης ζητούνται οι σχέσεις που δείχνουν πώς μεταβάλλεται η ορμή P και η κινητική ενέργεια $E_{κιν}$ του σώματος.

$$\begin{aligned} P &= m \cdot v \\ E_{κιν} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \end{aligned}$$

Με βάση αυτές τις σχέσεις αλλά και τη γραφική παράσταση $v = f(t)$ υπολογίζεται η οποιαδήποτε τιμή στο χρονικό διάστημα $0 - 30s$. Ενδεικτικά για τη χρονική στιγμή $t \rightarrow 20s$

$$\begin{aligned} P &= 5 \cdot 40 = 200 \text{ m/s} \\ E_{κιν} &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 40^2 = 4000 \text{ J} \end{aligned}$$

Τα διαγράμματα $P = f(t)$ και $E_{κιν} = f(t)$ φαίνονται στο σχήμα 1.4.



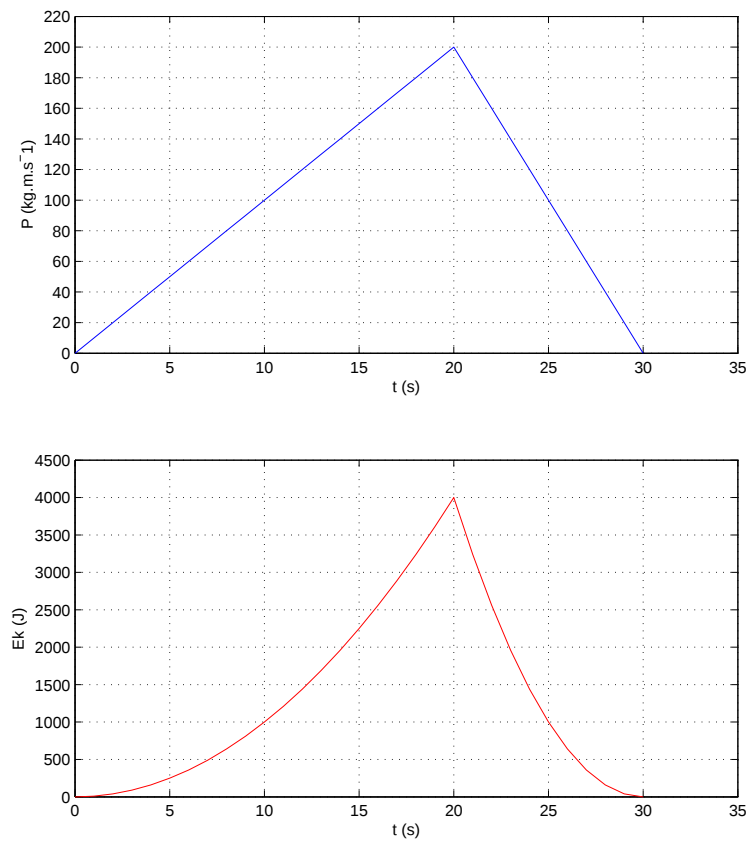
Σχήμα 1.3: Διαγράμματα $F = f(t)$ και $F = f(x)$

3. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 14 σελίδα 8:

Μπάλα μάζας $0,2 \text{ kg}$ πέφτει από ύψος $3,2 \text{ m}$ πάνω σε ακλόνητο οριζόντιο δάπεδο και αναπηδά στο ίδιο αρχικό ύψος. Αν η διάρκεια επαφής της μπάλας με το δάπεδο είναι 10^{-3} s να βρείτε πόση είναι η μέση ολική δύναμη που ασκείται στην μπάλα κατά την κρούση και τη μέση δύναμη που ασκείται στο έδαφος από την μπάλα.

Λύση:

Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι κατά την κρούση της μπάλας με το έδαφος δεν έχουμε απώλεια ενέργειας γιατί η μπάλα αναπηδά πάλι στο ίδιο αρχικό ύψος. Βάσει της προηγούμενης διαπίστωσης η ταχύτητα με την οποία το σώμα θα φτάσει στο έδαφος είναι η ίδια με την ταχύτητα με την οποία η μπάλα θα αναπηδήσει από αυτό. Υπολογίζεται αρχικά ο χρόνος που χρειάζεται μέχρι να φτάσει η μπάλα



Σχήμα 1.4: Διαγράμματα $P = f(t)$ και $E_{\kappa\iota\nu} = f(t)$

στο έδαφος και μετά η ταχύτητα.

$$\begin{aligned}
 h &= \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \Rightarrow \\
 t &= \sqrt{\frac{2 \cdot h}{g}} = 0,8 \text{ s} \\
 v &= g \cdot t = 8 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Η μέση ολική δύναμη που ασκεί το έδαφος στη μπάλα είναι

$$\begin{aligned}
 F_{\mu\pi} &= \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m \cdot (v_{\tau\epsilon\lambda} - v_{\alpha\theta\chi})}{\Delta t} \Rightarrow \\
 F_{\mu\pi} &= \frac{0,2 \cdot (8 - (-8))}{10^{-3}} = 3200 \text{ N}
 \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός της δύναμης που ασκείται στο έδαφος από την μπάλα προκύπτει με την προσθήκη του βάρους της μπάλας στο προηγούμενο αποτέλεσμα :

$$F_{\epsilon\delta} = \frac{\Delta P}{\Delta t} + m \cdot g = 3202 \text{ N}$$

4. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 15 σελίδα 8:

Ένα αυτοκίνητο το οποίο κινείται με ταχύτητα $v = 20 \text{ m/s}$, συγκρούεται μετωπικά με τοίχο και σταματά αμέσως. Ένας επιβάτης με μάζα 75 kg ο οποίος φορά ζώνη ασφαλείας, ακινητοποιείται σε χρόνο $0,2 \text{ s}$. Βρείτε τη δύναμη που ασκεί η ζώνη στον επιβάτη αν υποτεθεί ότι είναι σταθερή και το ποσόν της ενέργειας που απορροφάται από το σύστημα της ζώνης ασφαλείας.

Λύση:

Ο επιβάτης πριν τη κρούση έχει την ίδια ταχύτητα με το αυτοκίνητο, $v_{\alpha\rho\chi} = 20 \text{ m/s}$, ενώ μετά την κρούση η ταχύτητα του είναι $v_{\tau\epsilon\lambda} = 0 \text{ m/s}$. Η δύναμη που ασκεί η ζώνη πάνω στον επιβάτη είναι :

$$\begin{aligned} F &= \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{m \cdot (v_{\tau\epsilon\lambda} - v_{\alpha\rho\chi})}{\Delta t} \Rightarrow \\ F &= \frac{75 \cdot (0 - 20)}{0.2} = -7500 \text{ N} \end{aligned}$$

Το ποσόν της ενέργειας που απορροφάται από το σύστημα της ζώνης ασφαλείας υπολογίζεται αν από την αρχική ενέργεια που έχει ο άνθρωπος αφαιρεθεί η τελική :

$$\begin{aligned} \Delta E &= E_{\alpha\rho\chi} - E_{\tau\epsilon\lambda} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\alpha\rho\chi}^2 - \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\tau\epsilon\lambda}^2 \Rightarrow \\ \Delta E &= 15000 \text{ J} \end{aligned}$$

5. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 18 σελίδα 9:

Δύο εντελώς πλαστικές σφαίρες με μάζες 20 g και 30 g κινούνται χωρίς τριβές με αντίθετη φορά πάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες μέτρου 30 m/s και 10 m/s αντίστοιχα (σχήμα 1.5). Μετά την σύγκρουση τους οι σφαίρες κινούνται σαν ένα σώμα. Να βρείτε α) την κοινή τους



Σχήμα 1.5: Κρούση σφαιρών

ταχύτητα μετά την κρούση και β) την απώλεια μηχανικής ενέργειας κατά την κρούση.

Λύση:

Για να υπολογιστεί η ταχύτητα μετά την κρούση πρέπει να εφαρμοστεί η αρχή διατήρησης της ορμής. Προσοχή όμως χρειάζεται όταν γίνεται αντικατάσταση των ταχυτήτων στην εξίσωση. Η ταχύτητα είναι διάνυσμα και πρέπει να μπαίνει στην εξίσωση με το πρόσημό της αφού πρώτα έχει επιλεγεί μια φορά σαν θετική.

$$P_{\pi\rho\nu} = P_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow$$

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_{o\lambda} \cdot v_k \Rightarrow$$

$$v_k = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_{o\lambda}} \Rightarrow$$

$$v_k = \frac{0.02 \cdot 30 + 0.03 \cdot (-10)}{0.05} \Rightarrow$$

$$v_k = 6 \text{ m/s}$$

Στην συνέχεια γίνεται ο υπολογισμός της απώλειας ενέργειας κατά την κρούση:

$$\Delta E = E_{\tau\epsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot m_{o\lambda} \cdot v_k^2 - \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0.05 \cdot 6^2 - \frac{1}{2} \cdot 0.02 \cdot 30^2 + \frac{1}{2} \cdot 0.03 \cdot 10^2 \Rightarrow$$

$$\Delta E = -9.6 \text{ J}$$

6. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 19 σελίδα 9:

Δύο μπάλες M_1 και M_2 με μάζες 2 kg και 3 kg κινούνται χωρίς τριβές με αντίθετη φορά πάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες μέτρου 6 m/s και 2 m/s αντίστοιχα (σχήμα 1.6) και συγκρούονται τελείως ελαστικά. Η διάρκεια της κρούσης είναι 0.02 s .

- (α') Να βρείτε την κοινή ταχύτητα τους μετά την κρούση
- (β') Να σχεδιάσετε στους ίδιους βαθμολογημένους άξονες τις γραφικές παραστάσεις της ορμής P_1 και P_2 της κάθε μπάλας καθώς και της συνολικής ορμής $P_{ολ}$ του συστήματος σε συνάρτηση με το χρόνο (πριν και μετά την κρούση).
- (γ') Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα $F_1 = f(t)$ και $F_2 = f(t)$ όπου F_1 και F_2 είναι οι εσωτερικές δυνάμεις (μέση τιμή) που ασκούνται πάνω στις μπάλες M_1 και M_2 αντίστοιχα.



Σχήμα 1.6: Κρούση σφαιρών

Λύση:

Για να υπολογιστεί η ταχύτητα μετά την κρούση πρέπει να εφαρμοστεί η αρχή διατήρησης της ορμής καθώς επίσης και η αρχή διατήρησης της ενέργειας.

$$P_{\pi\rho\nu} = P_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= m_1 \cdot v'_1 + m_2 \cdot v'_2 \Rightarrow \\
m_1 \cdot v_1 - m_1 \cdot v'_1 &= m_2 \cdot v'_2 - m_2 \cdot v_2 \Rightarrow \\
m_1 \cdot (v_1 - v'_1) &= m_2 \cdot (v'_2 - v_2) \quad (1.5)
\end{aligned}$$

Πρέπει τώρα να χρησιμοποιηθεί η αρχή διατήρησης της ενέργειας (τελείως ελαστική κρούση) έτσι ώστε να σχηματιστεί ακόμη μια εξίσωση:

$$\begin{aligned}
E_{\kappa\pi\rho\nu} &= E_{\kappa\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\
\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2'^2 \Rightarrow \\
m_1 \cdot (v_1^2 - v_1'^2) &= m_2 \cdot (v_2'^2 - v_2^2) \Rightarrow \\
m_1 \cdot (v_1 - v'_1) \cdot (v_1 + v'_1) &= m_2 \cdot (v_2 - v'_2) \cdot (v_2 + v'_2) \quad (1.6)
\end{aligned}$$

Από τις εξισώσεις 1.5 και 1.6 παίρνουμε την εξίσωση 1.7 που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε οποιαδήποτε άσκηση τελείως ελαστικής κρούσης:

$$v_1 + v'_1 = v_2 + v'_2 \quad (1.7)$$

Γίνεται τώρα ο υπολογισμός των ταχυτήτων μετά την κρούση με βάση τις εξισώσεις 1.5 και 1.7. Σαν θετική φορά ταχύτητα λαμβάνεται αυτή προς τα δεξιά, συνεπώς αν το αποτέλεσμα που θα προκύψει είναι αρνητικό τότε η μπάλα θα κινείται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Προσοχή λοιπόν στα πρόσημα και στην αντικατάσταση των ταχυτήτων μέσα στις εξισώσεις. Η ταχύτητα είναι διάνυσμα και συνεπώς πρέπει να λαμβάνεται υπόψιν και το πρόσημο της!

$$\begin{aligned}
m_1 \cdot (v_1 - v'_1) &= m_2 \cdot (v'_2 - v_2) \Rightarrow \\
12 - 2 \cdot v'_1 &= 3 \cdot v'_2 + 6 \Rightarrow \\
v'_2 &= \frac{6 - 2 \cdot v'_1}{3} \quad (1.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}v_1 + v'_1 &= v_2 + v'_2 \Rightarrow \\6 + v'_1 &= -2 + v'_2 \Rightarrow \\v'_2 &= 8 + v'_1\end{aligned}\tag{1.9}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση 1.8 στην 1.9:

$$\begin{aligned}\frac{6 - 2 \cdot v'_1}{3} &= 8 + v'_1 \Rightarrow \\24 + 3 \cdot v'_1 &= 6 - 2 \cdot v'_1 \Rightarrow \\v'_1 &= -3.6 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Υπολογίζεται τώρα η ταχύτητα της δεύτερης σφαίρας μετά την κρούση με με χρήση της εξίσωσης 1.9:

$$\begin{aligned}v'_2 &= 8 + v'_1 \Rightarrow \\v'_2 &= 4.4 \text{ m/s}\end{aligned}$$

Στην συνέχεια πρέπει να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση των ορμών P_1 και P_2 των δύο σφαιρών αντίστοιχα καθώς και της συνολικής ορμής του συστήματος $P_{ολ}$.

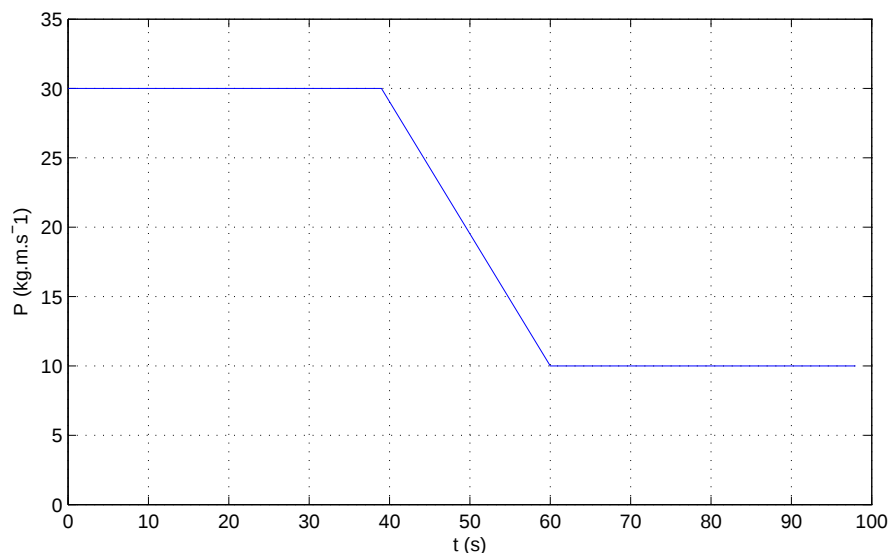
$$\begin{aligned}P_{1\pi\rho\nu} &= m_1 \cdot v_1 = 12\text{m/s} \\P_{1\mu\epsilon\tau\alpha} &= m_1 \cdot v'_1 = -7.2\text{m/s} \\P_{2\pi\rho\nu} &= m_2 \cdot v_2 = -6\text{m/s} \\P_{2\mu\epsilon\tau\alpha} &= m_2 \cdot v'_2 = 13.2\text{m/s}\end{aligned}$$

$$F_1 = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{-7.2 - 12}{0.02} = -960\text{N}$$

$$F_2 = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{13.2 + 6}{0.02} = 960\text{N}$$

Το σχήμα 1.8 δίνει γραφικά τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε σώμα:

Να υπολογιστεί η μάζα m .



Σχήμα 1.9: Γραφική παράσταση ορμής κάθε σώματος

Λύση:

Από τη γραφική παράσταση του σχήματος λαμβάνονται δύο πολύ σημαντικά δεδομένα. Η ορμή του σώματος 1 πριν την κρούση είναι $P_{\pi\rho\nu} = 30 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Μετά την κρούση η ορμή του σώματος είναι $P_{\mu\epsilon\tau\alpha} = 10 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. Βάσει των δεδομένων αυτών μπορεί να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος 1 ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} P_{\mu\epsilon\tau\alpha} &= 10 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow \\ m_1 \cdot v_1 &= 10 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow \\ v_1 &= 10 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Αυτή είναι και η ταχύτητα του συστήματος σωμάτων, γιατί η κρούση είναι πλαστική και συνεπώς τα σώματα θα κινούνται μαζί μετά την κρούση. Χρησιμοποιώντας λοιπόν την αρχή διατήρησης της ορμής μπορεί να υπολογιστεί η μάζα m_2 του δεύτερου σώματος.

$$P_{\pi\rho\nu} = P_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 30 &= (m_1 + m_2) \cdot v_{o\lambda} \Rightarrow \\
 \frac{30}{10} &= 1 + m_2 \Rightarrow \\
 m_2 &= 2 \text{ kg}
 \end{aligned}$$

1.3 Ασκήσεις Κατηγορίας Γ

1. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 26 σελίδα 12:

Μια μπάλα M_1 που έχει μάζα 4 kg και κινείται με ταχύτητα μέτρου 10 m/s συγκρούεται πλαστικά και κεντρικά με μια άλλη μπάλα M_2 που έχει μάζα 16 kg και κινείται πάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητα μέτρου 4 m/s . Η διάρκεια της σύγκρουσης είναι 0.02 s . Τριβές δεν υπάρχουν.

- (α') Να βρείτε την κοινή ταχύτητα των δύο μπαλών μετά την κρούση, αν οι ταχύτητες τους πριν από την κρούση είχαν την ίδια φορά. Να γίνει το ίδιο αν οι ταχύτητες έχουν αντίθετη φορά.
- (β') Για καθεμία από τις πιο πάνω περιπτώσεις να σχεδιάσετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές παραστάσεις της ορμής P_1 και P_2 της κάθε μπάλας καθώς και της συνολικής ορμής $P_{o\lambda}$ του συστήματος σε συνάρτηση με το χρόνο πριν κατά και μετά την κρούση.
- (γ') Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα $F_1 = f(t)$ και $F_2 = f(t)$, όπου F_1 και F_2 οι εσωτερικές δυνάμεις (μέση τιμή) που ασκούνται πάνω στις μπάλες M_1 και M_2 αντίστοιχα.

Λύση:

Αρχικά θα υπολογιστεί η κοινή ταχύτητα των δύο μπαλών αν αυτές έχουν την ίδια φορά και θα κατασκευαστούν τα αντίστοιχα διαγράμματα που αναφέρονται στην εκφώνηση της άσκησης. Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ορμής υπολογίζεται η ταχύτητα των δύο σωμάτων μετά την κρούση:

$$\begin{aligned}
 P_{\pi\rho\nu} &= P_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\
 m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot v_{o\lambda} \Rightarrow \\
 v_{o\lambda} &= \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$v_{o\lambda} = \frac{4 \cdot 10 + 16 \cdot 4}{4 + 16} \Rightarrow$$

$$v_{o\lambda} = 5.2 \text{ m/s}$$

Υπολογίζονται τώρα οι ορμές των σωμάτων 1 και 2 και σχεδιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των ορμών $P_1 = f(t)$, $P_2 = f(t)$ και $P_{o\lambda} = f(t)$.

$$\begin{aligned} P_{1\pi\rho\nu} &= m_1 \cdot v_1 = 4 \cdot 10 \Rightarrow \\ P_{1\pi\rho\nu} &= 40 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{1\mu\epsilon\tau\alpha} &= m_1 \cdot v_{o\lambda} = 4 \cdot 5.2 \Rightarrow \\ P_{1\mu\epsilon\tau\alpha} &= 20.8 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2\pi\rho\nu} &= m_2 \cdot v_2 = 16 \cdot 4 \Rightarrow \\ P_{2\pi\rho\nu} &= 64 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{2\mu\epsilon\tau\alpha} &= m_2 \cdot v_{o\lambda} = 16 \cdot 5.2 \Rightarrow \\ P_{2\mu\epsilon\tau\alpha} &= 83.2 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{o\lambda\pi\rho\nu} &= P_{1\pi\rho\nu} + P_{2\pi\rho\nu} \Rightarrow \\ P_{o\lambda\pi\rho\nu} &= 104 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{o\lambda\mu\epsilon\tau\alpha} &= P_{1\mu\epsilon\tau\alpha} + P_{2\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\ P_{o\lambda\mu\epsilon\tau\alpha} &= 104 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$

Από τις τελευταίες δύο εξισώσεις είναι εμφανές ότι ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής όπως ήταν αναμενόμενο. Στην συνέχεια υπολογίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στις μπάλες με τη χρησιμοποίηση του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής.

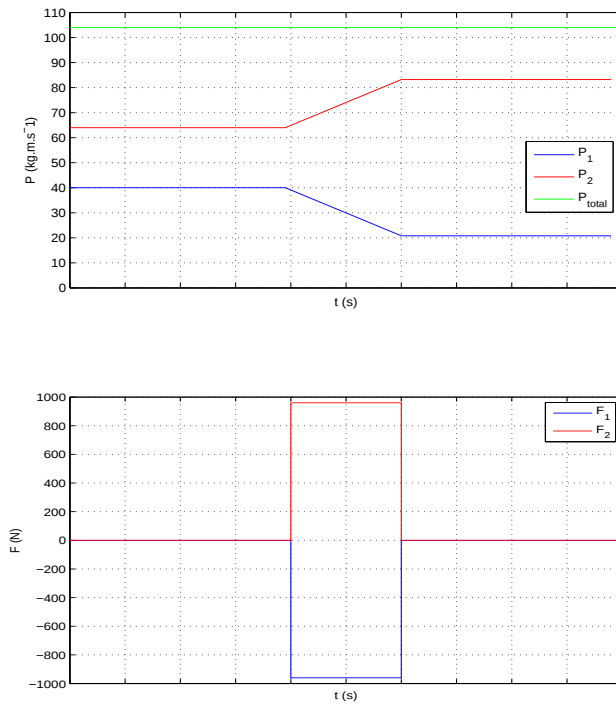
$$F_1 = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{20.8 - 40}{0.02} \Rightarrow$$

$$F_1 = -960 \text{ N}$$

$$F_2 = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{83.2 - 64}{0.02} \Rightarrow$$

$$F_2 = 960 \text{ N}$$

Τα διαγράμματα που ζητούνται φαίνονται στο σχήμα 1.10



Σχήμα 1.10: Διαγράμματα $P = f(t)$ και $E_{\kappa\lambda\nu} = f(t)$

Εν συνεχεία υπολογίζεται η κοινή ταχύτητα των δύο μπαλών αν αυτές έχουν αντίθετη φορά και κατασκευάζονται τα αντίστοιχα διαγράμματα.

$$\begin{aligned}
 P_{\pi\rho\nu} &= P_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\
 m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 &= (m_1 + m_2) \cdot v_{o\lambda} \Rightarrow \\
 v_{o\lambda} &= \frac{m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \\
 v_{o\lambda} &= \frac{4 \cdot 10 - 16 \cdot 4}{4 + 16} \Rightarrow \\
 v_{o\lambda} &= -1.2 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Υπολογίζονται τώρα οι ορμές των σωμάτων 1 και 2 και σχεδιάζονται οι γραφικές παραστάσεις των ορμών $P_1 = f(t)$, $P_2 = f(t)$ και $P_{o\lambda} = f(t)$.

$$\begin{aligned}
 P_{1\pi\rho\nu} &= m_1 \cdot v_1 = 4 \cdot 10 \Rightarrow \\
 P_{1\pi\rho\nu} &= 40 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{1\mu\epsilon\tau\alpha} &= m_1 \cdot v_{o\lambda} = 4 \cdot (-1.2) \Rightarrow \\
 P_{1\mu\epsilon\tau\alpha} &= -4.8 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{2\pi\rho\nu} &= m_2 \cdot v_2 = 16 \cdot (-4) \Rightarrow \\
 P_{2\pi\rho\nu} &= -64 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{2\mu\epsilon\tau\alpha} &= m_2 \cdot v_{o\lambda} = 16 \cdot (-1.2) \Rightarrow \\
 P_{2\mu\epsilon\tau\alpha} &= -19.2 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{o\lambda\pi\rho\nu} &= P_{1\pi\rho\nu} + P_{2\pi\rho\nu} \Rightarrow \\
 P_{o\lambda\pi\rho\nu} &= -24 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{o\lambda\mu\epsilon\tau\alpha} &= P_{1\mu\epsilon\tau\alpha} + P_{2\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\
 P_{o\lambda\mu\epsilon\tau\alpha} &= -24 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-1}
 \end{aligned}$$

Από τις τελευταίες δύο εξισώσεις είναι εμφανές ότι ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής όπως ήταν αναμενόμενο. Στην συνέχεια υπολογί-

ιζονται οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στις μπάλες με τη χρησιμοποίηση του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής.

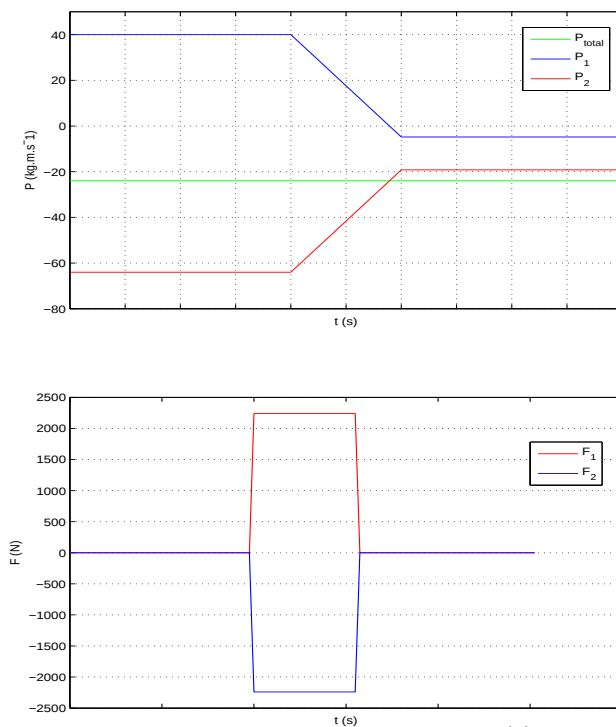
$$F_1 = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{-4.8 - 40}{0.02} \Rightarrow$$

$$F_1 = -2240 \text{ N}$$

$$F_2 = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{-19.2 - (-64)}{0.02} \Rightarrow$$

$$F_2 = 2240 \text{ N}$$

Τα διαγράμματα που ζητούνται φαίνονται στο σχήμα 1.11

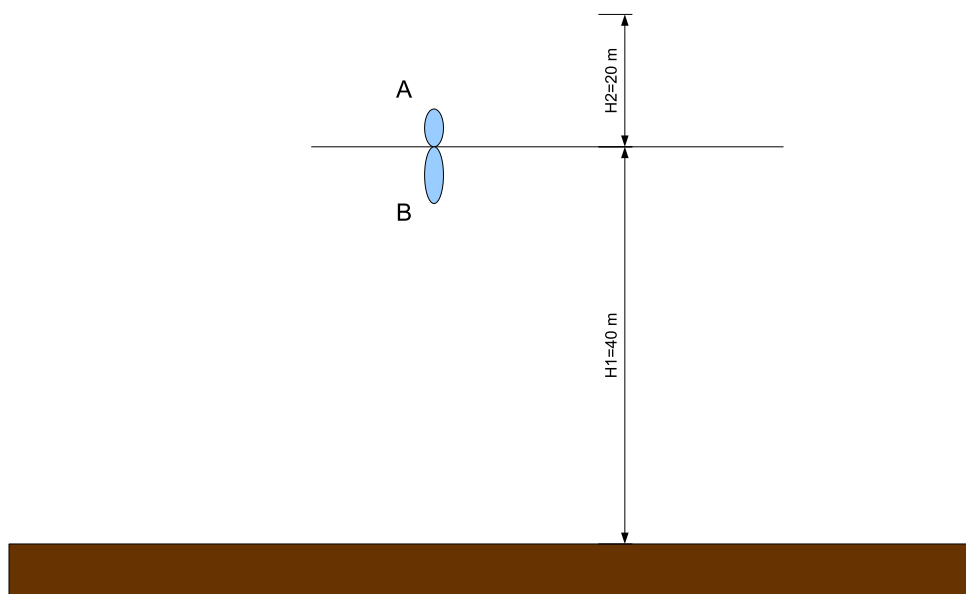


Σχήμα 1.11: Διαγράμματα $P = f(t)$ και $E_{\kappa\iota\nu} = f(t)$

2. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 28 σελίδα 13:

Βλήμα μάζας $m = 3 \text{ kg}$ εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα πάνω. Όταν φτάνει σε ύψος $h_1 = 40 \text{ m}$ η κινητική του ενέργεια μηδενίζεται και αμέσως εκρήγνυται. Το βλήμα διασπάται σε δύο κομμάτια Α και Β που έχουν μάζες $m_A = \frac{m}{3}$ και $m_B = \frac{2m}{3}$. Το κομμάτι Α αμέσως μετά την έκρηξη κινείται προς τα πάνω και φτάνει σε ύψος $h_2 = 20 \text{ m}$ από το σημείο της έκρηξης (βλέπε σχήμα 1.12). Ζητούνται:

- (α) Το μέτρο της ταχύτητας του κομματιού Α αμέσως μετά την έκρηξη.
- (β) Η ταχύτητα του κομματιού Β αμέσως μετά την έκρηξη.
- (γ) Η ενέργεια της έκρηξης.
- (δ) Αν το δεύτερο κομμάτι Β συγκρούεται ελαστικά με το έδαφος και αναπηδά προς τα πάνω πόση είναι η μέση δύναμη που ασκείται σ'αυτο από το έδαφος κατά τη διάρκεια της κρούσης; Διάρκεια επαφής με το έδαφος είναι 10^{-2} s .



Σχήμα 1.12: Έκρηξη βλήματος

Λύση:

Το κομμάτι Α, μετά την έκρηξη φτάνει μέχρι το ύψος των 20 m. Με το δεδομένο αυτό και τις εξισώσεις της κινηματικής μπορεί να υπολογιστεί η ταχύτητα του:

$$v_A = g \cdot t \quad (1.10)$$

$$h = v_A \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 \quad (1.11)$$

$$(1.12)$$

Λύνοντας την εξίσωση 1.10 ως προς t και αντικαθιστώντας την στην 1.11 προκύπτει:

$$t = \frac{v_A}{g}$$

$$h = \frac{v_A^2}{g} - \frac{1}{2} \cdot \frac{v_A^2}{g} \Rightarrow$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot \frac{v_A^2}{g} \Rightarrow$$

$$v_A = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} = 20 \text{ m/s}$$

Εφόσον η κινητική ενέργεια του βλήματος στο ύψος $h_1 = 40 \text{ m}$ μηδενίζεται η ταχύτητα του στο εν λόγω σημείο θα είναι ίση με μηδέν:

$$E_{κιν} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = 0 \Rightarrow$$

$$v^2 = 0 \Rightarrow v = 0$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της ορμής μπορεί να υπολογιστεί η ταχύτητα του κομματιού Β που είναι:

$$P_{\pi\rho\nu} = P_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow$$

$$0 = m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B \Rightarrow$$

$$0 = \frac{m}{3} \cdot 20 + \frac{2m}{3} \cdot v_B \Rightarrow$$

$$v_B = -10 \text{ m/s}$$

Η ενέργεια της έκρηξης θα είναι η κινητική ενέργεια των δύο θραυσμάτων αμέσως μετά την έκρηξη:

$$E_{\varepsilon\kappa\rho} = \frac{1}{2} \cdot m_A \cdot v_A^2 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_B^2 \Rightarrow$$

$$E_{\varepsilon\kappa\rho} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 20^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 10^2 \Rightarrow$$

$$E_{\varepsilon\kappa\rho} = 300 \text{ J}$$

Απομένει τώρα να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί το έδαφος πάνω στο δεύτερο κομμάτι. Για τον υπολογισμό αυτό απαιτείται η ταχύτητα του σώματος Β μόλις φτάνει στο έδαφος. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ταχύτητα αυτή θα είναι η ίδια με την ταχύτητα που θα έχει το σώμα όταν θα εκτινάσσεται από το έδαφος και αυτό γιατί η άσκηση δίνει ότι η κρούση είναι τελείως ελαστική. Ο υπολογισμός της ταχύτητας του κομματιού Β την ώρα που κτυπά αυτό κτυπά το έδαφος θα γίνει με τη βοήθεια του νόμου της διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Η εφαρμογή του νόμου αυτού γίνεται για την χρονική στιγμή που το βλήμα έχει ήδη χωριστεί σε δύο θραύσματα.

$$E_{B0m} = E_{B40m} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_B'^2 = m_B \cdot g \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot m_B \cdot v_B^2 \Rightarrow$$

$$v_B'^2 = 2 \cdot g \cdot h_1 + v_B^2 \Rightarrow$$

$$v_B' = 30 \text{ m/s}$$

Χρησιμοποίηση του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής θα μας δώσει την δύναμη που ασκεί το έδαφος στο σώμα. Προσοχή: πρέπει να ληφθεί υπόψιν και το βάρος του σώματος!

$$F = \frac{\Delta P}{\Delta t} + m \cdot g \Rightarrow$$

$$F = \frac{m_B \cdot (v_B' - v_B)}{\Delta t} + m_B \cdot g \Rightarrow$$

$$F = \frac{2 \cdot (30 - (-30))}{10^{-2}} + 2 \cdot 10 \Rightarrow$$

$$F = 12020 \text{ N}$$

Κεφάλαιο 2

Μηχανική Στερεού Σώματος

2.1 Κατηγορία Α

1. Υποστηρικτικό υλικό - Άσκηση 10 σελίδα 28:

Χορεύτρια στον πάγο με ανοικτά τα χέρια περιστρέφεται γύρω από τον εαυτό της με ρυθμό 2,4 στροφές ανά δευτερόλεπτο. Όταν κλείσει τα χέρια της, η ροπή αδράνειας της ελαττώνεται στα 6/10 της αρχικής της τιμής. Με ποιό ρυθμό περιστρέφεται τότε;

Λύση:

Χρησιμοποιώντας την αρχή της διατήρησης της στροφορμής υπολογίζεται ο ρυθμός περιστροφής της χορεύτριας ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}L_{\pi\rho\nu} &= L_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\I_{\pi\rho\nu} \cdot \omega_{\pi\rho\nu} &= I_{\mu\epsilon\tau\alpha} \cdot \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\I_{\pi\rho\nu} \cdot \omega_{\pi\rho\nu} &= \frac{6}{10} \cdot I_{\pi\rho\nu} \cdot \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\2\pi f_{\mu\epsilon\tau\alpha} &= \frac{10}{6} \cdot 2\pi \cdot 2,4 \Rightarrow \\f_{\mu\epsilon\tau\alpha} &= 4 \text{ στρ/s}\end{aligned}$$

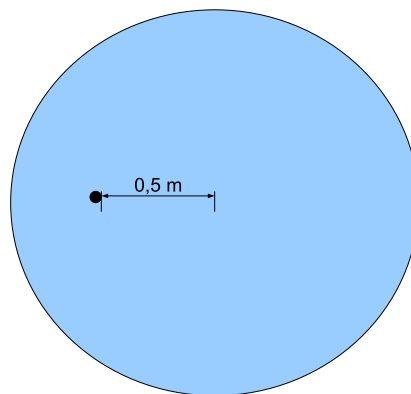
2.2 Κατηγορία Β

1. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 11 σελίδα 28:

Οριζόντιος κυκλικός δίσκος περιστρέφεται ελεύθερα με συχνότητα 1 Hz γύρω από κατακόρυφο άξονα περιστροφής που περνά από

το κέντρο του. Ένα κομμάτι πλαστελίνης με μάζα 8 g αφήνεται να πέσει και να κολλήσει στο δίσκο σε απόσταση 0.5 m από τον άξονα περιστροφής. Τότε η συχνότητα του δίσκου γίνεται 0.8 Hz .

- (α') Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του δίσκου
 (β') Να υπολογίσετε την αρχική κινητική ενέργεια του δίσκου κι την τελική ενέργεια του συστήματος μετά την πτώση της πλαστελίνης. Να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.



Σχήμα 2.1: Σύστημα δίσκου πλαστελίνης σε κάτοψη

Λύση:

Για την επίλυση της άσκησης θα χρησιμοποιηθούν οι πιο κάτω σχέσεις:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \quad (2.1)$$

$$L_{\pi\rho\nu} = L_{\mu\epsilon\tau\alpha} \quad (2.2)$$

$$E_{\kappa\nu} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \quad (2.3)$$

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot \nu \quad (2.4)$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής που είναι η εξίσωση 2.2 και το γεγονός ότι η ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι ίση με την ροπή αδράνειας του δίσκου αν σ αυτήν προστεθεί και η ροπή αδράνειας της πλαστελίνης (βλέπε εξίσωση 2.1), υπολογίζεται η ροπή αδράνειας του δίσκου:

$$\begin{aligned}
L_{\pi\rho\nu} &= L_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\
I_\delta \cdot \omega_\delta &= I_\sigma \cdot \omega_\sigma \Rightarrow \\
I_\delta \cdot \omega_\delta &= (I_\delta + m \cdot r^2) \cdot \omega_\sigma \Rightarrow \\
I_\delta \cdot \omega_\delta - I_\delta \cdot \omega_\sigma &= m \cdot r^2 \cdot \omega_\sigma \Rightarrow \\
I_\delta &= \frac{m \cdot r^2 \cdot \omega_\sigma}{\omega_\delta - \omega_\sigma} \Rightarrow \\
I_\delta &= \frac{0.008 \cdot 0.5^2 \cdot 5.024}{6.28 - 5.024} = 8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογιστεί η αρχική και τελική κινητική ενέργεια του συστήματος. Για το σκοπό αυτό υπολογίζεται και η ροπή αδράνειας του συστήματος:

$$I_\sigma = I_\delta + m \cdot r^2 = 0.01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Υπολογίζονται τώρα η αρχική και τελική ενέργεια λόγω περιστροφής του συστήματος με βάση την εξίσωση 2.3:

$$\begin{aligned}
E_{\alpha\rho\chi} &= \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 10^{-3} \cdot 6.28^2 = 0.1578 \text{ J} \\
E_{\tau\epsilon\lambda} &= \frac{1}{2} \cdot 0.01 \cdot 5.024^2 = 0.1262 \text{ J}
\end{aligned}$$

Παρατήρηση: Η κινητική ενέργεια του συστήματος ελαττώθηκε. Αυτό συμβαίνει γιατί μετά την πώση της πλαστελίνης πάνω στον δίσκο έχει αυξηθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος και για να διατηρηθεί σταθερή η στροφορμή ελατώνεται η γωνιακή ταχύτητα. Η ενέργεια λόγω περιστροφής του σώματος, είναι ανάλογη της ροπής αδράνειας και ανάλογη του τετραγώνου της γωνιακής ταχύτητας, συνεπώς πιο ευαίσθητη σε μεταβολές της γωνιακής ταχύτητας!

2. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 12 σελίδα 28:

Ένας μαθητής κάθεται πάνω σε κάθισμα που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα και έχει τα χέρια του

ανοικτά σε οριζόντια θέση. Η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι $2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Το κάθισμα και ο μαθητής περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα 1.5 rad/s .

- Ο μαθητής φέρνει τα χέρια στο στήθος του οπότε η ροπή αδράνειας του συστήματος ελαττώνεται στα $1.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
 - (α') Να υπολογίσετε τη νέα τιμή της γωνιακής του ταχύτητας
 - (β') Να υπολογίσετε τη μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος. Πού οφείλεται αυτή η μεταβολή;
- Στη συνέχεια ο μαθητής ανοίγει λίγο τα χέρια του και η ροπή αδράνειας του συστήματος γίνεται $1.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Να υπολογίσετε τη νέα κινητική ενέργεια, να συγκρίνετε με τις προηγούμενες τιμές και να εξηγήσετε τα αποτελέσματά σας.

Λύση:

Χρησιμοποιώντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής (στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές), μπορεί να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα στην περίπτωση που ο μαθητής φέρνει τα χέρια στο στήθος του:

$$\begin{aligned} L_{\pi\rho\nu} &= L_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\ I_{\pi\rho\nu} \cdot \omega_{\pi\rho\nu} &= I_{\mu\epsilon\tau\alpha} \cdot \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\ \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha} &= \frac{I_{\pi\rho\nu} \cdot \omega_{\pi\rho\nu}}{I_{\mu\epsilon\tau\alpha}} = 2.5 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

Όπως και στην προηγούμενη άσκηση έτσι και σε αυτή για να υπολογιστεί η μεταβολή στην κινητική ενέργεια χρησιμοποιείται η εξίσωση 2.3:

$$\begin{aligned} E_{\alpha\rho\chi} &= \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 1.5^2 = 2.25 \text{ J} \\ E_{\tau\epsilon\lambda} &= \frac{1}{2} \cdot 1.2 \cdot 2.5^2 = 3.75 \text{ J} \\ \Delta E &= E_{\tau\epsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi} = 1.5 \text{ J} \end{aligned}$$

Στη δεύτερη περίπτωση ο μαθητής ανοίγει λίγο τα χέρια του και η ροπή αδράνειας του γίνεται $1.8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Με τον ίδιο τρόπο όπως και στο προηγούμενο ερώτημα, υπολογίζεται πρώτα η καινούργια γωνιακή ταχύτητα που αποκτά ο μαθητής και στη συνέχεια η κινητική του ενέργεια:

$$\begin{aligned}\omega'_{\mu\epsilon\tau\alpha} &= \frac{I_{\pi\rho\nu}' \cdot \omega_{\pi\rho\nu}'}{I_{\mu\epsilon\tau\alpha}'} \Rightarrow \\ \omega'_{\mu\epsilon\tau\alpha} &= \frac{1.2 \cdot 2.5}{1.8} = 1.67 \text{ rad/s} \\ E'_{\tau\epsilon\lambda} &= \frac{1}{2} \cdot 1.8 \cdot 1.67^2 = 2.5 \text{ J}\end{aligned}$$

3. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 13 σελίδα 28:

Οριζόντιος δίσκος με μάζα 120 kg και ακτίνας 1 m , περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του. Ένας άνθρωπος με μάζα 60 kg βρίσκεται στην περιφέρεια του περιστρεφόμενου δίσκου και έχει γραμμική ταχύτητα 10 m/s . Αν μετακινηθεί στο κέντρο του δίσκου, ποιά θα είναι η μεταβολή στο μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου και ποιά θα είναι η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος;

(Σημείωση: Οι διαστάσεις του ανθρώπου θεωρούνται αμελητέες συγκρινόμενες με αυτές του δίσκου. Ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής είναι: $I = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$)

Λύση:

Από τη γραμμική ταχύτητα του ανθρώπου που βρίσκεται στη περιφέρεια του δίσκου μπορεί να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα του περιστρεφόμενου συστήματος με βάση την πιο κάτω σχέση:

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{10}{1} = 10 \text{ rad/s}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την σχέση της σημείωσης και την εξίσωση 2.1 μπορεί να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας του συστήματος όταν ο άνθρωπος βρίσκεται στην περιφέρεια:

$$\begin{aligned}I_{\sigma\nu\sigma} &= I_{\delta} + m_{\alpha\nu} \cdot r^2 \Rightarrow \\ I_{\sigma\nu\sigma} &= \frac{1}{2} \cdot m_{\delta} \cdot r^2 + m_{\alpha\nu} \cdot r^2 \Rightarrow \\ I_{\sigma\nu\sigma} &= \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 1 + 60 \cdot 1^2 = 120 \text{ kg} \cdot \text{m}^2\end{aligned}$$

Με τον ίδιο τρόπο υπολογίζεται η ροπή αδράνειας του συστήματος όταν ο άνθρωπος μετακινηθεί στο κέντρο του δίσκου :

$$\begin{aligned} I_{\sigma\nu\sigma}' &= I_{\delta} + m_{\alpha\nu} \cdot r'^2 \Rightarrow \\ I_{\sigma\nu\sigma}' &= \frac{1}{2} \cdot m_{\delta} \cdot r^2 + m_{\alpha\nu} \cdot r'^2 \Rightarrow \\ I_{\sigma\nu\sigma}' &= \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 1 + 60 \cdot 0^2 = 60 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της στροφορμής μπορεί να υπολογιστεί η μεταβολή στο μέτρο της γωνιακής ταχύτητας. Στη συνέχεια υπολογίζεται η μεταβολή στην κινητική ενέργεια του συστήματος :

$$\begin{aligned} L_{\pi\rho\nu} &= L_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\ I_{\sigma\nu\sigma} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi} &= I_{\sigma\nu\sigma}' \cdot \omega_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \\ \omega_{\tau\epsilon\lambda} &= \frac{I_{\sigma\nu\sigma} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi}}{I_{\sigma\nu\sigma}'} \Rightarrow \\ \omega_{\tau\epsilon\lambda} &= \frac{120 \cdot 10}{60} = 20 \text{ rad/s} \\ \Delta\omega &= \omega_{\tau\epsilon\lambda} - \omega_{\alpha\rho\chi} = 10 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{\alpha\rho\chi} &= \frac{1}{2} \cdot 120 \cdot 10^2 = 6000 \text{ J} \\ E_{\tau\epsilon\lambda} &= \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 20^2 = 12000 \text{ J} \\ \Delta E &= E_{\tau\epsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi} = 6000 \text{ J} \end{aligned}$$

4. Υποστηρικτικό Υλικό Άσκηση 14 σελίδα 29:

Ένας μαθητής, μάζας 60 kg , βρίσκεται στην άκρη μιάς πλατφόρμας ακτίνας 2 m . Η πλατφόρμα είναι αρχικά ακίνητη και έχει τη δυνατότητα να περιστρέφεται οριζόντια χωρίς τριβές με ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής της $360 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Ο μαθητής ξεκινά να περπατά δεξιόστροφα στην περιφέρεια της πλατφόρμας με γραμμική ταχύτητα 1.5 m/s ως προς το έδαφος.

- (α') Ποιά είναι η γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας;
 (β') Στη συνέχεια περπατά προς το κέντρο της πλατφόρμας και παραμένει εκεί. Ποιά είναι τώρα η γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας;

Λύση:

Το σύστημα αρχικά είναι ακίνητο. Όταν ο μαθητής ξεκινήσει να κινείται δεξιόστροφα πάνω στην πλατφόρμα τότε η πλατφόρμα θα κινηθεί με αντίθετη φορά, αριστερόστροφη έτσι ώστε η συνολική στροφορμή του συστήματος να διατηρηθεί σταθερή όπως προνοεί η αρχή διατήρησης της στροφορμής. Εφαρμόζοντας λοιπόν την αρχή διατήρησης της στροφορμής γίνεται ο υπολογισμός της γωνιακής ταχύτητας της πλατφόρμας:

$$\begin{aligned}
 L_{\pi\rho\nu} &= L_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\
 0 &= I_{\pi\lambda} \cdot \omega_{\pi\lambda} - I_{\alpha\nu} \cdot \omega_{\alpha\nu} \Rightarrow \\
 I_{\pi\lambda} \cdot \omega_{\pi\lambda} &= I_{\alpha\nu} \cdot \omega_{\alpha\nu} \Rightarrow \\
 \omega_{\pi\lambda} &= \frac{I_{\alpha\nu} \cdot \omega_{\alpha\nu}}{I_{\pi\lambda}} = \frac{m_{\alpha\nu} \cdot r_{\alpha\nu}^2 \cdot \omega_{\alpha\nu}}{I_{\pi\lambda}} \Rightarrow \\
 \omega_{\pi\lambda} &= \frac{60 \cdot 2^2 \cdot 0.75}{360} = 0.5 \text{ rad/s}
 \end{aligned}$$

Όπου η γωνιακή ταχύτητα του ανθρώπου υπολογίστηκε από τη σχέση:

$$\omega_{\alpha\nu} = \frac{v}{r} = \frac{1.5}{2} = 0.75 \text{ rad/s}$$

Στη δεύτερη περίπτωση ο μαθητής περπατά προς το κέντρο της πλατφόρμας. Μόλις φτάσει εκεί σταματά. Αυτό σημαίνει ότι η γωνιακή ταχύτητα του γίνεται ίση με μηδέν.

$$\begin{aligned}
 L_{\pi\rho\nu} &= L_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\
 0 &= I_{\pi\lambda} \cdot \omega_{\pi\lambda} - I_{\alpha\nu} \cdot \omega_{\alpha\nu} \Rightarrow \\
 \omega_{\pi\lambda} &= \frac{I_{\alpha\nu} \cdot \omega_{\alpha\nu}}{I_{\pi\lambda}} = \frac{0 \cdot 0}{360} = 0 \text{ rad/s}
 \end{aligned}$$

2.3 Κατηγορία Γ

1. Υποστηρικτικό Υλικό Άσκηση 15 σελίδα 29:

Ένας κύλινδρος με ροπή αδράνειας I_1 περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από ένα κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβή. Ένας δεύτερος κύλινδρος, με ροπή αδράνειας I_2 που αρχικά είναι ακίνητος, πέφτει πάνω στον πρώτο και τελικά αποκτούν και οι δύο την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω .

- (α') Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα ω συναρτήσει των μεγεθών I_1 , I_2 και ω_0 .
- (β') Να υπολογίσετε το λόγο της τελικής προς την αρχική κινητική ενέργεια.
- (γ') Ποιά θα ήταν η απώλεια στην κινητική ενέργεια αν ο δεύτερος κύλινδρος περιστρεφόταν αρχικά και αυτός όπως και ο πρώτος με γωνιακή ταχύτητα ω_0 γύρω από τον κατακόρυφο άξονα χωρίς τριβή;

Λύση:

Ο πρώτος κύλινδρος περιστρέφεται ενώ ο δεύτερος είναι ακίνητος, συνεπώς η στροφορμή του συστήματος πριν ο δεύτερος κύλινδρος πέσει πάνω στον πρώτο είναι ίση με την στροφορμή του πρώτου κυλίνδρου. Στη συνέχεια, όταν πλέον και ο δεύτερος κύλινδρος πέσει, αλλάζει η ροπή αδράνειας του συστήματος και συνεπώς θα αλλάξει και η αρχική γωνιακή ταχύτητα που είχε το σύστημα. Για να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος θα πρέπει να εφαρμοστεί η αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$\begin{aligned} L_{\pi\rho\nu} &= L_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\ I_1 \cdot \omega_0 &= (I_1 + I_2) \cdot \omega \Rightarrow \\ \omega &= \frac{I_1 \cdot \omega_0}{I_1 + I_2} \end{aligned}$$

Πρέπει τώρα να υπολογιστεί ο λόγος της τελικής προς την αρχική ταχύτητα. Η σχέση που δίνει την ενέργεια λόγω περιστροφής είναι:

$$E_{\kappa\nu} = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2$$

Άρα λοιπόν ο λόγος των κινητικών ενεργειών θα είναι:

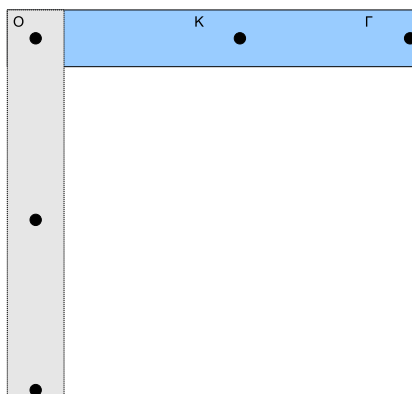
$$\frac{E_{\tau\epsilon\lambda}}{E_{\alpha\rho\chi}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (I_1 + I_2) \cdot \left(\frac{I_1 \cdot \omega_0}{I_1 + I_2}\right)^2}{\frac{1}{2} \cdot I_1 \cdot \omega_0^2} \Rightarrow$$

$$\frac{E_{\tau\epsilon\lambda}}{E_{\alpha\rho\chi}} = \frac{I_1}{I_1 + I_2}$$

2. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 1 σελίδα 135:

Ομογενής ράβδος έχει μήκος $l = 0.4 \text{ m}$ είναι οριζόντια και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της. Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της είναι $I_K = \frac{m \cdot l^2}{12}$. Να υπολογίσετε:

- (α') Τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν φτάσει στην κατακόρυφο θέση.
- (β') Τη γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας Κ και του άκρου Γ της ράβδου στην κατακόρυφη θέση.



Σχήμα 2.2: Περιστρεφόμενη ράβδος ως προς σημείο Ο.

Λύση:

Για τον υπολογισμό της γωνιακής ταχύτητας είναι απαραίτητη η εύρεση της ροπής αδράνειας γύρω από τον άξονα περιστροφής. Δίνεται η ροπή αδράνειας γύρω από άξονα περιστροφής που περνάει από το κέντρο μάζας της ράβδου και ζητείται η ροπή αδράνειας ως προς άξονα περιστροφής που περνάει από το άκρο της. Για να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας ως προς το σημείο Ο υπάρχουν δύο τρόποι:

- Με βάση το θεώρημα Steiner ή αλλιώς το θεώρημα παράλληλων αξόνων.

Το θεώρημα αυτό συνοψίζεται στην εξίσωση 2.5. Όπου I_K είναι η ροπή αδράνειας ως προς άξονα περιστροφής που περνάει από το κέντρο μάζας του σώματος, I_A είναι η ροπή αδράνειας ως προς τον τυχαίο άξονα περιστροφής, m είναι η μάζα του σώματος και x είναι η απόσταση μεταξύ των δύο αξόνων.

$$I_A = I_K + m \cdot x^2 \quad (2.5)$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα αυτό, η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα περιστροφής που περνάει από το σημείο Ο του σχήματος 2.2 είναι:

$$\begin{aligned} I_0 &= I_K + m \cdot x^2 = \frac{m \cdot l^2}{12} + m \cdot x^2 \Rightarrow \\ I_0 &= \frac{m \cdot 0.4^2}{12} + m \cdot 0.2^2 \Rightarrow \\ I_0 &= 0.0533 \cdot m \end{aligned}$$

- Με χρησιμοποίηση πινάκων για καθορισμένα σχήματα που περιστρέφονται γύρω από συγκεκριμένους άξονες περιστροφής. Ένας τέτοιος πίνακας υπάρχει στο βιβλίο *Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου*, στη σελίδα 120. Με βάση αυτόν η ροπή αδράνειας θα είναι:

$$I_0 = \frac{m \cdot l^2}{3} = 0.0533 \cdot m$$

Μπορεί τώρα με βάση τη ροπή αδράνειας να υπολογιστεί η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν αυτή φτάσει στην κατακόρυφη θέση. Η παρατήρηση που πρέπει να γίνει για να επιλυθεί η άσκηση είναι ότι η δυναμική ενέργεια που έχει το σώμα στην οριζόντια θέση θα γίνει περιστροφική και δυναμική ενέργεια στην κατακόρυφη θέση. Ο λόγος που στην κατακόρυφη θέση υπάρχει και δυναμική ενέργεια είναι γιατί το κέντρο μάζας δεν βρίσκεται στο κάτω άκρο της ράβδου αλλά στο μέσο της ράβδου !!!

$$E_{ορ} = E_{κατ} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
 m \cdot g \cdot l &= m \cdot g \cdot \frac{l}{2} + \frac{1}{2} \cdot I_O \cdot \omega^2 \Rightarrow \\
 m \cdot 10 \cdot 0.4 &= m \cdot 10 \cdot \frac{0.4}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0.0533 \cdot m \cdot \omega^2 \Rightarrow \\
 4 &= 2 + 0.0266 \cdot \omega^2 \Rightarrow \\
 \omega &= \sqrt{\frac{4-2}{0.0266}} = 8.67 \text{ rad/s}
 \end{aligned}$$

Για να υπολογιστεί τώρα η γραμμική ταχύτητα του Κ και του Γ πρέπει απλά να γίνει χρήση της σχέσης:

$$v = \omega \cdot r$$

Όπου r θα είναι η απόσταση του σημείου από τον άξονα περιστροφής. Συνεπώς τα αποτελέσματα είναι τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned}
 v_K &= \omega \cdot r = 8.67 \cdot 0.2 = 1.734 \text{ m/s} \\
 v_\Gamma &= \omega \cdot r = 8.67 \cdot 0.4 = 3.468 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

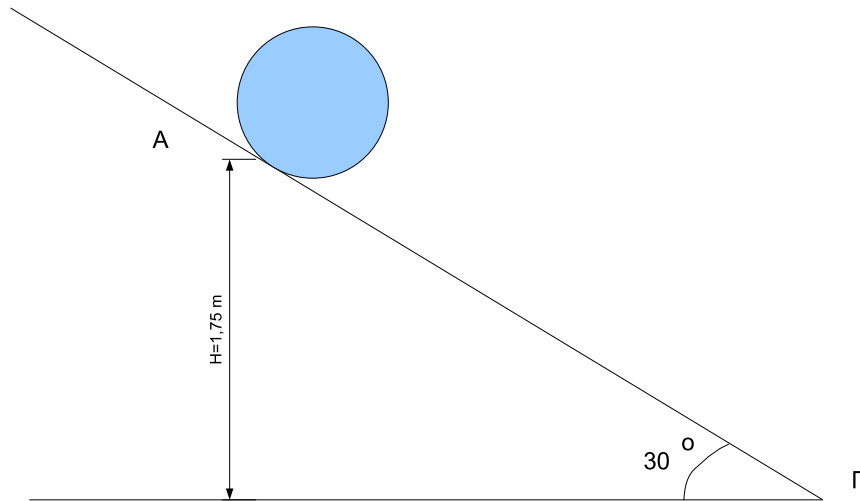
3. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 2 σελίδα 135:

Μια σφαίρα μάζας 0.2 kg και ακτίνας $R = 0.1 \text{ m}$ έχει ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα συμμετρίας της $I_K = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$ και αφήνεται να κυλήσει από ύψος 1.75 m πάνω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο, γωνιάς κλίσεως 30° χωρίς να γλιστρά 2.3. Να υπολογίσετε:

- (α') Την ταχύτητα της στο κατώτατο σημείο Γ
- (β') Τη γωνιακή ταχύτητα ω της σφαίρας
- (γ') Την κινητική ενέργεια της μεταφορικής και της περιστροφικής κίνησης της σφαίρας στο κατώτατο σημείο Γ του κεκλιμένου επιπέδου.

Λύση:

Αρχικά θα πρέπει να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφαίρας στο κατώτατο σημείο, Γ. Αυτό γίνεται με την αρχή διατήρησης της ενέργειας.



Σχήμα 2.3: Κίνηση μπάλας σε κεκλιμένο επίπεδο.

Το σώμα κατά τη διάρκεια της κύλισης του δεν ολισθαίνει, συνεπώς η δυναμική ενέργεια που έχει στη θέση Α θα γίνει κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής στη θέση Γ. Για την επίλυση της άσκησης είναι αναγκαίο να σημειωθεί ο άξονας περιστροφής. Κατά την κύλιση της η σφαίρα αλλάζει συνεχώς τον άξονα γύρο από τον οποίο περιστρέφεται, λόγω όμως της συμμετρίας της ο εκάστοτε άξονας περιστροφής, που είναι κάθετος στο επίπεδο του σχήματος 2.3 και περνάει από το σημείο επαφής της σφαίρας με το κεκλιμένο επίπεδο, έχει την ίδια ροπή αδράνειας!

Αρχικά λοιπόν θα γίνει ο υπολογισμός της ροπής αδράνειας του άξονα περιστροφής. Όπως και στην προηγούμενη άσκηση έτσι και εδώ υπάρχουν δύο τρόποι για να γίνει αυτό: είτε με το θεώρημα των παράλληλων αξόνων είτε με τη χρήση πίνακα, ροπών αδρανείας.

$$I_0 = I_K + m \cdot x^2 = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2 + m \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$I_0 = \frac{2 \cdot 0.2 \cdot 0.1^2}{5} + 0.2 \cdot 0.1^2 \Rightarrow$$

$$I_0 = 2.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$E_A = E_\Gamma \Rightarrow$$

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{I_0}} = 50 \text{ rad/s}$$

Η ταχύτητα της σφαίρας, που είναι στην ουσία η ταχύτητα του κέντρου μάζας της, μπορεί να υπολογιστεί με βάση τη σχέση:

$$v_K = \omega \cdot R = 5 \text{ m/s}$$

Στη συνέχεια υπολογίζονται η μεταφορική και περιστροφική ενέργεια της σφαίρας στο σημείο Γ:

$$E_{\mu\epsilon\tau} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_K^2 = 2.5 \text{ J}$$

$$E_{\pi\epsilon\rho} = \frac{1}{2} \cdot I_0 \cdot \omega^2 = 3.5 \text{ J}$$

4. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 4 σελίδα 135:

Ένα άτομο κάθεται σε κάθισμα που περιστρέφεται σε κατακόρυφο άξονα και έχει τα χέρια του ανοικτά σε οριζόντια θέση. Η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι $2.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Το κάθισμα και το άτομο περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2 \text{ rad/s}$. Το άτομο κατεβάζει τα χέρια κάτω στο σώμα του, οπότε η ροπή αδράνειας του συστήματος γίνεται $0.5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Να υπολογίσετε:

- (α) Τη νέα τιμή της γωνιακής ταχύτητας
- (β) Την κινητική ενέργεια πριν κατεβάσει τα χέρια του και μετά που κατέβασε τα χέρια του.

Λύση:

Με χρησιμοποίηση της αρχής διατήρησης της στροφορμής, εφόσον στο σώμα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές, υπολογίζεται η γωνιακή ταχύτητα:

$$\begin{aligned}
 L_{\pi\rho\nu} &= L_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\
 I_{\sigma} \cdot \omega_{\pi\rho\nu} &= I_{\sigma}' \cdot \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\
 \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha} &= \frac{I_{\sigma} \cdot \omega_{\pi\rho\nu}}{I_{\sigma}'} = \frac{2.5 \cdot 2}{0.5} \Rightarrow \\
 \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha} &= 10 \text{ rad/s}
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η κινητική ενέργεια πριν και μετά την αλλαγή της θέσης των χεριών του ατόμου αντίστοιχα:

$$\begin{aligned}
 E_{\pi\rho\nu} &= \frac{1}{2} \cdot I_{\sigma} \cdot \omega_{\pi\rho\nu}^2 = 5 \text{ J} \\
 E_{\mu\epsilon\tau\alpha} &= \frac{1}{2} \cdot I_{\sigma}' \cdot \omega_{\mu\epsilon\tau\alpha}^2 = 25 \text{ J}
 \end{aligned}$$

2.4 Ασκήσεις που δόθηκαν σε διαγωνίσματα και εξετάσεις

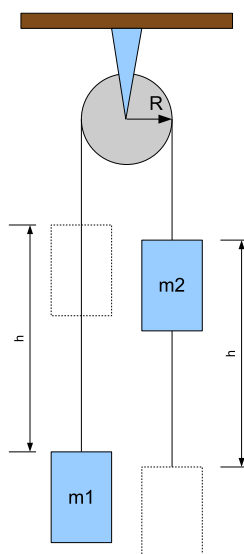
1. Διαγώνισμα - Λύκειο Κύκκου Β' 2007-2008:

Δύο σώματα με μάζες m_1 και m_2 συνδέονται με αβαρές σχοινί μέσω μιάς τροχαλίας με ροπή αδράνειας I . Τα δύο σώματα βρίσκονται αρχικά ακίνητα στις θέσεις που φαίνονται στο σχήμα 2.4. Αν η συνολική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή, να αποδείξετε ότι η γραμμική ταχύτητα των δύο σωμάτων μετά που αφήνονται ελεύθερα και μετακινούνται κατα ύψος h δίνεται από τη σχέση:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot (m_2 - m_1) \cdot g \cdot h}{m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}}}$$

Λύση:

Για να επιλυθεί η άσκηση πρέπει να γίνει χρήση του θεωρήματος διατήρησης της μηχανικής ενέργειας. Αν ληφθεί σαν στάθμη δυναμικής ενέργειας μηδέν η θέση που βρίσκεται αρχικά το σώμα 1 τότε η ενέργεια του συστήματος πριν να αφεθούν ελεύθερα τα σώματα είναι η δυναμική ενέργεια που έχει το σώμα 2. Όταν το σώμα 2 κατεβεί απόσταση h τότε



Σχήμα 2.4: Σύστημα σωμάτων αναρτημένων σε τροχαλία.

η ενέργεια του συστήματος θα είναι η δυναμική και κινητική ενέργεια του σώματος 1, η κινητική ενέργεια του σώματος 2 και η περιστροφική ενέργεια της τροχαλίας.

$$\begin{aligned}
 E_{\text{πρην}} &= E_{\text{μετα}} \Rightarrow \\
 m_2 \cdot g \cdot h &= m_1 \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot I_{\tau\rho\chi} \cdot \omega^2 \Rightarrow \\
 m_2 \cdot g \cdot h &= m_1 \cdot g \cdot h + v^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot m_1 + \frac{1}{2} \cdot m_2 + \frac{1}{2} \cdot I_{\tau\rho\chi} \cdot \frac{1}{R^2} \right) \Rightarrow \\
 v^2 &= \frac{2 \cdot (m_2 \cdot g \cdot h - m_1 \cdot g \cdot h)}{m_1 + m_2 + \frac{I_{\tau\rho\chi}}{R^2}} \Rightarrow \\
 v &= \sqrt{\frac{2 \cdot (m_2 \cdot g \cdot h - m_1 \cdot g \cdot h)}{m_1 + m_2 + \frac{I_{\tau\rho\chi}}{R^2}}}
 \end{aligned}$$

2. Εισαγωγικές - 1986:

Δύο παγοδρόμοι της ίδιας μάζας κρατιούνται με τα χέρια τους τεντωμένα ο ένας απέναντι στον άλλο και περιστρέφονται γύρω από κατακόρυφο άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω_1 . Να βρείτε τη νέα τους

γωνιακή ταχύτητα ω_2 , αν πλησιάσουν ο ένας τον άλλο στο μισό της απόστασης που τους χωρίζει.

Λύση:

Στο σύστημα των δύο παγοδρόμων δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές και επομένως η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή. Οι δύο παγοδρόμοι σε κάποια στιγμή επιλέγουν να ελαττώσουν την απόσταση τους στο μισό, άρα, η ροπή αδράνειας του συστήματος μεταβάλλεται. Η αρχική και τελική ροπή αδράνειας υπολογίζονται πιο κάτω:

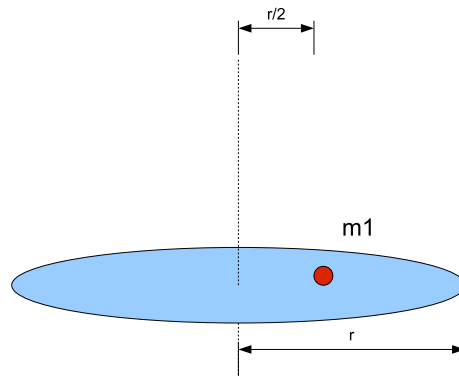
$$\begin{aligned} I_{\alpha\rho\chi} &= \sum_{i=1}^2 m_i \cdot r_i^2 = m_1 \cdot r^2 + m_2 \cdot r^2 \\ I_{\tau\epsilon\lambda} &= \sum_{i=1}^2 m_i \cdot r_i^2 = m_1 \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 + m_2 \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 \\ I_{\alpha\rho\chi} &= 4 \cdot I_{\tau\epsilon\lambda} \end{aligned}$$

Εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής δίνει:

$$\begin{aligned} L_{\pi\rho\nu} &= L_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\ I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_1 &= I_{\tau\epsilon\lambda} \cdot \omega_2 \Rightarrow \\ I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_1 &= \frac{1}{4} \cdot I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_2 \Rightarrow \\ \omega_2 &= 4 \cdot \omega_1 \end{aligned}$$

3. Εισαγωγικές - 1993:

Σφαίρα πλαστελίνης m_1 απέχει απόσταση $\frac{r}{2}$ από το κέντρο οριζόντιου δίσκου ακτίνας r . Ο δίσκος έχει μάζα $m_\delta = 2 \cdot m_1$. Ο δίσκος αρχικά περιστρέφεται με αρχική συχνότητα ν_1 . Κάποια στιγμή η σφαίρα εκτινάσσεται με εσωτερικό μηχανισμό από τη θέση της και προσκολλάται στο τοίχωμα του δίσκου. Τότε η συχνότητα περιστροφής γίνεται ίση με $\nu_2 = 10 \text{ Hz}$. Οι απώλειες ενέργειας θεωρούνται αμελητέες. Να υπολογιστεί η αρχική συχνότητα ν_1 του συστήματος. Η ροπή αδράνειας του δίσκου είναι $I_\delta = \frac{1}{2} \cdot m_\delta \cdot r^2$



Σχήμα 2.5: Σύστημα δίσκου - σώματος.

Λύση:

Πρώτα πρέπει να υπολογιστεί η αρχική ροπή αδράνειας του συστήματος, όταν δηλαδή το σώμα βρίσκεται στη θέση που δείχνει το σχήμα 2.5 και στη συνέχεια να υπολογιστεί η αντίστοιχη τελική.

$$I_{\alpha\rho\chi} = m_1 \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^2 + I_\delta = m_1 \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot m_\delta \cdot r^2 \Rightarrow$$

$$I_{\alpha\rho\chi} = \frac{5}{4} \cdot m_1 \cdot r^2$$

$$I_{\tau\varepsilon\lambda} = m_1 \cdot r^2 + I_\delta = m_1 \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot m_\delta \cdot r^2$$

$$I_{\tau\varepsilon\lambda} = 2 \cdot m_1 \cdot r^2$$

Μπορεί τώρα να υπολογιστεί η αρχική συχνότητα με βάση την αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$\begin{aligned} L_{\pi\rho\iota\nu} &= L_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\ I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_1 &= I_{\tau\varepsilon\lambda} \cdot \omega_2 \Rightarrow \\ \frac{5}{4} m_1 r^2 \cdot 2\pi\nu_1 &= 2m_1 r^2 \cdot 2\pi\nu_2 \Rightarrow \\ \nu_1 &= \frac{8}{5} \cdot \nu_2 = 16 \text{ Hz} \end{aligned}$$

4. Ενιαίες - 1996:

Οριζόντιος δίσκος ακτίνας $R = 20 \text{ cm}$ μάζας $M_\delta = 0.5 \text{ kg}$ περιστρέφεται με συχνότητα $\nu_1 = 120 \frac{\text{cycles}}{\text{min}}$ γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του. Ένα μικρό πουλί μάζας $m = 100 \text{ g}$ στέκεται πάνω στο δίσκο σε απόσταση $r = 10 \text{ cm}$ από τον άξονα περιστροφής. Να βρεθεί η συχνότητα περιστροφής του δίσκου, όταν το πουλί εγκαταλείψει τον δίσκο.

Λύση:

Υπολογίζονται η ροπή αδράνειας πριν να εγκαταλείψει το πουλί το δίσκο και μετά:

$$\begin{aligned} I_{\alpha\rho\chi} &= m_{\text{πουλιου}} \cdot r^2 + I_\delta = m_{\text{πουλιου}} \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot m_\delta \cdot R^2 \Rightarrow \\ I_{\alpha\rho\chi} &= 10^{-3} + 0.01 = 0.011 \\ I_{\tau\varepsilon\lambda} &= I_\delta = 0.01 \end{aligned}$$

Μπορεί τώρα να υπολογιστεί η αρχική συχνότητα με βάση την αρχή διατήρησης της στροφορμής:

$$\begin{aligned} L_{\pi\rho\nu} &= L_{\mu\varepsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\ I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_1 &= I_{\tau\varepsilon\lambda} \cdot \omega_2 \Rightarrow \\ 0.011 \cdot 2\pi\nu_1 &= 0.01 \cdot 2\pi\nu_2 \Rightarrow \\ \nu_2 &= \frac{0.011}{0.01} \cdot \nu_1 \Rightarrow \\ \nu_2 &= 132 \frac{\text{cycles}}{\text{min}} = 132 \frac{\text{cycles}}{60 \text{ s}} \Rightarrow \\ \nu_2 &= 2.2 \text{ Hz} \end{aligned}$$

5. Εισαγωγικές - 1997:

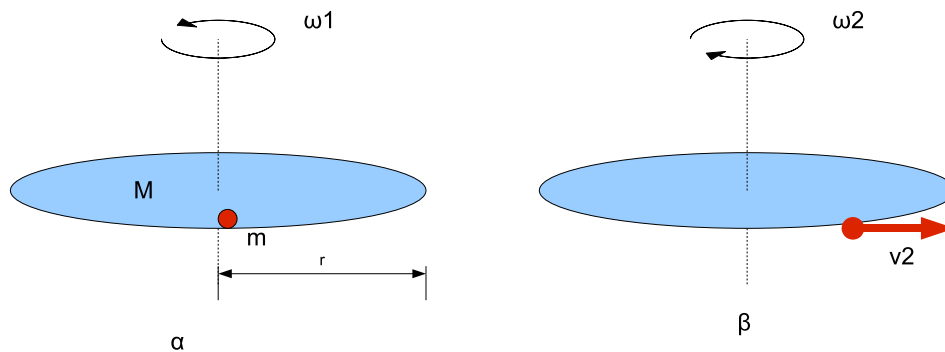
Υλικό σημείο μάζας m βρίσκεται στην περιφέρεια του δίσκου μάζας M και ακτίνας r . Ο δίσκος περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω_1 γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο του στο σημείο K . Με εσωτερικό μηχανισμό το υλικό σημείο εκτοξεύεται οριζόντια με ταχύτητα v_2 . Σαν αποτέλεσμα ο δίσκος περιστρέφεται αντίστροφα με γωνιακή ταχύτητα ω_2 . Ζητούνται:

(α') Να εκφράσετε τη στροφορμή του συστήματος μόλις πριν την εκτόξευση και αμέσως μετά από αυτή

(β') Αν δίνονται τα ακόλουθα δεδομένα :

$$M = 2kg, \quad r = 1m, \quad \omega_1 = 10rad/s, \quad \omega_2 = 15rad/s, \quad m = 0.1kg, \quad \Delta t_{εκτοξευσης} = 0.1s, \quad I_\delta = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r^2$$

- Την ταχύτητα v_2
- Τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος
- Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο διάγραμμα τη στροφορμή του δίσκου και τη στροφορμή του υλικού σημείου ως προς το Κ συναρτήσει του χρόνου από $t = 0s$ ως $t = 0.5s$, θεωρώντας ότι η εκτόξευση αρχίζει τη χρονική στιγμή $t = 0.2s$



Σχήμα 2.6: Σύστημα δίσκου - σώματος, α) Πρίν β) Μετά.

Λύση :

Θα εκφραστεί η στροφορμή του συστήματος πριν από την εκτόξευση του σώματος. Για το σκοπό αυτό υπολογίζεται η ροπή αδράνειας του συστήματος πριν την εκτοξευση και βάση αυτής γράφεται η στροφορμή :

$$\begin{aligned} I_{\alpha\rho\chi} &= m \cdot r^2 + I_\delta = m \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 \\ L_{\alpha\rho\chi} &= I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_1 \Rightarrow \\ L_{\alpha\rho\chi} &= \left(m \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 \right) \cdot \omega_1 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια πρέπει να εκφραστεί η στροφορμή του συστήματος μετά την εκτόξευση του σώματος. Εδώ πρέπει να γίνει μια σημαντική παρατήρηση :

Η στροφορμή είναι διάνυσμα και επομένως η φορά της παίζει ρόλο στους υπολογισμούς. Επειδή το σώμα εκτοξεύεται εφαπτομενικά από το δίσκο σε μια διεύθυνση και ο δίσκος κινείται στην αντίθετη διεύθυνση η στροφορμές θα είναι αντίθετες. (Υπενθύμιση της σχέσης $v = \omega \cdot r$).

$$\begin{aligned} L_{\tau\epsilon\lambda} &= I_{\delta} \cdot \omega_2 - I_{\sigma\omega\mu\alpha} \cdot \frac{v_2}{r} \Rightarrow \\ L_{\tau\epsilon\lambda} &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 \cdot \omega_2 - m \cdot r^2 \cdot \frac{v_2}{r} \Rightarrow \\ L_{\tau\epsilon\lambda} &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 \cdot \omega_2 - m \cdot r^2 \cdot \frac{v_2}{r} \Rightarrow \\ L_{\tau\epsilon\lambda} &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 \cdot \omega_2 - m \cdot v_2 \cdot r \end{aligned}$$

Έχουν εξαχθεί οι εξισώσεις. Χρησιμοποίηση των προηγούμενων εξισώσεων και των αριθμητικών δεδομένων της άσκησης απαντά και στα υπόλοιπα ερωτήματα της άσκησης.

Η ταχύτητα v_2 υπολογίζεται από την εφαρμογή της αρχής διατήρησης της στροφορμής:

$$\begin{aligned} L_{\alpha\rho\chi} &= L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow \\ (m \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2) \cdot \omega_1 &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 \cdot \omega_2 - m \cdot v_2 \cdot r \Rightarrow \\ v_2 &= \frac{\frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2 \cdot \omega_2 - (m \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2) \cdot \omega_1}{m \cdot r} \Rightarrow \\ v_2 &= \frac{0.5 \cdot 2 \cdot 1^2 \cdot 15 - (0.1 \cdot 1^2 + 0.5 \cdot 2 \cdot 1^2) \cdot 10}{0.1 \cdot 1} \Rightarrow \\ v_2 &= 40 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογιστεί η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος. Η κινητική ενέργεια του συστήματος πριν από την εκτόξευση είναι η ενέργεια λόγω περιστροφής του συστήματος. Μετά την εκτόξευση είναι η ενέργεια λόγω περιστροφής του δίσκου και η κινητική ενέργεια λόγω μεταφοράς του σώματος:

$$E_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} \cdot I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_1^2 = \frac{1}{2} \cdot (m \cdot r^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2) \cdot \omega_1^2 \Rightarrow$$

$$E_{\alpha\rho\chi} = 0.5 \cdot (0.1 \cdot 1^2 + 0.5 \cdot 2 \cdot 1^2) \cdot 10^2 \Rightarrow$$

$$E_{\alpha\rho\chi} = 55 \quad J$$

$$E_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} \cdot I_{\delta} \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \Rightarrow$$

$$E_{\tau\varepsilon\lambda} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot M \cdot r^2\right) \cdot \omega_2^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_2^2 \Rightarrow$$

$$E_{\tau\varepsilon\lambda} = 0.5 \cdot (0.5 \cdot 2 \cdot 1^2) \cdot 15^2 + 0.5 \cdot 0.1 \cdot 40^2 \Rightarrow$$

$$E_{\tau\varepsilon\lambda} = 192.5 \quad J$$

$$\Delta E = E_{\tau\varepsilon\lambda} - E_{\alpha\rho\chi} = 192.5 - 55 \Rightarrow$$

$$\Delta E = 137.5 \quad J$$

Απομένει τώρα η γραφική παράσταση των στροφορμών δίσκου και σώματος συναρτήσει του χρόνου. Οι στροφορμές δίσκου και σώματος πριν από την εκτόξευση είναι αντίστοιχα:

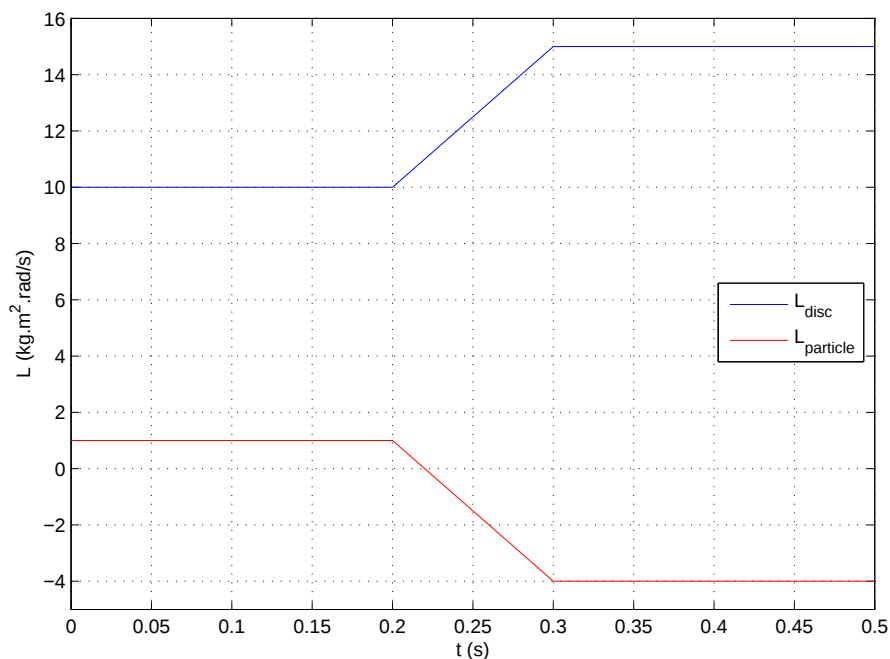
$$L_{\delta} = I_{\delta} \cdot \omega_1 = 10 \quad kg \cdot m^2 \cdot rad/s$$

$$L_{\sigma} = I_{\sigma} \cdot \omega_1 = 1 \quad kg \cdot m^2 \cdot rad/s$$

Οι στροφορμές δίσκου και σώματος μετά από την εκτόξευση είναι αντίστοιχα:

$$L_{\delta} = I_{\delta} \cdot \omega_2 = 15 \quad kg \cdot m^2 \cdot rad/s$$

$$L_{\sigma} = I_{\sigma} \cdot \frac{v_2}{r} = -4 \quad kg \cdot m^2 \cdot rad/s$$



Σχήμα 2.7: Στροφορμή δίσκου (μπλέ) και σώματος (κόκκινο)

Παρατηρήσεις:

- Εκείνο που μπορεί εύκολα να διακρίνει κάποιος είναι ότι επαληθεύεται η αρχή διατήρησης της στροφορμής γιατί το σύστημα δεν δέχεται την επίδραση εξωτερικών ροπών.
- Η κλίση των δύο ευθειών της γραφικής παράστασης 2.7 έχει την ίδια αριθμητική τιμή με αντίθετο πρόσημο. Υπενθυμίζεται εδώ ότι η κλίση της γραφικής παράστασης είναι η ροπή που ασκείται σε κάθε σώμα.

$$\begin{aligned}
 M &= I \cdot a = I \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \\
 &= \frac{I \cdot (\omega_{\tau\epsilon\lambda} - \omega_{\alpha\rho\chi})}{\Delta t} \\
 &= \frac{L_{\tau\epsilon\lambda} - L_{\alpha\rho\chi}}{\Delta t} \Rightarrow \\
 M &= \frac{\Delta L}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

Γίνεται αντιληπτό ότι οι ροπές που ασκούνται στα σώματα είναι ίσες κατα μέτρο και αντίθετης φοράς, όπως άλλωστε αναμενόταν.

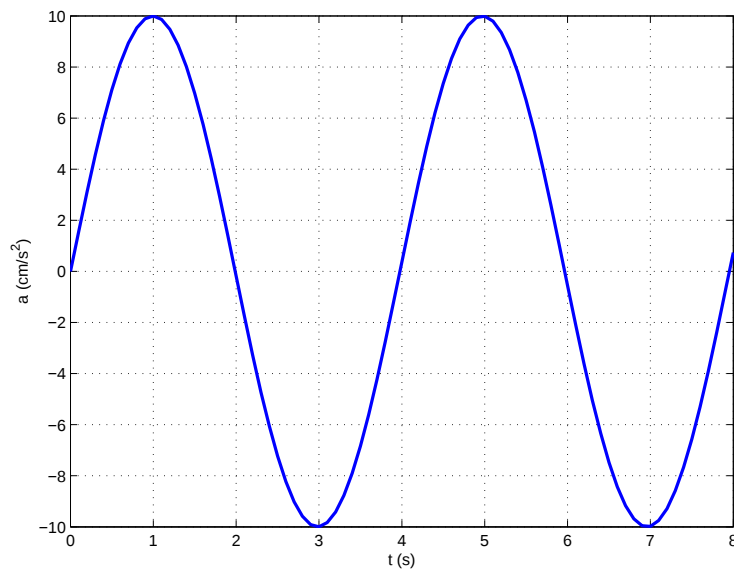
Κεφάλαιο 3

Ταλαντώσεις

3.1 Κατηγορία Α

1. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 3 σελίδα 41:

Ένα σώμα εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο $a = f(t)$ φαίνεται στο σχήμα 3.1. Να βρεθεί η θέση του σώματος τη χρονική στιγμή $t = 0.5 \text{ s}$ όπου $\pi^2 = 10$.



Σχήμα 3.1: Επιτάχυνση συναρτήσει της ταχύτητας στη Γ.Α.Τ

Λύση:

Από τη γραφική παράσταση θα ληφθούν όλα τα απαραίτητα στοιχεία έτσι ώστε να μπορέσει να προσδιοριστεί η θέση του σώματος στο $t = 5s$. Τα δεδομένα που εξάγονται από τη γραφική παράσταση είναι τα ακόλουθα:

- Η περίοδος (ένας πλήρης κύκλος) ισούται με $T = 4s$
- Το πλάτος της επιτάχυνσης είναι $a = 10cm/s^2$

Από τα δεδομένα αυτά θα υπολογιστεί η κυκλική συχνότητα ω καθώς επίσης και το πλάτος ταλάντωσης y_0 .

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot \sqrt{10}}{4} = 1.58$$

$$a_0 = \omega^2 \cdot y_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{a_0}{\omega^2} = \frac{10}{\left(\frac{2\pi}{4}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = 4 \text{ cm}$$

Η γενική εξίσωση της γραμμικής αρμονικής ταλάντωσης είναι:

$$y = y_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

Παραγωγίζοντας τη σχέση αυτή δυο φορές λαμβάνεται η εξίσωση της επιτάχυνσης:

$$y = y_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (3.1)$$

$$\frac{dy}{dt} = v = v_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (3.2)$$

$$\frac{dv}{dt} = a = -y_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (3.3)$$

Από τη γραφική παράσταση μπορεί να προσδιοριστεί η αρχική φάση ϕ και να χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια για τον υπολογισμό της θέσης.

Ένα ζεύγος σημείων που λαμβάνεται από τη γραφική παράσταση είναι $t = 1s \rightarrow a = 10 \frac{cm}{s^2}$. Από την εξίσωση 3.3 και το προηγούμενο ζεύγος σημείων προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} a &= -y_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \\ \Rightarrow 10 &= -4 \cdot \left(\frac{2\pi}{4}\right)^2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{4} \cdot 1 + \phi\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 &= \sin\left(\frac{\pi}{2} + \phi\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \phi &= \pi \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας όλα τα προηγούμενα αποτελέσματα στην εξίσωση 3.1 υπολογίζεται η θέση:

$$\begin{aligned} y &= y_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= 4 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{4} \cdot 0.5 + \pi\right) = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ \Rightarrow y &= -2\sqrt{2} \end{aligned}$$

2. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 4 σελίδα 41:

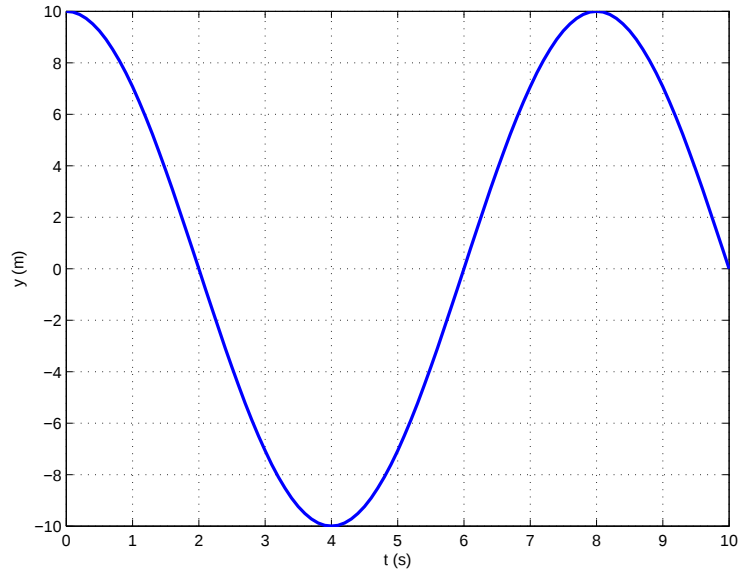
Η γραφική παράσταση του σχήματος 3.2 δείχνει τη θέση y σε συνάρτηση με το χρόνο t ενός σώματος που εκτελεί Γ.Α.Τ. Να εξηγήσετε αν:

- (α') Η ταχύτητα είναι μέγιστη όταν $t = 4s$
- (β') Η δύναμη επαναφοράς είναι μηδέν όταν $t = 2s$
- (γ') Η απομάκρυνση είναι μέγιστη όταν $t = 8s$
- (δ') Η επιτάχυνση έχει μέγιστο μέτρο όταν $t = 8s$
- (ε') Η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη όταν $t = 4s$

Λύση:

Η άσκηση αυτή δίνεται για την κατανόηση ορισμένων χαρακτηριστικών των γραφικών παραστάσεων στις ταλαντώσεις.

- (α') Για $t = 4s$ η ταχύτητα μηδενίζεται. Αυτό συμβαίνει γιατί το σώμα βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση του. Φτάνει λοιπόν την μέγιστη απομάκρυνση σταματάει και στη συνέχεια θα κινηθεί προς την αντίθετη κατεύθυνση.



Σχήμα 3.2: Απομάκρυνση συναρτήσει της ταχύτητας στη Γ.Α.Τ

- (β') Για $t = 2s$ το σώμα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας $y = 0$. Συνεπώς στη θέση αυτή η δύναμη είναι μηδέν.
- (γ') Για $t = 8s$ φαίνεται καθαρά από τη γραφική παράσταση ότι το σώμα βρίσκεται σε μέγιστη απομάκρυνση.
- (δ') Για $t = 8s$ εφόσον το σώμα έχει μέγιστη απομάκρυνση σημαίνει ότι και το μέτρο της επιτάχυνσης θα είναι μέγιστο. Αυτό φαίνεται και μαθηματικά αν χρησιμοποιηθούν οι σχέσεις 3.1 και 3.3

$$\begin{aligned} y &= y_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ a &= -y_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \phi) \\ a &= -\omega^2 \cdot y \end{aligned}$$

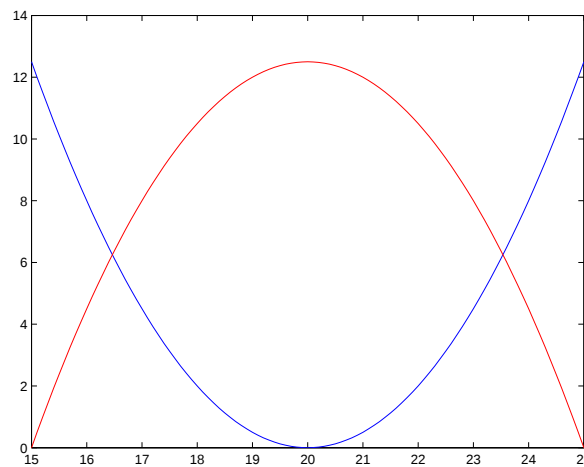
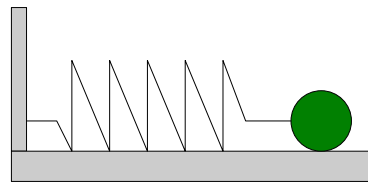
- (ε') Για $t = 4s$ ο ταλαντωτής βρίσκεται σε μέγιστη απομάκρυνση. Η δυναμική ενέργεια είναι μέγιστη πράγμα που μπορεί εύκολα να επαληθευτεί και μαθηματικά με βάση την πιο κάτω σχέση. Αν όπου y τοποθετηθεί y_{max} τότε λαμβάνεται η μέγιστη δυναμική ενέργεια:

$$E_{δυν} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2$$

3. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 5 σελίδα 42:

Στο άκρο ενός ιδανικού ελατηρίου με φυσικό μήκος l_0 και σταθερά ελατηρίου K είναι συνδεδεμένο σώμα μάζας m όπως δείχνει το σχήμα 3.3.

- (α') Ποιά από τις καμπύλες του διαγράμματος αντιστοιχεί στη δυναμική ενέργεια του ελατηρίου και ποιά στην κινητική ενέργεια του σώματος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.
- (β') Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της ολικής ενέργειας πάνω στο ίδιο σχήμα με τις άλλες δύο γραφικές παραστάσεις.



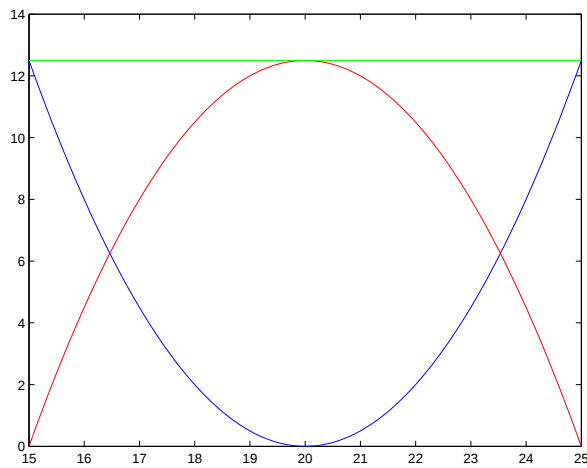
Σχήμα 3.3: Δυναμική και κινητική ενέργεια σώματος σε ελατήριο

Λύση:

Για τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.3 θεωρήθηκε αυθαίρετα (για να μπορέσει να σχεδιαστεί με το λογισμικό MatLab) ότι το μήκος του ελατηρίου $l_0 = 20\text{cm}$ και ότι $x_0 = 5\text{cm}$. Η κόκκινη καμπύλη είναι η καμπύλη της κινητικής ενέργειας του σώματος. Αυτό μπορεί να το διακρίνει εύκολα κανείς από το γεγονός ότι στα άκρα η ενέργεια μηδενίζεται λόγω του ότι το σώμα σταματά να κινείται ($x = 15$ $x = 25$). Επιπλέον στη θέση ισορροπίας το σώμα έχει τη μέγιστη κινητική ενέργεια

και αυτό γιατί έχει τη μέγιστη ταχύτητα. Η μπλέ καμπύλη συνεπώς είναι η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας. Στα άκρα το σώμα θα έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια γιατί το ελατήριο βρίσκεται στη μέγιστη έκταση του ενώ τη στιγμή που το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας έχει μηδενική τιμή γιατί το ελατήριο δεν έχει καθόλου επιμήκυνση.

Η συνολική ενέργεια του σώματος που είναι προσαρτημένο στο ελατήριο, εφόσον το ελατήριο είναι ιδανικό και άρα δεν υπάρχουν απώλειες ενέργειας, θα είναι το άθροισμα των δύο. Η γραφική παράσταση 3.4 αναπαρηστά την ολική ενέργεια με πράσινο.



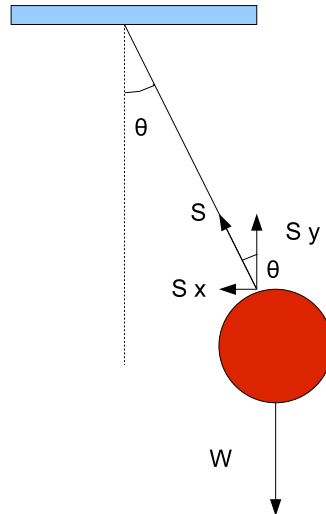
Σχήμα 3.4: Κινητική, Δυναμική και Ολική ενέργεια ταλαντωτή

4. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 6 σελίδα 42:

- (α') Ένα ρολόι τοίχου ελέγχεται από ένα εκκρεμές. Αν το ρολόι πάει πίσω, πώς πρέπει να επαναριθμήσουμε το μήκους του εκκρεμούς;
- (β') Ο Γαλιλαίος ισχυριζόταν ότι οι ταλαντώσεις ενός εκκρεμούς είναι ισόχρονες ακόμη και για πλάτη ταλάντωσης που φτάνουν τις 30° . Ποιά είναι η δική σας άποψη για τον ισχυρισμό αυτό;
- (γ') Να προβλέψετε με ποιοτικά επιχειρήματα αν ένα εκκρεμές που ταλαντώνεται με μεγάλο πλάτος θα έχει περίοδο μικρότερη ή μεγαλύτερη από την περίοδο ενός που ταλαντεύεται με μικρό πλάτος.

Λύση:

Για την επίλυση της άσκησης αυτής χρειάζεται να δοθεί συνοπτικά η θεωρία του εκκρεμούς σχήμα 3.5.



Σχήμα 3.5: Διάταξη εκκρεμους

Πρέπει λοιπόν να υπολογιστεί η δύναμη επαναφοράς για το εκκρεμές. Στο σχήμα 3.5, έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο εκκρεμές. Αυτές είναι:

- Το βάρος του σώματος W
- Η τάση του νήματος S

Η τάση του νήματος αναλύεται σε δύο συνιστώσες, με τη βοήθεια της γωνίας θ .

$$\begin{aligned} S_x &= S \cdot \sin\theta \\ S_y &= S \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

Θεωρώντας ότι η γωνία εκτροπής θ είναι πολύ μικρή, μικρότερη των 6° ισχύει η θεώρηση $\sin\theta = \tan\theta = \theta \text{ rad}$. Το μήκος του νήματος

που έχει το εκκρεμές είναι l . Με τη θεώρηση της μικρής γωνίας το σώμα δεν κινείται κατά τη διεύθυνση y και συνεπώς μπορεί να γραφτεί η ακόλουθη εξίσωση για τις δυνάμεις που βρίσκονται στον άξονα y :

$$\begin{aligned} S_y &= W \Rightarrow \\ S_y &= m \cdot g \Rightarrow \\ S \cdot \cos\theta &= m \cdot g \Rightarrow \\ S &= \frac{m \cdot g}{\cos\theta} \end{aligned}$$

Χρησιμοποιείται τώρα και η εξίσωση της συνιστώσας στον άξονα x σε συνδιασμό με τα όσα έχουν εξαχθεί μέχρι τώρα:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x = S \cdot \sin\theta \\ S = \frac{m \cdot g}{\cos\theta} \end{array} \right\} \Rightarrow S_x = m \cdot g \cdot \tan\theta$$

Λόγο του ότι η γωνία είναι πολύ μικρή, στην εκτροπή η κατακορυφή συνιστώσα της απόστασης του νήματος θα είναι ίση με το μήκος του νήματος, δηλαδή $l_y \approx l$. Η παρατήρηση αυτή σε συνδιασμό με τον ορισμό της εφαπτομένης και την προηγούμενη εξίσωση δίνουν:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{x}{l_y} = \frac{x}{l} \\ S_x &= m \cdot g \cdot \frac{x}{l} \end{aligned} \tag{3.4}$$

Με τη διαδικασία αυτή, λαμβάνεται η εξίσωση 3.4. Η εν λόγω εξίσωση δίνει τη δύναμη επαναφοράς που ασκείται πάνω στο σώμα έτσι ώστε το τελευταίο να εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. Με απλή σύγκριση της με την εξίσωση της δύναμης επαναφοράς, η 3.4 δίνει σημαντικά αποτελέσματα τα οποία και σχολιάζονται αμέσως μετά.

$$\left\{ \begin{array}{l} S_x = m \cdot g \cdot \frac{x}{l} \\ F = k \cdot x \end{array} \right\} \Rightarrow k = \frac{mg}{l}$$

$$k = m \cdot \omega^2$$

$$k = \frac{mg}{l}$$

$$m \cdot \omega^2 = \frac{mg}{l} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow$$

$$\frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Παρατηρήσεις:

- Η περίοδος του εκκρεμούς ΔΕΝ εξαρτάται από τη μάζα του σώματος που προσαρτάται στο νήμα
 - Η περίοδος του εκκρεμούς είναι ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας του μήκους l , του νήματος.
 - Η περίοδος του εκκρεμούς είναι αντιστρόφως ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της επιτάχυνσης g , της βαρύτητας.
- (α') Το ρολόι του τοίχου που ελέγχεται από το εκκρεμές πάει πίσω. Αυτό σημαίνει ότι το ρολόι έχει μεγαλύτερη περίοδο από όση θα έπρεπε να έχει και καθυστερεί. Στόχος επομένως πρέπει να είναι η μείωση της περιόδου. Για να μειωθεί η περίοδος του εκκρεμούς μπορούν να γίνουν δύο πράγματα: είτε να ελαττωθεί το μήκος του νήματος που φέρει το σωματίδιο, είτε να τοποθετήσετε το ρολόι σε πλανήτη με μεγαλύτερη επιτάχυνση της βαρύτητας. Εσείς προτιμήστε το πρώτο !!!
- (β') Για να απαντηθεί το δεύτερο κομμάτι της άσκησης σημειώνεται η παραδοχή που έχει γίνει: η γωνία θ πρέπει να είναι μικρότερη από 6° έτσι ώστε να ισχύει $\sin\theta = \tan\theta = \theta \text{ rad}$. Ο ισχυρισμός αυτός δεν είναι σωστός.
- (γ') Αν το εκκρεμές ταλαντώνεται με μεγάλο πλάτος τότε η περίοδος του γίνεται μικρότερη. Αυτό προκύπτει άμεσα από την περίοδο του εκκρεμούς. Αυξάνοντας την εκτροπή το l γίνεται $l_y = \cos\theta \cdot l$.

5. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 9 σελίδα 43:

Σύστημα ελατηρίου - μάζας κάνει απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους x_0 . Αν διπλασιάσουμε τη μάζα και το πλάτος παραμένει το ίδιο εξηγήστε πώς μεταβάλλονται τα πιο κάτω μεγέθη:

- (α') Ενέργεια ταλάντωσης
- (β') Κυκλική συχνότητα, ω
- (γ') η σταθερά ταλάντωσης

Λύση:

Δίνονται πρώτα τα αρχικά μεγέθη και στη συνέχεια υπολογίζεται η μεταβολή αν διπλασιαστεί η μάζα του σώματος.

Η ενέργεια της ταλάντωσης δίνεται από τη σχέση:

$$E = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

Κάνοντας σύγκριση του αρχικού ταλαντωτή με τον ταλαντωτή με τη διπλάσια μάζα προκύπτει:

$$E_{\alpha\rho\chi} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2$$

$$E_{\kappa\alpha\iota\nu} = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v_0^2 = m \cdot v_0^2$$

Άρα η ενέργεια του ταλαντωτή έχει διπλασιαστεί.

Η κυκλική συχνότητα δεν επηρεάζεται από τη μάζα του σώματος. Για το λόγο αυτό η κυκλική συχνότητα του ταλαντωτή παραμένει η ίδια.

Η σταθερά της ταλάντωσης k μεταβάλλεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} k_{\alpha\rho\chi} &= m \cdot \omega^2 \\ k_{\kappa\alpha\iota\nu} &= 2m \cdot \omega^2 \end{aligned}$$

Άρα η σταθερά της ταλάντωσης έχει διπλασιαστεί.

6. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 10 σελίδα 43:

Πώς θα μπορούσατε να μετρήσετε τις διαστάσεις ενός δωματίου αν είχατε στη διάθεση σας ένα ρολόι, ένα σφαιρίδιο και τα κορδόνια των παπουτσιών σας;

Λύση:

Με τα αντικείμενα που δίνονται μπορούν να μετρηθούν οι διαστάσεις ενός δωματίου αν ακολουθηθεί η πιο κάτω μεθοδολογία:

- Δένεται το σφαιρίδιο πάνω στα κορδόνια
- Το σύστημα σφαιριδίου - κορδονιού αποτελεί ένα εκκρεμές. Εκτρέπεται το εκκρεμές από τη θέση ισοροπίας
- Μετρίεται ο χρόνος δέκα διαδοχικών ταλαντώσεων (δέκα και όχι μίας για να ελαττωθεί το σφάλμα)
- Χρησιμοποιείται η γνωστή από τη θεωρία σχέση $l = \frac{g}{\omega^2}$, για να υπολογιστεί το μήκος του κορδονιού
- Γνωρίζοντας το μήκος του κορδονιού μπορούν να υπολογιστούν οι διαστάσεις.

Αν παρέλπιδα μένει ένα κομμάτι στο τέλος μικρότερο του κορδονιού, τότε προσδιορίζεται αυτό το μήκος, αναγκάζεται το κορδόνι να αιωρηθεί από το εν λόγω μήκος και ακολουθείται και πάλι η ίδια μεθοδολογία όπως και προηγουμένως.

3.2 Κατηγορία Β**1. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 12 σελίδα 43:**

Σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. (Απλή Αρμονική Ταλάντωση) με μέγιστη επιτάχυνση $5\pi^2 cm.s^2$. Όταν απέχει $4cm$ από τη θέση ισορροπίας, η ταχύτητα του είναι $3\pi cm/s$. Να βρείτε το πλάτος, την περίοδο και τη μέγιστη ταχύτητα του σώματος.

Λύση:

Συγκεντρωτικά, τα δεδομένα της άσκησης είναι τα ακόλουθα:

(α') Το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ.:

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$v = v_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$a = -a_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$(\beta') \quad a_0 = 5\pi^2 cm.s^2$$

$$(\gamma') \quad x = 4cm \rightarrow v = 3\pi cm/s$$

Γίνεται αντικατάσταση των τιμών που δίνονται στο τρίτο δεδομένο στις αντίστοιχες εξισώσεις:

$$4 = x_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$3\pi = \omega \cdot x_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Παρατηρείστε ότι οι δύο αυτές εξισώσεις έχουν μέσα $\sin$ και $\cos$. Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με ω , υψώνοντας και τις δύο στο τετράγωνο και προσθέτοντας τις, μπορεί να γίνει απαλειφή των τριγωνομετρικών συναρτήσεων:

$$4\omega = \omega \cdot x_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$3\pi = \omega \cdot x_0 \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

$$16\omega^2 = \omega^2 \cdot x_0^2 \cdot \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$9\pi^2 = \omega^2 \cdot x_0^2 \cdot \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$16\omega^2 + 9\pi^2 = \omega^2 \cdot x_0^2 \cdot [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)] \Rightarrow$$

$$16\omega^2 + 9\pi^2 = \omega^2 \cdot x_0^2$$

Επιπλέον από το δεύτερο δεδομένο προκύπτει:

$$\omega^2 \cdot x_0 = 5\pi^2$$

Απο τις δύο πιο πάνω εξισώσεις, δημιουργείται σύστημα και υπολογίζονται οι άγνωστοι:

$$(x_0^2 - 16)\omega^2 = 9\pi^2$$

$$\omega^2 \cdot x_0 = 5\pi^2$$

$$(x_0^2 - 16) \frac{5\pi^2}{x_0} = 9\pi^2$$

$$x_0^2 - 16 = \frac{9}{5}x_0$$

Πρέπει λοιπόν να επιλυθεί η εξίσωση δευτέρου βαθμού που έχει εξαχθεί:

$$x_0^2 - \frac{9}{5}x_0 - 16 = 0$$

$$x_{0,2} = \frac{\frac{9}{5} \pm \sqrt{(\frac{9}{5})^2 + 4 \cdot 1 \cdot 16}}{2 \cdot 1}$$

Απο την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης υπολογίζονται δύο τιμές: $x_{01} = 5cm$ και $x_{02} = -3.2cm$. Η αρνητική δεν έχει φυσική σημασία και άρα απορρίπτεται. Υπολογίζεται τώρα η κυκλική συχνότητα και από αυτή η περίοδος ταλάντωσης:

$$\begin{aligned}\omega^2 \cdot x_0 &= 5\pi^2 \Rightarrow \\ \omega^2 &= \pi^2 \Rightarrow \\ \omega &= \pi \Rightarrow \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\pi} = 2s\end{aligned}$$

Η μέγιστη ταχύτητα είναι:

$$v_0 = \omega \cdot x_0 = 5\pi cm/s$$

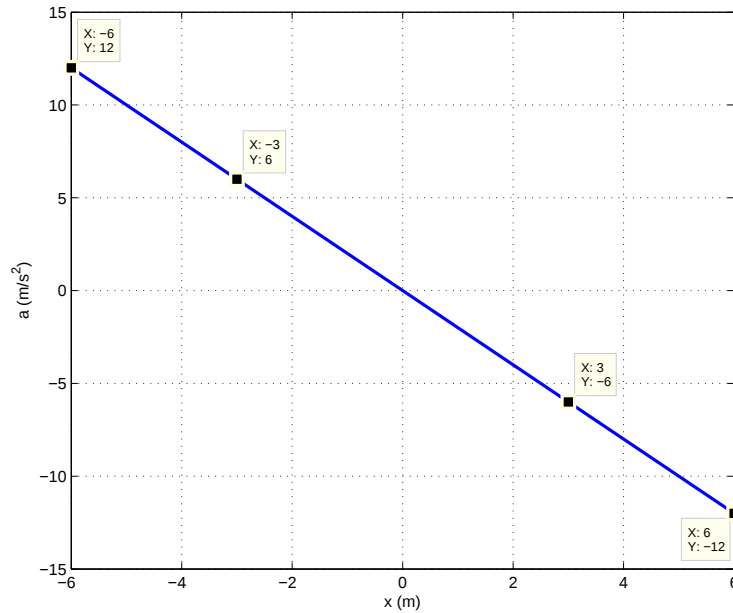
2. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 13 σελίδα 44:

Το σχήμα 3.6 δείχνει τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε συνάρτηση με τη θέση, ενός σώματος που εκτελεί Α.Α.Τ.

- Να εξηγήσετε τη μορφή του
- Να βρείτε την περίοδο της Α.Α.Τ

Λύση:

Η μορφή της γραφικής παράστασης μπορεί να εξηγηθεί πολύ εύκολα αν ληφθεί υπόψη η εξίσωση της Α.Α.Τ. :



Σχήμα 3.6: Επιτάχυνση συναρτήσει της θέσης για την Α.Α.Τ.

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) \\
 a &= -x_0 \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega t + \phi) \\
 a &= -\omega^2 \cdot x
 \end{aligned}
 \tag{3.5}$$

Η εξίσωση είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ όπου $\alpha = -\omega^2$ και $\beta = 0$. Επομένως θα είναι ευθεία που θα περνά από το μηδέν και θα έχει κλίση το $-\omega^2$. Στη συνέχεια πρέπει να υπολογιστεί η περίοδος της Α.Α.Τ. Από τα όσα έχουν λεχθεί είναι προφανές ότι θα αναζητηθεί η κλίση έτσι ώστε να υπολογιστεί το ω και στη συνέχεια από τη σχέση που συνδέει την κυκλική συχνότητα με την περίοδο, η περίοδος.

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \frac{12 - 0}{-6 - 0} = -2 \\
 -\omega^2 &= -2 \Rightarrow \omega = \sqrt{2} \Rightarrow \\
 \frac{2\pi}{T} &= \sqrt{2} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$T = 4.44s$$

3. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 14 σελίδα 44:

Σώμα μάζας $2kg$ εκτελεί Α.Α.Τ. με πλάτος $0.5m$. Η σταθερά της ταλάντωσης είναι $D = 200N/m$. Κάποια στιγμή t_1 το μέτρο της ταχύτητας του σώματος είναι $v_1 = 2.5m/s$. Να υπολογιστούν:

- Η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης
- Το μέτρο της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1
- Το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος την ίδια χρονική στιγμή

Λύση:

Συγκεντρωτικά τα δεδομένα της άσκησης είναι

- $m = 2kg$
- $D = 200N/m$
- $t_1 \rightarrow v_1 = 2.5m/s$

Υπολογίζεται αρχικά η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης

$$D = m\omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10rad/s$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας του τη χρονική στιγμή t_1 . Για να γίνει αυτό υπολογίζεται η ολική ενέργεια που έχει το σώμα (x_0, D γνωστά) και από αυτή αφαιρείται η κινητική ενέργεια (v_1, m γνωστά). Το ποσό που απομένει είναι η δυναμική ενέργεια του σώματος στη θέση 1 και θα δώσει το x_1 :

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_0^2 = 25J$$

$$E_{\kappa\iota\nu} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_1^2 = 6.25J$$

$$E_{\delta\nu\nu 1} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot x_1^2 = 25 - 6.25 \Rightarrow$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 18.75}{200}} = 0.433m$$

Και το μέτρο της επιτάχυνσης θα είναι:

$$a_1 = -\omega^2 \cdot x_1 = 100 \cdot 0.433 \Rightarrow$$

$$a_1 = 43.3m/s^2$$

4. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 15 σελίδα 44:

Η θέση ενός υλικού σημείου μάζας $0.05kg$ σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από την εξίσωση $x = 5\sin(40\pi t + \frac{\pi}{2})$ όπου $x \rightarrow cm, t \rightarrow s$. Θεωρείστε $\pi^2 = 10$. Να υπολογίσετε:

- (α') Το πλάτος της ταχύτητας
- (β') Τη μέγιστη κινητική ενέργεια
- (γ') Τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο κινητό τη χρονική στιγμή $t = 0.5s$
- (δ') Το ολικό διάστημα που διένυσε το κινητό από τη στιγμή $t = 0s$ μέχρι $t = 0.5s$
- (ε') Σε σχήμα να δείξετε την αρχική θέση, την ταχύτητα και την επιτάχυνση του κινητού

Λύση:

Αντιπαραβάλλοντας την εξίσωση που δόθηκε με την γενική εξίσωση της Α.Α.Τ. υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά της ταλάντωσης:

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$x = 5 \cdot \sin(40\pi t + \frac{\pi}{2})$$

Άρα ισχύουν τα ακόλουθα:

- $x_0 = 5cm$
- $\omega = 40\pi$
- $T = 0.05s$

Απο αυτά υπολογίζονται οι ποσότητες που ζητούνται στην άσκηση :

$$\begin{aligned} v_0 &= x_0 \cdot \omega = 0.05 \cdot 40\pi = 2\sqrt{10} \\ E_{max} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.05 \cdot (2\sqrt{10})^2 = 1J \end{aligned}$$

Για την εύρεση της συνισταμένης δύναμης τη χρονική στιγμή $t = 0.5s$ χρησιμοποιείται ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής σε συνδιασμό με την εξίσωσης της Α.Α.Τ.:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} F = m \cdot a \\ a = -\omega^2 \cdot x_0 \cdot \sin(40\pi t + \frac{\pi}{2}) \end{array} \right\} &\Rightarrow \\ F = -m \cdot \omega^2 \cdot x_0 \cdot \sin(40\pi t + \frac{\pi}{2}) &\Rightarrow \\ F = -0.05 \cdot (40\pi)^2 \cdot 0.05 \cdot 1 = -40N & \end{aligned}$$

Το ολικό διάστημα που διένυσε το κινητό από τη στιγμή $t = 0s$ μέχρι $t = 0.5s$ υπολογίζεται με βάση τους κύκλους (πλήρης ταλαντώσης που έχει κάνει το κινητό). Η περίοδος του κινητού είναι $T = 0.05s$. Επιπλέον από την αρχική φάση, βγαίνει το συμπέρασμα ότι το κινητό ξεκινά από μέγιστη θέση απομάκρυνσης, $t = 0 \rightarrow x_0 = 0.05m$.

Ο αριθμός των κύκλων που έχει κάνει το σώμα είναι:

$$C = \frac{t}{T} = \frac{0.5}{0.05} = 10$$

Ο κάθε κύκλος έχει 4 φορές την απόσταση από τη θέση ισοροπίας μέχρι τη μέγιστη απομάκρυνση, δηλαδή

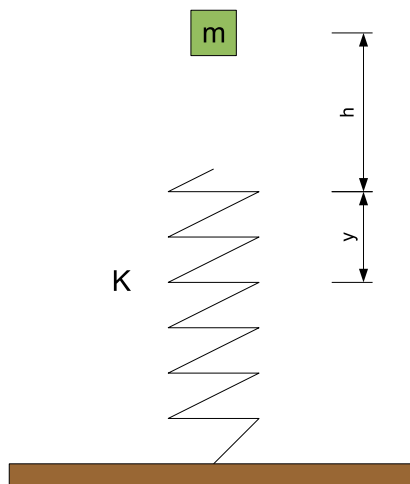
$$d_{1κυκλος} = 4 \cdot 0.05m = 0.2m$$

Επομένως το συνολικό διάστημα που έχει διανύσει το κινητό είναι ίσο με τον αριθμό των κύκλων επί το διάστημα του ενός κύκλου:

$$S_{ολικο} = C \cdot d_{1κυκλος} = 2m$$

5. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 17 σελίδα 45:

Πλαστελίνη μάζας m πέφτει ελεύθερα από απόσταση h πάνω σε κατακόρυφο ελατήριο με το ένα άκρο στερεωμένο στο δάπεδο. Η πλαστελίνη σταματά την κάθοδο της όταν προκαλέσει στο ελατήριο συμπίεση y . Η σταθερά του ελατηρίου είναι k και η μάζα του αμελητέα. Ποιά είναι η μάζα της πλαστελίνης σε kg ;



Σχήμα 3.7: Πτώση πλαστελίνης από ύψος h

Λύση:

Το σώμα αφήνεται να πέσει ελεύθερα με διαφορά ύψους h από το ελατήριο. Μετά την πτώση του σώματος το ελατήριο συσπειρώνεται σε θέση που απέχει από τη θέση ισορροπίας απόσταση y . Η δυναμική ενέργεια ¹ που έχει το σώμα, θα μετατραπεί σε δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη μέγιστη θέση συμπίεσης.

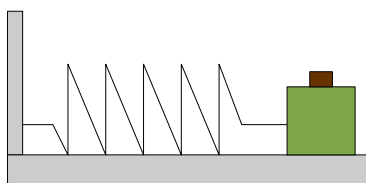
$$m \cdot g \cdot (h + y) = \frac{1}{2} \cdot k \cdot y^2 \Rightarrow$$

$$m = \frac{k \cdot y^2}{2g \cdot (h + y)}$$

¹Δεν είναι η ενέργεια ως προς το έδαφος αλλά ως προς το άνω άκρο του ελατηρίου + τη συσπείρωση που θα επακολουθήσει ύψους y

6. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 18 σελίδα 45:

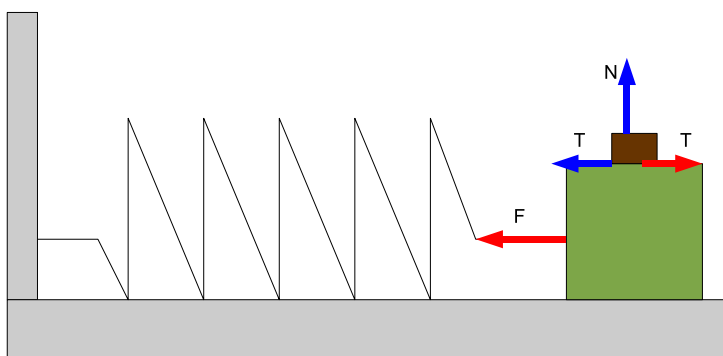
Το αμαξάκι του σχήματος 3.8 εκτελεί Α.Α.Τ με περίοδο $T = 2s$ πάνω σάυτο βρίσκεται ένα κομμάτι ξύλο Σ , το οποίο αρχίζει να γλιστρά όταν το πλάτος της ταλάντωσης, x_0 υπερβεί τα $20cm$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του συντελεστή στατικής τριβής μεταξύ των δύο σωμάτων.



Σχήμα 3.8: Ταλάντωση δύο σωμάτων

Λύση:

Τα δύο σώματα βρίσκονται σε επαφή. Μεταξύ τους ασκούνται δυνάμεις. Οι δυνάμεις που ασκούνται από το ένα σώμα στο άλλο και από το ελατήριο στο αμαξάκι φαίνονται στο σχήμα 3.9. Με μπλέ είναι οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο ξύλο ενώ με κόκκινο είναι οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο αμαξάκι. Το σώμα ξεκινά να ολισθαίνει όταν η δύναμη F γίνει ίση με τη δύναμη της τριβής. Αξίζει να σημειωθεί ότι η μέγιστη δύναμη εφαρμόζεται στη μέγιστη απομάκρυνση, συνεπώς η ολίσθηση θα γίνει στη θέση της μέγιστης απομάκρυνσης. Με βάση αυτό μπορεί να υπολογιστεί ο συντελεστής στατικής τριβής:

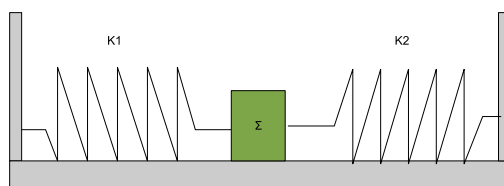


Σχήμα 3.9: Δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των δύο σωμάτων

$$\begin{aligned}
 T &= \mu \cdot N = \mu \cdot m \cdot g \\
 F_{max} &= m \cdot a_0 = m \cdot \omega^2 \cdot x_0 \\
 T &= F_{max} \Rightarrow \\
 \mu \cdot m \cdot g &= m \cdot \omega^2 \cdot x_0 \Rightarrow \\
 \mu &= \frac{\omega^2 \cdot x_0}{g} = \frac{4\pi^2 \cdot x_0}{T^2 \cdot g} \Rightarrow \\
 \mu &= 0.2
 \end{aligned}$$

7. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 19 σελίδα 45:

Κάθε ελατήριο του σχήματος 3.10 έχει το ένα άκρο του στερεωμένο σε ακίνητο σημείο και το άλλο του άκρο προσδεδεμένο στο σώμα Σ. Οι σταθερές των δύο ελατηρίων είναι $K_1 = 120 \text{ N/m}$ και $K_2 = 80 \text{ N/m}$. Το σώμα Σ έχει μάζα 2 kg και μπορεί να κινείται χωρίς τριβές. Να αποδείξετε ότι η κίνηση που θα εκτελέσει το σώμα Σ, αν εκτραπεί από τη θέση ισορροπίας είναι Α.Α.Τ. και να υπολογίσετε την περίοδο της.

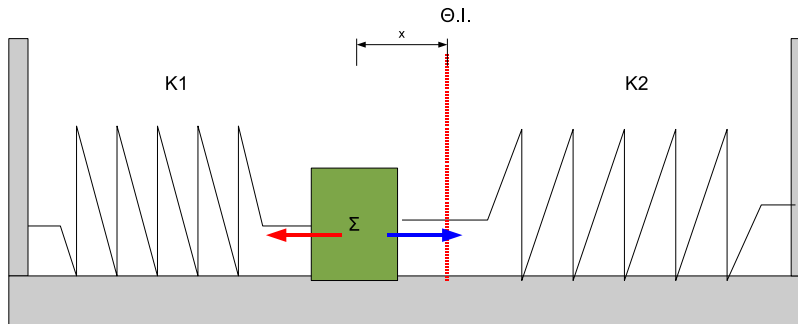


Σχήμα 3.10: Σύστημα ελατηρίων σώματος

Λύση:

Για να αποδειχθεί ότι το σώμα εκτελεί Α.Α.Τ. πρέπει να δειχθεί ότι ασκείται πάνω του δύναμη επαναφοράς, δηλαδή δύναμη που είναι ανάλογη της απομάκρυνσης του. Το σώμα εκτρέπεται προς τα αριστερά κατά απόσταση x από τη θέση ισορροπίας, έτσι ώστε το ελατήριο 1 με τη σταθερά K_1 να συσπειρωθεί και το ελατήριο 2 με τη σταθερά K_2 να εκταθεί, όπως δείχνει το σχήμα 3.11. Η μπλέ δύναμη είναι αυτή

που ασκεί το ελατήριο 1 στο σώμα ενώ η κόκκινη αυτή που ασκεί το ελατήριο 2 στο σώμα ².



Σχήμα 3.11: Εκτροπή του σώματος Σ και δυνάμεις που του ασκούνται

Από το νόμο της ελαστικότητας (Hooke) υπολογίζονται οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο σώμα Σ :

$$\begin{aligned} F_1 &= k_1 \cdot x \\ F_2 &= k_2 \cdot x \end{aligned}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα :

$$\begin{aligned} \Sigma F &= F_1 - F_2 \Rightarrow \\ \Sigma F &= k_1 \cdot x - k_2 \cdot x \Rightarrow \\ \Sigma F &= (k_1 - k_2) \cdot x \end{aligned} \tag{3.6}$$

Η εξίσωση 3.6 δείχνει ξεκάθαρα ότι η δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και συνεπώς το σώμα θα εκτελέσει Α.Α.Τ. Η περίοδος της ταλάντωσης αυτής υπολογίζεται από τη σταθερά αναλογίας που στην περίπτωση αυτή είναι $k_1 - k_2$:

²Το ελατήριο 1 είναι συσπειρωμένο άρα τείνει να σπρώξει το σώμα για να αποκτήσει ξανά το αρχικό του μήκος. Αντίθετα το ελατήριο 2 είναι σε έκταση άρα τείνει να τραβήξει το σώμα

$$k_1 - k_2 = m \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k_1 - k_2}{m} \Rightarrow$$

$$T = \sqrt{\frac{m \cdot 4\pi^2}{k_1 - k_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 4\pi^2}{120 - 80}} \Rightarrow$$

$$T = \pi \cdot \sqrt{0.2}$$

8. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 20 σελίδα 46:

Οι αστροναύτες για να μετρήσουν την μάζα τους χρησιμοποιούν μια συσκευή (Body Measuring Device - BMMD), η συσκευή αυτή έχει σχεδιαστεί για διαστημικά οχήματα που κινούνται σε τροχιά και επιτρέπει στους αστροναύτες να μετρούν τη μάζα τους όταν βρίσκονται σε συνθήκες έλλειψης βαρύτητας. Αποτελείται από μιά ειδική καρέκλα η οποία είναι προσαρτημένη στο σκάφος με ελατήρια. Ο αστροναύτης μπορεί να μετράει την περίοδο των ταλαντώσεων αυτού του συστήματος. Η σταθερά ενός συγκεκριμένου ελατηρίου είναι $K = 600 \text{ N/m}$. Αν η περίοδος της ταλάντωσης του συστήματος χωρίς τον αστροναύτη είναι 0.9 s και με τον αστροναύτη είναι 2.1 s να υπολογίσετε την μάζα του αστροναύτη. Θεωρήστε ότι $\pi^2 = 10$.

Λύση:

Στο πρόβλημα αυτό δίνονται η περίοδος ταλάντωσης με τον αστροναύτη και χωρίς αυτόν, καθώς επίσης και η σταθερά k του ελατηρίου. Για να επιλυθεί η άσκηση χρησιμοποιείται η εξίσωση που δίνει τη σταθερά k του ελατηρίου σε σχέση με την κυκλική συχνότητα του ταλαντωτή:

$$k = m \cdot \omega^2$$

Πρωτού καθίσει ο αστροναύτης η μάζα θα είναι μόνο η μάζα του μηχανήματος και το σύστημα θα έχει περίοδο 0.9 s . Στη συνέχεια όταν καθίσει ο αστροναύτης στη μάζα του μηχανήματος προστίθεται και η μάζα του αστροναύτη ενώ η περίοδος του αλλάζει και γίνεται 2.1 s .

$$k = m_{\mu\eta\chi} \cdot \omega_{\mu\eta\chi}^2 \Rightarrow$$

$$m_{\mu\eta\chi} = \frac{k}{\omega_{\mu\eta\chi}^2} = \frac{600}{\frac{4\pi^2}{0.9^2}} = 12.15kg$$

$$k = m_{o\lambda} \cdot \omega_{o\lambda}^2 = (m_{\mu\eta\chi} + m_{\alpha\nu}) \cdot \omega_{o\lambda}^2$$

$$m_{\mu\eta\chi} \cdot \omega_{\mu\eta\chi}^2 = (m_{\mu\eta\chi} + m_{\alpha\nu}) \cdot \omega_{o\lambda}^2 \Rightarrow$$

$$m_{\alpha\nu} = \frac{m_{\mu\eta\chi} \cdot \omega_{\mu\eta\chi}^2}{\omega_{o\lambda}^2} - m_{\mu\eta\chi} \Rightarrow$$

$$m_{\alpha\nu} = \frac{12.15 \cdot \frac{4\pi^2}{T_{\mu\eta\chi}^2}}{\frac{4\pi^2}{T_{o\lambda}^2}} - 12.15 = \frac{12.15 \cdot T_{o\lambda}^2}{T_{\mu\eta\chi}^2} - 12.15 \Rightarrow$$

$$m_{\alpha\nu} = 54kg$$

9. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 25 σελίδα 48:

Σώμα Σ_1 μάζας $m_1 = 1kg$ είναι συνδεδεμένο στο ένα άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 400N/m$ και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους $x_0 = 0.1m$ κατά μήκος λείου οριζόντιου επιπέδου. Όταν το σώμα Σ_1 διέρχεται από τη θέση ισορροπίας του συγκρούεται μετωπικά με ακίνητο σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 3kg$. Η κρούση είναι μετωπική και η διάρκεια της είναι αμελητέα. Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης που εκτελείται αν η κρούση είναι:

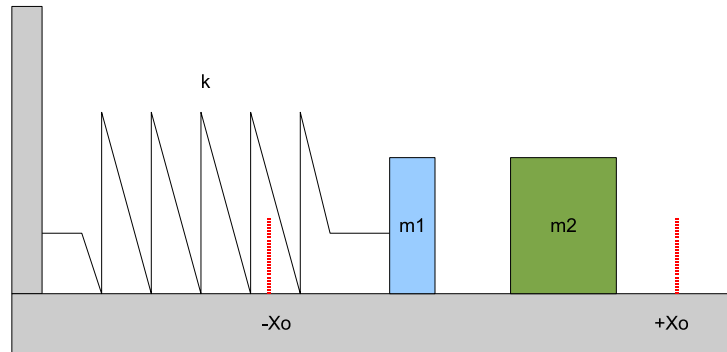
(α') Πλαστική

(β') Ελαστική

Λύση:

Στο πρόβλημα αυτό τη στιγμή που το σώμα Σ_1 περνά από τη θέση ισορροπίας γίνεται κρούση με το Σ_2 . Για το λόγο αυτό θα πρέπει να υπολογιστεί η ταχύτητα που έχει το σώμα Σ_1 στη θέση ισορροπίας και στη συνέχεια να γίνει εφαρμογή των κατάλληλων θεωρημάτων ανάλογα με το τι είδους κρούση γίνεται. Συγκεντρωμένα τα δεδομένα είναι:

- $x_0 = 0.1m$
- $k = 400N/m$
- $m_1 = 100kg$



Σχήμα 3.12: Σύστημα σωμάτων - ελατηρίου

- $m_2 = 3kg$

Υπολογίζεται η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης:

$$k = m_1 \cdot \omega^2 = 400 \Rightarrow$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m_1} = \frac{400}{1} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{400} = 20 rad/s$$

Υπολογίζεται τώρα η ταχύτητα στη θέση ισορροπίας

$$v_0 = \omega \cdot x_0 = 20 \cdot 0.1 \Rightarrow$$

$$v_0 = 2m/s$$

Στην περίπτωση που η κρούση είναι ελαστική θα ισχύει το θεώρημα διατήρησης της ορμής και το θεώρημα διατήρησης της ενέργειας. Με βάση τα θεωρήματα αυτά θα πρέπει να υπολογιστεί η ταχύτητα των σωμάτων μετά την κρούση:

$$E_{\pi\rho\nu} = E_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 \Rightarrow \\
\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2^2 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot v_2^2 \Rightarrow \\
3 \cdot v_2^2 + v_1'^2 &= 4
\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
P_{\pi\rho\nu} &= P_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\
m_1 \cdot v_1 &= m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2 \Rightarrow \\
1 \cdot 2 &= 1 \cdot v_1' + 3 \cdot v_2 \Rightarrow \\
v_1' &= 2 - 3 \cdot v_2
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Από τις εξισώσεις 3.7 και 3.8 υπολογίζονται οι ταχύτητες μετά την κρούση:

$$\begin{aligned}
3 \cdot v_2^2 + v_1'^2 &= 4 \\
2 - 3 \cdot v_2 &= v_1' \\
3 \cdot v_2^2 + (2 - 3 \cdot v_2)^2 &= 4 \Rightarrow \\
3 \cdot v_2^2 + 4 - 12 \cdot v_2 + 9 \cdot v_2^2 &= 4 \Rightarrow \\
12 \cdot v_2^2 &= 12 \cdot v_2 \Rightarrow \\
v_2 &= 1m/s
\end{aligned}$$

Άρα για την άλλη ταχύτητα προκύπτει:

$$v_1' = -1m/s$$

Το σώμα 1 θα συνεχίσει να ταλαντώνεται με ταχύτητα $v_1' = -1m/s$. Το καινούργιο πλάτος της ταλάντωσης του θα γίνει επομένως ίσο με:

$$x_0 = \frac{v_1'}{\omega} = 0.05m$$

Στην περίπτωση που η κρούση είναι πλαστική, τα σώματα θα κινηθούν μαζί μετά την κρούση και θα έχουν κοινή ταχύτητα. Από την αρχή διατήρησης της ορμής προκύπτει:

$$\begin{aligned} P_{\pi\rho\nu} &= P_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\ m_1 \cdot v_1 &= (m_1 + m_2) \cdot V \Rightarrow \end{aligned}$$

$$V = \frac{m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot 2}{1 + 3} \Rightarrow$$

$$V = 0.5m/s$$

Επειδή τα σώματα κινούνται μαζί στη περίπτωση αυτή θα αλλάξει και η γωνιακή ταχύτητα του συστήματος και πρέπει να υπολογιστεί.

$$\begin{aligned} k &= (m_1 + m_2) \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{400}{4}} \Rightarrow \\ \omega &= 10rad/s \end{aligned}$$

Το πλάτος ταλάντωσης γίνεται:

$$x_0 = \frac{V}{\omega} = \frac{0.5}{10} = 0.05m/s$$

3.3 Κατηγορία Γ'

1. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 27 σελίδα 48:

Στην Κύπρο, σε μια συγκεκριμένη μέρα του χειμώνα, ο ήλιος ανατέλλει στις 6 το πρωί, φτάνει στο ζενιθ στις 12 το μεσημέρι και δύει στις 6 το απόγευμα. Η θερμοκρασία είναι $0^\circ C$ κατά την ανατολή, $10^\circ C$ το μεσημέρι και $0^\circ C$ κατά τη δύση. Θεωρείστε ότι η μεταβολή της θερμοκρασίας από την ανατολή ως τη δύση ακολουθεί το μισό της περιόδου μιας Α.Α.Τ. και με την προσέγγιση αυτή:

(α') Σχεδιάστε τη μεταβολή της θερμοκρασίας σε συνάρτηση με το χρόνο από την ανατολή ως τη δύση και γράψετε την εξίσωση που την περιγράφει. Θεωρείστε ότι η ώρα 6:00 π.μ είναι η χρονική στιγμή $t = 0s$.

(β') Βρείτε τη θερμοκρασία στις 9 π.μ

(γ) Αν τα αγρινά τα οποία βρίσκονται στην περιοχή του Τροόδους μπορούν να βγαίνουν για να τραφούν μόνο όταν η θερμοκρασία είναι ίση ή μεγαλύτερη από 5°C , για πόσες ώρες τα αγρινά είναι έξω για να τραφούν;

Λύση:

Όπως αναφέρεται και στην εκφώνηση της άσκησης γίνεται η θεώρηση ότι η θερμοκρασιακή μεταβολή είναι μισή Α.Α.Τ. Αρχικά ζητείται να εξαχθεί η εξίσωση που περιγράφει το φαινόμενο καθώς επίσης και να σχεδιαστεί η μορφή της θερμοκρασιακής μεταβολής σε συνάρτηση με το χρόνο. Λαμβάνεται η εξίσωση της Α.Α.Τ και υπολογίζονται οι παράμετροι που υπεισέρχονται σ αυτή με βάση τα δεδομένα της άσκησης που συγκεντρωτικά είναι:

- $\frac{T}{4} = 6h$ γιατί από τη θέση ισορροπίας $t = 0s \rightarrow \theta = 0^{\circ}\text{C}$ χρειάζεται $6h$ για να πάει για πρώτη φορά μέχρι τη μέγιστη απομάκρυνση
- $\theta_0 = 10^{\circ}\text{C}$ γιατί η μέγιστη θερμοκρασία είναι τόσο.

Η γενική εξίσωση της Α.Α.Τ είναι:

$$\theta = \theta_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι:

$$\theta = 10 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{4 \cdot 6}t + \phi\right)$$

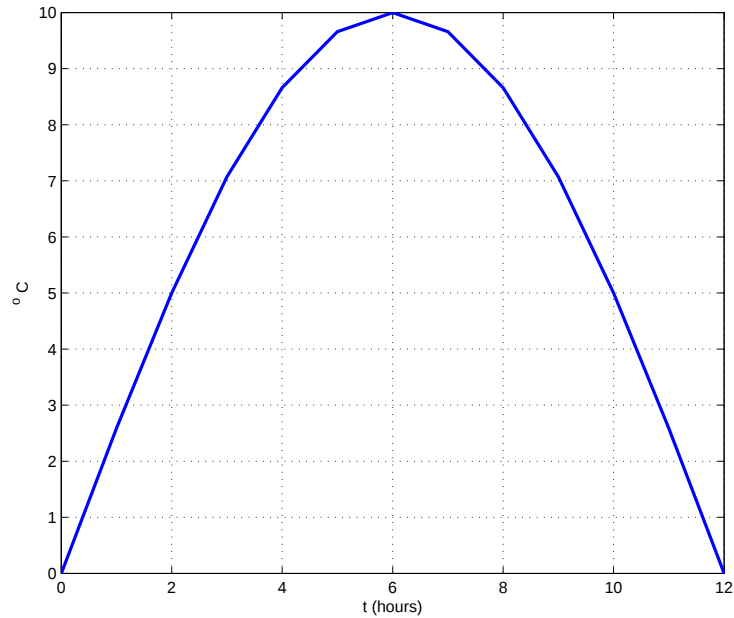
$$t = 0s \rightarrow \theta = 0^{\circ}\text{C}$$

$$\begin{aligned} 0 &= 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 0 + \phi\right) \Rightarrow \\ \sin\phi &= 0 \Rightarrow \phi = 0 \end{aligned}$$

Συνεπώς η εξίσωση που προκύπτει είναι:

$$\theta = 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right)$$

και η γραφική παράσταση για το φαινόμενο αυτό δίνεται στο σχήμα 3.13



Σχήμα 3.13: Θερμοκρασιακή μεταβολή

Στη συνέχεια ζητείται ο υπολογισμός της θερμοκρασίας, η ώρα 9π.μ. Με αντικατάσταση της ώρας αυτής στην εξίσωση που έχει εξαχθεί μπορεί να βρεθεί η θερμοκρασία. Υπενθυμίζεται ότι σαν χρονική στιγμή $t = 0s$ έχει επιλεγεί η στιγμή που η ώρα είναι 6 π.μ. Συνεπώς στην εξίσωση θα μπει η τιμή $9 - 6 = 3$.

$$\theta = 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right), \quad t = 3 \Rightarrow$$

$$\theta = 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12} \cdot 3\right) = 10 \cdot \sin\frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\theta = 7^{\circ}C$$

Εν τέλει πρέπει να βρεθεί ο χρόνος που τρέφονται τα αγρινά με βάση το δεδομένο ότι βγαίνουν για τροφή μόνο όταν η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από $5^{\circ}C$. Από την εξίσωση της θερμοκρασιακής μεταβολής θα υπολογιστεί για ποιο διάστημα ισχύει η συνθήκη αυτή:

$$\theta = 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right), \quad \theta \geq 5^{\circ}C$$

$$5 = 10 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \Rightarrow 0.5 = \sin\left(\frac{\pi}{12}t\right) \Rightarrow$$

$$\frac{\pi}{12}t = \frac{\pi}{6} \quad \text{ή} \quad \frac{\pi}{12}t = \frac{5\pi}{6} \Rightarrow$$

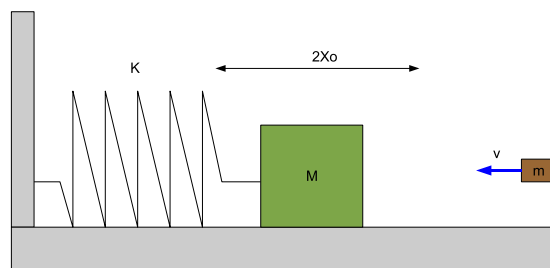
$$t = 2h \quad \text{ή} \quad t = 10h$$

Επομένως τα αγρινά βγαίνουν για να ψάξουν τροφή στις 8:00. Θα πρέπει βέβαια να έχουν τελειώσει μέχρι της 16:00, δηλαδή μετά από 8 ώρες γιατί διαφορετικά θα κρυώσουν !!!

2. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 29 σελίδα 49:

Ένα σώμα μάζας $M = 2kg$ εκτελεί Γ.Α.Τ., πλάτους $x_0 = 10cm$ και περιόδου T , σε λεία επιφάνεια με τη βοήθεια αβαρούς ελατηρίου σταθεράς $K = 800N/m$, όπως δείχνει το σχήμα 3.14. Ένα σώμα από πλαστελίνη μάζας $m = 500g$ κτυπά στο σώμα M με ταχύτητα μέτρου $v = 4m/s$ και κολλά σε αυτό τη χρονική στιγμή που το σώμα M έχει μέγιστη σε μέτρο ταχύτητα και η φορά της κίνησης είναι η ίδια με τη φορά της κίνησης της πλαστελίνης. Η διάρκεια της κρούσης θεωρείται αμελητέα. Να υπολογίσετε:

- (α) Την περίοδο T πριν την κρούση
- (β) Την περίοδο T' μετά την κρούση
- (γ) Την κοινή ταχύτητα του συστήματος των δύο σωμάτων αμέσως μετά την κρούση
- (δ) Το πλάτος ταλάντωσης μετά την κρούση



Σχήμα 3.14: Κρούση πλαστελίνης σε ταλαντωτή

Λύση:

Αρχικά υπολογίζεται η περίοδος T πριν από την κρούση:

$$k = M \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{M}} \Rightarrow T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} \Rightarrow$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2}{800}} = 0.314s$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η περίοδος μετά την κρούση. Σημειώνεται ότι λόγω του ότι η κρούση είναι πλαστική τα σώματα θα κινηθούν μαζί μετά την κρούση, άρα η μάζα του συστήματος θα είναι $m_{ολ} = 2.5kg$

$$T' = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_{ολ}}{k}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{2.5}{800}} \Rightarrow$$

$$T' = 0.351s$$

Για την εύρεση της κοινής ταχύτητας των δύο μαζών αμέσως μετά την κρούση πρέπει να γίνουν τα ακόλουθα βήματα:

- Να υπολογιστεί η ταχύτητα του σώματος με μάζα M τη στιγμή που περνά από τη θέση ισορροπίας (δεδομένο της άσκησης ότι έχει μέγιστο μέτρο την ώρα της κρούσης)
- Να εφαρμοστεί η αρχή διατήρησης της ορμής

$$v_2 = \omega \cdot x_0 = \frac{2\pi}{T} \cdot x_0 = \frac{2\pi}{0.314} \cdot 0.1 \Rightarrow$$

$$v_2 = 2m/s$$

$$P_{\pi\rho\nu} = P_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow$$

$$m \cdot v_1 + M \cdot v_2 = (m + M) \cdot V \Rightarrow$$

$$V = \frac{m \cdot v_1 + M \cdot v_2}{m + M} \Rightarrow$$

$$V = \frac{0.5 \cdot 4 + 2 \cdot 2}{2.5} = 2.4m/s$$

Το τελευταίο υποερώτημα ζητά να υπολογιστεί το καινούργιο πλάτος ταλάντωσης. Η ταχύτητα του συστήματος έχει υπολογιστεί και είναι η ταχύτητα στην θέση ισορροπίας (το ελατήριο δεν έχει έκταση ή συσπίρωση αφού βρίσκεται στη θέση ισορροπίας από πριν):

$$\begin{aligned} V &= \omega \cdot x_0' \Rightarrow x_0' = \frac{V}{\omega} = \frac{V}{\frac{2\pi}{T'}} \Rightarrow \\ x_0' &= 0.134m \end{aligned}$$

3. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 30 σελίδα 49:

Δίσκος μάζας $M = 1kg$ είναι στερεωμένος στο πάνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς $k = 200N/m$ του οποίου το άλλο άκρο είναι στερεωμένο σε οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο δίσκο κάθετα ένα πουλί μάζας $m = 0.2kg$ και κάποια στιγμή εκτινάσσεται κατακόρυφα προς τα πάνω με ταχύτητα $v = 2m/s$. Να βρείτε:

- (α) Το μέτρο της ταχύτητας που αποκτά ο δίσκος
- (β) Το πλάτος της ταλάντωσης του δίσκου
- (γ) Τη μέγιστη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης

Λύση:

Την ώρα που το πουλί εκτινάσσεται προς τα πάνω ασκεί μια δύναμη στον δίσκο και τον αναγκάζει να κινηθεί προς τα κάτω. Το σύστημα πουλιού - δίσκου είναι κλειστό, γιατί σ' αυτό δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις και συνεπώς η ορμή του συστήματος θα διατηρείται σταθερή. Εφαρμόζοντας την αρχή διατήρησης της ορμής και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η αρχική ορμή του συστήματος είναι 0 (πουλί και δίσκος ακίνητα), υπολογίζεται η ταχύτητα με την οποία ο δίσκος θα κινηθεί προς τα κάτω:

$$\begin{aligned} P_{\pi\rho\nu} &= P_{\mu\epsilon\tau\alpha} \Rightarrow \\ 0 &= m_{\pi} \cdot v_{\pi} + M_{\delta} \cdot v_{\delta} \Rightarrow \\ 0 &= 0.2 \cdot 2 + 1 \cdot v_{\delta} \Rightarrow \\ v_{\delta} &= -0.4 \end{aligned}$$

Επομένως ο δίσκος θα κινηθεί προς τα κάτω με ταχύτητα μέτρου $0.4m/s$. Το πουλί έχει φύγει από το δίσκο και επομένως η θέση ισορροπίας του

ελατηρίου έχει αλλάξει. Την ώρα που φεύγει το πουλί από τον δίσκο και ο δίσκος αποκτά την ταχύτητα που υπολογίστηκε προηγουμένως, το ελατήριο έχει και μια συσπίρωση σε σχέση με τη θέση ισοροπίας, που προκαλείται από το πουλί και η οποία υπολογίζεται με βάση το νόμο του Hooke:

$$F = k \cdot x \Rightarrow$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{m_{\pi} \cdot g}{k} = \frac{0.2 \cdot 10}{200} \Rightarrow$$

$$x = 0.01m$$

Τώρα μπορεί να υπολογιστεί και το πλάτος ταλάντωσης του δίσκου γιατί πλέον είναι γνωστή η ολική ενέργεια του δίσκου:

$$E_{o\lambda} = E_{κιν} + E_{δυν} \Rightarrow$$

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2} \cdot M_{\delta} \cdot v_{\delta}^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0.4^2 + \frac{1}{2} \cdot 200 \cdot 0.01^2 \Rightarrow$$

$$E_{o\lambda} = 0.09J$$

$$E_{o\lambda} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot x_0^2 \Rightarrow$$

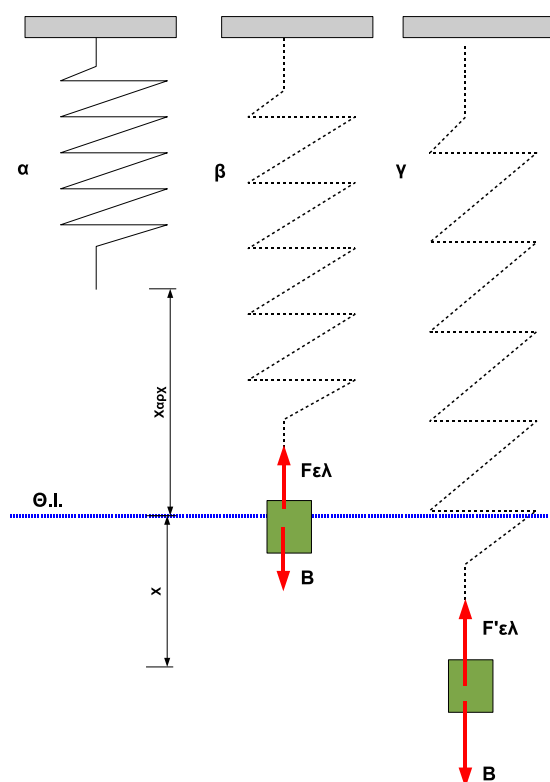
$$x_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{o\lambda}}{k}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.09}{200}} \Rightarrow$$

$$x_0 = 0.03m$$

4. Υποστηρικτικό Υλικό - Άσκηση 32 σελίδα 50:

Από οροφή που απέχει από το οριζόντιο δάπεδο πολύ μεγάλη απόσταση εξαρτάται το ένα άκρο ιδανικού ελατηρίου σκληρότητας $k = 100N/m$ και φυσικού μήκους $l_0 = l_m$ το οποίο ισορροπεί στην κατακόρυφη θέση. Στο ελεύθερο άκρο του ελατηρίου κρεμάμε σώμα μάζας $m = 1kg$ και ταυτόχρονα το αφήνουμε ελεύθερο.

- (α') Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει Α.Α.Τ. και να βρείτε την εξίσωση της απομάκρυνσης του θεωρώντας ως χρονική στιγμή $t = 0s$ τη στιγμή που αρχίζει να ταλαντώνεται και θετική φορά τη φορά προς τα πάνω.
- (β') Υπολογίστε την περίοδο και το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος
- (γ') Όταν το σώμα βρίσκεται στην πιο χαμηλή θέση της ταλάντωσης του βρείτε την ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου
- (δ') Αν θεωρήσετε την πιο χαμηλή θέση της ταλάντωσης ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής ενέργειας υπολογίστε τη βαρυτική δυναμική ενέργεια, την κινητική ενέργεια και την ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου όταν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας του.
- (ε') Συγκρίνετε την απάντηση του ερωτήματος γ με το άθροισμα των απαντήσεων στο δ. Τι παρατηρείτε ; Γιατί ;



Σχήμα 3.15: α) Αρχική θέση β) Θέση Ισορροπίας γ) Ελατήριο σε έκταση

Λύση:

Αρχικά πρέπει να αποδειχτεί ότι το σώμα θα εκτελέσει Α.Α.Τ. Πρέπει λοιπόν να δειχθεί ότι ασκείται πάνω στο σώμα μια δύναμη επαναφοράς η οποία είναι ανάλογη της απομάκρυνσης. Στη θέση ισορροπίας το σώμα ισορροπεί και επομένως η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του είναι 0.

$$\begin{aligned}\Sigma F &= 0 \Rightarrow \\ F_{\theta, \iota} - B &= 0 \Rightarrow F_{\theta, \iota} = B \Rightarrow F_{\theta, \iota} = m \cdot g\end{aligned}$$

Στη συνέχεια το σώμα θα περάσει από τη θέση ισορροπίας και θα φτάσει στη θέση γ του σχήματος 3.15. Στη θέση αυτή το ελατήριο θα έχει έκταση x και επομένως η συνισταμένη δύναμη θα γίνει:

$$\begin{aligned}\Sigma F &= B - F' \\ F' &= k \cdot (x_{\alpha\rho\chi} + x) = F_{\theta, \iota} + k \cdot x\end{aligned}\tag{3.9}$$

$$F_{\theta, \iota} = B = m \cdot g\tag{3.10}$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 3.9, 3.10:

$$F' = -k \cdot x$$

Επομένως εφόσον η δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης το σώμα θα εκτελέσει Α.Α.Τ.

Στη συνέχεια πρέπει να βρεθεί η εξίσωση ταλάντωσης που περιγράφει το φαινόμενο. Για το σκοπό αυτό γράφεται η γενική μορφή της εξίσωσης και προσδιορίζονται τα μεγέθη που εμφανίζονται σ αυτή:

$$y = y_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 10 \text{ rad/s}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} = 0.628 \text{ s}$$

$$F = k \cdot y_0 \Rightarrow y_0 = \frac{m \cdot g}{k} = 0.1 \text{ m}$$

Αν στα προηγούμενα δεδομένα προστεθεί το γεγονός ότι το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0 \text{ s}$ βρίσκεται στη θέση $-x_0$ τότε:

$$\begin{aligned} -0.1 &= 0.1 \cdot \sin(10t + \phi) \Rightarrow \\ -1 &= \sin(\phi) \Rightarrow \\ \phi &= \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

Η ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι:

$$E_{\delta\nu\nu} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (2 \cdot y_0)^2 = 2 \text{ J}$$

Όταν το σώμα περνά από τη θέση ισορροπίας τότε η ελαστική δυναμική ενέργεια του ελατηρίου, η δυναμική ενέργεια βαρύτητας και η κινητική ενέργεια είναι αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} E_{\delta\nu\nu} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot y_0^2 = 0.5 \text{ J} \\ E_{\beta\alpha\rho} &= m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot y_0 = 1 \text{ J} \\ E_{\kappa\iota\nu} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\omega \cdot y_0)^2 = 0.5 \text{ J} \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις απαντήσεις για την ολική ενέργεια του ελατηρίου με το άθροισμα των ενεργειών που μόλις υπολογίστηκαν παρατηρείται ότι οι ποσότητες είναι ίσες. Αυτό συμβαίνει γιατί ο ταλάντωτής δεν έχει απώλειες ενέργειας και επομένως η μηχανική ενέργεια του συστήματος θα πρέπει να διατηρείται σταθερή.

3.4 Ασκήσεις από Διαγωνίσματα και Εισαγωγικές Εξετάσεις

1. Ενιαίες 2003:

Ελατήριο έχει φυσικό μήκος $l_0 = 10\text{cm}$ και σταθερά $k = 100\text{N/cm}$. Το έργο των δυνάμεων που ασκούνται στα άκρα του αποθηκεύεται υπο μορφή δυναμικής ενέργειας. Να προσδιορίσετε την επιπλέον ενέργεια που θα αποθηκευτεί στο ελατήριο αν το ολικό του μήκος αυξηθεί από

(α) 10cm σε 15cm

(β) 15cm σε 20cm

Λύση:

Αρχικά όλες οι μονάδες μετατρέπονται στο σύστημα $S.I.$. $k = 10^4\text{N/m}$, $l_0 = 0.1\text{m}$. Στην πρώτη περίπτωση η ενέργεια που θα αποθηκευτεί στο ελατήριο θα είναι:

$$E_{0.15} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot 0.05^2 = 12.5\text{J}$$

Στη συνέχεια για να υπολογιστεί η ενέργεια που αποθηκεύεται στο ελατήριο από $0.15\text{m} \rightarrow 0.2\text{m}$, υπολογίζεται η ενέργεια που αποθηκεύεται από τη θέση ισορροπίας σε 0.2m και αφαιρείται η ενέργεια που έχει ήδη αποθηκευτεί μέχρι τα 0.15m :

$$E_{0.2} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^4 \cdot 0.1^2 = 50\text{J}$$

$$\Delta E = E_{0.2} - E_{0.15} = 50 - 12.5 \Rightarrow$$

$$\Delta E = 37.5\text{J}$$

2. Ενιαίες 2000:

Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης γ σε σχέση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση:

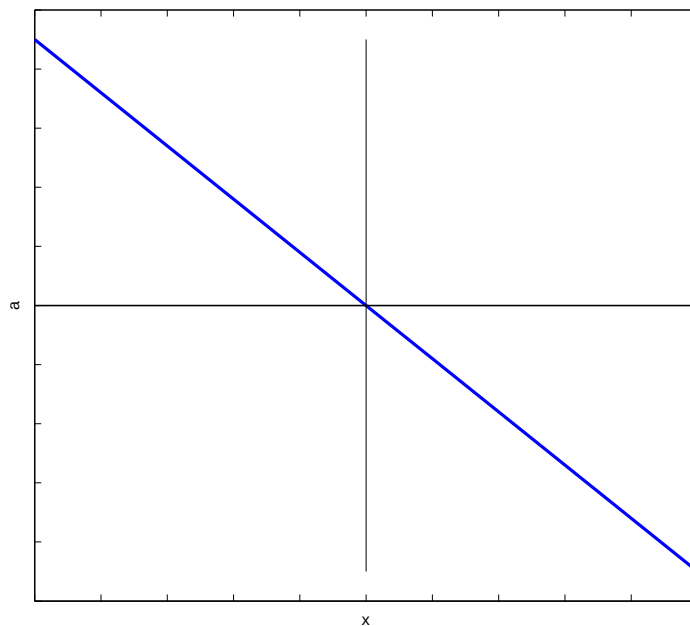
Για να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση δίνονται πρώτα οι εξισώσεις που αφορούν τα φυσικά μεγέθη της επιτάχυνσης και της θέσης στην Α.Α.Τ:

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega t + \phi)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) \Rightarrow$$

$$a = -\omega^2 \cdot x$$

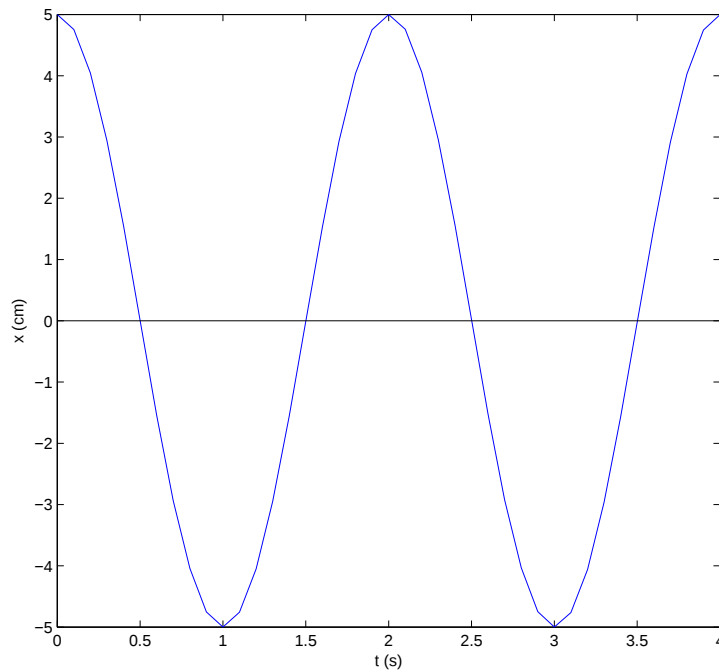
Με βάση αυτά τα ποτελέσματα βγαίνει το συμπέρασμα ότι η γραφική παράσταση είναι ευθεία με αρνητική κλίση ίση με $-\omega^2$ που περνά από την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 3.16: Γραφική παράσταση $a = f(x)$

3. Ενιαίες 1999:

Η απομάκρυνση σε σχέση με το χρόνο σε μια Γ.Α.Τ δίνεται στο σχήμα 3.17. Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης συναρτήσει του χρόνου αφού πρώτα υπολογίσετε το πλάτος, τη συχνότητα και την αρχική φάση της ταλάντωσης.



Σχήμα 3.17: Γραφική παράσταση $x = f(t)$

Λύση:

Υπολογίζονται με βάση το σχήμα τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ταλάντωσης:

- $x_0 = 5\text{cm}$
- $T = 2\text{s}$
- $f = \frac{1}{T} = 0.5\text{Hz}$
- $\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi$

Δίνεται η εξίσωση της γραμμική αρμονικής ταλάντωσης και με τη βοήθεια ενός σημείου που λαμβάνεται από τη γραφική παράσταση, ($t = 0, x = x_0 = 5\text{cm}$) υπολογίζεται η αρχική φάση:

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) \\
 5 &= 5 \cdot \sin(\pi \cdot 0 + \phi) \Rightarrow \sin \phi = 1 \Rightarrow \\
 \phi &= \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Η εξίσωση της γραμμικής αρμονικής ταλάντωσης είναι λοιπόν:

$$x = 5 \cdot \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$$

4. Εισαγωγικές 1999:

Να υπολογίσετε το λόγο της κινητικής ενέργειας προς τη δυναμική ενέργεια γραμμικού αρμονικού ταλαντωτή όταν η απομάκρυνση του είναι $x = \frac{x_0}{4}$, όπου x_0 είναι το πλάτος της ταλάντωσης.

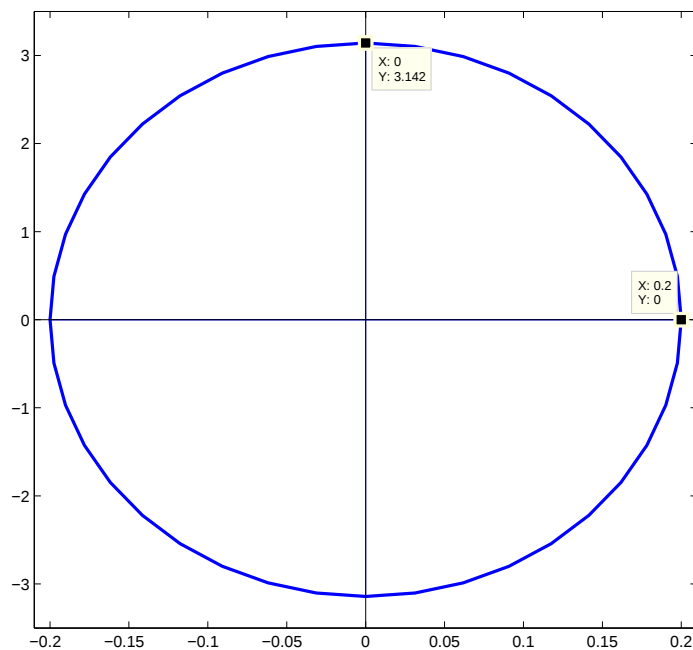
Λύση:

Για να υπολογιστεί ο λόγος πρέπει να υπολογιστεί η κινητική και δυναμική ενέργεια στη θέση που δίνεται. Είναι γνωστό όμως ότι η μέγιστη δυναμική ενέργεια, άρα και η ολική ενέργεια του συστήματος είναι ίση με $E_{max} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2$. Μπορεί λοιπόν να υπολογιστεί η κινητική ενέργεια στη θέση $\frac{x_0}{4}$ αν από την ολική αφαιρεθεί η δυναμική στην εν λόγω θέση:

$$\begin{aligned}
 E_{κιν} &= E_{ολ} - E_{δυν} \Rightarrow \\
 E_{κιν} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(\frac{x_0}{4}\right)^2 \Rightarrow \\
 E_{κιν} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(x_0^2 - \frac{x_0^2}{16}\right) = k \cdot \left(\frac{15x_0^2}{32}\right) \\
 \frac{E_{κιν}}{E_{δυν}} &= \frac{\frac{15x_0^2}{32}}{\frac{x_0^2}{32}} = 15
 \end{aligned}$$

5. Ενιαίες 2001:

Στο διάγραμμα 3.18 φαίνεται η γραφική παράσταση της ταχύτητας v σε σχέση με την απομάκρυνση x του σώματος που εκτελεί Γ.Α.Τ. Να δικαιολογήσετε τη μορφή της και να βρείτε το πλάτος και την περίοδο ταλάντωσης.



Σχήμα 3.18: Γραφική παράσταση $v = f(x)$

Λύση:

Η γραφική παράσταση που δίνεται είναι έλλειψη. Για να δικαιολογηθεί η μορφή της, εκείνο που απαιτείται είναι να γραφτούν οι εξισώσεις ταχύτητας και θέσης σε συνάρτηση με το χρόνο και από αυτές να γίνει απαληφή του χρόνου.

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (3.11)$$

$$v = \omega \cdot x_0 \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (3.12)$$

Πολλαπλασιάζεται η εξίσωση 3.40 με ω , στη συνέχεια υψώνονται και οι δύο στο τετράγωνο και προστίθενται:

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \cdot x^2 + v^2 &= \omega^2 \cdot x_0^2 \cdot \sin^2(\omega t + \phi) + \omega^2 \cdot x_0^2 \cdot \cos^2(\omega t + \phi) \\
 \omega^2 \cdot x^2 + v^2 &= \omega^2 \cdot x_0^2 \cdot (\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)) \Rightarrow \\
 \omega^2 \cdot x^2 + v^2 &= \omega^2 \cdot x_0^2 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

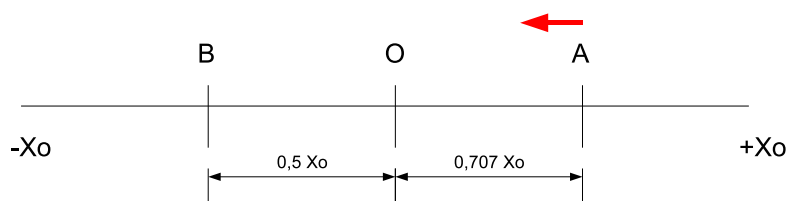
$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{v^2}{\omega^2 \cdot x_0^2} = 1 \quad (3.13)$$

Η εξίσωση 3.42 είναι εξίσωση έλλειψης με ημιάξονα $x_0 = 0.2m$ και ημιάξονα $v_0 = \omega x_0 = \pi$. Με βάση τώρα αυτές τις παρατηρήσεις μπορεί να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης:

$$\begin{aligned}
 \omega \cdot x_0 &= \pi \Rightarrow \\
 \frac{2\pi}{T} \cdot 0.2 &= \pi \Rightarrow \\
 T &= \frac{\pi}{0.2 \cdot 2\pi} = 2.5s
 \end{aligned}$$

6. Εισαγωγικές 2000:

Υλικό σημείο εκτελεί Γ.Α.Τ. πλάτους x_0 με περίοδο T . Να υπολογίσετε τον ελάχιστο χρόνο που χρειάζεται για να καλύψει τη διαδρομή από το Α στο Β (σχήμα 3.19).



Σχήμα 3.19: Απόσταση Α - Β σώματος που εκτελεί Γ.Α.Τ

Λύση:

Η ελάχιστη διαδρομή για να πάει το σώμα από το Α στο Β υπολογίζεται αν το σώμα βρίσκεται στο σημείο Α και κινείται με φορά προς το Β

όπως δείχνει το σχήμα. Το σώμα λοιπόν θα ξεκινήσει από το σημείο Α θα φτάσει στο Ο και μετά θα κινηθεί από το Ο στο σημείο Β. Αρχικά υπολογίζεται ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να φτάσει στο σημείο Β από το Ο :

$$\begin{aligned}x &= x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t_{OB}) \Rightarrow \\0.5 \cdot x_0 &= x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t_{OB}) \Rightarrow \\\omega \cdot t_{OB} &= \frac{\pi}{6} \Rightarrow \\t_{OB} &= \frac{\pi}{6\omega} = \frac{T \cdot \pi}{12\pi} = \frac{T}{12}\end{aligned}$$

Μένει λοιπόν τώρα να υπολογιστεί ο χρόνο που χρειάζεται το κινητό για να μετακινηθεί από το Α στο Ο και στη συνέχεια να βρεθεί το άθροισμα των δύο. Ο χρόνος αυτός είναι ο ίδιος με το χρόνο που χρειάζεται το κινητό να μετακινηθεί αντίστροφα, δηλαδή από το Α στο Ο, συνεπώς :

$$\begin{aligned}x &= x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t_{OA}) \Rightarrow \\0.707 \cdot x_0 &= x_0 \cdot \sin(\omega \cdot t_{OA}) \Rightarrow \\\omega \cdot t_{OA} &= \frac{\pi}{4} \Rightarrow \\t_{OA} &= \frac{\pi}{4\omega} = \frac{T \cdot \pi}{8\pi} = \frac{T}{8}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}t_{AB} &= t_{OB} + t_{OA} = \frac{T}{8} + \frac{T}{12} \Rightarrow \\t_{AB} &= \frac{5}{24} \cdot T\end{aligned}$$

7. Ενιαίες 2003:

Ένας ταλαντωτής εκτελεί δυο γραμμικές αρμονικές ταλάντωσης, την πρώτη πλάτους y_0 και τη δεύτερη πλάτους $2y_0$. Για τις δύο αυτές περιπτώσεις να προσδιορίσετε το λόγο :

- (α') Των περιόδων τους
- (β') Των μηχανικών τους ενεργειών
- (γ') Των μέγιστων επιταχύνσεών τους

Λύση:

Υπολογίζεται ο λόγος των περιόδων των δύο ταλαντώσεων:

$$T_1 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$T_2 = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = 1$$

Αυτό συμβαίνει γιατί ούτε η μάζα του σωματιδίου αλλάζει αλλά ούτε και η δυσκαμψία k του ελατηρίου. Στη συνέχεια υπολογίζεται ο λόγος των μηχανικών ενεργειών:

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2$$

$$E_2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (2x_0)^2$$

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot 4x_0^2} = \frac{1}{4}$$

Τέλος υπολογίζεται ο λόγος των μέγιστων επιταχύνσεων τους:

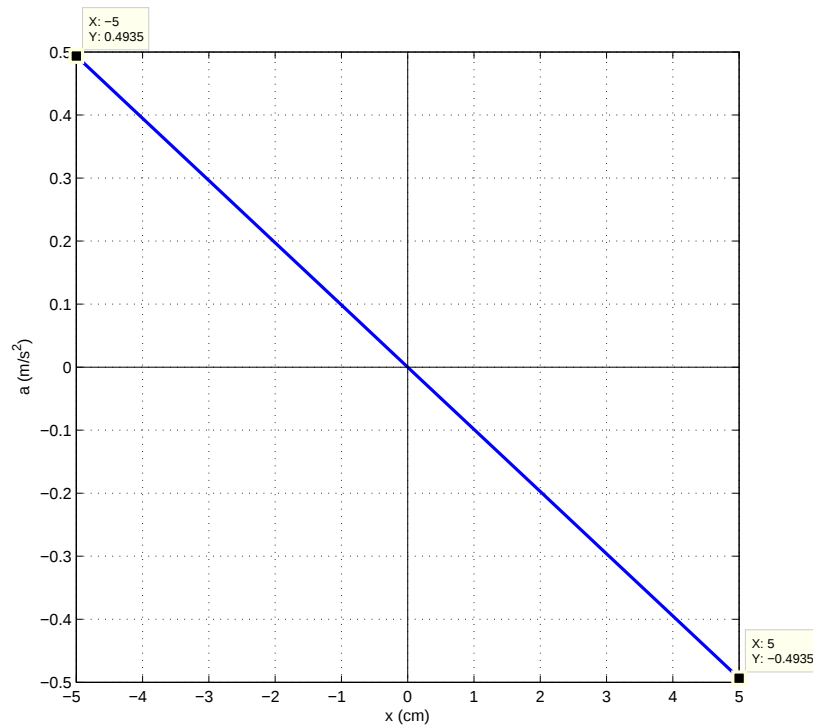
$$a_1 = \omega^2 x_0$$

$$a_2 = \omega^2 \cdot 2x_0$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\omega^2 x_0}{\omega^2 \cdot 2x_0} = \frac{1}{2}$$

8. Ενιαίες 2002:

Η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης σε σχέση με την απομάκρυνση σε μία Γ.Α.Τ δίνεται στο σχήμα 3.20. Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σε σχέση με το χρόνο.

Σχήμα 3.20: Γραφική παράσταση $a = f(x)$ **Λύση:**

Απο τη γραφική παράσταση που δίνεται εξάγονται σημαντικά αποτελέσματα που μπορούν να βοηθήσουν στον υπολογισμό των μεγεθών που χρειάζονται:

- Το πλάτος της επιτάχυνσης που είναι το τελευταίο σημείο της γραφικής παράστασης είναι $a_0 = 0.493 \text{ m/s}^2$
- Το πλάτος της ταλάντωσης πάλι από το ίδιο σημείο είναι $x_0 = 5 \text{ cm}$.

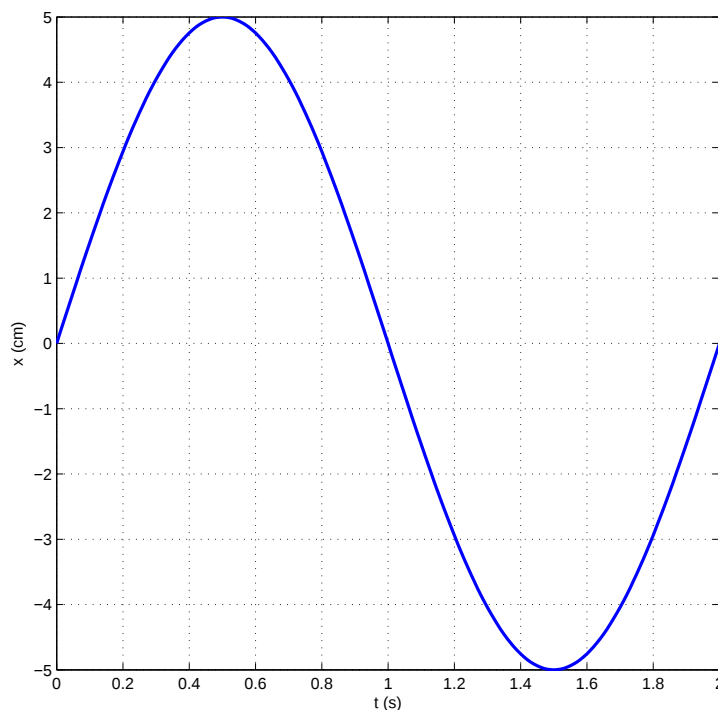
Χρησιμοποίηση των πιο πάνω δεδομένων δίνει:

$$a_0 = \omega^2 \cdot x_0 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{a_0}{x_0}} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{0.493}{0.05}} = \pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2s$$

Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης συναρτήσει του χρόνου δίνεται στο σχήμα 3.21



Σχήμα 3.21: Γραφική παράσταση $x = f(t)$

9. **Ενιαίες 2000:**

Να υπολογίσετε το λόγο της κινητικής προς τη δυναμική ενέργεια ταλαντευόμενου συστήματος σε απομάκρυνση (x) ίση με το μισό του πλάτους (x_0) της ταλάντωσης.

Λύση:

Η μεθοδολογία που ακολουθείται για να επιληθεί αυτή η άσκηση είναι:

- Υπολογίζεται η δυναμική ενέργεια στη θέση $x = \frac{x_0}{2}$
- Υπολογίζεται η συνολική ενέργεια (μηχανική) του συστήματος, που είναι ίση με τη δυναμική στο πλάτος ταλάντωσης

- Υπολογίζεται η κινητική ενέργεια αν από τη συνολική αφαιρεθεί η δυναμική
- Υπολογίζεται ο λόγος των δύο ενεργειών

$$\begin{aligned}
 E_{\kappa\iota\nu} &= E_{\sigma\lambda} - E_{\delta\nu\nu} \Rightarrow \\
 E_{\kappa\iota\nu} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{x_0^2}{2^2} \\
 E_{\kappa\iota\nu} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot \left(x_0^2 + \frac{x_0^2}{4}\right) \Rightarrow \\
 E_{\kappa\iota\nu} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{3}{4} \cdot x_0^2 \\
 \frac{E_{\kappa\iota\nu}}{E_{\delta\nu\nu}} &= \frac{\frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{3}{4} \cdot x_0^2}{\frac{1}{2} \cdot k \cdot \frac{x_0^2}{2^2}} = 3
 \end{aligned}$$

10. Εισαγωγικές 2001:

Δύο σώματα Α και Β εκτελούν γραμμική αρμονική ταλάντωση. Η απομάκρυνση τους από τη θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται στο διάγραμμα 3.23. Ζητούνται:

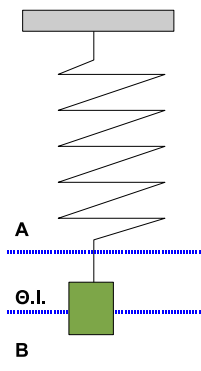
- (α') Ποια χρονική στιγμή ($t > 0$) το καθένα από τα δύο σώματα έχει για πρώτη φορά:
- Ταχύτητα μηδέν
 - Επιτάχυνση μηδέν
- (β') Να βρεθεί ο λόγος $\frac{a_{0A}}{a_{0B}}$, όπου a_{0A} , a_{0B} είναι οι μέγιστες επιταχύνσεις των σωμάτων.

Λύση:

Από τη γραφική παράσταση λαμβάνονται τα ακόλουθα δεδομένα:

- Σώμα Α: $T_A = 2s$ και $y_{0A} = 10cm$
- Σώμα Β: $T_B = 4s$ και $y_{0B} = 5cm$

Ταχύτητα μηδέν στη Γ.Α.Τ έχει ένα σώμα όταν βρίσκεται στη μέγιστη απομάκρυνση. Απο τη γραφική παράσταση φαίνεται ότι το σώμα Α έχει ταχύτητα μηδέν για πρώτη φορά σε χρόνο $\frac{T}{4} = 0.5s$ ενώ το δεύτερο έχει ταχύτητα μηδέν σε χρόνο $\frac{T}{4} = 1s$. Επιτάχυνση μηδέν έχουν όταν

Σχήμα 3.22: Γραφική παράσταση $x = f(t)$

περνουν για πρώτη φορά από τη θέση ισορροπίας. Για το σώμα Α αυτό συμβαίνει σε χρόνο $\frac{T}{2} = 1s$ ενώ για το σώμα Β σε χρόνο $\frac{T}{2} = 2s$.

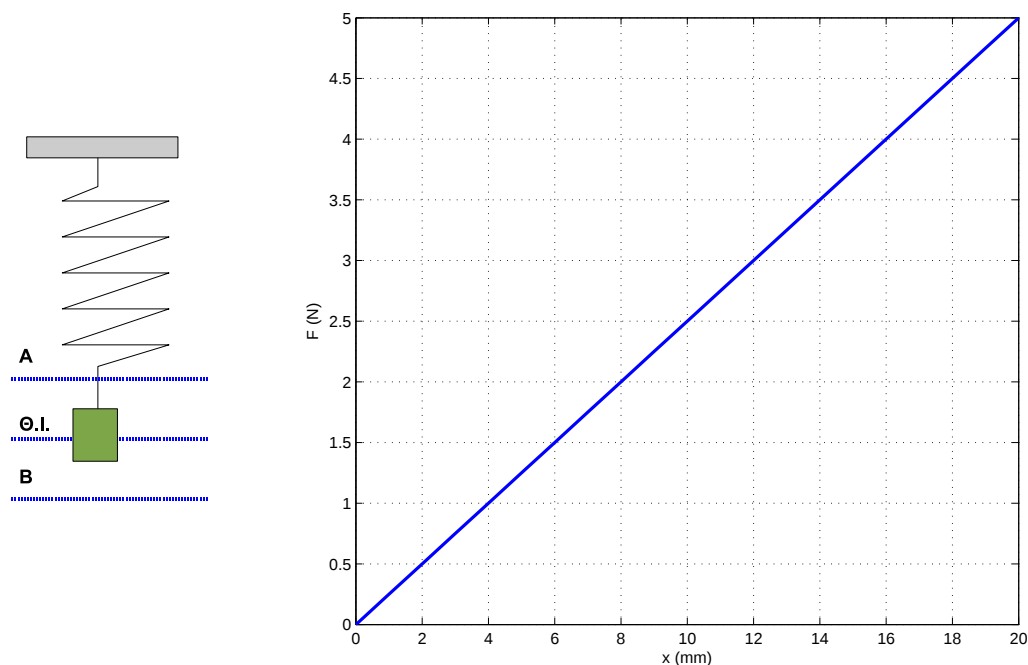
Πρέπει τώρα να υπολογιστεί ο λόγος των μέγιστων επιταχύνσεων:

$$\frac{a_{0A}}{a_{0B}} = \frac{y_{0A} \cdot \omega_A^2}{y_{0B} \cdot \omega_B^2} = \frac{0.1 \cdot \left(\frac{2\pi}{2}\right)^2}{0.05 \cdot \left(\frac{2\pi}{4}\right)^2} = 8$$

11. Εισαγωγικές 2001:

Στο πιο κάτω διάγραμμα φαίνεται μια μάζα $m = 0.5kg$ αναρτημένη στο άκρο ενός ελατηρίου. Η γραφική παράσταση δείχνει πώς μεταβάλλεται η τάση F στο ελατήριο με την επιμήκυνση Δx .

- (α') Με βάση τη γραφική παράσταση να βρείτε τη σταθερά του ελατηρίου k
- (β') Η μάζα m που αρχικά βρίσκεται στο σημείο Ο τίθεται σε κατακόρυφη ταλάντωση μεταξύ των σημείων Α και Β.
 - i. Σε ποιο σημείο η ταχύτητα της μάζας είναι μέγιστη;
 - ii. Απο ποιο σημείο πρέπει αν κινείται η μάζα ώστε η ταχύτητα και η επιτάχυνση να έχουν την ίδια φορά;
 - iii. Τι μετατροπές ενέργειας συμβαίνουν όταν η μάζα κινείται από το Β στο Ο;
- (γ') Εάν η μέγιστη κινητική ενέργεια της μάζας είναι $1.3J$ να υπολογίσετε το πλάτος ταλάντωσης.



Σχήμα 3.23: Σώμα αναρτημένο σε ελατήριο γραφική $F = f(x)$

Λύση:

Από τη γραφική παράσταση υπολογίζεται η σταθερά του ελατηρίου. Από το νόμο του Hooke $F = k \cdot x$ γίνεται αντιληπτό ότι σε μια γραφική παράσταση $F = f(x)$ η κλίση είναι η σταθερά του ελατηρίου. Με βάση αυτή τη παρατήρηση και τη γραφική παράσταση που δόθηκε:

$$k = \frac{F_{\tau\epsilon\lambda} - F_{\alpha\rho\chi}}{x_{\tau\epsilon\lambda} - x_{\alpha\rho\chi}} \Rightarrow$$

$$k = \frac{5 - 0}{0.02 - 0} = 250 \text{ N/m}$$

Στη συνέχεια ζητείται ο προσδιορισμός ορισμένων σημείων ανάλογα με κάποια χαρακτηριστικά.

- Η ταχύτητα γίνεται μέγιστη στη θέση ισορροπίας, συνεπώς στο Ο.
- Όταν το κινητό κινείται από το Α στο Ο ή από το Β στο Ο τότε ταχύτητα και επιτάχυνση έχουν την ίδια φορά

- Όταν η μάζα κινείται από το Β στο Ο δηλαδή από μέγιστη απομάκρυνση προς τη θέση ισορροπίας η ενέργεια μετατρέπεται από δυναμική σε κινητική.

Έστω τώρα ότι $E_{κιν} = 1.3J$. Η μέγιστη κινητική ενέργεια που έχει ένα σώμα ένας ταλαντωτής είναι ίση με την ολική ενέργεια που έχει ο ταλαντωτής και συνεπώς ίση και με τη μέγιστη δυναμική ενέργεια του σώματος. Απο το γεγονός αυτό προκύπτει:

$$E_{δυν} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 = 1.3 \quad J \Rightarrow$$

$$x_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.3}{250}} = 0.1 \quad m$$

12. Ενιαίες 2002:

Μαθητής αναρτά δίσκο στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου όπως στο σχήμα. Στο δίσκο προσθέτει γνωστή μάζα m , τον θέτει σε κατακόρυφη ταλάντωση και μετρά το χρόνο t , είκοσι πλήρων ταλαντώσεων σε κάθε περίπτωση. Οι μετρήσεις που πήρε φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Μάζα σε g	0	10	20	30	40	50
Χρόνος σε s	4	5,6	6,9	8	8,9	9,8

- (α') Με τις μετρήσεις αυτές να σχεδιάσετε κατάλληλη γραφική παράσταση και να βρείτε τη σταθερά του ελατηρίου και τη μάζα του δίσκου.
- (β') Ο μαθητής όταν ζύγισε το δίσκο βρήκε πώς η μάζα του ήταν λίγο μικρότερη από την τιμή που βρήκε από τη γραφική παράσταση. Γιατί συμβαίνει αυτό;
- (γ') Πώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η διάταξη σαν ζυγός;

Λύση:

Για να απαντηθούν τα ερωτήματα πρέπει να επεξηγηθούν ορισμένα θεωρητικά στοιχεία της άσκησης. Η σταθερά του ελατηρίου k προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$k = m \cdot \omega^2$$

Με βάση την προηγούμενη σχέση προκύπτει για την περίοδο του ταλάντωτη ότι:

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \alpha\lambda\lambda\iota\omega\varsigma$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} \cdot m$$

Από τα προηγούμενα γίνεται κατανοητό ότι αν κατασκευαστεί το διάγραμμα $T^2 = f(m)$ η κλίση του θα είναι ο λόγος $\frac{4\pi^2}{k}$. Άρα λοιπόν, η μεθοδολογία για να υπολογιστεί η σταθερά του ελατηρίου k είναι η ακόλουθη:

- Ο χρόνος που δίνεται στον πίνακα είναι για 20 ταλαντώσεις. Διαίρεται επομένως η τιμή που δίνεται με 20 έτσι ώστε να υπολογιστεί η περίοδος ταλάντωσης.
- Υψώνεται η περίοδος στο τετράγωνο
- Κατασκευάζεται το διάγραμμα $T^2 = f(m)$
- Από το διάγραμμα υπολογίζεται η κλίση
- Η υπολογισθήσα κλίση εξισώνεται με τον όρο $\frac{4\pi^2}{k}$ έτσι ώστε να βρεθεί το k .

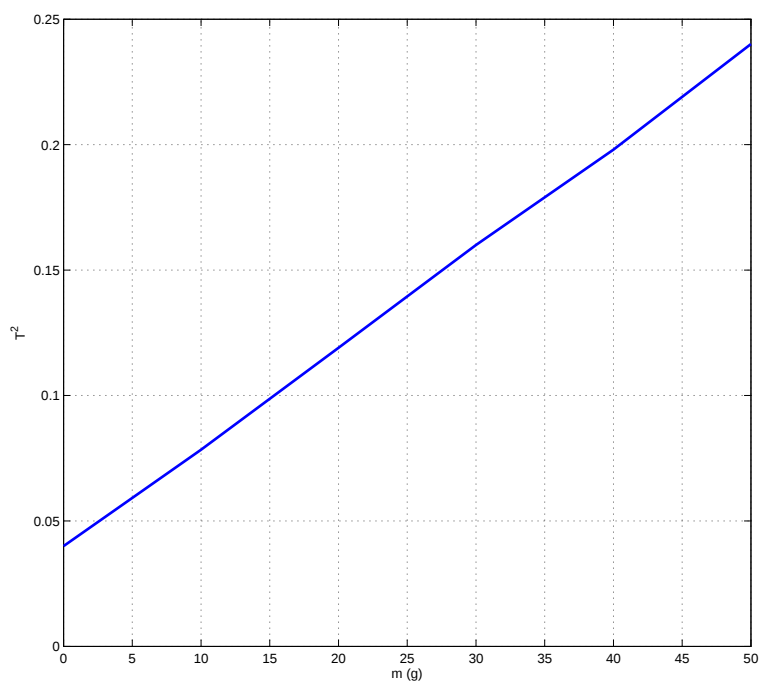
Η κλίση της γραφικής παράστασης 3.24 είναι:

$$\frac{4\pi^2}{k} = \frac{y_{\tau\epsilon\lambda} - y_{\alpha\rho\chi}}{x_{\tau\epsilon\lambda} - x_{\alpha\rho\chi}} \Rightarrow$$

$$\frac{4\pi^2}{k} = \frac{0.2401 - 0.04}{0.050 - 0} = 4 \Rightarrow$$

$$k = \frac{4\pi^2}{4} = 9.87 \quad N/m$$

Μάζα σε g	Χρόνος σε s	T	T^2
0	4	0,2	0,04
10	5,6	0,28	0,0784
20	6,9	0,345	0,119025
30	8	0,4	0,16
40	8,9	0,445	0,198025
50	9,8	0,49	0,2401

Σχήμα 3.24: Γραφική παράσταση $T^2 = f(m)$

Με βάση αυτή την τιμή του k και τη πρώτη μέτρηση όπου ο δίσκος δε φέρει επιπρόσθετη μάζα μπορεί να υπολογιστεί η μάζα του δίσκου:

$$k = m_{\delta} \cdot \omega^2 \Rightarrow$$

$$m_{\delta} = \frac{k}{\omega^2} = \frac{k \cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{4 \cdot 0.04}{4\pi^2} \Rightarrow$$

$$m_{\delta} = 4 \cdot 10^{-3} \text{ kg} = 4 \text{ g}$$

Ο λόγος που η μάζα του δίσκου που υπολόγισε ο μάθητής από τη γραφική παράσταση είναι μεγαλύτερη από τη μάζα που βρήκε όταν ζυγίσε το δίσκο προκύπτει από το γεγονός ότι έγινε η θεώρηση ότι το ελατήριο έχει αμελητέα μάζα ενώ στην πραγματικότητα αυτό δεν είναι σωστό. Από τα όσα έχουν λεχθεί μέχρι τώρα είναι προφανές πως αυτή η πειραματική διάταξη μπορεί να χρησιμοποιηθεί και σαν ζυγός. Ένα σώμα του οποίου η μάζα πρέπει να υπολογιστεί, τοποθετείται πάνω στο δίσκο. Το ελατήριο εκτρέπεται και μετριέται ο χρόνος 20 ταλαντώσεων. Από τη μέτρηση αυτή υπολογίζεται η περίοδος ταλάντωσης και στη συνέχεια το τετράγωνο της περιόδου. Με γνωστή τη σταθερά του ελατηρίου και τη μάζα του δίσκου μπορεί όπως και στη περίπτωση του δίσκου να υπολογιστεί η μάζα του σώματος.

13. Εισαγωγικές 2003:

Να απαντηθούν τα πιο κάτω ερωτήματα:

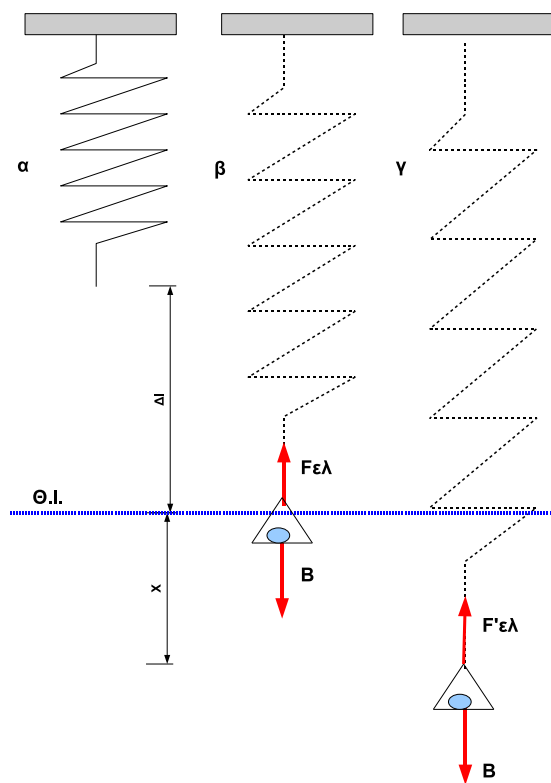
- (α') Ποιά είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη έτσι ώστε να εκτελεί ένα σώμα Γραμμική Αρμονική Τάλάντωση;
- (β') Ένα ελατήριο αμελητέου βάρους, σταθεράς k , κρέμεται κατακόρυφα στερεωμένο από το ένα του άκρο σε σταθερό σημείο. Όταν στο άλλο του αναρτηθεί σώμα Σ μάζας m , το ελατήριο επιμηκύνεται κατά Δl_0 και ισορροπεί σε μία θέση 0. Αν το σώμα εκτραπεί κατακόρυφα από τη θέση αυτή τότε θα εκτελέσει ταλάντωση.
 - i. Να δείξετε ότι η ταλάντωση που θα εκτελέσει το σώμα είναι Γραμμική Αρμονική Ταλάντωση.
 - ii. Να βρείτε τη μαθηματική σχέση που δίνει την εξίσωση της ταλάντωσης.

Λύση:

- (α') Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα Γραμμική αρμονική ταλάντωση είναι να ασκείται πάνω του δύναμη επαναφοράς. Η δύναμη επαναφοράς έχει τα πιο κάτω χαρακτηριστικά:
 - Τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας
 - Είναι ανάλογη της απομάκρυνσης
 - $F = -k \cdot \chi$

Ικανή συνθήκη: Αν ασκείται πάνω στο σώμα δύναμη επαναφοράς τότε το σώμα εκτελεί Γραμμική αρμονική ταλάντωση.

Αναγκαία συνθήκη: Για να εκτελεί ένα σώμα Γραμμική Αρμονική Ταλάντωση, πρέπει να ασκείται σ' αυτό δύναμη επαναφοράς.



Σχήμα 3.25: α) Αρχική θέση β) Θέση Ισορροπίας γ) Ελατήριο σε έκταση

(β') Πρέπει λοιπόν να αποδειχτεί ότι το σώμα θα εκτελέσει Γ.Α.Τ. Όπως έχει ήδη απαντηθεί στο προηγούμενο ερώτημα για να πρέπει να αποδειχθεί ότι στο σώμα ασκείται δύναμη επαναφοράς. Στη θέση ισορροπίας το ισορροπεί και επομένως η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του είναι 0.

$$\begin{aligned}\Sigma F &= 0 \Rightarrow \\ F_{\theta, \iota} - B &= 0 \Rightarrow F_{\theta, \iota} = B \Rightarrow F_{\theta, \iota} = m \cdot g\end{aligned}$$

Στη συνέχεια το σώμα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας και φτάνει στη θέση γ του σχήματος 3.25. Στη θέση αυτή το ελατήριο θα έχει έκταση x και επομένως η συνισταμένη δύναμη θα γίνει:

$$\Sigma F = B - F' \quad (3.14)$$

$$F' = k \cdot (\Delta l_0 + x) = F_{\theta, \iota} + k \cdot x \quad (3.15)$$

$$F_{\theta, \iota} = B = m \cdot g \quad (3.16)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 3.14, 3.15 και 3.16:

$$\Sigma F = -k \cdot x$$

Επομένως εφόσον η δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης το σώμα θα εκτελέσει Γ.Α.Τ.

Στη συνέχεια ζητείται να υπολογιστεί η μαθηματική σχέση που δίνει την περίοδο της ταλάντωσης ενός τέτοιου συστήματος. Για να υπολογιστεί η περίοδος της ταλάντωσης θα χρησιμοποιηθούν οι κάτωθι εξισώσεις:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad (3.17)$$

$$k = m \cdot \omega^2 \quad (3.18)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 3.17, 3.22 προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} k &= m \cdot \omega^2 = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow \\ \frac{2\pi}{T} &= \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \\ T &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

Με τον τρόπο αυτό υπολογίστηκε και η μαθηματική εξίσωση που δίνει την περίοδο ταλάντωσης του σώματος.

14. **Ενιαίες 2002:**

Να απαντηθούν τα πιο κάτω ερωτήματα:

- (α') Οι αστροναύτες για να παρακολουθούν τη μάζα τους δεν είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουν συνηθισμένες ζυγαρίες που χρησιμοποιούνται στη Γή. Να εξηγηθεί η πρόταση αυτή.

- (β') Για να μετρήσουν τη μάζα τους οι αστροναύτες χρησιμοποιούν ειδικό κάθισμα που είναι τοποθετημένο πάνω σε ελατήριο στερεωμένο στο διαστημόπλοιο. Όταν συμπίεσουν το κάθισμα που έχει ολική μάζα 60kg η συχνότητα με την οποία ταλαντεύεται είναι $f = 3.2\text{Hz}$. Αν καθίσει και ο αστροναύτης στο κάθισμα τότε η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος γίνεται $f' = 2.2\text{Hz}$. Να υπολογιστεί η μάζα του αστροναύτη.
- (γ') Μετά απο ένα μήνα ο αστροναύτης ξανακάθεται στο κάθισμα. Η συχνότητα ταλάντωσης του συστήματος γίνεται τώρα ίση με $f'' = 2.2\text{Hz}$. Αυξήθηκε η ελαττώθηκε η μάζα του και πόσο.
- (δ') Αν τις μετρήσεις αυτές τις πραγματοποιούσε σε ένα ακριβώς όμοιο σύστημα, θα έβρισκε την ίδια μάζα η διαφορετική. Να εξηγήσετε την απάντησή σας.

Λύση:

- (α') Οι αστροναύτες δεν μπορούν αν χρησιμοποιήσουν συνηθισμένες ζυγαριές που χρησιμοποιούνται στη γή. Οι συνθήκες βαρύτητας που επικρατούν είναι διαφορετικές και συνεπώς η μεθοδολογία για τον υπολογισμό της μάζας τους πρέπει να αλλάξει.
- (β') Για τον υπολογισμό της μάζας τους λοιπόν χρησιμοποιούν το προαναφερθέν κάθισμα. Πρέπει λοιπόν να μετασχηματιστεί η εξίσωση

$$k = m \cdot \omega^2 \quad (3.19)$$

με τέτοιο τρόπο ώστε με βάση τις μετρήσεις της συχνότητας ταλάντωσης του συστήματος να υπολογίζεται η εκάστοτε μάζα που τοποθετείται στο κάθισμα.

Ισχύει ότι:

$$\omega = 2\pi f \quad (3.20)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 3.22, 3.20 προκύπτει η εξίσωση:

$$k = m \cdot (2\pi f)^2 \quad (3.21)$$

Η παρατήρηση που βοηθάει στην επίλυση της άσκησης είναι ότι η σταθερά k (ακαμψία) του ελατηρίου δεν αλλάζει και αυτό γιατί

το ελατήριο είναι πάντα το ίδιο! Το γεγονός αυτό επιτρέπει τον υπολογισμό της οποιασδήποτε μάζας τοποθετηθεί πάνω στο κάθισμα. Αρχικά γίνεται η μέτρηση της συχνότητας με το κάθισμα μόνο που έχει γνωστή μάζα m_{chair} και στη συνέχεια γίνεται αντίστοιχη μέτρηση με τη μάζα του αστροναύτη, όπου η μάζα του συστήματος θα γίνει $m_{tot} = m_{chair} + m_{astr}$. Πιο κάτω δίνεται η επίλυση της άσκησης:

$$\begin{aligned}(m_{chair} + m_{astr}) \cdot (2\pi f')^2 &= m_{chair} \cdot (2\pi f)^2 \Rightarrow \\ (m_{chair} + m_{astr}) \cdot f'^2 &= m_{chair} \cdot f^2 \Rightarrow\end{aligned}$$

$$m_{astr} \cdot f'^2 = m_{chair} \cdot f^2 - m_{chair} \cdot f'^2 \Rightarrow$$

$$m_{astr} = m_{chair} \cdot \frac{(f^2 - f'^2)}{f'^2} \Rightarrow$$

$$m_{astr} = 60 \cdot \frac{3.2^2 - 2.2^2}{2.2^2} \Rightarrow$$

$$m_{astr} = 66.94kg$$

- (γ) Μετά από ένα μήνα ο αστροναύτης θέλει να υπολογίσει εκ νέου τη μάζα του. Η εξίσωση που έχει εξαχθεί προηγουμένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να υπολογιστεί η νέα μάζα του αστροναύτη να τοποθετηθεί στη θέση της συχνότητας f' η συχνότητα f'' που είναι η συχνότητα που μετρήθηκε για την νέα μάζα του αστροναύτη.

$$m_{astr} = m_{chair} \cdot \frac{(f^2 - f''^2)}{f''^2} \Rightarrow$$

$$m_{astr} = 64.67kg$$

Συνεπώς η δίαιτα που ακολούθησε ο αστροναύτης στέφθηκε με επιτυχία αφού έχει χάσει $2.27kg$!!!

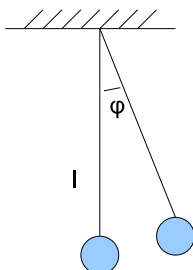
- (δ) Τέλος πρέπει να απαντηθεί το ερώτημα τί θα γίνει αν το εν λόγω σύστημα χρησιμοποιηθεί στη γή για μετρήσεις μάζας. Στη σχέση που έχει εξαχθεί για τον υπολογισμό της μάζας του αστροναύτη δεν υπάρχει πουθενά ο παράγοντας επιτάχυνσης βαρύτητας. Συνεπώς,

με βάση την παρατήρηση αυτή γίνεται αντιληπτό ότι οι μετρήσεις που θα γίνουν στη γή, θα δώσουν τα ίδια αποτελέσματα με τα αποτελέσματα που υπολογίστηκαν προηγουμένως.

15. **Ενιαίες 1998:**

Σφαίρα Σ , μάζας m , κρέμεται από αβαρές νήμα μήκους l , σε πεσίο βαρύτητας έντασης g . Όταν η σφαίρα εκτραπεί λίγο από τη θέση ισορροπίας της και αφεθεί ελεύθερη, φαίνεται να εκτελεί αρμονική ταλάντωση και φαίνεται η περίοδος ταλάντωσης να μην εξαρτάται από τη γωνία εκτροπής ϕ .

- (α') Να διερευνήσετε θεωρητικά αν πράγματι ισχύουν τα πιο πάνω και υπο ποιές προϋποθέσεις.
- (β') Να προσδιορίσετε τον τύπο που δίνει την περίοδο της ταλάντωσης σε συνάρτηση με τα δεδομένα του προβλήματος.
- (γ') Να περιγράψετε πειραματική διαδικασία προσδιορισμού της επιτάχυνσης της βαρύτητας με τη βοήθεια της πιο κάτω διάταξης.



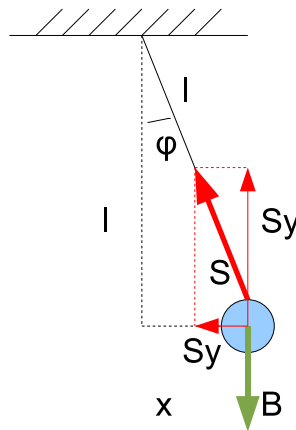
Σχήμα 3.26: Εκκρεμές

Λύση:

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα γραμμική αρμονική ταλάντωση είναι να ασκείται πάνω του δύναμη επαναφοράς. Η δύναμη επαναφοράς έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας του
- Είναι ανάλογη της απομάκρυνσης.

Για να αποδειχθεί ότι το εκκρεμές θα εκτελέσει Γ.Α.Τ πρέπει να αποδειχθεί ότι ασκείται πάνω του δύναμη επαναφοράς. Το σώμα εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας κατά μια γωνία ϕ μικρότερη των 6 μοιρών και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερο. Το σχήμα 3.33 δείχνει τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο εκκρεμές σε μια τυχαία θέση.



Σχήμα 3.27: Δυνάμεις που ασκούνται στο εκκρεμές

Η γωνία εκτροπής ϕ , είναι πολύ μικρή, συνεπώς η κατακόρυφη απόσταση μπορεί να θεωρηθεί ίση με l και ότι το σώμα δεν κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση παρα μόνο στην οριζόντια. Με βάση τώρα τις δυνάμεις που έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα 3.33 θα γίνει η ανάλυση για να αποδειχθεί το ζητούμενο.

Λόγω του ότι το σώμα δεν κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση η συνισταμένη δύναμη στη διεύθυνση αυτή είναι 0.

$$\begin{aligned}\Sigma F_y &= 0 \Rightarrow \\ S_y - B &= 0 \Rightarrow S_y = B \Rightarrow \\ S_y &= mg\end{aligned}\tag{3.22}$$

Με βάση όμως την ανάλυση της δύναμης S προκύπτει ότι:

$$S_y = S \cdot \cos\phi\tag{3.23}$$

$$S_x = -S \cdot \sin\phi\tag{3.24}$$

Από τις εξισώσεις 3.32 και 3.33 προκύπτει

$$S \cdot \cos\phi = mg \Rightarrow \quad (3.25)$$

$$S = \frac{mg}{\cos\phi} \quad (3.26)$$

Αντικαθιστώντας την 3.36 στην 3.34 εξάγεται η εξίσωση :

$$S_x = -\frac{mg}{\cos\phi} \cdot \sin\phi \quad (3.27)$$

αλλά από την γεωμετρία του σχήματος 3.33 και από την παρατήρηση ότι για μικρές γωνίες η κατακόρυφος ισούται με το μήκος του νήματος l προκύπτει ότι :

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\phi = \frac{x}{l} \quad (3.28)$$

Αντικαθιστώντας την 3.38 στην 3.37 εξάγεται η εξίσωση :

$$S_x = -\frac{mg}{l} \cdot x \quad (3.29)$$

Η δύναμη S_x , είναι μια δύναμη επαναφοράς όπως έχει εξηγηθεί και στην αρχή της άσκησης. Συνεπώς το σώμα θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση.

Στη συνέχεια πρέπει να προσδιοριστεί η σχέση που δίνει την περίοδο ταλάντωσης υτου εκκρεμούς. Από την εξίσωση που δίνει την δύναμη επαναφοράς προσδιορίζεται ο συντελεστής D (σταθερά που πολλαπλασιάζει την απομάκρυνση). Στη συνέχεια ο συντελεστής αυτός εξισώνεται με $D = m\omega^2$ και υπολογίζεται η περίοδος ταλάντωσης του εκκρεμούς. Αναλυτικά η προαναφερθείσα μεθοδολογία :

- $D = \frac{mg}{l}$
- $D = m\omega^2$
- $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Χρησιμοποιώντας τις δυο πρώτες σχέσεις προκύπτει ότι

$$m\omega^2 = \frac{mg}{l} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l}$$

βάζοντας τώρα και την τρίτη εξίσωση προκύπτει :

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Η τελευταία εξίσωση αποτελεί τη μαθηματική εκφραση του υπολογισμού της περιόδου ταλάντωσης ενός εκκρεμούς μήκους l σε πεδίο βαρύτητας με επιτάχυνση βαρύτητας g .

Το τελευταίο κομμάτι της άσκησης ζητά την περιγραφή πειράματος για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας. Από την ανάλυση που έχει γίνει στην άσκηση είναι εύκολο να περιγραφεί πείραμα για την εύρεση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g . Η μεθοδολογία που ακολουθείται είναι :

- Σώμα οποιασδήποτε μάζας αναρτάται στο άκρο νήματος
- Το νήμα εκτρέπεται από την κατακόρυφο κατά μια μικρή γωνία θ και αφήνεται να εκτελέσει ταλάντωση
- Υπολογίζεται ο χρόνος που χρειάζεται για 20 (εν γένη n) ³ πλήρεις ταλαντώσεις
- Απο το χρόνο αυτό υπολογίζεται η περίοδος. Αφού έχει υπολογιστεί ο χρόνος για 20 ταλαντώσεις σημαίνει ότι διαιρώντας με το 20 το χρόνο αυτό παίρνω την περίοδο.
- Υπολογίζεται το τετράγωνο της περιόδου
- Τα προηγούμενα βήματα επαναλαμβάνονται για λήψει αρκετών μετρήσεων
- Κατασκευάζεται η γραφική παράσταση $T^2 = f(l)$ ($T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot l$)

³Ο λόγος που μετρούνται 20 ή n πλήρεις ταλαντώσεις είναι για να ελαχιστοποιείται το σφάλμα της χρονομέτρησης. Με τον τρόπο αυτό η απροσδιοριστία στο ξεκίνημα και το σταμάτημα του χρονομέτρου διαμοιράζεται σε 20 ταλαντώσεις και όχι σε μια.

- Χαράζεται η βέλτιστη ευθεία με βάση τις μετρήσεις που έχουν ληφθεί
- Από την κλίση, λ , της ευθείας υπολογίζεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $\lambda = \frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{\lambda}$

16. **Ενιαίες 1999:**

Απο ποιούς παράγοντες και πώς εξαρτάται η περίοδος του απλού εκκρεμούς; Τι θα πάθει η περίοδος του απλού εκκρεμούς;

- (α') αν τετραπλασιαστεί η μάζα του;
- (β') αν υποτετραπλασιαστεί το μήκος του;
- (γ') αν μεταφερθεί από τη Γή στη Σελήνη;

Λύση:

Στην προηγούμενη άσκηση αποδείχθηκε η σχέση που δίνει την περίοδο ταλάντωσης του εκκρεμούς. Απο την σχέση αυτή θα απαντηθούν τα ερωτήματα της άσκησης αυτής.

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (3.30)$$

Αντικατάσταση του σώματος που είναι αναρτημένο πάνω στο εκκρεμές με άλλου τετραπλάσιας μάζας ΔΕΝ επιφέρει καμία αλλαγή στην περίοδο του εκκρεμούς όπως φαίνεται από την εξίσωση 3.30. Αυτό γιατί η μάζα δεν παρουσιάζεται πουθενά στην εξίσωση αυτή.

Αντίθετα υποτετραπλασιασμός του μήκους του εκκρεμούς επιφέρει μεταβολή που υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \\ T' &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\frac{l}{4}}{g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{4 \cdot g}} = \frac{1}{2} \cdot (2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}) \Rightarrow \\ T' &= \frac{1}{2} \cdot T \end{aligned}$$

Παρομοίως και για το τρίτο ερώτημα. Αν μεταφερθεί στη σελήνη το εκκρεμές ($g_{\Sigma} = \frac{g_{\Gamma}}{6}$), τότε υπάρχει μεταβολή που θα υπολογιστεί ως ακολούθως:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$T' = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{\frac{g}{6}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{6 \cdot l}{g}} = \sqrt{6} \cdot (2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}) \Rightarrow$$

$$T' = \sqrt{6} \cdot T$$

17. Ενιαίες 1999:

Ομάδα μαθητών μελέτησε στο εργαστήριο τους παράγοντες από τους οποίους πιθανόν να εξαρτάται η περίοδος T σώματος μάζας m αναρτημένου στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k . Οι μετρήσεις φαίνονται στον πίνακα που ακολουθεί.

A / A	Πλάτος X_0	μάζα σε kg	Σταθερά ελατηρίου k N/m	Περίοδος T s
1	0,10	0,2	20	0,63
2	0,10	0,3	20	0,77
3	0,10	0,2	30	0,51
4	0,15	0,2	20	0,63
5	0,10	0,4	20	0,89
6	0,10	0,2	40	0,44
7	0,20	0,2	20	0,63

Πίνακας 3.1: Μετρήσεις για προσδιορισμό της εξάρτησης της ταλάντωσης από τις παραμέτρους m, x_0, k

Ζητούνται:

- (α') Να περιγράψετε την πειραματική διάταξη και να εξηγήσετε τον τρόπο με τον οποίο λήφθηκαν οι μετρήσεις.
- (β') Ποιές από τις πιο πάνω μετρήσεις θα επιλέξετε για να βρείτε κατά πόσο η περίοδος T της ταλάντωσης εξαρτάται από:
 - i. το πλάτος X_0
 - ii. Απο τη μάζα m
 - iii. από τη σταθερά του ελατηρίου k
- (γ') Να καταγράψετε τις μετρήσεις που επιλέξατε στην ερώτηση β σε τρεις χωριστούς πίνακες και να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις $T = f(X_0)$, $T = f(m)$, $T = f(k)$. Ποιά μεγέθη διατηρούνται σταθερά σε κάθε περίπτωση και ποιές οι τιμές τους;

(δ') Απο τις γραφικές παραστάσεις της ερώτησης γ να βγάλετε συμπεράσματα για το πώς εξαρτάται ποιοτικά η περίοδος T από τα πιο πάνω μεγέθη.

Λύση:

Αρχικά περιγράφεται η μεθοδολογία που πρέπει να ακολουθηθεί έτσι ώστε να ληφθούν οι μετρήσεις που φαίνονται στον πίνακα της άσκησης. Η μεθοδολογία λοιπόν είναι η ακόλουθη:

- Ζυγίζεται η μάζα που τοποθετείται πάνω στο ελατήριο
- Μετριέται ο χρόνος για n ταλαντώσεις (για ελαχιστοποίηση σφάλματος) και στη συνέχεια διαιρείται η τιμή που υπολογίστηκε με n έτσι ώστε να υπολογιστεί η περίοδος ταλάντωσης.
- Μετριέται το πλάτος ταλάντωσης (μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας)
- Από το διάγραμμα υπολογίζεται η κλίση.

Για να απαντηθεί το ερώτημα β κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν κάποια στοιχεία για την πειραματική μεθοδολογία που ακολουθείται έτσι ώστε να καθοριστεί το πώς επηρεάζει κάθε παράμετρος ένα συγκεκριμένο πρόβλημα.

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ η οποία εξαρτάται από n τον αριθμό παραμέτρους. Ας υποθεθεί ότι το y είναι κάποιο φυσικό μέγεθος όπως για παράδειγμα η θερμοκρασία και πρέπει να βρεθεί πώς επηρεάζεται από τις παραμέτρους $x_1 \rightarrow$ απόσταση από τον ήλιο, $x_2 \rightarrow$ πίεση ... κ.λ.π. Για να καθοριστεί λοιπόν η εξάρτηση της θερμοκρασίας από την παράμετρο $x_1 \rightarrow$ απόσταση από τον ήλιο εκείνο που πρέπει να γίνει είναι κρατώντας σταθερές όλες τις άλλες παραμέτρους να γίνουν πειραματικές μετρήσεις που διαφέρουν μόνο κατά την παράμετρο $x_1 \rightarrow$ απόσταση από τον ήλιο. Αν η τιμή της θερμοκρασίας, παράμετρος y , αλλάξει τότε σημαίνει ότι η παράμετρος που έχει μεταβληθεί επηρεάζει το σύστημα, αν όχι τότε δεν υπάρχει καμία εξάρτηση από την εν λόγω παράμετρο.

Βάσει των παρατηρήσεων αυτών μπορεί να απαντηθεί το ερώτημα:

i Εξάρτηση από το πλάτος X_0 :

Για να καθοριστεί αν το πλάτος ταλάντωσης επηρεάζει την περίοδο, διατηρούνται οι παράμετροι μάζα m και σταθερά ελατηρίου k σταθερά και μεταβάλλεται μόνο το πλάτος X_0 . Ο πίνακας με τις μετρήσεις είναι ο ακόλουθος:

A / A	Πλάτος X_0	μάζα σε kg	Σταθερά ελατηρίου k N/m	Περίοδος T s
1	0,10	0,2	20	0,63
4	0,15	0,2	20	0,63
7	0,20	0,2	20	0,63

Πίνακας 3.2: Μεταβολή του X_0 . m, k σταθερά

Απο τον πίνακα αυτό είναι φανερό ότι μεταβολή του πλάτους ταλάντωσης δεν επιφέρει καμία μεταβολή στη περίοδο ταλάντωσης. Αυτό σημαίνει ότι το πλάτος ταλάντωσης δεν επηρεάζει την περίοδο ταλάντωσης.

ii Εξάρτηση από τη μάζα m ;

Για να καθοριστεί αν η μάζα επηρεάζει την περίοδο, διατηρούνται οι παράμετροι πλάτος X_0 και σταθερά ελατηρίου k σταθερά και μεταβάλλεται μόνο η μάζα m . Ο πίνακας με τις μετρήσεις είναι ο ακόλουθος:

A / A	Πλάτος X_0	μάζα σε kg	Σταθερά ελατηρίου k N/m	Περίοδος T s
1	0,10	0,2	20	0,63
2	0,10	0,3	20	0,77
5	0,10	0,4	20	0,89

Πίνακας 3.3: Μεταβολή της μάζας m . X_0, k σταθερά

Είναι εμφανές από τις πιο πάνω μετρήσεις ότι αλλαγή στη μάζα που αναρτάται στο ελατήριο μεταβάλλει την περίοδο της ταλάντωσης.

iii Εξάρτηση από τη σταθερά του ελατηρίου k ;

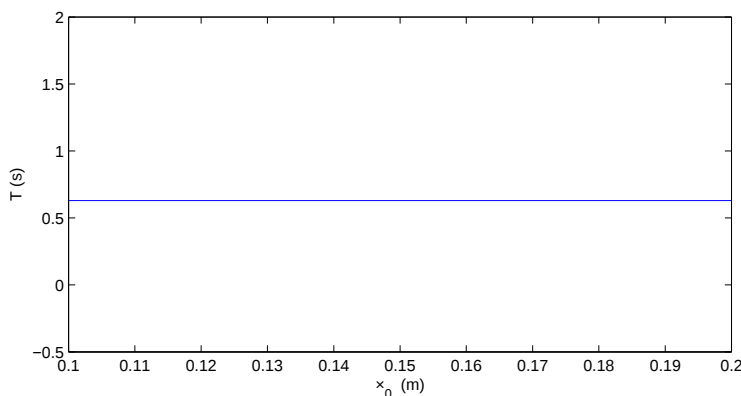
Για να καθοριστεί αν η σταθερά του ελατηρίου k επηρεάζει την περίοδο, διατηρούνται οι παράμετροι πλάτος X_0 και μάζα m σταθερά ενώ μεταβάλλεται μόνο η σταθερά ελατηρίου k . Ο πίνακας με τις μετρήσεις είναι ο ακόλουθος:

A / A	Πλάτος X_0	μάζα σε kg	Σταθερά ελατηρίου k N/m	Περίοδος T s
1	0,10	0,2	20	0,63
3	0,10	0,2	30	0,51
6	0,10	0,2	40	0,44

Πίνακας 3.4: Μεταβολή του k . m, X_0 σταθερά

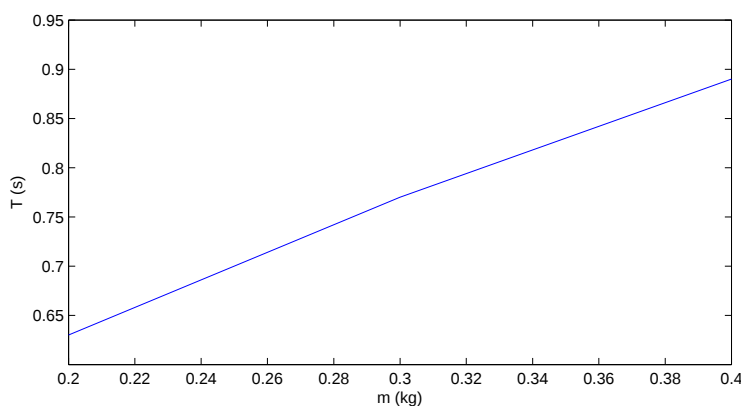
Είναι εμφανές από τις πιο πάνω μετρήσεις ότι αλλαγή στη σταθερά του ελατηρίου k , δηλαδή αλλαγή του ελατηρίου μεταβάλλει την περίοδο της ταλάντωσης.

Κατασκευάζονται τώρα οι γραφικές παραστάσεις για τους πιο πάνω πίνακες που έχουν κατασκευαστεί και από αυτές εξάγονται ποιοτικά συμπεράσματα.



Σχήμα 3.28: Εξάρτηση ταλάντωσης από το πλάτος

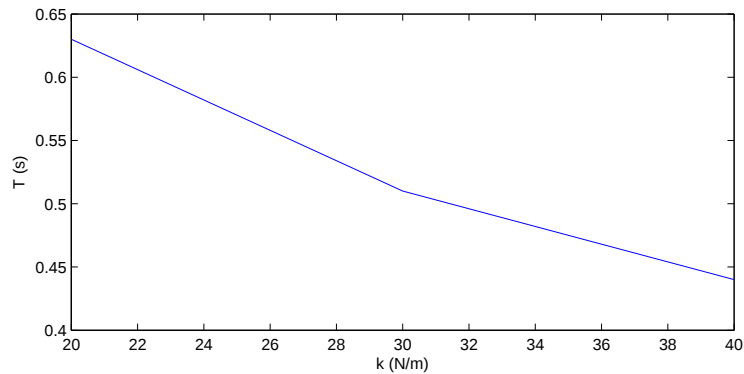
Όπως έχει ήδη αναφερθεί αλλαγή του πλάτους ταλάντωσης δεν επιφέρει καμία μεταβολή στη περίοδο. Αυτό είναι εμφανές και από τη γραφική παράσταση 3.28 που έχει κατασκευαστεί.



Σχήμα 3.29: Εξάρτηση ταλάντωσης από τη μάζα

Ποιοτικά εκείνο που μπορεί να λεχθεί από τη γραφική παράσταση 3.29 είναι ότι αύξηση της μάζας επιφέρει και αύξηση της περιόδου ταλάντωσης για το ελατήριο που ταλαντώνεται.

Ποιοτικά εκείνο που μπορεί να λεχθεί από τη γραφική παράσταση 3.30 είναι ότι αύξηση της σταθεράς του ελατηρίου επιφέρει μείωση της περιόδου ταλάντωσης για το ελατήριο που ταλαντώνεται.



Σχήμα 3.30: Εξάρτηση ταλάντωσης από τη μάζα

18. Εισαγωγικές 2004:

Σε πείραμα για τον προσδιορισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας ένας μαθητής πήρε τις ακόλουθες μετρήσεις:

A / A	$l(m)$ Μήκος εκκρεμούς	$10T(s)$ T περίδος ταλάντωσης
1	0,6	15
2	0,8	18
3	1,0	20
4	1,2	22
5	1,4	24

Πίνακας 3.5: Μετρήσεις για εύρεση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g

(α') Με βάση τις μετρήσεις αυτές να σχεδιάσετε κατάλληλη γραφική παράσταση και να βρείτε από αυτή το g .

(β') Τι θα πρέπει να προσεχθεί για περιορισμό των σφαλμάτων;

Λύση:

Για τον υπολογισμό της επιτάχυνσης της βαρύτητας με βάση τις μετρήσεις που δίνονται στον πίνακα 3.5 ακολουθούνται τα κάτωθι βήματα:

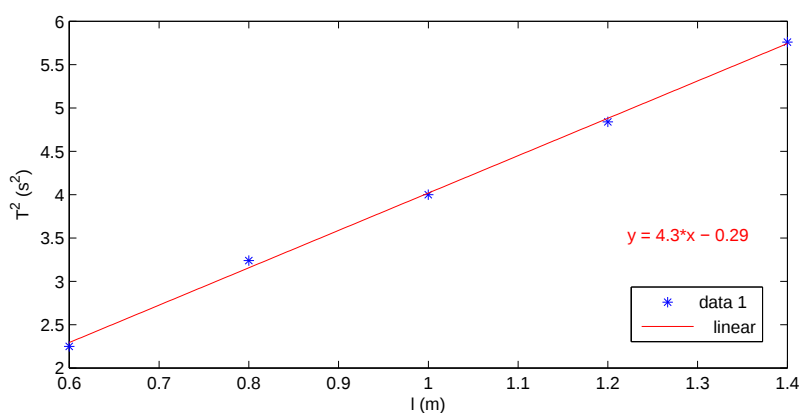
- Κατασκευάζεται ένας νέος πίνακας ο οποίος θα έχει δύο επιπρόσθετες στήλες, T και T^2 . Η περίοδος θα υπολογιστεί με διαίρεση της τιμής που έχει μετρηθεί για 10 ταλντώσεις, με 10 και στη συνέχεια θα υψωθεί στο τετράγωνο για να υπολογιστεί και η τελευταία στήλη. Βλέπε 3.6

- Κατασκευάζεται η γραφική παράσταση $T^2 = f(l)$ ($T^2 = \frac{4\pi^2}{g} \cdot l$)
- Χαράζεται η βέλτιστη ευθεία με βάση τις μετρήσεις που έχουν ληφθεί
- Από την κλίση, λ , της ευθείας υπολογίζεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $\lambda = \frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{\lambda}$

A / A	$l(m)$	$10T(s)$	T	T^2
1	0,6	15	1,5	2,25
2	0,8	18	1,8	3,24
3	1	20	2	4
4	1,2	22	2,2	4,84
5	1,4	24	2,4	5,76

Πίνακας 3.6: Προσθήκη των δύο στηλών για εύρεση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g

Η γραφική παράσταση που προκύπτει είναι η 3.31:



Σχήμα 3.31: Δεδομένα από μετρήσεις και βέλτιστη ευθεία για υπολογισμό του g

Για την κατασκευή της γραφικής παράστασης αυτή τοποθετούνται οι τιμές που έχουν δοθεί στον πίνακα 3.6 και στη συνέχεια χαράσσεται η βέλτιστη ευθεία, που δεν πρέπει κατ'ανάγκη να περνάει απ'όλα τα σημεία που έχουν τοποθετηθεί. Έπειτα επιλέγονται δύο σημεία πάνω στην βέλτιστη ευθεία έτσι ώστε να υπολογιστεί η κλίση της ευθείας και όπως έχει ήδη αναφερθεί από αυτή να υπολογιστεί η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Επειδή εδώ η διαδικασία αυτή έχει γίνει στον ηλεκτρονικό υπολογιστή που πάνω στη γραφική παράσταση 3.31 δίνει κατεύθειαν την κλίση της βέλτιστης ευθείας (βλέπε κόκκινη εξίσωση, τον συντελεστή του x), χρησιμοποιείται η κλίση αυτή $\lambda = 4.3$ για τον υπολογισμό του g .

$$\lambda = \frac{4\pi^2}{g} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{\lambda} \Rightarrow g = \frac{4\pi^2}{4.3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g = 9.18 \frac{m}{s^2}$$

Για τον περιορισμό των σφαλμάτων πρέπει να μετρούνται όσο το δυνατό περισσότερες ταλαντώσεις του εκκρεμούς, έτσι το σφάλμα λόγω ανθρώπινου παράγοντα που υπεισέρχεται λόγω της μέτρησης του χρόνου να μοιράζεται σε περισσότερες ταλαντώσεις και έτσι να ελαχιστοποιείται. Παράλληλα οι διαστάσεις του αντικειμένου που θα αναρτηθεί στο εκκρεμές να είναι αρκούντως μικρές, κατά πολύ μικρότερες από το μήκος του νήματος l . Αυτό γιατί στις μετρήσεις που γίνονται δε λαμβάνονται υπόψιν οι διαστάσεις του και συνεπώς όταν αυτό έχει μεγάλες διαστάσεις συνεισφέρει στην αύξηση του μήκους από το σημείο ταλάντωσης με αποτέλεσμα τη δημιουργία σφαλμάτων.

19. Εισαγωγικές 2002:

Για την πειραματική μελέτη του μαθηματικού εκκρεμούς ομάδα μαθητών πραγματοποίησε τις μετρήσεις που φαίνονται στον πίνακα 3.7.

- (α') Από ποιούς παράγοντες που διερεύνησαν οι μαθητές δεν εξαρτάται η περίοδος του μαθηματικού εκκρεμούς και από ποιά ζεύγη μετρήσεων εξάγεται το συμπέρασμα σας για κάθε παράγοντα ;
- (β') Εξαρτάται η περίοδος του μαθηματικού εκκρεμούς από το μήκος του νήματος και πώς (ποιοτικά); Με ποιο τρόπο καταλήγετε σ' αυτό το συμπέρασμα ;
- (γ') Να υποδείξετε τρόπο με τον οποίο οι μαθητές πέτυχαν να αυξήσουν φαινομενικά την επιτάχυνση της βαρύτητας στο εργαστήριο.
- (δ') Να επεξεργαστείτε τις μετρήσεις σχεδιάζοντας κατάλληλη γραφική παράσταση έτσι ώστε να βρείτε τη μαθηματική σχέση που συνδέει την περίοδο T του εκκρεμούς με την επιτάχυνση της βαρύτητας.

A / A	$100T(s)$	$l(m)$	μαζα $m(kg)$	πλάτος $X_0(cm)$	$g \frac{m}{s^2}$
1	199	1	0,05	5	10.0
2	199	1	0,05	10	10.0
3	199	1	0,02	5	10.0
4	162	1	0,05	5	15.0
5	140	1	0,05	5	20.0
6	126	1	0,05	5	25.0
7	115	1	0,05	5	30.0
8	140	0,5	0,05	5	10.0

Πίνακας 3.7: Μετρήσεις για εύρεση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g **Λύση:**

Στο πρώτο ερώτημα ζητείται να διερευνηθεί από ποιούς παράγοντες δεν εξαρτάται η περίοδος ταλάντωσης του εκκρεμούς. Όπως έχει εξηγηθεί και στην άσκηση 17 αναλυτικά για να βρεθούν οι παράμετροι από τις οποίες δεν εξαρτάται η περίοδος του εκκρεμούς πρέπει διατηρώντας όλες τις άλλες παραμέτρους σταθερές να μεταβάλλεται μόνο η παράμετρος για την οποία ζητείται η εξάρτηση η όχι της περιόδου. Αν η περίοδος μεταβάλλεται (ενώ όλα τα άλλα μεγέθη παραμένουν σταθερά) τότε εξαρτάται από την εν λόγω παράμετρο, εάν όχι τότε δεν υπάρχει εξάρτηση.

i Εξάρτηση από τη μάζα;

Από τον πίνακα 3.7 γίνεται η επιλογή των κατάλληλων μετρήσεων όπως έχει ήδη εξηγηθεί. Οι μετρήσεις αυτές καταγράφονται στον πίνακα 3.8.

A / A	$100T(s)$	$l(m)$	μαζα $m(kg)$	πλάτος $X_0(cm)$	$g \frac{m}{s^2}$
1	199	1	0,05	5	10.0
3	199	1	0,02	5	10.0

Πίνακας 3.8: Διερεύνηση εξάρτησης περιόδου από τη μάζα

Γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι παρά το γεγονός ότι η μάζα για τις δύο μετρήσεις είναι διαφορετική (ενώ όλα τα υπόλοιπα μεγέθη παραμένουν σταθερά) η περίοδος του εκκρεμούς δεν αλλάζει. Συνεπώς η περίοδος ταλάντωσης του εκκρεμούς δεν εξαρτάται από τη μάζα.

ii Εξάρτηση από το πλάτος ταλάντωσης;

Όπως και στην προηγούμενη ερώτηση έτσι και εδώ πρέπει να επιλεχθούν κατάλληλες μετρήσεις από τον αρχικό πίνακα. Οι μετρήσεις καταγράφονται στον πίνακα 3.9.

A / A	100T(s)	l(m)	μαζα m(kg)	πλάτος X ₀ (cm)	$g \frac{m}{s^2}$
1	199	1	0,05	5	10.0
2	199	1	0,05	10	10.0

Πίνακας 3.9: Διερεύνηση εξάρτησης περιόδου από το πλάτος

Από τον πίνακα 3.9 φαίνεται ότι το πλάτος ταλάντωσης δεν επηρεάζει την ταλάντωση του εκκρεμούς. Αυτό γιατί ενώ όλα τα μεγέθη παραμένουν σταθερά ενώ το πλάτος μεταβάλλεται δεν επιφέρει καμία μεταβολή στην περίοδο του εκκρεμούς.

Στη συνέχεια ζητείται να καθοριστεί αν υπάρχει εξάρτηση από το μήκος του εκκρεμούς η όχι. Με την ίδια φιλοσοφία όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις κατασκευάζεται ο πίνακας 3.10.

A / A	100T(s)	l(m)	μαζα m(kg)	πλάτος X ₀ (cm)	$g \frac{m}{s^2}$
1	199	1	0,05	5	10.0
8	140	0,5	0,05	5	10.0

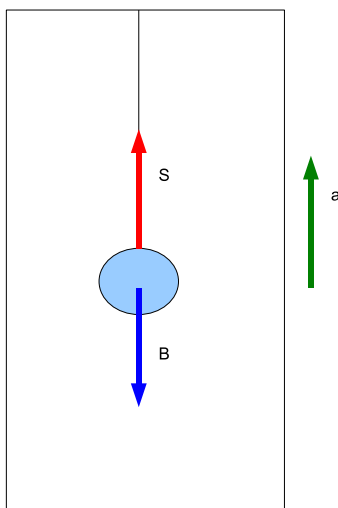
Πίνακας 3.10: Διερεύνηση εξάρτησης περιόδου από το μήκος νήματος

Από τις πιο πάνω μετρήσεις φαίνεται ξεκάθαρα ότι αύξηση του μήκους επιφέρει μεταβολή στην περίοδο ταλάντωσης του εκκρεμούς. Ποιοτικά εκείνο που μπορεί να λεχθεί από τις μετρήσεις αυτές είναι ότι αύξηση του μήκους νήματος επιφέρει και αύξηση της περιόδου. (Βλέπε $T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$)

Οι μάθητές όπως φαίνεται και στις πειραματικές μετρήσεις που καταγράφησαν πέτυχαν να αυξήσουν φαινομενικά την επιτάχυνση της βαρύτητας. Για να εξηγηθεί αυτό αξίζει να σχολιαστεί η επιτάχυνση που αντιλαμβάνεται ένα σώμα το οποίο κινείται επιταχυνόμενο προς τα πάνω. Το σχήμα 3.32 δείχνει ένα σώμα το οποίο βρίσκεται αναρτημένο στην οροφή ανελκυστήρα. Ο ανελκυστήρας αυτός κινείται με επιτάχυνση a προς τα πάνω. Με βάση το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για να κινείται το σώμα προς τα πάνω με επιτάχυνση a θα πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται σε αυτό να ισούται με τη μάζα του σώματος επί την επιτάχυνσή του.

$$\begin{aligned}\Sigma F &= m \cdot a \Rightarrow \\ S - B &= m \cdot a \Rightarrow \\ S &= m \cdot a + m \cdot g \Rightarrow\end{aligned}$$

$$S = m \cdot (a + g) \quad (3.31)$$



Σχήμα 3.32: Κίνηση σώματος μέσα σε ανελκυστήρα

Είναι εμφανές από την εξίσωση 3.31 ότι οι μαθητές για να πετύχουν την αύξηση (φαινομενικά) της επιτάχυνσης g έκαναν το πείραμα μέσα σε ανελκυστήρα που επιταχυνόταν προς τα πάνω μεταβάλλοντας κάθε φορά το μέτρο της επιτάχυνσης a με τέτοιο τρόπο ώστε να προκύπτουν οι μετρήσεις που φαίνονται στον πίνακα της άσκησης.

Η μαθηματική σχέση που συνδέει την περίοδο της ταλάντωσης με την επιτάχυνση της βαρύτητας έχει περιγραφεί με λεπτομέρεια στην άσκηση 15 του παρόντως συγγράμματος.

20. **Ενιαίες 2004:**

Δίνεται ένα απλό μαθηματικό εκκρεμές με μήκος νήματος l και μάζα m . Το σώμα εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας ελαφρά και αφήνεται ελεύθερο οπότε εκτελεί αμείωτη ταλάντωση.

- (α') Να αποδείξετε ότι η ταλάντωση είναι απλή αρμονική.
- (β') Να βρείτε πόσο πρέπει να γίνει το μήκος του νήματος για να μπορεί το εκκρεμές να χρησιμοποιηθεί σαν χρονόμετρο.
- (γ') Να αποδείξετε τη σχέση μεταξύ της ταχύτητας του σώματος και της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας.

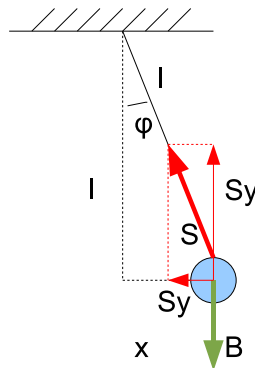
(δ) Να σχεδιάσετε σε κατάλληλα αβαθμολόγητους άξονες για μια πλήρη ταλάντωση, την κινητική, δυναμική και μηχανική ενέργεια του σώματος ως συναρτήσεις του τετραγώνου της απομάκρυνσης του από τη θέση ισορροπίας ($E_{δυν} = f(x^2)$, $E_{κιν} = f(x^2)$ και $E_{μηχ} = f(x^2)$).

Λύση:

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα γραμμική αρμονική ταλάντωση είναι να ασκείται πάνω του δύναμη επαναφοράς. Η δύναμη επαναφοράς έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

- Τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας του
- Είναι ανάλογη της απομάκρυνσης.

Για να αποδειχθεί ότι το εκκρεμές θα εκτελέσει Γ.Α.Τ πρέπει να αποδειχθεί ότι ασκείται πάνω του δύναμη επαναφοράς. Το σώμα εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας κατά μια γωνία ϕ μικρότερη των 6 μοιρών και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερο. Το σχήμα 3.33 δείχνει τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω στο εκκρεμές σε μια τυχαία θέση.



Σχήμα 3.33: Δυνάμεις που ασκούνται στο εκκρεμές

Η γωνία εκτροπής ϕ , είναι πολύ μικρή, συνεπώς η κατακόρυφη απόσταση μπορεί να θεωρηθεί ίση με l και ότι το σώμα δεν κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση παρα μόνο στην οριζόντια. Με βάση τώρα τις δυνάμεις που έχουν σχεδιαστεί στο σχήμα 3.33 θα γίνει η ανάλυση για να αποδειχθεί το ζητούμενο.

Λόγο του ότι το σώμα δεν κινείται στην κατακόρυφη διεύθυνση η συνισταμένη δύναμη στη διεύθυνση αυτή είναι 0.

$$\begin{aligned}
\Sigma F_y &= 0 \Rightarrow \\
S_y - B &= 0 \Rightarrow S_y = B \Rightarrow \\
S_y &= mg
\end{aligned}
\tag{3.32}$$

Με βάση όμως την ανάλυση της δύναμης S προκύπτει ότι :

$$S_y = S \cdot \cos\phi \tag{3.33}$$

$$S_x = -S \cdot \sin\phi \tag{3.34}$$

Από τις εξισώσεις 3.32 και 3.33 προκύπτει

$$S \cdot \cos\phi = mg \Rightarrow \tag{3.35}$$

$$S = \frac{mg}{\cos\phi} \tag{3.36}$$

Αντικαθιστώντας την 3.36 στην 3.34 εξάγεται η εξίσωση :

$$S_x = -\frac{mg}{\cos\phi} \cdot \sin\phi \tag{3.37}$$

αλλά από την γεωμετρία του σχήματος 3.33 και από την παρατήρηση ότι για μικρές γωνίες η κατακόρυφος ισούται με το μήκος του νήματος l προκύπτει ότι :

$$\frac{\sin\phi}{\cos\phi} = \tan\phi = \frac{x}{l} \tag{3.38}$$

Αντικαθιστώντας την 3.38 στην 3.37 εξάγεται η εξίσωση :

$$S_x = -\frac{mg}{l} \cdot x \tag{3.39}$$

Η δύναμη S_x , είναι μια δύναμη επαναφοράς όπως έχει εξηγηθεί και στην αρχή της άσκησης. Συνεπώς το σώμα θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση.

Στη συνέχεια πρέπει να βρεθεί το ελάχιστο μήκος που πρέπει να έχει το εκκρεμές έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν χρονόμετρο. Για να γίνει αυτό πρέπει η περίοδος του εκκρεμούς να γίνει ίση με 1s. Στην εξίσωση που δίνει την περίοδο του εκκρεμούς η περίοδος εξισώνεται με τη μονάδα και αναζητείται ποιο είναι το μήκος που δίνει αυτή την περίοδο.

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{l}{g} \Rightarrow \\ \Rightarrow l &= g \cdot \frac{T^2}{4\pi^2} \Rightarrow \\ l &= 10 \cdot \frac{1^2}{4\pi^2} = 0.253 \text{ m} \end{aligned}$$

Άρα λοιπόν το ελάχιστο μήκος που μπορεί να έχει το εκκρεμές έτσι ώστε να μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν χρονόμετρο είναι 0.253 m.

Ζητείται τώρα να αποδειχθεί η σχέση που ισχύει μεταξύ της ταχύτητας του σώματος και της απομάκρυνσης του από τη θέση ισορροπίας. Για να γίνει αυτό καταγράφονται οι εξισώσεις της ταχύτητας και της απομάκρυνσης και γίνεται απαλειφή του χρόνου από αυτές έτσι ώστε να υπολογιστεί η εξάρτηση της μίας από την άλλη με μόνες παραμέτρους, χαρακτηριστικές παραμέτρους της ταλάντωσης.

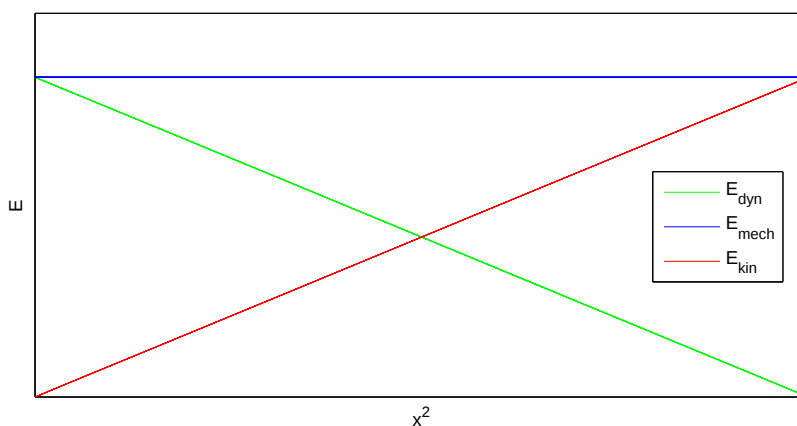
$$x = x_0 \cdot \sin(\omega t + \phi) \quad (3.40)$$

$$v = \omega \cdot x_0 \cdot \cos(\omega t + \phi) \quad (3.41)$$

Πολλαπλασιάζεται η εξίσωση 3.40 με ω , στη συνέχεια υψώνονται και οι δύο στο τετράγωνο και προστίθενται:

$$\begin{aligned} \omega^2 \cdot x^2 + v^2 &= \omega^2 \cdot x_0^2 \cdot \sin^2(\omega t + \phi) + \omega^2 \cdot x_0^2 \cdot \cos^2(\omega t + \phi) \\ \omega^2 \cdot x^2 + v^2 &= \omega^2 \cdot x_0^2 \cdot (\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)) \Rightarrow \\ \omega^2 \cdot x^2 + v^2 &= \omega^2 \cdot x_0^2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{v^2}{\omega^2 \cdot x_0^2} = 1 \quad (3.42)$$



Σχήμα 3.34: Μηχανική - Κινητική - Δυναμική ενέργεια συναρτήσει του x^2

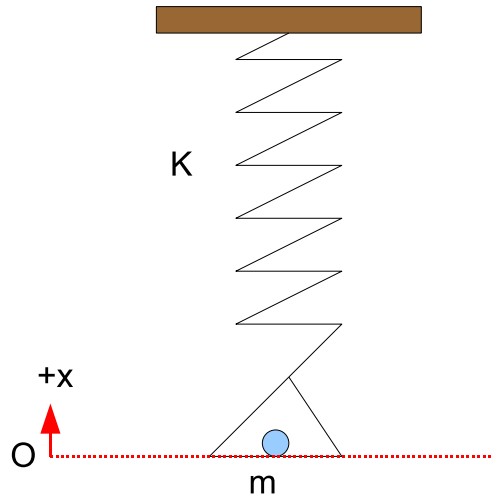
Ακολουθώς πρέπει να κατασκευαστούν τα διαγράμματα $E_{δυν} = f(x^2)$, $E_{κιν} = f(x^2)$ και $E_{μηχ} = f(x^2)$.

21. Εισαγωγικές 2001:

Δίσκος μάζας $m = 0,25\text{kg}$ αναρτάται από το άκρο ελατηρίου σταθεράς $k = 50\frac{\text{N}}{\text{m}}$. Με ειδικό αβαρή μηχανισμό στερεώνεται στο δίσκο σώμα μάζας $m = 0,25\text{kg}$ και το σύστημα ισορροπεί στη θέση Ο όπως δείχνει και το σχήμα 3.35. Ο δίσκος απομακρύνεται κατά 20cm κάτω από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερος τη χρονική στιγμή $t = 0$.

- (α) Να δείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει γραμμική αρμονική ταλάντωση
- (β) Να γράψετε την εξίσωση της ταλάντωσης αφού προσδιορίσετε τις τιμές των σταθερών μεγεθών.
- (γ) Να γίνει γραφική παράσταση της ταχύτητας σε σχέση με το χρόνο και της επιτάχυνσης σε σχέση με το χρόνο, για χρονική διάρκεια μιας περιόδου.
- (δ) Όταν ο δίσκος βρίσκεται στη χαμηλότερη θέση, αδρανοποιείται ο μηχανισμός και το σώμα ελευθερώνεται χωρίς να χάσει επαφή με το δίσκο. Να βρείτε:
 - i. Σε ποιά θέση θα χάσει επαφή με το δίσκο
 - ii. Το χρόνο που θα περάσει μέχρι να χαθεί επαφή

Λύση:



Σχήμα 3.35: Σώμα αναρτημένο σε δίσκο

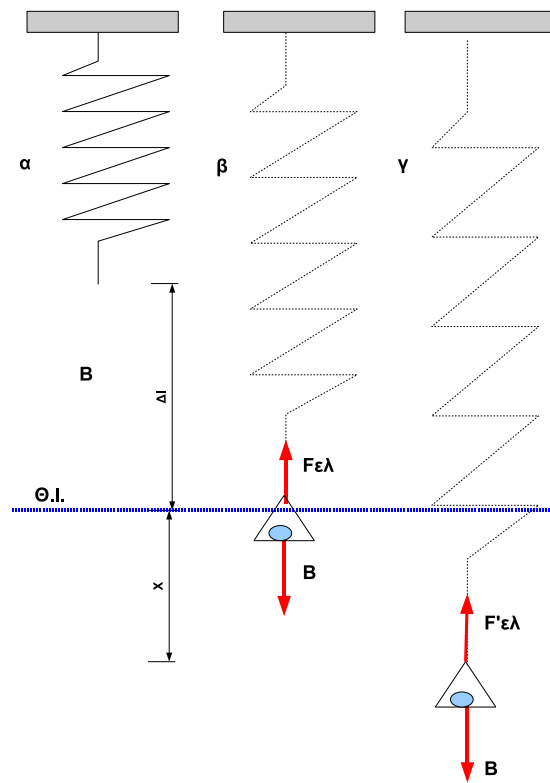
Η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να εκτελεί ένα σώμα Γραμμική αρμονική ταλάντωση, είναι να ασκείται πάνω του δύναμη επαναφοράς. Η δύναμη επαναφοράς έχει τα πιο κάτω χαρακτηριστικά:

- Τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας
- Είναι ανάλογη της απομάκρυνσης
- $F = -k \cdot \chi$

Στη θέση ισορροπίας το σώμα ισορροπεί και επομένως η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του είναι 0.

$$\begin{aligned}\Sigma F &= 0 \Rightarrow \\ F_{\theta, \iota} - (B_{\delta} + B_{\sigma}) &= 0 \Rightarrow F_{\theta, \iota} = B_{\delta} + B_{\sigma} \Rightarrow F_{\theta, \iota} = (m_{\delta} + m_{\sigma}) \cdot g\end{aligned}$$

Στη συνέχεια το σώμα απομακρύνεται από τη θέση ισορροπίας και φτάνει στη θέση γ του σχήματος 3.25. Στη θέση αυτή το ελατήριο θα έχει έκταση x και επομένως η συνισταμένη δύναμη θα γίνει:



Σχήμα 3.36: α) Αρχική θέση β) Θέση Ισορροπίας με δίσκο και σώμα γ) Ελατήριο σε έκταση

$$\Sigma F = B_{\delta} + B_{\sigma} - F' \quad (3.43)$$

$$F' = k \cdot (\Delta l_0 + x) = F_{\theta, \iota} + k \cdot x \quad (3.44)$$

$$F_{\theta, \iota} = B_{\delta} + B_{\sigma} = (m_{\delta} + m_{\sigma}) \cdot g \quad (3.45)$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 3.43, 3.44 και 3.45:

$$\Sigma F = -k \cdot x$$

Επομένως εφόσον η συνισταμένη δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης το σώμα θα εκτελέσει Γ.Α.Τ.

Προσδιορίζονται τώρα τα μεγέθη της ταλάντωσης έτσι ώστε να γραφτεί η εξίσωση της ταλάντωσης στη συνέχεια. Πρέπει λοιπόν να προσδιοριστούν τα ακόλουθα μεγέθη:

- Γωνιακή ταχύτητα ω
- Πλάτος ταλάντωσης
- Αρχική φάση ϕ_0

Η γωνιακή ταχύτητα υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$k = m \cdot \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow$$

$$\omega = \sqrt{\frac{50}{0.5}} = 10 \frac{rad}{s}$$

Το πλάτος της ταλάντωσης που είναι εξ' ορισμού η μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας που μπορεί να έχει το σώμα είναι $20cm$ από το γεγονός ότι η απομάκρυνση που δίνεται στο σύστημα στην αρχή είναι τόση.

Για να υπολογιστεί τώρα η αρχική φάση του συστήματος πρέπει να γραφτεί η γενική εξίσωση της γραμμικής αρμονικής ταλάντωσης και να αντικατασταθεί σ' αυτήν ο χρόνος $t = 0$ s και η απομάκρυνση την ίδια χρονική στιγμή που για την άσκηση αυτή είναι $20cm$:

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega t + \phi_0) \Rightarrow$$

$$-0.2 = 0.2 \cdot \sin(10 \cdot 0 + \phi_0) \Rightarrow$$

$$\sin(\phi_0) = -1 \Rightarrow$$

$$\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Η εξίσωση της ταλάντωσης για τη συγκεκριμένη περίπτωση είναι:

$$x = 0.2 \cdot \sin\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Μπορεί τώρα πολύ εύκολα να απαντηθεί και το τρίτο ερώτημα της άσκησης και να σχεδιαστούν οι γραφικές παραστάσεις που ζητούνται.

Από τη εξίσωση της ταλάντωσης μπορεί με παραγωγή να υπολογιστεί η εξίσωση της ταχύτητας για κάθε χρονική στιγμή. Παραγωγή της εξίσωσης της ταχύτητας θα δώσει την εξίσωση της επιτάχυνσης για κάθε χρονική στιγμή. Τα βήματα αυτά παρουσιάζονται αναλυτικά πιο κάτω:

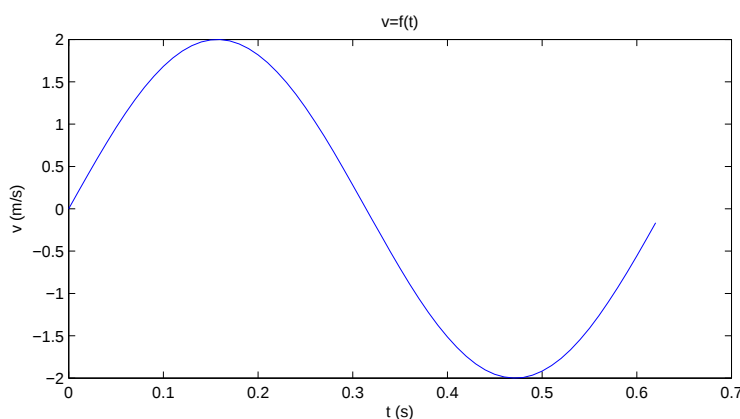
$$\frac{dx}{dt} = v = 0.2 \cdot 10 \cdot \cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$v = 2 \cdot \cos\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = a = -2 \cdot 10 \cdot \sin\left(10t - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$a = -20 \cdot \sin\left(10t - \frac{\pi}{2}\right)$$

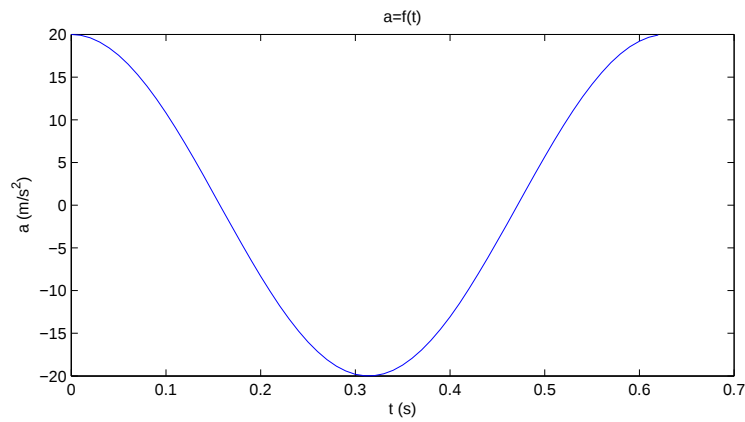
Οι γραφικές παραστάσεις 3.37 και 3.38 αναπαριστούν τα φυσικά μεγέθη ταχύτητας και επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.



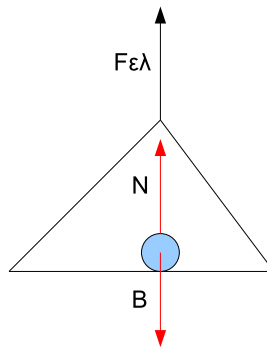
Σχήμα 3.37: Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου

Το τελευταίο ερώτημα ζητά να υπολογιστεί σε ποιά θέση το σώμα θα χάσει επαφή από το δίσκο και πόσος χρόνος περνά μέχρι να γίνει αυτό. Το σχήμα 3.39 δείχνει τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα μάζας $m = 0.25\text{kg}$ με κόκκινο χρώμα, ενώ την δύναμη του ελατηρίου στο δίσκο τη δείχνει με μαύρο χρώμα:

Το σημείο στο οποίο το σώμα χάνει επαφή από το δίσκο είναι εκείνο το σημείο για το οποίο ο δίσκος δεν ασκεί δύναμη πάνω στο σώμα, δηλαδή η δύναμη $N = 0$. Με την παρατήρηση αυτή και το γεγονός



Σχήμα 3.38: Επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου



Σχήμα 3.39: Δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και δύναμη ελατηρίου στο δίσκο.

ότι η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα είναι εκείνη που το αναγκάζει να εκτελέσει Γ.Α.Τ. , μπορεί να επιλυθεί η άσκηση ως ακολούθως:

$$\Sigma F = N - B$$

$$N - B = -k \cdot x$$

$$N = 0$$

Συνδυάζοντας τις πιο πάνω εξισώσεις προκύπτει ότι:

$$-B = -k \cdot x \Rightarrow$$

$$m_{\sigma} \cdot g = kx \Rightarrow$$

$$x = \frac{m_{\sigma} \cdot g}{k} = \frac{0.25 \cdot 10}{50} \Rightarrow$$

$$x = 0.05m$$

Απομένει λοιπόν να υπολογιστεί ο χρόνος που χρειάζεται για να κινηθεί το σύστημα από τη θέση μέγιστης απομάκρυνσης $-20cm$ μέχρι τη θέση που υπολογίστηκε νωρίτερα $5cm$. Για να γίνει αυτό τοποθετείται η θέση $5cm$ στην εξίσωση κίνησης:

$$x = x_0 \cdot \sin(10t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$0.05 = 0.2 \sin(10t - \frac{\pi}{2}) \Rightarrow$$

$$\sin(10t - \frac{\pi}{2}) = 0.25 \Rightarrow$$

$$10t - \frac{\pi}{2} = \sin^{-1}(0.25) \Rightarrow$$

$$t = \frac{\sin^{-1}(0.25) + \frac{\pi}{2}}{10} = 0.182s$$

Ο ζητούμενος χρόνος είναι λοιπόν $t = 0.182s$

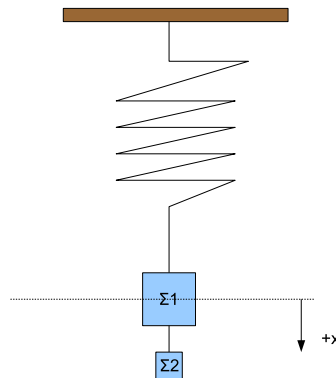
22. Ενιαίες 1999:

Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 μάζας $m_1 = 150g$ και $m_2 = 50g$ αντίστοιχα, είναι αναρτημένα στο κάτω άκρο ελατηρίου σταθεράς k όπως στο σχήμα 3.40.

(α') Αν το ελατήριο επιμηκύνεται κατά $20cm$ με την ανάρτηση των μαζών να βρεθεί:

- i. η σταθερά του ελατηρίου k
- ii. η περίοδος ταλάντωσης των δύο σωμάτων όταν απομακρυνθούν από τη θέση ισορροπίας τους $g = 10 \frac{m}{s^2}$.

- (β') Στη συνέχεια ενώ το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία αποκόπτεται το νήμα μεταξύ των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 όποτε το Σ_2 πέφτει ενώ το ελατήριο με το Σ_1 αρχίζει να εκτελεί ταλάντωση. Να βρεθεί:
- Το πλάτος ταλάντωσης x_0 και
 - η περίοδος της.
- (γ') Να γραφεί η εξίσωση της ταλάντωσης του Σ_1 με αρχική χρονική στιγμή t_0 , τη στιγμή που κόβεται το νήμα μεταξύ των δύο σωμάτων.
- (δ') Αν το σημείο στήριξης του ελατηρίου όταν πάνω του είναι αναρτημένο μόνο το σώμα Σ_1 αρχίσει να εκτελεί κατακόρυφη ταλάντωση με συχνότητα f , τίθα συμβεί στο σώμα Σ_1 ; Πότε το Σ_1 θα εκτελεί ταλάντωση με μέγιστο πλάτος;



Σχήμα 3.40: Σώματα αναρτημένα σε ελατήριο.

Λύση:

Το ελατήριο πρώτου αναρτηθούν τα σώματα έχει το φυσικό του μήκος. Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι κατά την προσθήκη των δύο σωμάτων πάνω στο ελατήριο αυτό επιμηκύνεται κατά απόσταση $0.2m$. Χρησιμοποιώντας το δεδομένο αυτό και το νόμο του Hooke υπολογίζεται η σταθερά του ελατηρίου. Από το νόμο του Hooke προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} F &= k \cdot x \Rightarrow \\ k &= \frac{F}{x} \end{aligned} \quad (3.46)$$

όπου :

- F είναι η δύναμη που ασκείται στο ελατήριο. Στην άσκηση αυτή η δύναμη είναι ίση με το άθροισμα του βάρους του Σ_1 και του Σ_2 .
- k η σταθερά του ελατηρίου
- x η επιμήκυνση που προκαλείται στο ελατήριο

Αν στην εξίσωση 3.46 τοποθετηθούν τα δεδομένα της άσκηση τότε υπολογίζεται η σταθερά του ελατηρίου :

$$\begin{aligned} k &= \frac{F}{x} = \frac{B_1 + B_2}{x} \Rightarrow \\ k &= \frac{m_1 \cdot g + m_2 \cdot g}{x} \Rightarrow \\ k &= \frac{0.15 \cdot 10 + 0.05 \cdot 10}{0.2} = 10 \frac{N}{m} \end{aligned}$$

Αν τα δύο σώματα απομακρυνθούν από τη θέση ισορροπίας θα εκτελέσουν Γραμμική αρμονική ταλάντωση, με περίοδο που μπορεί να υπολογιστεί με τακόλουθα βήματα :

$$\begin{aligned} k &= m\omega^2 \Rightarrow k = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{k}{m} &= \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \Rightarrow \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \\ \Rightarrow T &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned} \quad (3.47)$$

Αντικαθιστώντας τα δεδομένα της άσκησης στην εξίσωση 3.47 υπολογίζεται το αποτέλεσμα :

$$\begin{aligned} T &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \Rightarrow \\ T &= 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0.2}{10}} = 0.89s \end{aligned}$$

Ενώ το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία, το δεύτερο σώμα με μάζα $m_2 = 0.05\text{kg}$ αποκόπτεται από το νήμα και το σώμα Σ_1 εκτελεί ταλάντωση. Στο σημείο αυτό πρέπει να οριστούν τα μεγέθη της ταλάντωσης αυτής, δηλαδή το πλάτος ταλάντωσης X_0 καθώς επίσης και η περίοδος ταλάντωσης του συστήματος.

Το πλάτος ταλάντωσης (μέγιστη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας) υπολογίζεται αν αναλογιστεί κανείς ότι το βάρος του σώματος Σ_2 είναι αυτό που θα προκαλέσει την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του σώματος Σ_1 . Η επιπλέον απομάκρυνση αυτή υπολογίζεται και πάλι με το νόμο του Hooke όπως και προηγουμένως λαμβάνοντας υπόψιν μόνο τη μάζα του δευτέρου σώματος.

$$F = k \cdot x \Rightarrow$$

$$x = \frac{F}{k} = \frac{B_1}{k} \Rightarrow$$

$$x = \frac{m_2 \cdot g}{k} \Rightarrow$$

$$x = \frac{0.05 \cdot 10}{10} = 0.05\text{m}$$

Η περίοδος της ταλάντωσης του ελατηρίου με το σώμα Σ_1 θα δίνεται από τη σχέση 3.47 όπου σαν μάζα θα ληφθεί μόνο η μάζα του σώματος Σ_1 .

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m_1}{k}} \Rightarrow$$

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0.05}{10}} = 0.44\text{s}$$

Η εξίσωση που περιγράφει την ταλάντωση του σώματος Σ_1 που είναι αναρτημένο στο ελατήριο μπορεί να καθοριστεί αφού υπολογιστούν οι παράμετροι που εμφανίζονται στην εξίσωση 3.48:

$$x = x_0 \cdot \sin(\omega t + \phi_0) \quad (3.48)$$

- πλάτος ταλάντωσης $x_0 = 0.05m$
- γωνιακή ταχύτητα $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \sqrt{\frac{10}{0.15}} = 8.16 \frac{rad}{s}$
- ϕ_0 : Για τον καθορισμό του πρέπει να τοποθετηθεί στην εξίσωση 3.48 η απομάκρυνση που έχει το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0s$

$$0.05 = 0.05 \cdot \sin(8.16 \cdot 0 + \phi_0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(\phi_0) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

η εξίσωση ταλάντωσης λοιπόν είναι: $x = 0.05 \cdot \sin(8.16t + \frac{\pi}{2})$

Αν τώρα το σημείο στήριξης ξεκινήσει να ταλαντώνεται με συχνότητα f τότε το σώμα Σ_1 , θα εκτελέσει μια εξαναγκασμένη ταλάντωση. Η ταλάντωση του σώματος θα γίνει μέγιστη όταν το f συχνότητα f με την οποία ταλαντώνεται η στήριξη, γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του συστήματος f_0 . Η ιδιοσυχνότητα αυτή είναι:

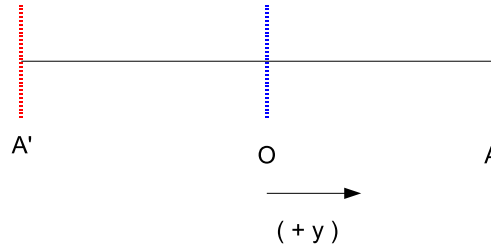
$$\omega = 2\pi f_0 \Rightarrow f_0 = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow$$

$$f_0 = 1.298Hz$$

23. Ενιαίες 1998:

Σώμα μάζας $m = 0.5kg$ εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. Η εξίσωση της ταχύτητας του είναι $v = 20 \cdot \sin(5t + \frac{2\pi}{3})$, όπου v σε $\frac{cm}{s}$, t σε s και οι αποστάσεις σε cm .

- Να γράψετε την εξίσωση της απομάκρυνσης $y = f(t)$ και να δώσετε τα ονόματα και τις τιμές των χαρακτηριστικών της ταλάντωσης που προέρχονται από την εξίσωση.
- Αν η ταλάντωση διεξάγεται πάνω στην οριζόντια γραμμή του σχήματος 3.41, μεταξύ των σημείων Α' και Α με Ο το μέσο της ευθείας ΑΑ να σημειώσετε με Σ την αρχική θέση του κινητού και την αρχική φορά της κίνησης δίνοντας και τις εξηγήσεις για την απάντησή σας.
- Να υπολογίσετε τον ελάχιστο χρόνο που χρειάζεται το σώμα για να κινηθεί από τη θέση Σ στη θέση Α.



Σχήμα 3.41: Ταλάντωση σώματος μεταξύ των σημείων A - A'

Λύση:

Για να καθοριστεί η εξίσωση της απομάκρυνσης $y = f(t)$ πρέπει από την εξίσωση της ταχύτητας να εξαχθούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ταλάντωσης. Η εξίσωση της ταχύτητας για την άσκηση είναι:

$$v = 20 \cdot \sin\left(5t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Εν γένη η εξίσωση της ταχύτητας δίνεται στη μορφή:

$$v = y_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \phi_0)$$

Η αρχική εξίσωση μετασχηματίζεται σε μορφή ανάλογη της εξίσωσης που δίνει την ταχύτητα και στη συνέχεια από αυτή εξάγονται όλα τα αποτελέσματα που χρειάζονται:

$$\begin{aligned} v &= 20 \cdot \sin\left(5t + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= 20 \cdot \sin\left(5t + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= 20 \cdot \sin\left(5t + \frac{4\pi}{6} - \frac{3\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= 20 \cdot \sin\left(5t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= 20 \cdot \cos\left(5t + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \end{aligned}$$

Σημειώνεται εδώ ότι για να γίνει το τελευταίο βήμα χρησιμοποιήθηκε η ταυτότητα:

$$\sin\left(\phi + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\phi)$$

Από τη μετασχηματισμένη εξίσωση καθορίζονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη της ταλάντωσης:

- Γωνιακή ταχύτητα ω : είναι ο συντελεστής που πολλαπλασιάζει το χρόνο, δηλαδή $\omega = 5 \frac{rad}{s}$
- αρχική φάση ϕ_0 : είναι ο δεύτερος όρος που παρουσιάζεται μέσα στην παρένθεση $\phi_0 = \frac{\pi}{6}$
- πλάτος ταλάντωσης y_0 :

$$y_0 \cdot \omega = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{20}{\omega} = \frac{20}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_0 = 4cm$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης ($y \rightarrow cm$) είναι λοιπόν:

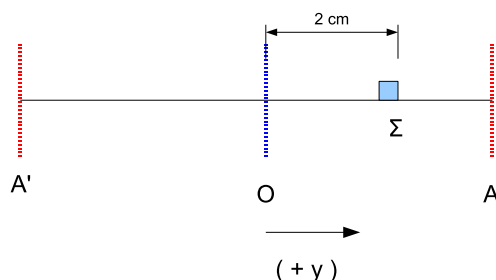
$$y = 4 \cdot \sin\left(5t + \frac{\pi}{6}\right)$$

Πρέπει τώρα να καθοριστεί η αρχική θέση του σώματος και στη συνέχεια να σχεδιαστεί πάνω στο σχήμα. Εξ' ορισμού η αρχική θέση του σώματος δίνεται για χρόνο $t = 0s$. Συνεπώς για να καθοριστεί η αρχική θέση στην εξίσωση της απομάκρυνσης ο χρόνος τίθεται ίσο με 0 και υπολογίζεται η απομάκρυνση:

$$y = 4 \cdot \sin\left(5 \cdot 0 + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = 4 \cdot 0.5$$

$$\Rightarrow y = 2cm$$



Σχήμα 3.42: Αρχική θέση σώματος

Ο ελάχιστος χρόνος που απαιτείται για να κινηθεί το σώμα από τη θέση Σ στη θέση A , είναι ο χρόνος που απαιτείται έτσι ώστε το σώμα να κινηθεί από το Σ στο A αλλά τη στιγμή που βρίσκεται στο Σ να έχει φορά προς το A και όχι προς το A' . Πρέπει λοιπόν να μετακινηθεί από τη θέση $y = 2\text{cm}$ στη θέση $y = 4\text{cm}$. αν ληφθεί υπόψιν το γεγονός ότι το σώμα τη χρονική στιγμή $t = 0\text{s}$ βρίσκεται στο Σ , τότε ο χρόνος που ζητείται μπορεί να υπολογιστεί αν στην εξίσωση κίνησης τοποθετηθεί απομάκρυνση $y = 4\text{cm}$:

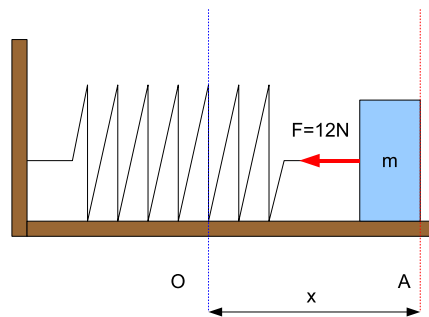
$$\begin{aligned} y &= 4 \cdot \sin\left(5t_{\Sigma \rightarrow A} + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow 4 &= 4 \cdot \sin\left(5t_{\Sigma \rightarrow A} + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin\left(5t_{\Sigma \rightarrow A} + \frac{\pi}{6}\right) &= 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 5t_{\Sigma \rightarrow A} + \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{2} \Rightarrow 5t_{\Sigma \rightarrow A} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} \\ \Rightarrow t_{\Sigma \rightarrow A} &= \frac{\frac{\pi}{3}}{5} \Rightarrow t_{\Sigma \rightarrow A} = 0.209\text{s} \end{aligned}$$

24. Ενιαίες 2000:

Σώμα μάζας $m = 150\text{g}$ είναι δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου, όπως φαίνεται στο σχήμα 3.43 και εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση, χωρίς τριβές με συχνότητα $f = \frac{10}{\pi}\text{Hz}$. Για τη θέση A του σώματος η δύναμη που ασκεί το ελατήριο στο σώμα είναι $F = 12\text{N}$. Να βρείτε:

(α') Τη σταθερά του ελατηρίου

- (β') την απομάκρυνση του σώματος στη θέση Α από τη θέση ισορροπίας Ο
- (γ') τη δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης στη θέση Α
- (δ') Αν στη θέση Α η κινητική ενέργεια της ταλάντωσης είναι τριπλάσια της δυναμικής, να υπολογίσετε :
- το πλάτος της ταλάντωσης x_0
 - το μέτρο της ταχύτητας στη θέση Α



Σχήμα 3.43: Ταλάντωση σώματος σε οριζόντιο επίπεδο.

Λύση :

Αρχικά θα υπολογιστεί η σταθερά του ελατηρίου :

$$\begin{aligned}
 k &= m\omega^2 \Rightarrow k = 0.15 \cdot (2\pi \cdot f)^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow k &= 0.15 \cdot \left(2\pi \cdot \frac{10}{\pi}\right)^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow k &= 60 \frac{N}{m}
 \end{aligned}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η θέση Α στην οποία βρίσκεται το σώμα. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια του νόμου του Hooke εφόσον είναι γνωστή η δύναμη στη θέση αυτή και έχει ήδη γίνει ο υπολογισμός της σταθεράς του ελατηρίου k στο προηγούμενο κομμάτι της άσκησης :

$$\begin{aligned}
 F &= k \cdot x \Rightarrow \\
 \Rightarrow x &= \frac{F}{k} = \frac{12}{60} \Rightarrow \\
 \Rightarrow x &= 0.2m
 \end{aligned}$$

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης στη θέση Α δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned}
 E_{\delta\nu\nu_A} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow E_{\delta\nu\nu_A} &= \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 0.2^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow E_{\delta\nu\nu_A} &= 1.2J
 \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι στη θέση Α η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής υπολογίζεται η ολική ενέργεια του συστήματος. Γνωρίζοντας ότι το ελατήριο στη μέγιστη απομάκρυνση έχει αποθηκευμένη τη μέγιστη δυναμική ενέργεια, μπορεί να υπολογιστεί η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος. Εξισώνεται η ολική ενέργεια του συστήματος με την ενέργεια στη μέγιστη απομάκρυνση (x_0), και υπολογίζεται η μέγιστη απομάκρυνση.

$$\begin{aligned}
 E_{o\lambda} &= E_{\delta\nu\nu_{max}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow E_{\delta\nu\nu_A} + E_{\kappa\iota\nu_A} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow E_{\delta\nu\nu_A} + 3 \cdot E_{\delta\nu\nu_A} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 1.2 + 3 \cdot 1.2 &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow 1.2 + 3 \cdot 1.2 &= \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot x_0^2 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow x_0^2 &= \frac{2 \cdot (1.2 + 3 \cdot 1.2)}{60} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_0 &= \sqrt{\frac{2 \cdot (1.2 + 3 \cdot 1.2)}{60}} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_0 &= 0.4m\end{aligned}$$

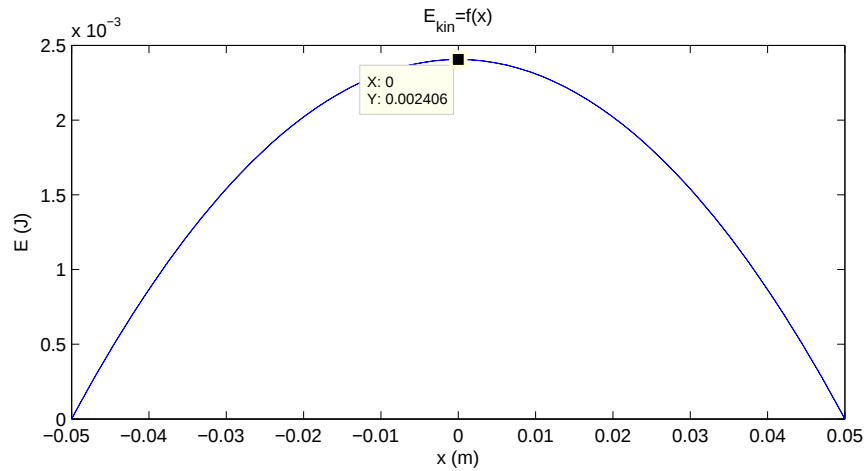
Η ταχύτητα του σώματος στη θέση Α υπολογίζεται από το γεγονός ότι η κινητική ενέργεια είναι τριπλάσια της δυναμικής, δηλαδή $E_{κινΑ} = 3.6J$:

$$\begin{aligned}E_{κινΑ} &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 &= 3.6 \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{2 \cdot 3.6}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 3.6}{0.15}} \Rightarrow \\ \Rightarrow v &= 6.928 \frac{m}{s}\end{aligned}$$

25. Ενιαίες 2004:

Σώμα μάζας M είναι στερεωμένο στο κάτω άκρο ελατηρίου και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με περίοδο $T = 2s$. Η γραφική παράσταση 3.44 αναπαριστά την κινητική ενέργεια του σώματος $E_{κιν}$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας. Ζητούνται:

- (α') Να βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης
- (β') Να υπολογίσετε τη σταθερά του ελατηρίου k
- (γ') Να υπολογίσετε την συχνότητα της ταλάντωσης
- (δ') Να υπολογίσετε τη μάζα του σώματος M
- (ε') Να υπολογίσετε τη μέγιστη ταχύτητα και τη μέγιστη επιτάχυνση του σώματος



Σχήμα 3.44: Κινητική ενέργεια σώματος M συναρτήση της απομάκρυνσης.

(F') Να σχεδιάσετε σε βαθμολογημένους άξονες τη γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας του σώματος $E_{δυν}$ σε συνάρτηση με την απομάκρυνση x από τη θέση ισορροπίας

Λύση:

Απο τη γραφική παράσταση του σχήματος 3.44 μπορούν άμεσα να ληφθούν τα ακόλουθα δεδομένα:

- Η μέγιστη ενέργεια που έχει το σώμα είναι $2.4 \times 10^{-3} J$.
- Το πλάτος ταλάντωσης της μάζας M είναι $x_0 = 0.05 m$.

Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα αυτά και το γεγονός ότι η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 2s$ μπορούν να υπολογιστούν όλα τα υπόλοιπα ζητούμενα της άσκησης. Αρχικά υπολογίζεται η σταθερά του ελατηρίου k . Η κινητική ενέργεια που δίνεται για τη θέση ισορροπίας είναι και η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να έχει το σώμα κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης του. Το γεγονός αυτό συνδιαζόμενο και με το ότι στη θέση της μέγιστης το σώμα έχει μόνο δυναμική ενέργεια οδηγεί στον υπολογισμό της σταθεράς του ελατηρίου:

$$\begin{aligned}
 E_{δυν_{max}} &= E_{κιν_{max}} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_0^2 &= 2.4 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \\
 \Rightarrow k &= \frac{2 \cdot (2.4 \cdot 10^{-3})}{x_0^2} = \frac{2 \cdot (2.4 \cdot 10^{-3})}{0.05^2} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = 1.92 \frac{N}{m}$$

Η συχνότητα της ταλάντωσης μπορεί να υπολογιστεί πολύ εύκολα από τη σχέση που τη συνδέει με την περίοδο ταλάντωσης:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = 0.5 \text{ Hz}$$

Στη συνέχεια υπολογίζεται η μάζα του σώματος:

$$\begin{aligned} k &= M \cdot \omega^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow M &= \frac{k}{\omega^2} = \frac{k}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow M &= \frac{1.92}{\left(\frac{2\pi}{2}\right)^2} = 0.195 \text{ kg} \end{aligned}$$

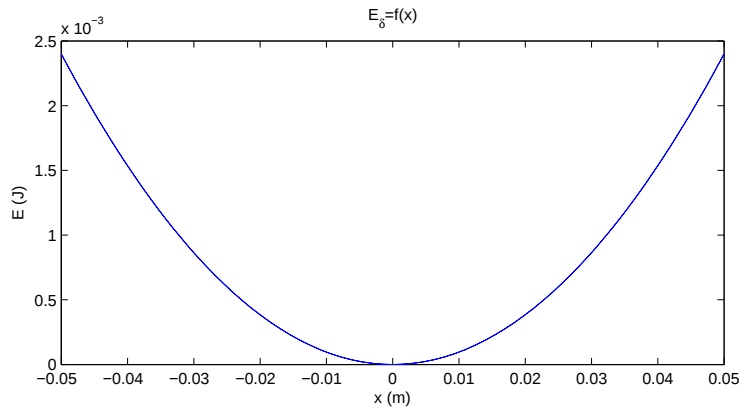
Η μέγιστη ταχύτητα του σώματος υπολογίζεται από τη μέγιστη κινητική ενέργεια που έχει δοθεί:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot M \cdot v_0^2 &= E_{\text{κιν}_{\text{max}}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 0.195 \cdot v_0^2 &= 2.4 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_0^2 &= \frac{2 \cdot (2.4 \cdot 10^{-3})}{0.195} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_0 &= \sqrt{\frac{2 \cdot (2.4 \cdot 10^{-3})}{0.195}} = 0.157 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Τέλος ζητείται η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας συναρτήσει της απομάκρυνσης σε βαθμολογημένους άξονες. Η εξίσωση που δίνει τη δυναμική ενέργεια καθώς και η γραφική παράσταση 3.45 φαίνονται πιο κάτω:

$$E_{δυν} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \Rightarrow$$

$$E_{δυν} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_0 \cdot \sin(\omega t))^2$$



Σχήμα 3.45: Δυναμική ενέργεια σώματος M συναρτήση της απομάκρυνσης.

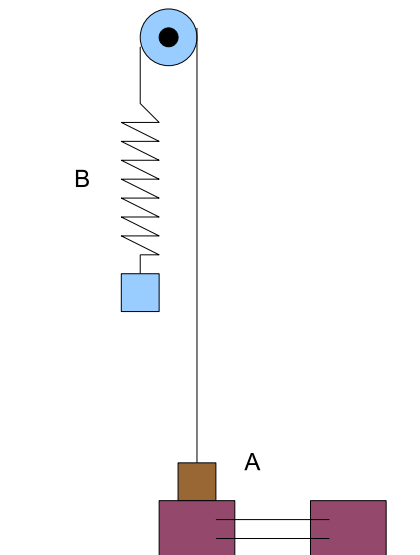
26. Εισαγωγικές 1999:

Για τη μελέτη του φαινομένου του συντονισμού σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση χρησιμοποιήθηκε η πειραματική διάταξη που φαίνεται στο σχήμα 3.46. Οι μετρήσεις που λήφθηκαν, για σώμα μάζας $m = 50g$, δίνονται στον πιο κάτω πίνακα. Η ιδιοσυχνότητα του ταλάντωτη μετρήθηκε $f_0 = 10Hz$.

f διεγέρτη (Hz)	2	4	6	8	9	10	11	12	14	16	18
f ταλαντωτή (Hz)	2,1	3,9	6	8,1	8,9	10	11,1	11,9	14,1	16	17,9
Πλάτος a (cm)	0,7	0,9	1,3	2,2	3,2	4	3,1	2,3	1,2	0,8	0,6

Πίνακας 3.11: Μετρήσεις για το φαινόμενο του συντονισμού

- (α') Να αναφέρετε τι παριστάνουν τα δύο βασικά μέρη της πειραματικής διάταξης
- (β') Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις:
- της συχνότητας του ταλαντωτή συναρτήση της συχνότητας του διεγέρτη $f_{ταλ} = f(f_{διεγ})$
 - του πλάτους ταλάντωσης συναρτήση της συχνότητας του διεγέρτη $a = f(f_{διεγ})$



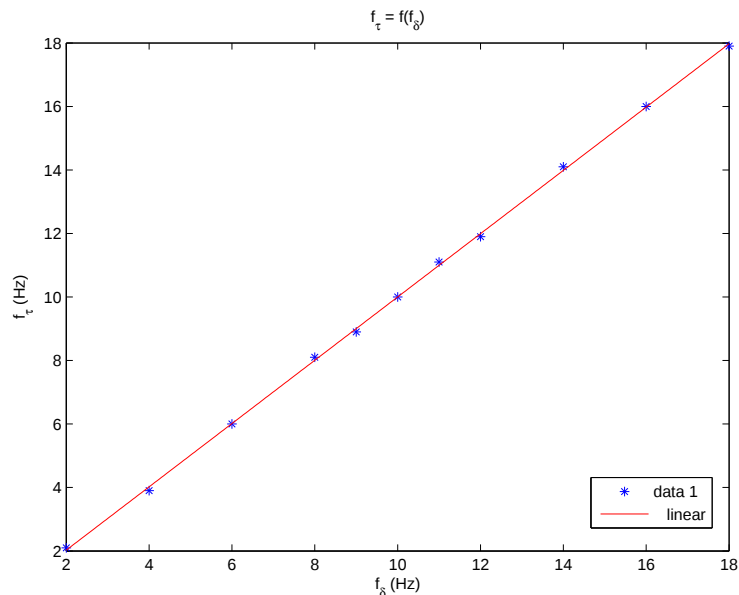
Σχήμα 3.46: Πειραματική διάταξη για τη μελέτη του συντονισμού.

Αν οι μετρήσεις επαναληφθούν αφού πρώτα το σώμα μάζας $m = 50g$, αντικατασταθεί με σώμα μάζας $m' = 200g$ πως θα διαφοροποιηθεί η καμπύλη που πείρατε στο β (ii);

Λύση:

Η πειραματική διάταξη του σχήματος 3.46, δείχνει τα δύο βασικά μέρη με τα γράμματα Α και Β. Το γράμμα Α είναι ο διεγέρτης ο οποίος προκαλεί την εξαναγκασμένη ταλάντωση του ταλαντωτή και έχει τη δυνατότητα να αλλάζει τη συχνότητα της εξαναγκασμένης ταλάντωσης. Το Β είναι ο ταλαντωτής ο οποίος έχει συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα και τίθεται σε ταλάντωση από το διεγέρτη.

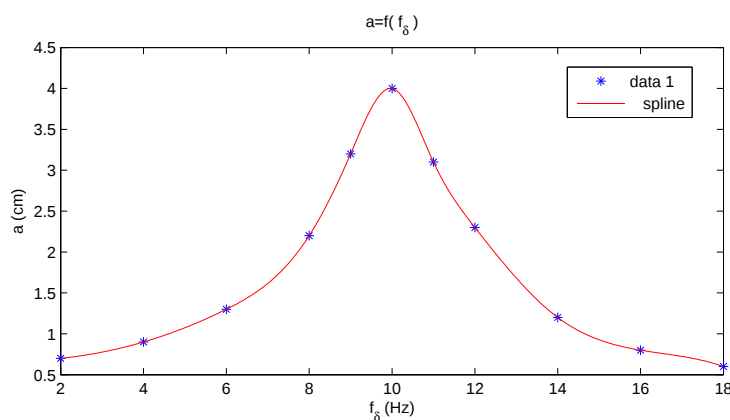
Οι γραφικές παραστάσεις που ζητούνται στο δεύτερο ερώτημα της άσκησης σχεδιάζονται από τις μετρήσεις του πίνακα 3.11. Η γραφική $f_{\tau\alpha\lambda} = f(f_{\delta\iota\epsilon\gamma})$ δίνεται στο σχήμα 3.47 ενώ η γραφική $a = f(f_{\delta\iota\epsilon\gamma})$ στο σχήμα 3.48.



Σχήμα 3.47: Συχνότητα ταλαντωτή συναρτήσει του πλάτους a .

Τα συμπεράσματα που μπορούν να εξαχθούν από τις δύο γραφικές παραστάσεις είναι τα ακόλουθα:

- Η συχνότητα του ταλαντωτή αυξάνεται όσο αυξάνεται η συχνότητα του διεγέρτη. βλέπε σχήμα 3.47.
- Το πλάτος ταλάντωσης αυξάνεται καθώς η συχνότητα του διεγέρτη αυξάνεται μέχρι ένα συγκεκριμένο σημείο. Απο το σημείο αυτό και πέρα, το πλάτος ταλάντωσης ελαττώνεται με την αύξηση της



Σχήμα 3.48: Συχνότητα διεγέρτη συναρτήσει του πλάτους a .

συχνότητας του διεγέρτη. Το σημείο όπου παρατηρείται το μέγιστο πλάτος είναι το σημείο που λέγεται ότι υπάρχει συντονισμός. Στο εν λόγω σημείο η συχνότητα του διεγέρτη έχει γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή ($f_0 = 10\text{Hz}$), δίνοντας έτσι την ευκαιρία στον ταλαντωτή να απορροφά ενέργεια με μέγιστο ρυθμό και να ταλαντούται με μέγιστο πλάτος. βλέπε σχήμα 3.48.

Αν οι μετρήσεις επαναληφθούν αφού πρώτα το σώμα μάζας $m = 50\text{g}$, αντικατασταθεί με σώμα μάζας $m' = 200\text{g}$ τότε εκείνο που αλλάζει, είναι η ιδιοσυχνότητα ταλάντωσης του ταλαντωτή. Από τα δεδομένα του προβλήματος υπολογίζεται η σταθερά του ελατηρίου k και στη συνέχεια η σταθερά αυτή χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί η καινούργια ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή:

$$k = m \cdot \omega^2 = m \cdot (2\pi f)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 197.39 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$k = m' \cdot \omega^2 = m' \cdot (2\pi f')^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\pi f' = \sqrt{\frac{k}{m'}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f' = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m'}} \Rightarrow$$

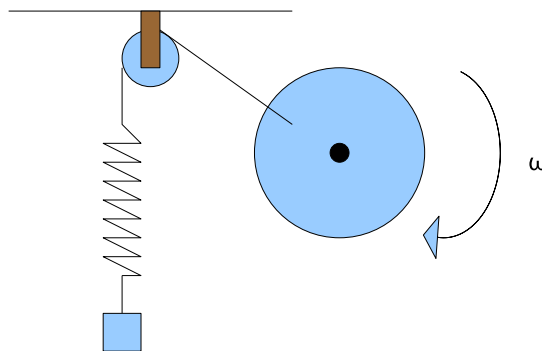
$$\Rightarrow f' = 5 \text{ Hz}$$

Όταν λοιπόν ο διεγέρτης αυξάνει τη συχνότητα του ταλαντωτή από $0 \rightarrow 5\text{Hz}$ τότε το πλάτος ταλάντωσης αυξάνεται. Για την τιμή $f_{\text{διεγ}} = 5\text{Hz}$ το πλάτος ταλάντωσης γίνεται μέγιστο. Αν ο διεγέρτης συνεχίσει να αυξάνει την συχνότητα ταλάντωσης και πέραν από αυτό το σημείο τότε το πλάτος ταλάντωσης ξεκινά να ελαττώνεται και πάλι.

27. Ενιαίες 2004:

Στη διάταξη του σχήματος 3.49, χρησιμοποιείται ελατήριο σταθεράς $k = 4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ στο κάτω άκρο του οποίου στερεώνονται σταθμά μάζας $m_{\sigma\tau} = 0.15\text{kg}$. Όταν ο τροχός είναι ακίνητος και εκτρέψουμε τα σταθμά από τη θέση ισορροπίας η ταλάντωση τους είναι φθίνουσα. Ο τροχός τίθεται σε κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ και μετριέται το πλάτος ταλάντωσης x_0 . Το πείραμα επαναλαμβάνεται με σταθμά μάζας $0.20\text{kg}, 0.25\text{kg}, 0.30\text{kg}, 0.35\text{kg}$ και 0.40kg .

- (α) Να αναφέρετε το είδος της ταλάντωσης και να εξηγήσετε πόση είναι η συχνότητα της ταλάντωσης για κάθε τιμή της μάζας των σταθμών
- (β) Να εξηγήσετε πώς αναμένεται να εξαρτάται το πλάτος της ταλάντωσης των σταθμών x_0 , από τη μάζα τους $m_{\sigma\tau}$ και να κάνετε τη γραφική παράσταση $x_0 = f(m_{\sigma\tau})$ με βαθμολογημένο άξονα τον άξονα της $m_{\sigma\tau}$



Σχήμα 3.49: Εξαναγκασμένη ταλάντωση.

Λύση:

Πρωτού δοθεί η επίλυση της άσκησης κρίνεται σκόπιμο να αναφερθούν κάποια σημαντικά στοιχεία για καλύτερη κατανόηση της. Στο σχήμα 3.49 ο τροχός που περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ είναι ο διεγέρτης ενώ, το ελατήριο πάνω στο οποίο αναρτώνται οι μάζες αποτελεί τον ταλαντωτή. Στα πειράματα συντονισμού ο ταλαντωτής δεν μεταβάλλεται (σταθερά ελατηρίου και μάζα), και μεταβάλλεται η συχνότητα του διεγέρτη. Στην περίπτωση που αναφέρεται στην άσκηση ο διεγέρτης έχει μια συγκεκριμένη συχνότητα η οποία και δεν μεταβάλλεται. Με την ανάρτηση των μαζών πάνω στο ελατήριο εκείνο ο ταλαντωτής αλλάζει την ιδιοσυχνότητα του με βάση τη σχέση $f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$ που προκύπτει από την εξίσωση $k = m(2\pi f)^2$.

Η ταλάντωση που παρουσιάζεται στην άσκηση είναι εξαναγκασμένη ταλάντωση με απόσβεση. Η απόσβεση προκύπτει από το γεγονός ότι η ταλάντωση φθίνει με την πάροδο του χρόνου. Με βάση την εξίσωση:

$$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$$

κατασκευάζεται ένας πίνακας ο οποίος δίνει τη συχνότητα της ταλάντωσης για κάθε μάζα που αναρτάται στο ελατήριο:

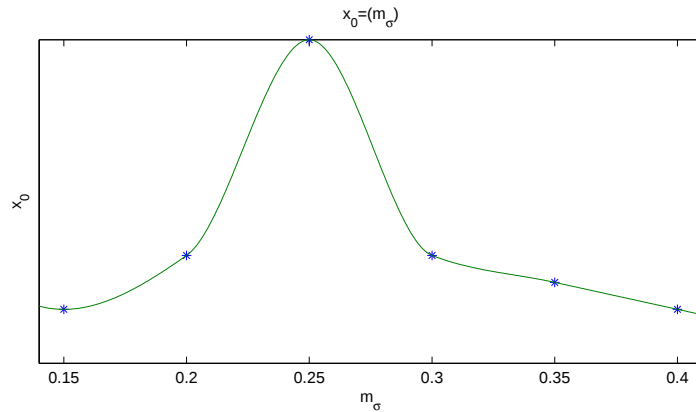
Μάζα σταθμών	Ιδιοσυχνότητα ταλαντωτή
$m_{\sigma\tau}$	$f = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{m}}$
0,15	0,822
0,2	0,712
0,25	0,637
0,3	0,581
0,35	0,538
0,4	0,503

Πίνακας 3.12: Συχνότητες για τα διάφορα σταθμά

Ένα επιπλέον στοιχείο που χρειάζεται για να εξηγηθεί το τί θα συμβεί είναι η συχνότητα του διεγέρτη. Αυτή υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \omega &= 2\pi f_{\delta} \Rightarrow \\ \Rightarrow f_{\delta} &= \frac{\omega}{2\pi} = 0.637 \text{ Hz} \end{aligned}$$

Το πλάτος ταλάντωσης του ταλαντωτή θα αυξάνεται όσο η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή τείνει να γίνει η ίδια με τη συχνότητα του διεγέρτη. Όταν η ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή απομακρύνεται από την ιδιοσυχνότητα του διεγέρτη τότε το πλάτος ταλάντωσης θα ελαττώνεται. Η γραφική παράσταση $x_0 = f(m_{\sigma\tau})$, δίνεται στο σχήμα 3.50.



Σχήμα 3.50: Γραφική παράσταση πλάτους συναρτήσει μάζας που αναρτάται στον ταλαντωτή.

28. Ενιαίες 2005:

Ένα λεπτό ελαστικό σώμα έχει φυσικό μήκος (δηλαδή το μήκος του χωρίς την επίδραση οποιασδήποτε δύναμης) 12cm και υπακούει στο νόμο του Hooke. Το σώμα επιμηκύνεται κατά 4cm με την επίδραση δύναμης $F = 0.2\text{N}$. Να υπολογίσετε το ποσό της ενέργειας που πρέπει να δαπανηθεί για να επιμηκυνθεί το σώμα από $14\text{cm} \rightarrow 16\text{cm}$.

Λύση:

Για να υπολογιστεί το ποσό της ενέργειας που πρέπει να δαπανηθεί έτσι ώστε το σώμα να επιμηκυνθεί από $14\text{cm} \rightarrow 16\text{cm}$ πρέπει να γίνει η εξής σημαντική παρατήρηση:

- Έχει ήδη δαπανηθεί ένα ποσό ενέργειας έτσι ώστε το σώμα να φτάσει στα 14cm και ζητείται το υπόλοιπο ποσό που πρέπει να δαπανηθεί έτσι ώστε να φτάσει μέχρι τα 16cm

Με βάση την παρατήρηση αυτή είναι εύκολο να υπολογιστεί το ζητούμενο αν από την ενέργεια που δαπανήθηκε για να πάει το σώμα από το φυσικό του μήκος στα 16cm αφαιρεθεί το ποσό της ενέργειας που δαπανήθηκε για να πάει το σώμα από το φυσικό του μήκος στα

14cm. Πρωτού όμως γίνει αυτό πρέπει να υπολογιστεί η ακαμψία k του ελαστικού σώματος:

$$F = k \cdot \Delta x \Rightarrow k = \frac{F}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{0.2}{0.04} = 5 \frac{N}{m}$$

$$E_{12 \rightarrow 16cm} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{12 \rightarrow 16cm} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0.04^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{12 \rightarrow 16cm} = 4 \cdot 10^{-3} J$$

$$E_{12 \rightarrow 14cm} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{12 \rightarrow 14cm} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 0.02^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{12 \rightarrow 14cm} = 1 \cdot 10^{-3} J$$

$$E_{14 \rightarrow 16cm} = E_{12 \rightarrow 16cm} - E_{12 \rightarrow 14cm} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{14 \rightarrow 16cm} = 4 \cdot 10^{-3} - 1 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{14 \rightarrow 16cm} = 3 \cdot 10^{-3} J$$

29. **Ενιαίες 2005:**

Σε ένα ελατήριο σταθεράς $k = 20 \frac{N}{m}$ αποθηκεύεται ενέργεια $0,1 J$ με την επίδραση μιας δύναμης η οποία προκαλεί επιμήκυνση στο ελατήριο Δx . Να υπολογίσετε την επιπρόσθετη ενέργεια που πρέπει να προσφέρουμε στο ελατήριο για να επιμηκυνθεί κατά $3\Delta x$.

Λύση:

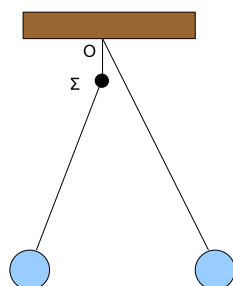
Από τα δεδομένα της άσκησης μπορεί να βρεθεί μια σχέση μεταξύ ενέργειας και επιμήκυνσης με βάση τη δυναμική ενέργεια παραμόρφωσης του ελατηρίου. Αν τώρα σχηματιστεί μια καινούργια εξίσωση με τα ζητούμενο μέγεθος και γίνουν τέτοιοι μετασχηματισμοί που θα δίνουν την ζητούμενη ενέργεια συναρτήσει της δεδομένης τότε υπολογίζεται το ζητούμενο μέγεθος.

$$E_{\delta} = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta x^2 = 0.1 J$$

$$\begin{aligned} E'_{\delta} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot (3\Delta x)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow E'_{\delta} &= \frac{1}{2} \cdot k \cdot 9 \cdot (\Delta x)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow E'_{\delta} &= 9 \cdot \frac{1}{2} \cdot k \cdot (\Delta x)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow E'_{\delta} &= 9 \cdot E_{\delta} = 0.9 J \end{aligned}$$

30. Εισαγωγικές 2005:

Ένα απλό εκκρεμές μήκους l εκτελεί αρμονική ταλάντωση μικρού πλάτους. Στην πορεία της κίνησης του εκκρεμούς και στο σημείο Σ τοποθετείται ένα μικρό καρφί. Αν $O\Sigma = \frac{l}{4}$, να βρείτε την περίοδο του εκκρεμούς ως συνάρτηση του μήκους l και της επιτάχυνσης της βαρύτητας g . Βλέπε σχήμα 3.51.



Σχήμα 3.51: Εκκρεμές που ταλαντούται.

Λύση:

Το εκκρεμές ταλαντούται αρχικά γύρω από το σημείο O με μήκος l , μέχρις ότου φτάσει στο καρφί και στη συνέχεια ταλαντούται γύρω από το σημείο Σ , με μήκος $\frac{3l}{4}$, μέχρι να φτάσει στο μέγιστο πλάτος, να επιστρέψει στην κατακόρυφη θέση, όπου και θα σταματήσει να ακομπάει στο καρφί και θα συνεχίσει και πάλι να ταλαντούται με μήκος l . Από τα όσα έχουν περιγραφεί πιο πάνω είναι εμφανές ότι το εκκρεμές

εκτελεί ταλάντωση με περίοδο το άθροισμα της μισής περιόδου εκκρεμούς με μήκος l της μισής περιόδου εκκρεμούς με μήκος $\frac{3l}{4}$.

$$\begin{aligned} T &= \frac{T_1}{2} + \frac{T_2}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow T &= \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}{2} + \frac{2\pi \cdot \sqrt{\frac{3l}{4g}}}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow T &= \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} + \pi \cdot \sqrt{\frac{3l}{4g}} \Rightarrow \\ \Rightarrow T &= \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \\ \Rightarrow T &= \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \\ \Rightarrow T &= 5.86 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 4

Κύματα

4.1 Ερωτήσεις

1. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 1 σελίδα 244:

Να ορίσετε τι είναι κύμα. Τι είναι τα μηχανικά και τι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα;

Λύση:

Κύμα ονομάζεται μιά διαταραχή η μιά ταλάντωση που διαδίδεται στο χώρο με συγκεκριμένη ταχύτητα. Μηχανικά ονομάζονται τα κύματα εκείνα τα οποία για τη διάδοση τους χρειάζονται κάποιο μηχανικό μέσο για να κινηθούν. Σε αντίθεση με τα μηχανικά, τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (που παράγονται από μεταβολές του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου) διαδίδονται και στο κενό.

2. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 2 σελίδα 244:

Πότε ένα κύμα ονομάζεται αρμονικό; Ποιά είναι τα χαρακτηριστικά ενός αρμονικού κύματος;

Λύση:

Αρμονικό κύμα ονομάζεται το κύμα που παράγεται από αρμονική ταλάντωση. Τα χαρακτηριστικά ενός αρμονικού κύματος είναι:

- Συχνότητα f που είναι η συχνότητα ταλάντωσης της πηγής που δημιουργεί το κύμα
- Πλάτος ταλάντωσης y_0 που είναι το πλάτος ταλάντωσης της πηγής που δημιουργεί το κύμα
- Μήκος κύματος λ που είναι η απόσταση που καλύπτει το κύμα σε χρόνο μίας περιόδου

- Ταχύτητα διάδοσης v που είναι η ταχύτητα με την οποία το κύμα διαδίδεται στο χώρο

3. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 3 σελίδα 244:

Να διακρίνετε τα εγκάρσια από τα διαμήκη κύματα.

Λύση:

Τα κύματα ανάλογα με τον τρόπο παραγωγής τους χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- (α') Εγκάρσια : Είναι τα κύματα εκείνα για τα οποία η διεύθυνση διάδοσης του κύματος είναι κάθετη στη διεύθυνση ταλάντωσης της πηγής που δημιουργεί το κύμα. Παραδείγμα τέτοιων κυμάτων είναι τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα.
- (β') Διαμήκη: Είναι τα κύματα για τα οποία η διεύθυνση διάδοσης είναι παράλληλη με τη διεύθυνση ταλάντωσης των υλικών σημείων του μέσου. Παράδειγμα τέτοιων κυμάτων είναι τα ηχητικά κύματα.

4. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 4 σελίδα 244:

Πότε δύο σημεία ενός ελαστικού μέσου βρίσκονται σε

- (α') Σε φάση ;
- (β') Σε αντίθεση φάσης ;

Λύση:

Δύο σημεία ενός ελαστικού μέσου βρίσκονται

- (α') Σε φάση όταν
 - Έχουν την ίδια απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και
 - Έχουν την ίδια ωκύτητα κατά μέτρο διεύθυνση και φορά

Αλλιώς μπορεί να λεχθεί ότι δύο σημεία βρίσκονται σε φάση όταν ταλαντώνονται ακριβώς με τον ίδιο τρόπο. Αυτό συμβαίνει όταν τα σημεία αυτά απέχουν απόσταση που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, δηλαδή:

$$\Delta x = \kappa \cdot \lambda \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

- (β') Σε αντίθεση φάσης όταν

- η απομάκρυνση του ενός είναι αντίθετη από την απομάκρυνση του άλλου δηλαδή

$$y_A = -y_B$$

- η ωκύτητα του ενός είναι αντίθετη από την ωκύτητα του άλλου, δηλαδή

$$v_A = -v_B$$

Αλλιώς μπορεί να λεχθεί ότι δύο σημεία βρίσκονται σε αντίθεση φάσης όταν ταλαντώνονται με αντίθετο τρόπο. Αυτό συμβαίνει όταν τα σημεία αυτά απέχουν απόσταση που είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μισού μήκους κύματος, δηλαδή:

$$\Delta x = \kappa \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \kappa = 1, 2, \dots$$

5. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 8 σελίδα 244:

Τι λέγεται μήκος κύματος;

Λύση:

Μήκος κύματος ονομάζεται η απόσταση που διανύει η διαταραχή (κύμα), μέσα στο χρόνο μίας περιόδου.

6. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 9 σελίδα 244:

Απο τί εξαρτάται η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται αρμονικό κύμα;

Λύση:

Η διαφορά φάσης μεταξύ δύο σημείων ενός ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται αρμονικό κύμα εξαρτάται από την απόσταση που έχουν τα δύο σημεία στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος. Η φάση του κύματος δίνεται από την εξίσωση 4.1

$$\phi = 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \quad (4.1)$$

Αν λοιπόν πρέπει να υπολογίσουμε τη διαφορά φάσης δύο σημείων Α, Β τότε:

$$\phi_A = 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda} \right) \quad \phi_B = 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda} \right)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi &= \phi_A - \phi_B \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta\phi &= 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right) - 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta\phi &= 2\pi \cdot \frac{t}{T} - 2\pi \cdot \frac{x_A}{\lambda} - 2\pi \cdot \frac{t}{T} + 2\pi \cdot \frac{x_B}{\lambda} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta\phi &= 2\pi \cdot \frac{x_B}{\lambda} - 2\pi \cdot \frac{x_A}{\lambda} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta\phi &= 2\pi \cdot \frac{x_B - x_A}{\lambda} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta\phi &= 2\pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda}
 \end{aligned}$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει ότι λόγο του ότι το κύμα είναι το ίδιο άρα το μήκος κύματος του είναι το ίδιο η διαφορά φάσης είναι συνάρτηση της διαφοράς της απόστασης που έχουν τα δύο σημεία στο μέσο.

7. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 10 σελίδα 244:

Πόση διαφορά φάσης έχουν δύο σημεία που απέχουν απόσταση $\frac{7\lambda}{4}$;

Λύση:

Βάσει της ανάλυσης που έχει γίνει στην προηγούμενη άσκηση μπορεί να υπολογιστεί η διαφορά φάσης που ζητείται. Αυτή είναι:

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi &= 2\pi \cdot \frac{\Delta x}{\lambda} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta\phi &= 2\pi \cdot \frac{\frac{7\lambda}{4}}{\lambda} = 2\pi \cdot \frac{7}{4} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta\phi &= 7 \cdot \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

8. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 11 σελίδα 244:

Τι μας δείχνει το στιγμιότυπο ενός κύματος;

Λύση:

Το στιγμιότυπο ενός κύματος δείχνει την απομάκρυνση που έχει το κάθε σημείο για μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Μπορεί δηλαδή να λεχθεί ότι το στιγμιότυπο είναι μια “φωτογραφία” του κύματος.

9. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερωτήσεις 12 και 15 σελίδα 244:

Πόση είναι η μικρότερη απόσταση ανάμεσα σε ένα δεσμό και σε μία κοιλία στο στάσιμο κύμα; Ποιές συνθήκες πρέπει να ισχύουν για να έχουμε ενισχυτική συμβολή των δύο κυμάτων που προέρχονται από δύο πηγές;

Λύση:

Πρώτου απαντηθεί το ερώτημα αυτό κρίνεται σκόπιμο να παρουσιαστεί η θεωρία των στάσιμων κυμάτων.

Στάσιμο κύμα ονομάζεται το κύμα το οποίο δημιουργείται από τη συμβολή δύο όμοιων κυμάτων στην ίδια διεύθυνση, που έχουν όμως αντίθετη φορά διάδοσης. Εφόσον λοιπόν υπάρχουν δύο κύματα τα οποία συμβάλουν χρησιμοποιείται η αρχή της επαλληλίας για να μελετηθεί το φαινόμενο και να εξαχθούν τα συμπεράσματα. Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας προκύπτει ότι η απομάκρυνση από το θέση ισορροπίας ενός σημείου του ελαστικού μέσου στο οποίο συμβάλουν δύο κύματα είναι το άθροισμα των απομακρύνσεων του κάθε κύματος ξεχωριστά.

Αναλυτικά: Έστω δύο κύματα τα οποία πληρούν τις προδιαγραφές που έχουν αναφερθεί πιο πάνω. Για την ανάλυση που θα γίνει θεωρείται ότι σε κάποιο σημείο μεταξύ των δύο πηγών που παράγουν το στάσιμο κύμα τα κύματα φτάνουν σε φάση. Για τυχαίο σημείο που απέχει απόσταση x από το πρώτο στο οποίο τα κύματα φτάνουν σε φάση το κύμα που διαδίδεται από αριστερά προς τα δεξιά θα φτάσει μετά από χρόνο $t = \frac{x}{v}$. Αντίθετα το άλλο τρέχον κύμα που συμβάλει έχει ήδη περάσει από το εν λόγω σημείο πριν από $t = \frac{x}{v}$. Οι εξισώσεις των κυμάτων αυτών είναι αντίστοιχα:

$$y_1 = y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \quad y_2 = y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας προκύπτει:

$$\Psi = y_1 + y_2 =$$

$$\begin{aligned}
 &= y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] + y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right] = \\
 &= y_0 \cdot \left[\sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] + \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right] \right]
 \end{aligned}$$

Βάσει της τριγωνομετρικής εξίσωσης 4.7 η πιο πάνω σχέση μπορεί να ξαναγραφεί διαφορετικά.

$$\sin A + \sin B = 2 \cdot \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned}
 \Psi &= y_0 \cdot \left[\sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] + \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} \right) \right] \right] = \\
 &= 2y_0 \cdot \left[\cos \left(2\pi \cdot \frac{\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}}{2} \right) \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}}{2} \right) \right] = \\
 &= 2y_0 \cdot \left[\cos \left(2\pi \cdot \frac{-2x}{2} \right) \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{2t}{2} \right) \right] \Rightarrow \\
 \Psi &= 2y_0 \cdot \cos \left(2\pi \cdot \frac{-x}{\lambda} \right) \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{t}{T} \right)
 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση $\cos(-x) = \cos(x)$ η τελευταία εξίσωση ξαναγράφεται ως ακολούθως:

$$\Psi = 2y_0 \cdot \cos \left(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} \right) \cdot \sin \left(2\pi \cdot \frac{t}{T} \right) \quad (4.3)$$

Η εξίσωση 4.3 αποτελεί τη μαθηματική έκφραση του στάσιμου κύματος.

Παρατηρήσεις:

- Ο όρος $2y_0 \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda})$ δεν έχει καμία εξάρτηση από το χρόνο. Αναπαριστά το πλάτος της συνισταμένης ταλάντωσης για συγκεκριμένο σημείο του ελαστικού μέσου.
- Ο δεύτερος όρος $\sin(2\pi \cdot \frac{t}{T})$, δείχνει πώς μεταβάλλεται χρονικά η απομάκρυνση για το εν λόγω σημείο.

Με βάση την πρώτη παρατήρηση μπορεί να καθοριστεί η θέση των σημείων εκείνων που κάνουν ταλάντωση με μέγιστο πλάτος, οι κοιλίες, καθώς επίσης και τα σημεία εκείνα που παραμένουν ακίνητα για κάθε χρονική στιγμή, οι δεσμοί.

Κοιλίες: Για να καθοριστεί η θέση όπου υπάρχουν κοιλίες πρέπει ο όρος $\cos(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda})$ να πάρει τη μέγιστη τιμή του, δηλαδή να γίνει ίσος με τη μονάδα:

$$\begin{aligned} \cos(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}) &= \pm 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} &= \kappa \cdot \pi \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \kappa \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.4)$$

Η εξίσωση 4.4 δίνει τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει έτσι ώστε να έχουμε ενίσχυτική συμβολή σε κάποιο σημείο μεταξύ των δύο πηγών. Κατά αντίστοιχο τρόπο μπορεί να καθοριστούν και τα σημεία εκείνα στα οποία θα έχουμε καταστροφική συμβολή, τους δεσμούς. Στην περίπτωση αυτή πρέπει ο όρος $\cos(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda})$ να γίνει ίσος με 0.

$$\begin{aligned} \cos(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\pi \cdot \frac{x}{\lambda} &= (2\kappa + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= (2\kappa + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

Η εξίσωση 4.5 δίνει τη συνθήκη που πρέπει να ισχύει έτσι ώστε να έχουμε καταστροφική συμβολή σε κάποιο σημείο μεταξύ των δύο πηγών.

Το ερώτημα της άσκησης 15 έχει ήδη απαντηθεί από την προηγούμενη ανάλυση. Μπορεί τώρα να απαντηθεί και το ερώτημα της άσκησης 12 που ζητά να καθοριστεί η ελάχιστη απόσταση που μπορεί να έχει ένας δεσμός από μία κοιλία. Για να γίνει αυτό καθορίζεται η θέση του πρώτου δεσμού και της πρώτης κοιλίας και στη συνέχεια υπολογίζεται η διαφορά τους.

$$x_{1\delta\epsilon\sigma\mu\omicron\nu} = (2\kappa + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}, \quad x_{1\kappa\omicron\iota\lambda\iota\alpha\varsigma} = \kappa \cdot \frac{\lambda}{2} \quad \kappa = 0$$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \Delta x = \frac{\lambda}{4}$$

10. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 13 σελίδα 244:

Κατά μήκος γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδεται αρμονικό κύμα με εξίσωση $y = y_0 \cdot \sin \left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$. Ποιά χρονική στιγμή αρχίζει να ταλαντεύεται σημείο του μέσου που απέχει απόσταση $x = \frac{5\lambda}{4}$;

Λύση:

Πρωτού το κύμα φτάσει στο σημείο, η φάση του είναι αρνητική. Η στιγμή κατά την οποία το σημείο ξεκινά να ταλαντεύεται είναι η στιγμή ακριβώς που η φάση του γίνεται 0. Η φάση του κύματος που δίνεται είναι ο όρος που περιέχεται μέσα στο ημίτονο, δηλαδή $\phi = 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)$. Αντικαθιστώντας λοιπόν την απόσταση που έχει το σημείο από την πηγή $x = \frac{5\lambda}{4}$ και εξισώνοντας τη φάση με μηδέν υπολογίζεται το ζητούμενο.

$$\begin{aligned} \phi = 0 &\Rightarrow \\ \Rightarrow 0 &= 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{\frac{5\lambda}{4}}{\lambda} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{t}{T} &= \frac{5}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= \frac{5}{4} \cdot T \end{aligned}$$

11. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 14 σελίδα 244:

Σε στάσιμο κύμα δύο σημεία Α και Β του μέσου απέχουν απόσταση από τον ίδιο δεσμό $\frac{\lambda}{6}$ και $\frac{\lambda}{3}$ αντίστοιχα.

- (α') Ποιά είναι η διαφορά φάσης της ταλάντωσης των δύο σημείων;
- (β') Ποιό από τα δύο σημεία ταλαντώνεται με το μεγαλύτερο πλάτος;

Λύση:

Στα στάσιμα κύματα τα σημεία του μέσου ταλαντώνονται έχοντας το κάθε ένα το δικό του πλάτος ταλάντωσης. Το πλάτος αυτό προκύπτει

από την σχέση: $2y_0 \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda})$ όπως έχει εξηγηθεί αναλυτικά και σε προηγούμενη άσκηση. Ο δεύτερος όρος απλά καθορίζει το πώς θα μεταβάλλεται αυτός ο όρος. Στο στάσιμο κύμα υπάρχουν μόνο δύο περιπτώσεις:

- Τα σημεία του μέσου ταλαντώνονται σε φάση
- Τα σημεία του μέσου ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης

Για να προσδιοριστεί λοιπόν αν τα δύο σημεία που έχουν δοθεί ταλαντώνονται σε φάση ή σε αντίθεση φάσης αρκεί να υπολογιστεί το πρόσημο που δίνει ο όρος $2y_0 \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda})$ και καθορίζεται από την τιμή του συνημιτόνου.

Για το σημείο Α:

$$\cos(2\pi \cdot \frac{x_A}{\lambda}) = \cos(2\pi \cdot \frac{\frac{\lambda}{6}}{\lambda}) = \cos(\frac{2\pi}{6}) = 0.5$$

Για το σημείο Β:

$$\cos(2\pi \cdot \frac{x_B}{\lambda}) = \cos(2\pi \cdot \frac{\frac{\lambda}{3}}{\lambda}) = \cos(\frac{2\pi}{3}) = -0.5$$

Συνεπώς τα σημεία που έχουν δοθεί θα ταλαντώνονται σε αντίθεση φάσης. Επιπλέον με τη διαδικασία αυτή έχει υπολογιστεί και το πλάτος με το οποίο ταλαντώνονται τα δύο σημεία του μέσου:

Για το σημείο Α:

$$\Psi_A = 2y_0 \cdot 0.5 \Rightarrow$$

$$\Psi_A = y_0$$

Για το σημείο Β:

$$\Psi_B = 2y_0 \cdot (-0.5) \Rightarrow$$

$$\Psi_B = -y_0$$

Τα σημεία Α και Β ταλαντώνονται με το ίδιο κατά απόλυτη τιμή πλάτος.

4.2 Ασκήσεις

1. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 1 σελίδα 247:

Πάνω σε μία επιφάνεια νερού κινείται εγκάρσιο κύμα. Ένα μικρό κομμάτι φελλού πάνω στην επιφάνεια ταλαντώνεται πάνω-κάτω υπό την επίδραση του κύματος. Το μέγιστο ύψος που φτάνει ο φελλός είναι $y_0 = 0.2m$. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κορυφών του κύματος είναι $0.5m$. Επίσης ο φελλός φτάνει στη μέγιστη απομάκρυνση 5 φορές σε χρόνο $5sec$. Αν το κύμα τη χρονική στιγμή $t = 0$ βρίσκεται στη θέση $x = 0$ της ευθείας διάδοσης και διαδίδεται κατά την θετική φορά του άξονα x , χωρίς αρχική φάση, να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

Λύση:

Για να καθοριστεί η εξίσωση του κύματος θα πρέπει να καθοριστούν τα χαρακτηριστικά του, τα οποία είναι:

- Πλάτος ταλάντωσης y_0
- Συχνότητα ταλάντωσης
- μήκος κύματος λ

Στη συνέχεια τα χαρακτηριστικά αυτά εισάγονται στην εξίσωση του τρέχοντος κύματος:

$$y = y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(t \cdot f \pm \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

- Από το γεγονός ότι το μέγιστο ύψος που φτάνει ο φελλός είναι $0.2m$ προκύπτει ότι το πλάτος $y_0 = 0.2m$
- Δύο διαδοχικές κορυφές του κύματος απέχουν απόσταση $0.5m$. Αυτό είναι και το μήκος κύματος λ .
- Επιπλέον η συχνότητα του κύματος αυτού υπολογίζεται από το γεγονός ότι φτάνει στη μέγιστη απομάκρυνση 5 φορές σε χρόνο $t = 5sec$.

$$f = \frac{cycles}{t} = \frac{5}{5} = 1Hz$$

- Το κύμα διαδίδεται από αριστερά προς τα δεξιά, συνεπώς η φάση σε σημεία που βρίσκονται δεξιά της πηγής έπεται $(-)$.

Η εξίσωση του κύματος είναι:

$$\begin{aligned} y &= y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(t \cdot f - \frac{x}{\lambda} \right) \right] = \\ &= 0.2 \cdot \sin \left[2\pi \left(t \cdot 1 - \frac{x}{0.5} \right) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= 0.2 \cdot \sin [2\pi(t - 2x)] \end{aligned}$$

2. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 2 σελίδα 248:

Γραμμικό αρμονικό κύμα περιγράφεται από την εξίσωση $y = 2\sin \left[\pi \left(8t - \frac{x}{16} \right) \right]$.
(Τα μήκη σε cm και ο χρόνος σε s).

- (α') Να βρεθούν το πλάτος, η περίοδος, το μήκος κύματος και η ταχύτητα του κύματος.
- (β') Να γίνει η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης σημείου Μ, που απέχει $60cm$ από την πηγή.
- (γ') Να παρασταθεί γραφικά το στιγμιότυπο κύματος, $13cm$ μετά την έναρξη του.

Λύση:

Δεδομένης της εξίσωσης μπορούν να υπολογιστούν τα μεγέθη που εμφανίζονται στο ερώτημα α. Για να γίνει αυτό πρέπει η εξίσωση κύματος που έχει δοθεί να μετασχηματιστεί στη μορφή:

$$y = y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \quad (4.6)$$

Η φάση που δίνεται πολλαπλασιάζεται και διαιρείται με 2:

$$\begin{aligned} y &= 2\sin \left[\frac{2}{2} \cdot \pi \left(8t - \frac{x}{16} \right) \right] \\ &= 2\sin \left[2\pi \left(\frac{8}{2} \cdot t - \frac{x}{2 \cdot 16} \right) \right] \\ &= 2\sin \left[2\pi \left(4 \cdot t - \frac{x}{32} \right) \right] \end{aligned}$$

Κάνοντας αντιστοίχιση των μεγεθών που εμφανίζονται στη προηγούμενη εξίσωση και εκείνων που εμφανίζονται στην εξίσωση 4.6 προκύπτουν τα ζητούμενα μεγέθη:

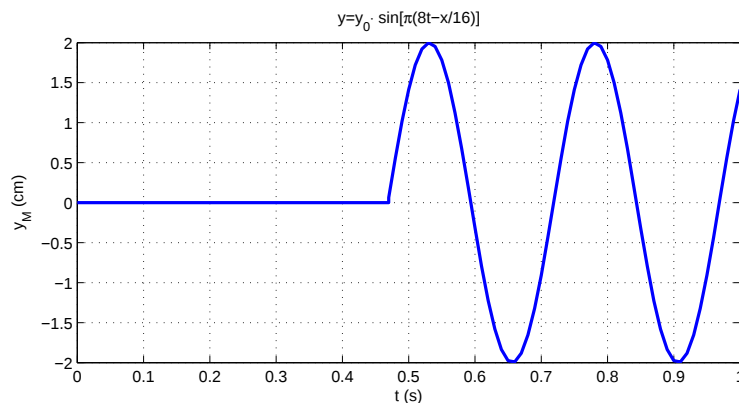
- $y_0 = 2\text{cm}$
- $4t = \frac{t}{T} \Rightarrow T = \frac{t}{4t} \Rightarrow T = 0.25\text{s}$
- $\frac{x}{\lambda} = \frac{x}{32} \Rightarrow \lambda = \frac{32 \cdot x}{x} \Rightarrow \lambda = 32\text{cm}$
- $v = \lambda \cdot \frac{1}{T} = \frac{32}{0.25} \Rightarrow v = 128 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$

Για να σχεδιαστεί η απομάκρυνση του σημείου Μ από τη θέση ισορροπίας πρέπει αρχικά να υπολογιστεί ο χρόνος που θα κάνει το κύμα μέχρι να φτάσει στο σημείο αυτό. Έχοντας υπολογίσει την ταχύτητα του κύματος και γνωρίζοντας την απόσταση του Μ από την πηγή ο χρόνος υπολογίζεται:

$$t = \frac{x}{v} = \frac{60}{128} \Rightarrow t = 0.47\text{s}$$

Άρα από τη στιγμή $t = 0\text{s} \rightarrow t = 0.47\text{s}$ το σημείο Μ θα παραμένει ακίνητο. Τη χρονική στιγμή $t = 0.47\text{s}$ θα ξεκινήσει την ταλάντωση του με βάση την εξίσωση

$$y_M = 2\sin\left[2\pi\left(4 \cdot t - \frac{x}{32}\right)\right]$$

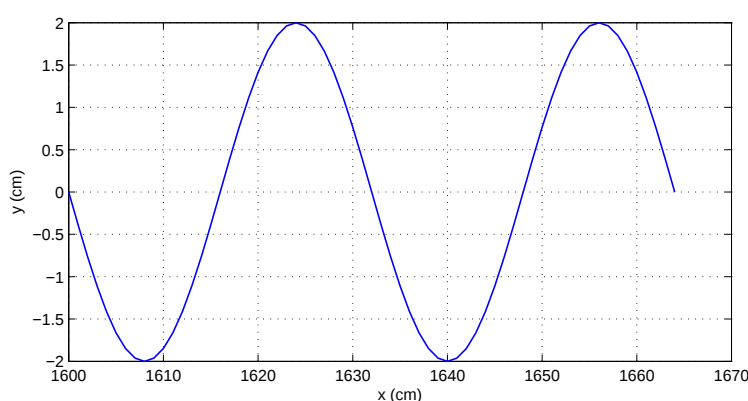


Σχήμα 4.1: Απομάκρυνση του Μ.

Το τελευταίο ερώτημα ζητά να παρασταθεί γραφικά το στιγμιότυπο για τη χρονική στιγμή $t = 13\text{s}$. Για να γίνει αυτό αρχικά υπολογίζεται πόση απόσταση έχει καλύψει το κύμα μέχρι εκείνη τη στιγμή.

$$x = v \cdot t = 128 \cdot 13 = 1664 \text{ cm}$$

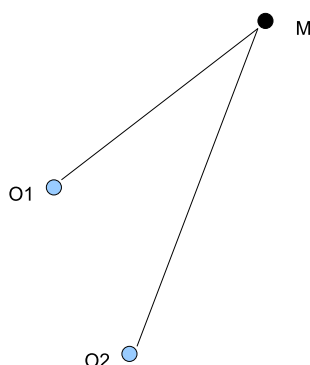
Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την εξίσωση του κύματος διατηρείται σταθερός ο χρόνος $t = 13 \text{ s}$ ενώ μεταβάλλεται η θέση $x \rightarrow 0 \rightarrow 1664 \text{ cm}$. Για να είναι ποιο ευδιάκριτη η γραφική παράσταση σχεδιάζεται το στιγμιότυπο για τα σημεία από $1600 \text{ cm} \rightarrow 1664 \text{ cm}$.



Σχήμα 4.2: Στιγμιότυπο για τη χρονική στιγμή $t = 13 \text{ s}$.

3. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 3 σελίδα 248:

Δύο αρμονικά κύματα προέρχονται από δύο σύγχρονες πηγές O_1 και O_2 και διαδίδονται με ταχύτητα $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Τα δύο κύματα συναντώνται σε σημείο M που απέχει αποστάσεις $d_1 = 5 \text{ m}$ και $d_2 = 7 \text{ m}$ από τις πηγές. Η συχνότητα ταλάντωσης των πηγών είναι $f = 2 \text{ Hz}$ και το πλάτος ταλάντωσης $y_0 = 2 \text{ cm}$. Να υπολογιστεί η απομάκρυνση του M τις χρονικές στιγμές $t_1 = 25 \text{ s}$ και $t_2 = 3.125 \text{ s}$.



Σχήμα 4.3: Συμβολή κυμάτων σε θέση M .

Λύση:

Το φαινόμενο που περιγράφεται στην άσκηση είναι αυτό της συμβολής των κυμάτων. Για να μελετηθεί το φαινόμενο αυτό χρησιμοποιείται η αρχή της επαλληλίας έτσι ώστε να βρεθεί το αλγεβρικό άθροισμα των κυμάτων που συμβάλουν στο σημείο M και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τις αποστάσεις των πηγών από το σημείο M να καθοριστεί η εξίσωση με την οποία ταλάντуютται το εν λόγω σημείο.

Αρχικά το φαινόμενο μελετάται θεωρητικά έτσι ώστε να δημιουργηθεί το υπόβαθρο για την επίλυση της οποιασδήποτε άσκησης συμβολής. Έστω λοιπόν ότι οι εξισώσεις των δύο κυμάτων που συμβάλουν σε τυχαίο σημείο του χώρου είναι:

$$y_1 = y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) \right] \quad y_2 = y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) \right]$$

Τα κύματα αυτά συμβάλουν σε τυχαία θέση του επιπέδου στο οποίο διαδίδονται. Όπου οι αποστάσεις x_1 και x_2 συμβολίζουν τις αποστάσεις των πηγών από το σημείο στο οποίο μελετάται η συμβολή. Χρησιμοποιώντας την αρχή της επαλληλίας προκύπτει:

$$\begin{aligned} \Psi &= y_1 + y_2 = \\ &= y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) \right] + y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) \right] \end{aligned}$$

$$= y_0 \cdot \left[\sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) \right] + \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) \right] \right]$$

Βάσει της τριγωνομετρικής εξίσωσης 4.7 η πιο πάνω σχέση μπορεί να ξαναγραφτεί διαφορετικά.

$$\sin A + \sin B = 2 \cdot \cos \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{A-B}{2} \right) \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} \Psi &= y_0 \cdot \left[\sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) \right] + \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right) \right] \right] \\ &= 2y_0 \cdot \left[\cos \left[\frac{2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) - 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right)}{2} \right] \cdot \sin \left[\frac{2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) + 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_2}{\lambda} \right)}{2} \right] \right] = \\ &= 2y_0 \cdot \left[\cos \left[\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_1}{\lambda} - \frac{2\pi t}{T} + \frac{2\pi x_2}{\lambda}}{2} \right] \cdot \sin \left[\frac{\frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_1}{\lambda} + \frac{2\pi t}{T} - \frac{2\pi x_2}{\lambda}}{2} \right] \right] = \\ &= 2y_0 \cdot \left[\cos \left(\frac{\frac{2\pi}{\lambda} \cdot (x_2 - x_1)}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{\frac{4\pi t}{T} - \frac{2\pi(x_2 + x_1)}{\lambda}}{2} \right) \right] \\ \Psi &= 2y_0 \cdot \cos \left[2\pi \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \right) \right] \cdot \sin \left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

Η εξίσωση 4.8 αποτελεί τη μαθηματική έκφραση της συμβολής δύο κυμάτων σε τυχαίο σημείο, το οποίο απέχει απόσταση x_1 από την πρώτη πηγή και x_2 από τη δεύτερη πηγή. Αν τώρα αντικατασταθούν οι τιμές των αποστάσεων που δόθηκαν στην άσκηση, καθώς επίσης και το πλάτος ταλάντωσης και η συχνότητα των κυμάτων στην εξίσωση 4.8 τότε καθορίζεται ο τρόπος με τον οποίο θα ταλαντώνεται το σημείο M της άσκησης. Παρατηρήστε ότι οι τιμές των x_1 και x_2 δεν είναι πλέον γενικές αλλά αναφέρονται σε συγκεκριμένο σημείο του επιπέδου. (Πιο σωστά αναφέρονται σε όλα τα σημεία εκείνα στα οποία οι απόστασεις από τις πηγές είναι αυτές που έχουν δοθεί στο πρόβλημα).

Επιπλέον θα πρέπει να υπολογιστούν το μήκος κύματος και η περίοδος, έτσι ώστε να γίνει αντικατάσταση στην εξίσωση που έχει εξαχθεί και να υπολογιστεί το αποτέλεσμα. Το μήκος κύματος λοιπόν είναι:

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} \Rightarrow \lambda = 1.5m$$

ενώ η περίοδος:

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \Rightarrow T = 0.5s$$

$$\begin{aligned}\Psi_M &= 2y_0 \cdot \cos \left[2\pi \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \right) \right] \cdot \sin \left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right) \right] \Rightarrow \\ \Psi_M &= 2 \cdot 0.02 \cdot \cos \left[2\pi \cdot \left(\frac{7-5}{2 \cdot 1.5} \right) \right] \cdot \sin \left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{0.5} - \frac{5+7}{2 \cdot 1.5} \right) \right] \Rightarrow \\ \Psi_M &= 0.04 \cdot \cos(4.189) \cdot \sin [2\pi \cdot (2t - 4)]\end{aligned}\quad (4.9)$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές που δίνονται στην άσκηση για το χρόνο:

- $t_1 = 25s$

$$\Psi_M = 0.04 \cdot \cos(4.189) \cdot \sin [2\pi \cdot (2 \cdot 25 - 4)] = 0m$$

- $t_1 = 3.125s$

$$\Psi_M = 0.04 \cdot \cos(4.189) \cdot \sin [2\pi \cdot (2 \cdot 3.125 - 4)] = -0.02m$$

Με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσε να υπολογιστεί η απομάκρυνση του σημείου M για οποιαδήποτε άλλη χρονική στιγμή.

4. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 5 σελίδα 248:

Στάσιμο κύμα περιγράφεται με τη βοήθεια της εξίσωσης

$$y = 16 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{30}\right) \cdot \sin(80\pi t)$$

όπου τα x, y σε cm και ο χρόνος t σε s . Να βρεθούν:

- (α) Οι αποστάσεις των δύο πρώτων δεσμών από την πηγή του κύματος
- (β) Το πλάτος της ταλάντωσης σε ένα σημείο που απέχει από την αρχή $67.5cm$
- (γ) Η απόσταση του πλησιέστερου προς την πηγή σημείου που ταλαντεύεται με πλάτος $8cm$.

Λύση:

Η εξίσωση που δίνει το στάσιμο κύμα όπως έχει ήδη μελετηθεί στην άσκηση 9 στην σελίδα 153, είναι:

$$\Psi = 2y_0 \cdot \cos\left(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}\right) \cdot \sin\left(2\pi \cdot \frac{t}{T}\right)$$

Από αντιστοιχία της εξίσωσης αυτής με την εξίσωση που δίνεται στην άσκηση μπορούν να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη των συμβαλλομένων κυμάτων:

- $2 \cdot y_0 = 16 \Rightarrow y_0 = 8cm$
- $\frac{\pi x}{30} = 2\pi \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi x \cdot 30}{\pi x} \Rightarrow \lambda = 60cm$
- $2\pi \frac{t}{T} = 80\pi t \Rightarrow T = \frac{2\pi t}{80\pi t} \Rightarrow T = 0.025s$

Πρέπει τώρα να καθοριστούν οι αποστάσεις των δύο πρώτων δεσμών από την πηγή. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας την εξίσωση που δίνει την συνθήκη απόσβεσης, που έχει αποδειχτεί στην άσκηση 9 σελίδα 153.

$$x = (2\kappa + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} \quad \kappa = 0, 1, 2, \dots$$

Ο πρώτος δεσμός εμφανίζεται στο $\kappa = 0$ και ο δεύτερος στο $\kappa = 1$:

Πρώτος Δεσμός:

$$\begin{aligned} x &= (2\kappa + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= (2 \cdot 0 + 1) \cdot \frac{60}{4} = 15cm \end{aligned}$$

Δεύτερος Δεσμός:

$$\begin{aligned} x &= (2\kappa + 1) \cdot \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= (2 \cdot 1 + 1) \cdot \frac{60}{4} = 45cm \end{aligned}$$

Ακολουθώς πρέπει να υπολογιστεί το πλάτος της ταλάντωσης που απέχει από την αρχή απόσταση $x = 67.5\text{cm}$. Το πλάτος της ταλάντωσης δίνεται από τον όρο $2y_0 \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda})$, πού όπως έχει ήδη αναφερθεί δεν έχει καμία εξάρτηση με το χρόνο:

$$\begin{aligned}\Psi_{0(67.5)} &= 2y_0 \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Psi_{0(67.5)} &= 16 \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{67.5}{60}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \Psi_{0(67.5)} &= 11.31\text{cm}\end{aligned}$$

Τέλος ζητείται το σημείο εκείνο που βρίσκεται πλησιέστερα προς την πηγή και ταλαντεύεται με πλάτος $y = 8\text{cm}$. Ο όρος που δίνει το πλάτος ταλάντωσης είναι $2y_0 \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda})$. Αν λοιπόν ο όρος αυτός εξισωθεί με το πλάτος ταλάντωσης που δίνεται μπορεί να καθοριστεί το ζητούμενο:

$$\begin{aligned}2y_0 \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x}{\lambda}) &= 8 \Rightarrow 16 \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x}{60}) = 8 \Rightarrow \\ \Rightarrow 16 \cdot \cos(2\pi \cdot \frac{x}{60}) &= 8 \Rightarrow \cos(2\pi \cdot \frac{x}{60}) = \frac{1}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(2\pi \cdot \frac{x}{60}) &= \frac{1}{2} \Rightarrow 2\pi \cdot \frac{x}{60} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow x &= \frac{60\pi}{3 \cdot 2\pi} = 10\text{cm}\end{aligned}$$

5. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 6 σελίδα 248:

Με τη βοήθεια ενός διεγέρτη δημιουργείται σε ένα σημείο Ο ενός ελαστικού μέσου μια κίνηση που περιγράφεται από την εξίσωση $y = 4 \cdot \sin(15.7t)$, ($y \rightarrow \text{cm}, t \rightarrow \text{s}$). Σε ένα σημείο M_1 του ελαστικού μέσου το οποίο βρίσκεται σε απόσταση $x_1 = 2\text{m}$ από το Ο, η διαταραχή φτάνει μετά από χρόνο $t = 3\text{s}$. Να βρεθεί η απομάκρυνση ενός υλικού σημείου M_2 το οποίο απέχει απόσταση $x_2 = 5\text{m}$ τις χρονικές στιγμές $t_1 = 10.25\text{s}$ και $t_2 = 12.5\text{s}$.

Λύση:

Για να υπολογιστούν οι απομακρύνσεις του σημείου M_2 για τις χρονικές στιγμές που δίνονται πρέπει:

- Από τα δεδομένα της άσκησης να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του κύματος
- Να γραφτεί η εξίσωση του κύματος σε γενική μορφή
- Να αντικατασταθεί στην εξίσωση του κύματος η απόσταση του σημείου M_2 έτσι ώστε μοναδική άγνωστη παράμετρος να είναι ο χρόνος
- Να αντικατασταθεί ο χρόνος που δίνεται στην άσκηση για να υπολογιστούν οι απομακρύνσεις

Από την εξίσωση ταλάντωσης του διεγέρτη που παράγει το κύμα μπορεί να εξαχθεί το πλάτος ταλάντωσης, που θα είναι το ίδιο και με το πλάτος του τρέχοντος κύματος που δημιουργείται, καθώς επίσης και η περίοδος ταλάντωσης που είναι και πάλι ίδια με την περίοδο του κύματος. Η γενική εξίσωση της ταλάντωσης είναι:

$$y = y_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Η εξίσωση του διεγέρτη που παράγει το κύμα είναι:

$$y = 4 \cdot \sin(15.7 \cdot t)$$

Απο τις δύο εξισώσεις αυτές προκύπτουν τα ακόλουθα αποτελέσματα:

- Πλάτος ταλάντωσης $y_0 = 4cm$
- Περίοδος $\frac{2\pi}{T} = 15.7 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{15.7} = 0.4s$

Από το γεγονός ότι το κύμα χρειάζεται χρόνο $t = 3s$ για να μετακινηθεί από την πηγή μέχρι το σημείο M_1 που απέχει απόσταση $x_1 = 2m$ υπολογίζεται η ταχύτητα διάδοσης του κύματος και το μήκος κύματος:

$$v = \frac{x_1}{t} = 0.67 \frac{m}{s}$$

$$v = \lambda \cdot \frac{1}{T} \Rightarrow \lambda = v \cdot T \Rightarrow$$

$$\lambda = 0.267m$$

Μπορεί τώρα να καταστρωθεί η εξίσωση που περιγράφει το κύμα με αντικατάσταση όλων των χαρακτηριστικών μεγεθών του κύματος που υπολογίστηκαν:

$$\begin{aligned} y &= y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow \\ y &= 4 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{0.4} - \frac{x}{0.267} \right) \right] \Rightarrow \\ y &= 4 \cdot \sin [2\pi(2.5 \cdot t - 3.745 \cdot x)] \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό της απομάκρυνσης του σημείου M_2 αρκεί να αντικατασταθεί το x με την απόσταση x_2 του σημείου, όπως επίσης και οι τιμές του χρόνου t_1 και t_2 .

- $t_1 = 10.25s$

$$\begin{aligned} y_{M_2} &= 4 \cdot \sin [2\pi(2.5 \cdot t - 3.745 \cdot x_2)] \\ y_{M_2} &= 4 \cdot \sin [2\pi(2.5 \cdot 10.25 - 3.745 \cdot 5)] \\ y_{M_2} &= -2.35cm \end{aligned}$$

- $t_1 = 12.5s$

$$\begin{aligned} y_{M_2} &= 4 \cdot \sin [2\pi(2.5 \cdot t - 3.745 \cdot x_2)] \\ y_{M_2} &= 4 \cdot \sin [2\pi(2.5 \cdot 12.5 - 3.745 \cdot 5)] \\ y_{M_2} &= -0.625cm \end{aligned}$$

6. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 7 σελίδα 249:

Στο σημείο Ο του υγρού που ηρεμεί δημιουργείται αρμονικό κύμα, στο οποίο η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κοιλάδων είναι $1cm$, ενώ ο χρόνος που απαιτείται για να φθάσει το κύμα στο σημείο Α το οποίο απέχει από το Ο απόσταση $21.6cm$ είναι $t = 1.2s$. Να βρεθούν:

(α') Η συχνότητα του κύματος

(β') Η φάση του σημείου Α τη στιγμή κατά την οποία ένα άλλο σημείο Β που βρίσκεται στην ευθεία που ενώνει την πηγή Ο με το Α και σε απόσταση $8cm$ από το Ο έχει φάση 12π .

Λύση:

Για να απαντηθούν τα ερωτήματα πρέπει να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του κύματος, να καταστρωθεί η εξίσωση του κύματος και από αυτήν να υπολογιστεί η φάση του σημείου A τη στιγμή που το B με τα χαρακτηριστικά που περιγράφονται πιο πάνω έχει φάση 12π .

Το μήκος κύματος είναι η απόσταση των δύο διαδοχικών κοιλάδων, δηλαδή $\lambda = 1\text{cm}$. Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι:

$$v = \frac{x}{t} = \frac{21.6}{1.2} \Rightarrow v = 18 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$$

Επομένως η συχνότητα είναι:

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow f = 18\text{Hz}$$

Από το δεδομένο ότι η φάση του σημείου B είναι 12π μπορεί να υπολογιστεί η χρονική στιγμή t . Αυτή θα είναι ίδια με την χρονική στιγμή που ζητείται η φάση στο A. Η φάση στο B δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \phi_B &= 2\pi\left(t \cdot f - \frac{x_B}{\lambda}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\phi_B}{2\pi} &= t \cdot f - \frac{x_B}{\lambda} \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= \frac{\frac{\phi_B}{2\pi} + \frac{x_B}{\lambda}}{f} = \frac{\frac{12\pi}{2\pi} + \frac{8}{1}}{18} \Rightarrow \\ \Rightarrow t &= 0.778\text{s} \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας το χρόνο που έχει υπολογιστεί με το χρόνο που θέλει το κύμα να φτάσει στο σημείο A $t' = 1.2\text{s}$ είναι εμφανές ότι το κύμα δεν έχει φτάσει ακόμη στο σημείο αυτό. Συνεπώς το σημείο δεν έχει ξεκινήσει ακόμη να ταλαντώνεται.

Παρατήρηση:

Αν ο χρόνος που προέκυπτε ήταν τέτοιος έτσι ώστε το κύμα να έφτανε στο A, τότε για να υπολογιστεί η φάση στο A για την εν λόγω χρονική

στιγμή απλά θα γινόταν αντικατάσταση του χρόνου αυτού στη εξίσωση που δίνει την φάση για το Α :

$$\phi_A = 2\pi(t \cdot f - \frac{x_A}{\lambda})$$

7. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 8 σελίδα 249:

Εγκάρσιο αρμονικό κύμα έχει την εξίσωση $y = y_0 \sin [2\pi(2 \cdot t - 0.01 \cdot x)]$, όπου $x, y \rightarrow cm$ και $t \rightarrow s$. Να βρείτε :

- (α') Το πλάτος ταλάντωσης, την περίοδο, το μήκος κύματος και την ταχύτητα του κύματος
- (β') Τη μέγιστη ταχύτητα και την μέγιστη επιτάχυνση των υλικών σημείων του ελαστικού μέσου

Λύση:

Τα χαρακτηριστικά του κύματος θα υπολογιστούν με σύγκριση της εξίσωσης που δίνεται και της γενικής εξίσωσης του κύματος:

$$y = y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

- Πλάτος ταλάντωσης $y_0 = 10cm = 0.1m$
- Περίοδος $\frac{t}{T} = 2t \Rightarrow T = 0.5s$
- μήκος κύματος $\frac{x}{\lambda} = 0.01 \cdot x \Rightarrow \lambda = 100cm$
- Ταχύτητα κύματος $v = \lambda \cdot \frac{1}{T} = 100 \frac{1}{0.5} \Rightarrow v = 200 \frac{cm}{s} = 2 \frac{m}{s}$

Στη συνέχεια ζητούνται τα μέγιστα για την ωκύτητα καθώς επίσης και για την επιτάχυνση. Τα μέγιστα αυτά υπολογίζονται ακριβώς όπως και στις ταλαντώσεις, δηλαδή, παραγωγίζεται η εξίσωση του κύματος και ο όρος που εμφανίζεται μπροστά από την τριγωνομετρική συνάρτηση του συνημιτόνου είναι η μέγιστη ταχύτητα. Η μέγιστη επιτάχυνση υπολογίζεται με την δεύτερη παράγωγο της εξίσωσης του κύματος.

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left[y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega &= \frac{2\pi}{T} y_0 \cdot \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \quad (4.10) \\ \Omega_0 &= \frac{2\pi}{T} y_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a &= \frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{2\pi}{T} y_0 \cdot \cos \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow a &= - \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \\
 a_0 &= \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 y_0
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

- Μέγιστη ταχύτητα $\Omega_0 = \frac{2\pi}{T} y_0 \Rightarrow \Omega_0 = 0.4\pi \frac{m}{s}$
- Μέγιστη επιτάχυνση $a_0 = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 y_0 \Rightarrow a_0 = 1.6 \cdot \pi^2 \frac{m}{s^2}$

Παρατήρηση:

Με τις εξισώσεις 4.10 και 4.11 που έχουν γραφτεί πιο πάνω είναι δυνατός ο υπολογισμός της ωκύτητας και της επιτάχυνσης, του οποιουδήποτε σημείου στο ελαστικό μέσο και για την οποιαδήποτε χρονική στιγμή και όχι μόνο τα μέγιστα.

8. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 9 σελίδα 249:

Να γράψετε την εξίσωση ενός αρμονικού κύματος που έχει πλάτος $y_0 = 10m$, συχνότητα $f = 10Hz$ και ταχύτητα διάδοσης $v = 1 \frac{m}{s}$.

Λύση:

Η γενική εξίσωση του κύματος είναι:

$$y = y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Με βάση τα δεδομένα υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη του κύματος και αντικαθιστώνται στην εξίσωση.

- Πλάτος $y_0 = 10m$
- συχνότητα $f = 10Hz$
- μήκος κύματος $v = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{1}{10} \Rightarrow \lambda = 0.1m$

Άρα η εξίσωση που ζητείται είναι:

$$y = 10 \cdot \sin \left[2\pi \left(10 \cdot t - \frac{x}{0.1} \right) \right]$$

4.3 Ασκήσεις για χορδές και ανοικτούς σωλήνες

1. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 1 σελίδα 272:

Μια χορδή έχει μήκος $l = 1m$, μάζα $m = 5g$ και πάλλεται έτσι ώστε να σχηματίζεται στάσιμο κύμα. Ο παραγόμενος ήχος έχει συχνότητα $f = 130.5Hz$. Με πόση δύναμη τείνεται η χορδή;

Λύση:

Μια χορδή είναι πακτωμένη σε δύο ακλόνητα σημεία, τα άκρα της. Όταν διαταραχθεί η χορδή παράγεται στάσιμο κύμα. Τα δύο σημεία τα οποία είναι ακλόνητα, δεν μπορούν να πάλλονται και έτσι αναγκαστικά θα αποτελούν δεσμούς. Επιπλέον μπορούν να προστεθούν κι άλλοι δεσμοί, για παράδειγμα το πάτημα του δακτύλου στην ταστιέρα της κιθάρας. Όπως έχει ήδη αποδειχθεί σε προηγούμενη άσκηση η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών είναι $\frac{\lambda}{2}$.

Για να υπολογιστεί η δύναμη που τείνει την χορδή γίνεται χρήση των ακόλουθων εξισώσεων:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (4.12)$$

$$v = \lambda \cdot f \quad (4.13)$$

Στη σχέση 4.12, F είναι η δύναμη που τείνει την χορδή ενώ $\mu = \frac{m}{l}$ είναι η γραμμική πυκνότητα της χορδής. Στη άσκηση η χορδή που τείνεται είναι πακτωμένη στα δύο άκρα της και ενδιάμεσως δεν υπάρχει άλλος δεσμός. Με βάση και τα όσα εξηγηθεί μέχρι στιγμής αυτό δίνει ένα δεδομένο: το μήκος της χορδής στην προκείμενη περίπτωση είναι: $l = \frac{\lambda}{2}$. Χρησιμοποιώντας το δεδομένο αυτό και τις εξισώσεις 4.12, 4.13 επιλύεται η άσκηση.

Συνδυάζοντας τις δύο εξισώσεις και λύνοντας ως προς F προκύπτει:

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f &= \sqrt{\frac{F}{\mu}} \Rightarrow (\lambda \cdot f)^2 = \frac{F}{\mu} \Rightarrow \\ \Rightarrow F &= \mu \cdot (\lambda \cdot f)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Επιπλέον } l = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2 \cdot l$$

$$\begin{aligned}
 F &= \mu \cdot (2 \cdot l \cdot f)^2 = \frac{m}{l} \cdot (2 \cdot l \cdot f)^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow F &= \frac{0.005}{1} \cdot (2 \cdot 1 \cdot 130.5)^2 \Rightarrow \\
 \Rightarrow F &= 340.6N
 \end{aligned}$$

2. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 2 σελίδα 272:

Σε ένα βιολί μια χορδή του έχει μήκος $l_1 = 33cm$ και δίνει το θεμελιώδη ήχο συχνότητας $f_1 = 440Hz$. Σε πόση απόσταση από την άκρη της χορδής πρέπει ο βιολιστής να πιέσει με το δάκτυλό του τη χορδή ώστε το υπόλοιπο τμήμα της να δίνει θεμελιώδη ήχο συχνότητας f_2 και να ισχύει η σχέση $\frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$; Πόση είναι η συχνότητα f_2 ;

Λύση:

Όταν ο βιολιστής τείνει την χορδή χωρίς να πατήσει σε οποιοδήποτε σημείο με τα δάκτυλά του η χορδή δίνει ήχο συχνότητας $f_1 = 440Hz$. Αυτό σημαίνει ότι το μήκος της χορδής l , είναι ίσο με $\frac{\lambda}{2}$. Από το δεδομένο αυτό υπολογίζεται το μήκος κύματος:

$$\begin{aligned}
 l &= \frac{\lambda_1}{2} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \lambda_1 &= 2 \cdot l = 66cm
 \end{aligned}$$

Δεδομένου ότι η ταχύτητα διάδοσης σε ένα μέσο είναι πάντα σταθερή υπολογίζεται η θέση που πρέπει ο βιολιστής να τοποθετήσει το δάκτυλο του έτσι ώστε να δημιουργήσει ήχο με συχνότητα f_2 που πληρεί τη σχέση $\frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned}
 \frac{f_2}{f_1} &= \frac{3}{2} \\
 v &= \lambda_1 \cdot f_1 = \lambda_2 \cdot f_2
 \end{aligned}$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{2}{3} \cdot \lambda_1 = 44\text{cm}$$

Έχει υπολογιστεί το μήκος κύματος της χορδής έτσι ώστε να έχει συχνότητα f_2 . Με βάση το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να υπολογιστεί πόσο είναι το καινούργιο μήκος της χορδής, αφού είναι γνωστό ότι η συχνότητα f_2 είναι η θεμελιώδης για το καινούργιο μήκος l' :

$$l' = \frac{\lambda_2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l' = \frac{44}{2} = 22\text{cm}$$

Πρέπει λοιπόν το μήκος της χορδής να γίνει ίσο με $l' = 22\text{cm}$. Αυτό συμβαίνει όταν ο βιολιστής τοποθετήσει το δακτυλό του 11cm από το ένα άκρο της χορδής. Τέλος εκείνο που μένει να υπολογιστεί είναι η συχνότητα f_2 :

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$$

$$f_2 = \frac{3}{2} \cdot f_1 = \frac{3}{2} \cdot 440\text{Hz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2 = 660\text{Hz}$$

3. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 3 σελίδα 272:

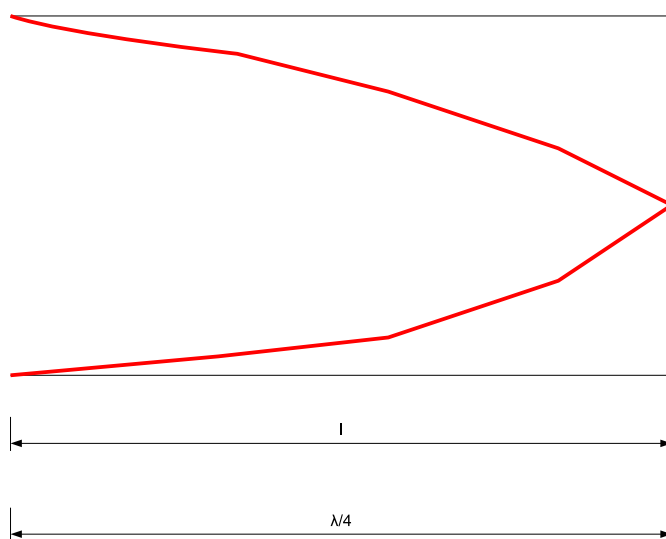
Ένας κλειστός ηχητικός σωλήνας έχει μήκος 68cm . Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι $v = 340 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

(α') Πόση είναι η συχνότητα του θεμελιώδους ήχου;

(β') Πόσο πρέπει να γίνει το μήκος του σωλήνα έτσι ώστε ο θεμελιώδης ήχος που παράγεται να έχει συχνότητα f_2 και να ισχύει η σχέση $\frac{f_2}{f_1} = \frac{3}{2}$;

Λύση:

Στους κλειστούς ηχητικούς σωλήνες, ακριβώς επειδή στη μια τους πλευρά υπάρχει τοίχωμα, τα μόρια του αέρα στο εν λόγω σημείο δεν μπορούν να κάνουν ταλάντωση. Από το γεγονός αυτό προκύπτει ότι για τους κλειστούς ηχητικούς σωλήνες έχουμε ένα δεσμό εκεί όπου υπάρχει το τοίχωμα. Ο θεμελιώδης ήχος που παρουσιάζεται στους σωλήνες αυτούς είναι όταν πληρείται η σχέση, $\frac{\lambda}{4} = l$, όπου l το μήκος του σωλήνα. (βλέπε σχήμα 4.4).



Σχήμα 4.4: Θεμελιώδης συχνότητα κλειστού ηχητικού σωλήνα.

Υπολογίζεται αρχικά το μήκος κύματος για το θεμελιώδη ήχο και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας τη σχέση $v = \lambda \cdot f$ υπολογίζεται και η συχνότητα που ζητείται:

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{4} &= l \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda &= 4 \cdot l \Rightarrow \lambda = 4 \cdot 0.68 \\ \Rightarrow \lambda &= 2.72m \end{aligned}$$

η συχνότητα υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = \frac{340}{2.72} = 125 Hz$$

Στο δεύτερο ερώτημα της άσκησης ακολουθείται η αντίθετη διαδικασία από αυτή που ακολουθήθηκε στο πρώτο :

- Υπολογίζεται η συχνότητα f_2 με βάση την εξίσωση $\frac{f_1}{f_2} = \frac{3}{2}$
- Χρησιμοποιείται η συχνότητα αυτή για να υπολογιστεί το μήκος κύματος της θεμελιώδους συχνότητας στο νέο σωλήνα με βάση την εξίσωση $v = \lambda' \cdot f_2 \Rightarrow \lambda' = \frac{v}{f}$
- Από το γεγονός ότι ο σωλήνας είναι κλειστός και το αποτέλεσμα που προέκυψε από το προηγούμενο βήμα για το μήκος κύματος, υπολογίζεται το μήκος του σωλήνα με βάση τη σχέση $l' = \frac{\lambda'}{4}$

Συχνότητα f_2 :

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2 = \frac{2}{3} \cdot f_1 = \frac{2}{3} \cdot 125 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_2 = 83.33 Hz$$

Μήκος κύματος θεμελιώδους συχνότητας:

$$v = \lambda' \cdot f_2 \Rightarrow \lambda' = \frac{v}{f} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda' = \frac{340}{83.33} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda' = 4.08 m$$

Μήκος σωλήνα :

$$l' = \frac{\lambda'}{4} \Rightarrow l' = \frac{4.08}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l' = 1.02 m$$

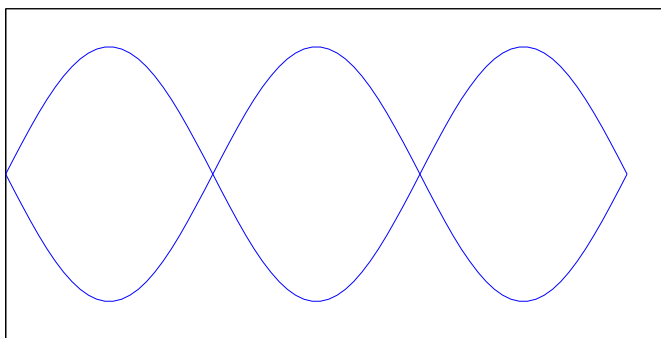
4. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 7 σελίδα 273:

Μια χορδή μήκους $l = 0.75m$ έχει τις δύο άκρες της στερεωμένες. Πάνω στη χορδή διαδίδονται κύματα με ταχύτητα $v = 1500 \frac{m}{s}$. Να υπολογίσετε:

- (α) Το μήκος κύματος
- (β) Τη συχνότητα των κυμάτων ώστε να σχηματίζονται 4 δεσμοί πάνω στη χορδή.

Λύση:

Στη χορδή δίνεται σαν δεδομένο ότι σχηματίζονται 4 δεσμοί. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει να ισχύει η εικόνα του σχήματος 4.5.



Σχήμα 4.5: Στάσιμο κύμα σε χορδή, με 4 δεσμούς.

Από το σχήμα αυτό προκύπτει ότι το μήκος της χορδής πρέπει να είναι ίσο με $l = 3 \cdot \frac{\lambda}{2}$. Αυτό συμβαίνει γιατί όπως έχει αποδειχτεί και σε προηγούμενες ασκήσεις η απόσταση δεσμού από δεσμό είναι $\frac{\lambda}{2}$.

$$\begin{aligned} l &= 3 \cdot \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = \frac{2 \cdot l}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{2 \cdot 0.75}{3} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda &= 0.5m \end{aligned}$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογιστεί η συχνότητα των κυμάτων αυτών. Αυτό γίνεται ως ακολούθως:

$$v = \lambda \cdot f \Rightarrow f = \frac{v}{\lambda} \Rightarrow$$

$$f = \frac{1500}{0.5} = 3000 Hz$$

5. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 8 σελίδα 273:

Μια χορδή ταλαντεύεται σύμφωνα με την εξίσωση

$$y = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi \cdot x}{6}\right) \cdot \sin(50\pi t)$$

όπου $x, y \rightarrow cm$ και $t \rightarrow s$. Να βρείτε:

- (α') τα πλάτη 1,2 τις συχνότητες των κυμάτων τα οποία με τη συμβολή τους παράγουν την ταλάντωση της χορδής
- (β') την απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών της χορδής

Λύση:

Αρχικά γίνεται η παρατήρηση ότι η άσκηση αναφέρεται σε κύμα που δημιουργείται σε χορδή. Τα στάσιμα κύματα αυτά, δημιουργούνται από τη συμβολή δύο όμοιων κυμάτων (ένα που προκύπτει από τη διέγερση της χορδής και ένα από την ανάκλαση της στα άκρα της χορδής). Συγκρίνοντας λοιπόν την εξίσωση που δόθηκε με την εξίσωση του στάσιμου κύματος προκύπτουν τα χαρακτηριστικά τα οποία ζητούνται.

$$y = 2y_0 \cdot \cos\left(\frac{2\pi \cdot x}{\lambda}\right) \cdot \sin(2\pi f \cdot t)$$

- Πλάτος y_0 : $2y_0 = 10 \Rightarrow y_0 = 5cm$
- Συχνότητα f : $2\pi f = 50\pi \Rightarrow f = \frac{50\pi}{2\pi} = 25Hz$
- Μήκος κύματος λ : $\frac{2\pi \cdot x}{\lambda} = \frac{\pi \cdot x}{6} \Rightarrow \lambda = 12cm$

Με βάση το μήκος κύματος που υπολογίστηκε νωρίτερα μπορεί να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών δεσμών που όπως έχει αποδειχτεί είναι ίση με $\frac{\lambda}{2}$. Συνεπώς αν ονομαστεί $\Delta x_{\delta.δεσμων}$ η απόσταση αυτή τότε:

$$\Delta x_{\delta.δεσμων} = \frac{\lambda}{2} = \frac{12}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta x_{\delta.δεσμων} = 6cm$$

4.4 Πείραμα Young

4.4.1 Ερωτήσεις

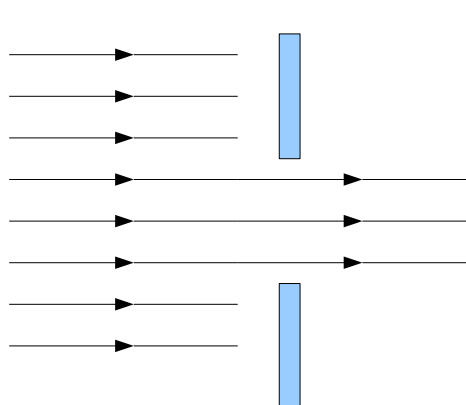
1. Ερώτηση

Τι ονομάζουμε περίθλαση; Απο ποιά αρχή εξηγείται το εν λόγω φαινόμενο;

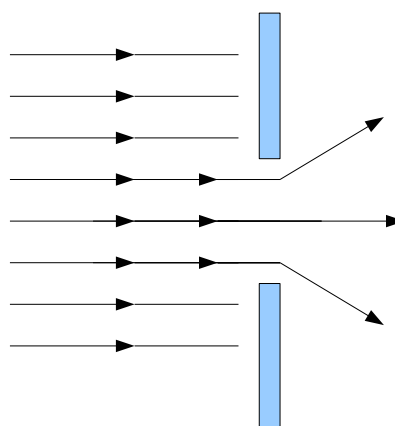
Λύση:

Περίθλαση είναι το φαινόμενο κατά το οποίο το κύμα που διαδίδεται στο χώρο συναντά διάφραγμα μικρής οπής και αποκλίνει από την αρχική του πορεία έχοντας ως αποτέλεσμα να διαδίδεται ακόμη και σε περιοχές που βρίσκονται πίσω από το διάφραγμα. Το φαινόμενο αυτό είναι απόρροια της αρχής του Huygens που λέει ότι:

“Κάθε σημείο μιας ισοφασικής επιφάνειας λειτουργεί ως δευτερογενής πηγή ακτινοβολίας φωτός”.



A. Όταν η οπή είναι μεγαλύτερη από το μήκος κύματος τότε δεν παρατηρείται περίθλαση



B. Όταν η οπή της ίδια τάξης μεγέθους με το μήκος κύματος τότε παρατηρείται περίθλαση

Σχήμα 4.6: α) Οπή μεγαλύτερη από το μήκος κύματος β) Οπή τάξης μεγέθους του μήκους κύματος.

2. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 1 σελίδα 283:

Γιατί δεν παρατηρείται πάντοτε περίθλαση όταν το φως περνά από σχισμή;

Λύση:

Για να παρατηρηθεί περίθλαση του φωτός πρέπει η οπή που θα συναντήσει το φως να είναι της τάξης μεγέθους του μήκους κύματος της ακτινοβολίας. Αν η οπή είναι μεγαλύτερη τότε εκείνο που παρατηρείται είναι απλή αποκοπή του μετώπου κύματος, όπως δείχνει και το σχήμα 4.6.

3. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 2 σελίδα 283:

Γιατί δεν παράγονται κροσσοί συμβολής όταν χρησιμοποιούνται δύο λαμπες σαν πηγές φωτεινών κυμάτων;

Λύση:

Για να παρατηρηθεί το φαινόμενο της συμβολής απαραίτητη προϋπόθεση είναι οι δύο πηγές οι οποίες συμβάλλουν να είναι σύγχρονες, δηλαδή να έχουν την ίδια συχνότητα. Αν χρησιμοποιηθούν δύο διαφορετικοί λαμπτήρες τότε η προϋπόθεση αυτή δεν πληρείται και επομένως δε μπορεί να παρατηρηθεί το φαινόμενο.

4. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 3 σελίδα 283:

Τι σημαίνει μονοχρωματική πηγή φωτός;

Λύση:

Μονοχρωματική πηγή φωτός ονομάζεται η πηγή εκείνη η οποία εκπέμπει ακτινοβολία συγκεκριμένου μήκους κύματος.

5. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 4 σελίδα 283:

Να περιγράψετε το πείραμα του Young με δύο σχισμές και να εξηγήσετε γιατί οι σχισμές συμπεριφέρονται σαν σύμφωνες φωτεινές πηγές. Να εξαχθούν οι σχέσεις που ισχύουν για το εν λόγω πείραμα και να εξηγηθούν.

Λύση:

Η μελέτη του πειράματος Young απαιτεί την πειραματική διάταξη του σχήματος 4.7.

Το διάφραγμα Δ1 εξασφαλίζει τη διέλευση λεπτής δέσμης φωτός η οποία προσπίπτει στο διάφραγμα Δ2. Οι οπές Ο1 και Ο2 του διαφράγματος Δ2 απέχουν απόσταση α μεταξύ τους. Η απόσταση αυτή είναι

όπου Δx είναι η διαφορά δρόμου από τις δύο πηγές, λ είναι το μήκος κύματος της μονοχρωματικής ακτινοβολίας και k η τάξη του φωτεινού κροσσού ο οποίος εξετάζεται.

Η διαφορά δρόμου που παρουσιάζουν οι δύο πηγές είναι η απόσταση $O2\Sigma$, δηλαδή $\Delta x = O2\Sigma$. Πρέπει λοιπόν να εκφραστεί με βάσει τα χαρακτηριστικά που δίνονται στο σχήμα 4.7 η απόσταση $O2\Sigma$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο $O2 - \Sigma - O1$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} \sin\theta &= \frac{O2\Sigma}{a} \Rightarrow \\ O2\Sigma &= \sin\theta \cdot a \end{aligned}$$

Η απόσταση D είναι πολύ μεγαλύτερη από την απόσταση a και συνεπώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί η σχέση:

$$\sin\theta \approx \tan\theta$$

Επιπλέον η εφαπτομένη μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των γεωμετρικών χαρακτηριστικών που δίνονται στο σχήμα:

$$\tan\theta = \frac{y_k}{D}$$

Με βάσει λοιπόν τις προηγούμενες σχέσεις μπορεί να ξαναγραφτεί η διαφορά δρόμου ως ακολούθως:

$$\Delta x = \frac{y_k}{D} \cdot a \quad (4.16)$$

Μπορούν τώρα να εξαχθούν οι σχέσεις που δίνουν τους φωτεινούς και σκοτεινούς κροσσούς συμβολής ως ακολούθως:

- Για τους φωτεινούς κροσσούς συμβολής συνδιάζονται οι σχέσεις 4.14 και 4.16

$$\begin{aligned} \Delta x &= \frac{y_k}{D} \cdot a \\ \Delta x &= k \cdot \lambda \end{aligned}$$

$$\frac{y_k}{D} \cdot a = k \cdot \lambda \quad (4.17)$$

- Για τους σκοτεινούς κροσσούς συμβολής συνδιάζονται οι σχέσεις 4.15 και 4.16

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{y_k}{D} \cdot a \\ \Delta x &= (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \\ \frac{y_k}{D} \cdot a &= (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}\end{aligned}\quad (4.18)$$

Οι σχέσεις αυτές ανάλογα με το ποιο είναι τα ζητούμενα και τα δεδομένα της εκάστοτε άσκησης μπορούν να επιλυθούν και να δώσουν τα επιθυμητά αποτελέσματα.

6. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Ερώτηση 5 σελίδα 285:

Ποιές αλλαγές θα παρατηρηθούν στο σύστημα των κροσσών συμβολής αν

- (α') Η κίτρινη ακτινοβολία αντικατασταθεί με άλλη μικρότερου μήκους κύματος;
- (β') Αυξηθεί η απόσταση των δύο σχισμών;

Λύση:

Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις που έχουν εξαχθεί από τη μελέτη του πειράματος στην άσκηση 5, μπορούν να απαντηθούν τα ερωτήματα της άσκησης αυτής. Αρχικά επιλύεται η εξίσωση 4.14 ως προς y_k :

$$\begin{aligned}\frac{y_k}{D} \cdot a &= k \cdot \lambda \Rightarrow \\ \Rightarrow y_k &= \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{a}\end{aligned}\quad (4.19)$$

Με βάση αυτή την εξίσωση εξάγονται τα συμπεράσματα:

- Αν η κίτρινη ακτινοβολία αντικατασταθεί με άλλη μικρότερου μήκους κύματος τότε στην εξίσωση 4.19 η μοναδική παράμετρος η οποία αλλάζει είναι το μήκος κύματος το οποίο γίνεται μικρότερο. Το μήκος κύματος που βρίσκεται στον αριθμητή θα δώσει μικρότερο αποτέλεσμα για την απόσταση του κροσσού συμβολής k τάξης από το κέντρο του πετάσματος.

Συμπέρασμα :

Οι αποστάσεις των κροσσών συμβολής από το κέντρο του πετάσματος Π ελαττώνονται αν αλληλαχτεί η ακτινοβολία με άλλη μικρότερου μήκους κύματος.

- Αν τώρα αυξηθεί η απόσταση μεταξύ των οπών, δηλαδή το a επειδή το a βρίσκεται στον παρονομαστή της εξίσωσης 4.19 το y_k θα ελαττωθεί. Αυτό σημαίνει ο ίδιος κροσσός συμβολής (k τάξης) θα έχει μικρότερη απόσταση από το κέντρο απ'ότι προηγουμένως.

Συμπέρασμα :

Οι αποστάσεις των κροσσών συμβολής από το κέντρο του πετάσματος Π ελαττώνονται αν αυξηθεί η απόσταση μεταξύ των σχισμών του διαφράγματος.

4.4.2 Ασκήσεις

1. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 1 σελίδα 285:

Στο πείραμα Young με τις δύο σχισμές λήφθηκαν οι πιο κάτω μετρήσεις.

- Απόσταση των δύο σχισμών $a = 0.5 \cdot 10^{-3}m$
- Απόσταση των δύο σχισμών από το πέτασμα $D = 2m$
- Απόσταση πέμπτου φωτεινού κροσσού από τον κεντρικό φωτεινό $x = 10 \cdot 10^{-3}m$

- (α') Να υπολογίσετε το μήκος κύματος της μονοχρωματικής ακτινοβολίας που χρησιμοποιήθηκε
- (β') Πώς επηρεάζεται η απόσταση δύο διαδοχικών φωτεινών κροσσών όταν διπλασιαστεί η απόσταση των σχισμών στο πέτασμα ;

Λύση :

Τα δεδομένα της άσκησης αναφέρονται σε φωτεινό κροσσό συμβολής. Η εξίσωση που ισχύει, όπως έχει ήδη αποδειχτεί είναι :

$$y_k = \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{a}$$

Επιλύοντας την εξίσωση αυτή και αντικαθιστώντας τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει το ζητούμενο. Σημαντική παρατήρηση είναι ότι

η απόσταση x που δίνεται πιο πάνω αναφέρεται στον 5 φωτεινό κροσσό συμβολής. Συνεπώς το $k = 5$.

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{a} \Rightarrow \lambda = \frac{y_k \cdot a}{D \cdot k} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{10 \cdot 10^{-3} \cdot 0.5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 5} \Rightarrow \\ \Rightarrow \lambda &= 5 \cdot 10^{-7} m \end{aligned}$$

Αν τώρα η απόσταση των σχισμών στο πέτασμα διπλασιαστεί τότε η απόσταση μεταξύ δύο φωτεινών κροσσών στο πέτασμα θα γίνει η μισή από ότι ήταν στην αρχή. Αυτό είναι άμεση απόρροια της αντικατάστασης του $a' = 2a$ μέσα στην εξίσωση $y_k = \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{a}$.

2. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου - Άσκηση 2 σελίδα 285:

Στο πείραμα του Young με κίτρινο φώς που έχει μήκος κύματος $\lambda = 5.89 \cdot 10^{-7} m$ η οθόνη τοποθετήθηκε $2m$ από τις δύο σχισμές. Η απόσταση μεταξύ του φωτεινού κροσσού μηδενικής τάξεως και του φωτεινού κροσσού δεκάτης τάξεως είναι $1.178cm$.

- (α') Πόση είναι η απόσταση μεταξύ των δύο σχισμών;
- (β') Αν στο παραπάνω πείραμα χρησιμοποιηθεί μπλέ φώς ($\lambda_{μπλε} = 4.5 \cdot 10^{-7} m$), ποιά θα είναι η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών φωτεινών κροσσών;
- (γ') Στο (β) να βρείτε την απόσταση του πέμπτου φωτεινού κροσσού από τον κεντρικό κροσσό.

Λύση:

Αρχικά πρέπει να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ των δύο σχισμών a . Στην άσκηση δίνεται

- η απόσταση $D = 2m$
- $y_{10} = 1.178cm$
- $k = 10$
- $\lambda = 5.89 \cdot 10^{-7} m$

Επιλύεται λοιπόν η εξίσωση $y_k = \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{a}$ ως προς a και αντικαθιστώνται τα δεδομένα :

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{y_k} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 5.89 \cdot 10^{-7}}{0.01178} \Rightarrow \\ \Rightarrow a &= 1 \cdot 10^{-3} m = 1 mm \end{aligned}$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογιστεί η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών φωτεινών κροσσών αν η ακτινοβολία γίνει μπλέ, όπου $\lambda_{μπλε} = 4.5 \cdot 10^{-7} m$. Οι δύο διαδοχικοί φωτεινοί κροσσοί θα έχουν αντίστοιχα αποστάσεις από το κέντρο y_k και y_{k+1} . Εκείνο που πρέπει να υπολογιστεί λοιπόν είναι η διαφορά τους $\Delta_{\text{διαδοχικων}} = y_{k+1} - y_k$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{διαδοχικων}} &= y_{k+1} - y_k = \\ &= \frac{D \cdot (k+1) \cdot \lambda}{a} - \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{a} = \\ &= \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{a} + \frac{D \cdot 1 \cdot \lambda}{a} - \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta_{\text{διαδοχικων}} &= \frac{D \cdot \lambda}{a} \end{aligned}$$

και αντικαθιστώντας τα δεδομένα στην τελευταία εξίσωση :

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{διαδοχικων}} &= \frac{D \cdot \lambda_{μπλε}}{a} = \frac{2 \cdot 4.5 \cdot 10^{-7}}{1 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta_{\text{διαδοχικων}} &= 9 \cdot 10^{-4} m = 0.9 mm \end{aligned}$$

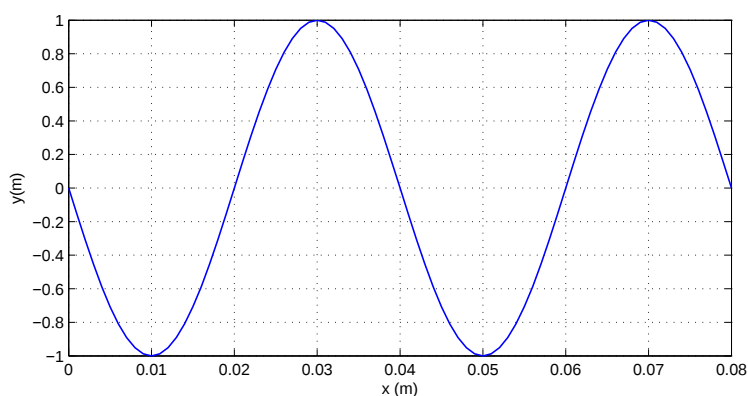
Τέλος η απόσταση του πέμπτου σκοτεινού κροσσού από τον κεντρικό φωτεινό κροσσό είναι :

$$\begin{aligned} y_5 &= \frac{D \cdot 5 \cdot \lambda_{μπλε}}{a} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 4.5 \cdot 10^{-7}}{1 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \\ y_5 &= 4.5 \cdot 10^{-3} m = 4.5 mm \end{aligned}$$

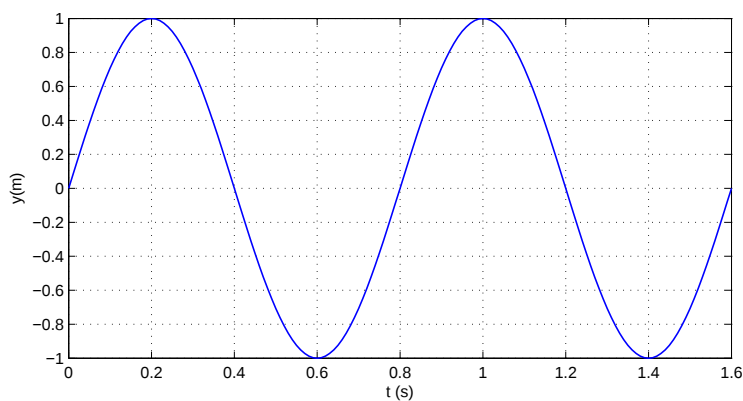
4.5 Ασκήσεις από Ενιαίες και Εισαγωγικές εξετάσεις

1. Εισαγωγικές 2005:

Το σχήμα 4.8 δείχνει ένα στιγμιότυπο τρέχοντος κύματος και το σχήμα 4.9 δείχνει την απομάκρυνση της πηγής από τη θέση ισορροπίας σαν συνάρτηση του χρόνου.



Σχήμα 4.8: Στιγμιότυπο κύματος.



Σχήμα 4.9: Απομάκρυνση της πηγής συναρτήσει του χρόνου.

Να χρησιμοποιηθούν οι πληροφορίες που υπάρχουν στις δύο γραφικές παραστάσεις για να υπολογιστούν:

(α') Το μήκος κύματος

(β') Η περίοδος του κύματος

(γ') Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος

Λύση:

Από το σχήμα 4.8 μπορεί να υπολογιστεί το μήκος κύματος που είναι η απόσταση που ταξιδεύει το κύμα σε χρόνο μιας περιόδου. Λαμβάνονται δύο σημεία τα οποία έχουν διαφορά φάσης 2π και η μεταξύ τους απόσταση είναι το μήκος κύματος.

$$\lambda = 0.04m$$

Στη συνέχεια από το σχήμα 4.9, το οποίο δίνει την απομάκρυνση της πηγής από τη θέση ισορροπίας, υπολογίζεται η περίοδος που είναι και ο χρόνος που χρειάζεται να περάσει έτσι ώστε να κάνει το σώμα μια πλήρη ταλάνωση. Το σχήμα δείχνει ότι η πηγή ξεκινά από τη θέση ισορροπίας και απομακρύνεται προς τα πάνω. Όταν λοιπόν το σώμα ξαναφτάσει στη θέση ισορροπίας και έχει ταχύτητα με φορά προς τα πάνω τότε το σώμα θα έχει κάνει μια πλήρη ταλάντωση. Η διαφορά χρόνου μεταξύ αυτών των θέσεων δίνει και την περίοδο ταλάντωσης που είναι:

$$T = 0.8s$$

Τέλος ζητείται ο υπολογισμός της ταχύτητας διάδοσης που μπορεί να υπολογιστεί από εφαρμογή της σχέσης $v = \frac{\lambda}{T}$:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{0.04}{0.8} \Rightarrow$$

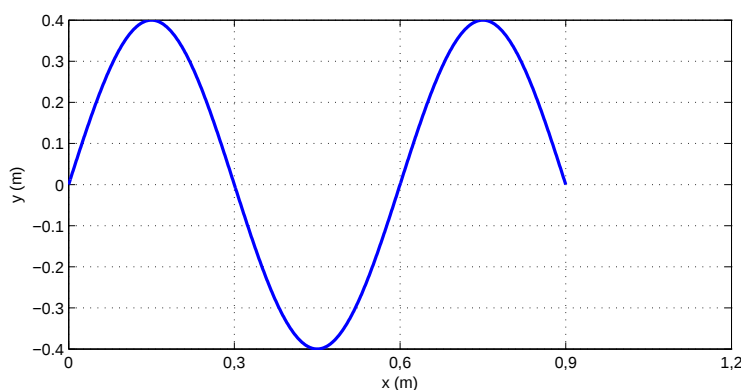
$$\Rightarrow v = 0.05 \frac{m}{s}$$

2. Εισαγωγικές 1993:

Το σχήμα 4.10 δίνει την απομάκρυνση σε συνάρτηση με την απόσταση ενός στιγμιότυπου τρέχοντος κύματος $y = f(x)$ σε μια χρονική στιγμή $t = t_0$. Η συχνότητα του κύματος είναι $50Hz$ και στο σημείο 0 είναι η πηγή που παράγει το κύμα. Ζητούνται:

(α') Η χρονική στιγμή t_0

- (β') Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος
 (γ') Η εξίσωση του κύματος
 (δ') Η απομάκρυνση και η ταχύτητα του σημείου Β που απέχει απόσταση από το Α, $d_{AB} = 0.3m$, τη χρονική στιγμή $t = t + 0.01s$. Το σημείο Α βρίσκεται στο $x_A = 0.9m$ και το σημείο Β στο $x_B = 1.2m$
 (ε') Να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες η γραφική παράσταση της φάσης του κύματος σε συνάρτηση με την απόσταση, $\phi = f(x)$, τη χρονική στιγμή $t = t_0$.



Σχήμα 4.10: Στιγμιότυπο κύματος.

Λύση:

Αρχικά πρέπει να υπολογιστεί η χρονική στιγμή για το στιγμιότυπο του σχήματος 4.10. Για να γίνει αυτό πρέπει να υπολογιστούν τα χαρακτηριστικά μεγέθη του κύματος. Το μήκος κύματος είναι η απόσταση που καλύπτει η διαταραχή στο χρόνο μίας περιόδου και από το σχήμα φαίνεται ότι είναι:

$$\lambda = 0.6m$$

Δεδομένου ότι η συχνότητα του κύματος είναι $f = 50Hz$, υπολογίζεται η ταχύτητα διάδοσης:

$$v = \lambda \cdot f = 0.6 \cdot 50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 30 \frac{m}{s}$$

Από το σχήμα 4.10 φαίνεται ότι το κύμα έχει διανύσει μια απόσταση $0.9m$ για το χρόνο t_0 που πρέπει να υπολογιστεί. Από τη σχέση $v = \frac{x}{t}$ υπολογίζεται η χρονική στιγμή t_0 :

$$v = \frac{x}{t} \Rightarrow t_0 = \frac{x}{v} = \frac{0.9}{30} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0 = 0.03s$$

Η γενική μορφή της εξίσωσης του τρέχοντος κύματος είναι:

$$y = y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(t \cdot f - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Το y_0 που είναι η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από τη θέση ισορροπίας δίνεται στη γραφική παράσταση και είναι $y_0 = 0.4m$. Αντικατάσταση επομένως των χαρακτηριστικών μεγεθών που έχουν ήδη υπολογιστεί στην πιο πάνω εξίσωση δίνει το ζητούμενο:

$$y = y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(t \cdot f - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0.4 \cdot \sin \left[2\pi \left(50t - \frac{x}{0.6} \right) \right]$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογιστεί η απομάκρυνση και η ταχύτητα του σημείου Β τη χρονική στιγμή $t = t + 0.01s$. Τα μεγέθη αυτά υπολογίζονται με τον ακόλουθο τρόπο:

- Απομάκρυνση y_B Στην εξίσωση του κύματος που έχει υπολογιστεί προηγουμένος γίνεται αντικατάσταση της θέσης του σημείου Β όπου στη θέση του x ενώ αντίστοιχα ο χρόνος θα αντικατασταθεί με το δεδομένο $t = t + 0.01s = 0.04s$

$$y_B = 0.4 \cdot \sin \left[2\pi \left(50t - \frac{x_B}{0.6} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B = 0.4 \cdot \sin \left[2\pi \left(50 \cdot 0.04 - \frac{1.2}{0.6} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_B = 0m$$

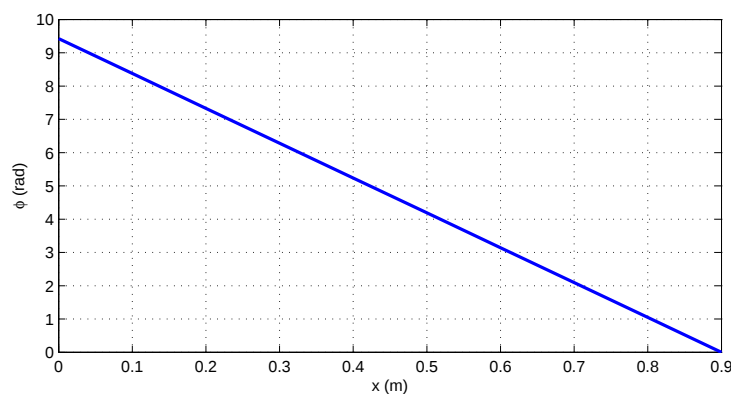
- Η ταχύτητα (ωκύτητα) του σημείου Β τη χρονική στιγμή $t = t + 0.01s = 0.04s$ υπολογίζεται μετά από παραγωγή της εξίσωσης του κύματος ως προς το χρόνο και αντικατάσταση και πάλι του χρόνου και της απόστασης του σημείου Β από την πηγή:

$$\begin{aligned}\Omega_B &= \frac{d}{dt} \left[0.4 \cdot \sin \left[2\pi \left(50t - \frac{x_B}{0.6} \right) \right] \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega_B &= 2\pi \cdot 50 \cdot 0.4 \cdot \cos \left[2\pi \left(50t - \frac{x_B}{0.6} \right) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega_B &= 2\pi \cdot 50 \cdot 0.4 \cdot \cos \left[2\pi \left(50 \cdot 0.04 - \frac{1.2}{0.6} \right) \right] \Rightarrow \\ \Rightarrow \Omega_B &= 40\pi \frac{m}{s}\end{aligned}$$

Τέλος πρέπει να χαραχθεί η γραφική παράσταση της φάσης $\phi = \phi(x)$ για τη χρονική στιγμή $t = t_0$. Η φάση του κύματος τη χρονική στιγμή t_0 είναι:

$$\begin{aligned}\phi &= 2\pi \left(t_0 \cdot f - \frac{x}{\lambda} \right) \\ \phi &= 2\pi \left(50 \cdot 0.03 - \frac{x}{0.6} \right)\end{aligned}$$

και η γραφική παράσταση της φάσης γνωρίζοντας ότι το κύμα έχει ταξιδέψει για χρόνο $t_0 = 0.03s$ απόσταση $x = 0.9m$:



Σχήμα 4.11: Φάση του κύματος για $t = t_0$.

3. Εισαγωγικές 1992:

Εγκάρσιο κύμα που διαδίδεται στο θετικό ημιάξονα x έχει την εξίσωση $y = 0.02\sin(20\pi t - 0.5\pi x)$. Οι αποστάσεις μετρούνται σε μέτρα και οι χρόνοι σε δευτερόλεπτα. Η πηγή του κύματος βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Ζητούνται:

- (α') Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος
- (β') Να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος μετά από χρόνο $t = 0.2s$ με την προϋπόθεση ότι η πηγή εξακολουθεί να εκπέμπει κύματα.
- (γ') Να σχεδιάσετε τη φάση του κύματος σε σχέση με την απόσταση x , τη χρονική στιγμή $t = 0.3s$, θεωρώντας ότι η πηγή εξακολουθεί να εκπέμπει κύματα.
- (δ') Η ταχύτητα και η επιτάχυνση ενός σημείου του μέσου το οποίο απέχει απόσταση $y = 0.015m$ από τη θέση ισορροπίας.
- (ε') Να γραφεί η εξίσωση άλλου εγκάρσιου κύματος που διαδίδεται στο ίδιο μέσο με αντίθετη φορά, έχει το μισό πλάτος και διπλάσια συχνότητα.

Λύση:

Αρχικά πρέπει να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης του κύματος. Για να γίνει αυτό γράφεται η γενική εξίσωση του κύματος και μετασχηματίζεται σε τέτοια μορφή έτσι ώστε να μπορούν να εξαχθούν από αυτή άμεσα τα αποτελέσματα.

$$y = y_0 \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = y_0 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{v \cdot T} \cdot x \right)$$

Η εξίσωση που έχει εξαχθεί μπορεί να χρησιμοποιηθεί έτσι ώστε να υπολογιστεί η ταχύτητα διάδοσης. Συγκρίνεται η εξίσωση του κύματος που έχει δοθεί με την γενική εξίσωση του κύματος και υπολογίζονται τα χαρακτηριστικά μεγέθη του κύματος:

$$y = 0.02\sin(20\pi t - 0.5\pi x)$$

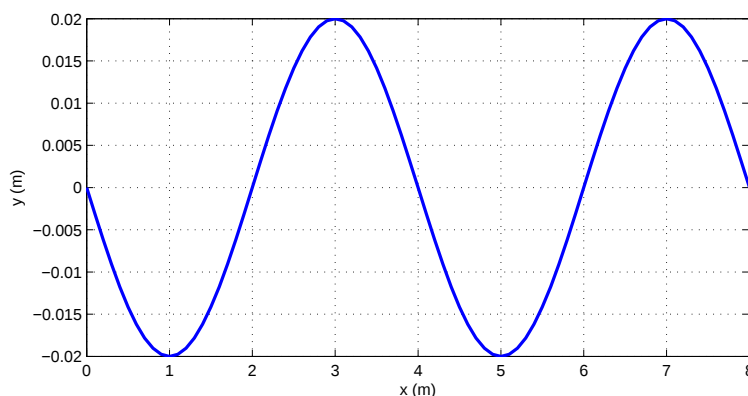
$$y = y_0 \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{2\pi}{v \cdot T} \cdot x \right)$$

- Πλάτος $y_0 = 0.02m$
- Περίοδος $\frac{2\pi}{T} = 20\pi \Rightarrow T = 0.1s$
- και τέλος η ταχύτητα διάδοσης που ήταν και το ζητούμενο

$$\frac{2\pi}{v \cdot T} = 0.5\pi \Rightarrow v = \frac{2\pi}{0.5\pi \cdot T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = 40 \frac{m}{s}$$

Για να σχεδιαστεί το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t = 0.2s$ πρέπει αρχικά να υπολογιστεί μέχρι πού έχει φτάσει το κύμα. Δεδομένου ότι η ταχύτητα είναι $v = 40 \frac{m}{s}$ η απόσταση που διανύει το κύμα είναι: $x = v \cdot t = 40 \cdot 0.2 = 8m$

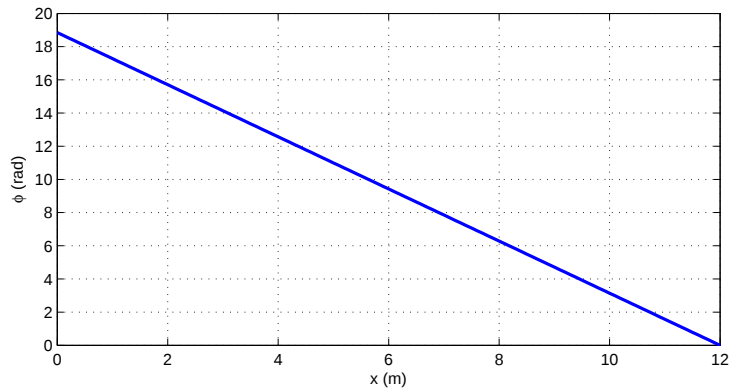


Σχήμα 4.12: Στιγμιότυπο κύματος για $t = 0.2s$.

Ακολουθώς σχεδιάζεται η φάση του κύματος για τη χρονική στιγμή $t = 0.3s$. Όπως και προηγουμένως υπολογίζεται πρώτα η απόσταση που έχει διανύσει το κύμα στο χρόνο που δίνεται και στη συνέχεια από την εξίσωση της φάσης $\phi = 20\pi t - 0.5\pi x$ για $t = 0.3$ σχεδιάζεται η γραφική παράσταση.

$$x = v \cdot t = 40 \cdot 0.3 = 12m$$

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση σημείου πού απέχει από τη θέση ισορροπίας απόσταση $y = 0.015m$ υπολογίζεται με παραγωγή της εξίσωσης που δίνει τη θέση και με δεύτερη παραγωγή της ίδιας εξίσωσης αντίστοιχα.

Σχήμα 4.13: Φάση του κύματος για $t = 0.3s$.

$$y = 0.02\sin(20\pi t - 0.5\pi x)$$

$$v = \frac{dy}{dt} = 20\pi \cdot 0.02\cos(20\pi t - 0.5\pi x)$$

$$a = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -(20\pi)^2 \cdot 0.02\sin(20\pi t - 0.5\pi x)$$

Όπως φαίνεται και από τις πιο πάνω εξισώσεις εκείνο που υπολείπεται έτσι ώστε να καθοριστεί πλήρως η ταχύτητα και η επιτάχυνση είναι να υπολογιστεί είτε η φάση που περιέχεται μέσα στις εξισώσεις είτε να γίνει κατεύθειαν ο υπολογισμός του ημιτόνου $\sin(20\pi t - 0.5\pi x)$ και του συνημιτόνου. Στην άσκηση αυτή επιλέγεται ο δεύτερος τρόπος.

Από τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} y &= 0.02\sin(20\pi t - 0.5\pi x) \\ 0.015 &= 0.02\sin(20\pi t - 0.5\pi x) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sin(20\pi t - 0.5\pi x) &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Από την τριγωνομετρική σχέση $\sin^2\phi + \cos^2\phi = 1$ υπολογίζεται το συνημίτονο ως ακολούθως:

$$\sin^2(20\pi t - 0.5\pi x) + \cos^2(20\pi t - 0.5\pi x) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2(20\pi t - 0.5\pi x) = 1 - \sin^2(20\pi t - 0.5\pi x)$$

$$\Rightarrow \cos^2(20\pi t - 0.5\pi x) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(20\pi t - 0.5\pi x) = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(20\pi t - 0.5\pi x) = 0.6614$$

Άρα $\cos(20\pi t - 0.5\pi x) = 0.6614$ και $\sin(20\pi t - 0.5\pi x) = 0.75$. Αντικατάσταση των τιμών αυτών στις εξισώσεις της ταχύτητας και της επιτάχυνσης δίνουν τα αποτελέσματα:

$$v = 20\pi \cdot 0.02 \cos(20\pi t - 0.5\pi x)$$

$$\Rightarrow v = 20\pi \cdot 0.02 \cdot 0.6614 = 0.83 \frac{m}{s}$$

$$a = -(20\pi)^2 \cdot 0.02 \sin(20\pi t - 0.5\pi x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = -(20\pi)^2 \cdot 0.02 \cdot 0.75 = 59.2 \frac{m}{s^2}$$

Τέλος ζητείται να γραφτεί η εξίσωση ενός άλλου εγκάρσιου κύματος με το μισό πλάτος ταλάντωσης απ'οτι το προηγούμενο κύμα και με τη διπλάσια συχνότητα, το οποίο μάλιστα διαδίδεται προς τα δεξιά. Δηλαδή πρέπει $y_0 = 0.01m, f = 20Hz$ ενώ παράλληλα πρέπει να τοποθετηθεί το πρόσημο $+$ στο δεύτερο όρο της φάσης έτσι ώστε η διαταραχή στα αριστερότερα σημεία να έπεται.

Παρατήρηση: Το μέσο παραμένει το ίδιο επομένως η ταχύτητα διάδοσης του κύματος θα παραμείνει η ίδια. Απο αυτό προκύπτει ότι το μήκος κύματος του ζητούμενου κύματος θα γίνει $v = \lambda \cdot f \Rightarrow \lambda = \frac{v}{f} = \frac{40}{20} = 2m$

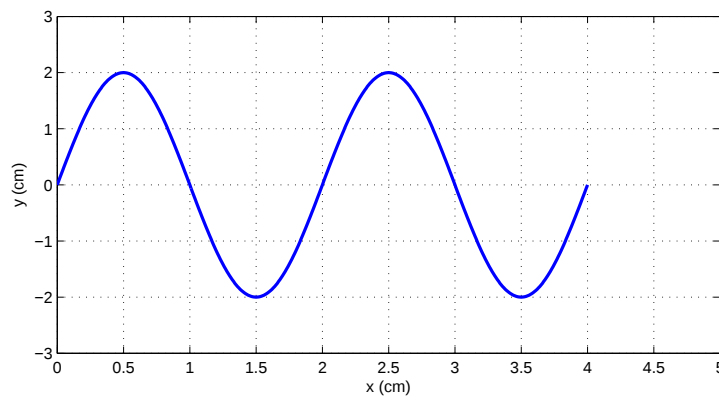
$$y = 0.01 \sin \left[2\pi \left(f \cdot t + \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

$$y = 0.01 \sin \left[2\pi \left(20 \cdot t + \frac{x}{2} \right) \right]$$

4. Εισαγωγικές 2003:

Το σχήμα 4.14 δείχνει το στιγμιότυπο ενός τρέχοντος κύματος τη χρονική στιγμή t_0 , που διαδίδεται προς τα δεξιά με συχνότητα $f = 0.25\text{Hz}$. Ζητούνται:

- (α') Η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Α που βρίσκεται σε απόσταση $x_A = 0.5\text{cm}$ από την πηγή και $x_B = 2\text{cm}$
 (β') Η απομάκρυνση του σημείου Α τη χρονική στιγμή $t = t_0 + 1\text{s}$



Σχήμα 4.14: Στιγμιότυπο κύματος για $t = t_0$.

Λύση:

Αρχικά πρέπει να υπολογιστεί η διαφορά φάσης μεταξύ των σημείων Α και Β. Για να γίνει αυτό πρέπει να γραφτεί η γενική μορφή της φάσης $\phi = 2\pi \cdot (\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \phi_0$. Στη συνέχεια υπολογίζεται η φάση του σημείου Α και του σημείου Β και με αφαίρεση της πρώτης από τη δεύτερη προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα. Πρωτού όμως ακολουθηθεί η διαδικασία αυτή από το δοσμένο στιγμιότυπο πρέπει να υπολογιστεί η χρονική στιγμή t_0 .

- Μήκος κύματος $\lambda = 2\text{cm}$, από το σχήμα 4.14
- Ταχύτητα διάδοσης $v = \lambda \cdot f = 2 \cdot 0.25 = 0.5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$
- Η χρονική στιγμή t_0 μπορεί να υπολογιστεί από το γεγονός ότι το κύμα έχει διανύσει 4cm και η ταχύτητα είναι $v = 0.5 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$.

$$v = \frac{x}{t_0} \Rightarrow t_0 = \frac{x}{v} = \frac{4}{0.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_0 = 8\text{s}$$

Η διαφορά φάσης είναι:

$$\begin{aligned}
 \Delta\phi &= \phi_A - \phi_B = \\
 &= 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_A}{\lambda}\right) + \phi_0 - 2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_B}{\lambda}\right) - \phi_0 = \\
 &= 2\pi \cdot \left(\frac{8}{4} - \frac{0.5}{2}\right) - 2\pi \cdot \left(\frac{8}{4} - \frac{2}{2}\right) = \\
 &= 2\pi \cdot 1.75 - 2\pi \cdot 1 \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta\phi &= 1.5\pi
 \end{aligned}$$

Εν συνεχεία ζητείται η απομάκρυνση του σημείου Α τη χρονική στιγμή $t = t_0 + 1s$. Για τον υπολογισμό της απομάκρυνσης αρκεί η παρατήρηση ότι το $1s$ είναι το $\frac{T}{4}$ αφού $T = 4s$. Επιπλέον το σημείο Α έχει μέγιστη απομάκρυνση τη χρονική στιγμή $t = t_0 = 8s$. Άρα λοιπόν μετά από $1s$ το σημείο Α θα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και συνεπώς η απομάκρυνση του θα είναι ίση με 0.

Διαφορετικά η απομάκρυνση αυτή μπορεί να υπολογιστεί αν καθοριστεί η εξίσωση του τρέχοντος κύματος που δίνεται και σάυτην αντικατασταθούν ο χρόνος $t = 9s$ και η απόσταση του σημείου Α, $x_A = 0.5cm$.

$$\begin{aligned}
 y &= 2\sin \left[2\pi \left(f \cdot t + \frac{x}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow y &= 2\sin \left[2\pi \left(0.25 \cdot 9 + \frac{0.5}{2} \right) \right] \Rightarrow \\
 \Rightarrow y &= 0
 \end{aligned}$$

5. Εισαγωγικές 1991:

Στο πείραμα Young παρατηρούνται κροσσοί με χρήση φωτός μήκους κύματος $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}m$. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών φωτεινών κροσσών είναι $S_1 = 1mm$. Όταν η απόσταση μεταξύ δύο των δύο σχισμών και του πετάσματος πάνω στο οποίο παρατηρούνται οι κροσσοί είναι $\Delta D = 2m$, η απόσταση μεταξύ των κροσσών βρέθηκε να είναι $S_2 = 3mm$. Να βρεθεί η απόσταση μεταξύ των δύο σχισμών.

Λύση:

Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών φωτεινών κροσσών μπορεί να υπολογιστεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\text{διαδοχικών}} &= y_{k+1} - y_k = \\
 &= \frac{D \cdot (k+1) \cdot \lambda}{a} - \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{a} = \\
 &= \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{a} + \frac{D \cdot 1 \cdot \lambda}{a} - \frac{D \cdot k \cdot \lambda}{a} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \Delta_{\text{διαδοχικών}} &= \frac{D \cdot \lambda}{a}
 \end{aligned}$$

Με βάση τώρα τα δεδομένα που δίνονται στην άσκηση μπορεί να υπολογιστεί το ζητούμενο αν καταστρωθούν δύο εξισώσεις. Η πρώτη εξίσωση πρέπει να αναφέρεται στην περίπτωση όπου το πέτασμα στο οποίο παρατηρούνται οι οπές θα απέχει απόσταση D από τις δύο σχισμές και η δεύτερη εξίσωση θα αναφέρεται περίπτωση όπου το πέτασμα απέχει απόσταση $D' = D + \Delta D$ από τις σχισμές.

$$\Delta_{\text{διαδοχικών}} = \frac{D \cdot \lambda}{a} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta'_{\text{διαδοχικών}} &= \frac{D' \cdot \lambda}{a} \Rightarrow \\
 \Delta'_{\text{διαδοχικών}} &= \frac{(D + \Delta D) \cdot \lambda}{a} \Rightarrow \quad (4.21)
 \end{aligned}$$

Επειδή η άσκηση έχει σαν ζητούμενο τον υπολογισμό του a η εξίσωση 4.20 επιλύεται ως προς D και αντικαθίσταται στην εξίσωση 4.21.

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{a \cdot \Delta_{\text{διαδοχικών}}}{\lambda} \\
 \Delta'_{\text{διαδοχικών}} &= \frac{\left(\frac{a \cdot \Delta_{\text{διαδοχικών}}}{\lambda} + \Delta D\right) \cdot \lambda}{a} \quad (4.22)
 \end{aligned}$$

Η εξίσωση 4.22 είναι μια εξίσωση με μόνο άγνωστο το a που είναι και το ζητούμενο και συνεπώς μπορεί να επιλυθεί και να δώσει το αποτέλεσμα. Τα δεδομένα της άσκηση είναι τα ακόλουθα:

- $\lambda = 6 \cdot 10^{-7} m$
- $S_1 = \Delta_{\delta\alpha\delta\sigma\chi\iota\kappa\omega\nu} = 1mm$
- $S_2 = \Delta'_{\delta\alpha\delta\sigma\chi\iota\kappa\omega\nu} = 3mm$
- $\Delta D = 2m$

$$\Delta'_{\delta\alpha\delta\sigma\chi\iota\kappa\omega\nu} = \frac{\left(\frac{a \cdot \Delta_{\delta\alpha\delta\sigma\chi\iota\kappa\omega\nu}}{\lambda} + \Delta D\right) \cdot \lambda}{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot \Delta'_{\delta\alpha\delta\sigma\chi\iota\kappa\omega\nu} = a \cdot \Delta_{\delta\alpha\delta\sigma\chi\iota\kappa\omega\nu} + \Delta D \cdot \lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot (\Delta'_{\delta\alpha\delta\sigma\chi\iota\kappa\omega\nu} - \Delta_{\delta\alpha\delta\sigma\chi\iota\kappa\omega\nu}) = \Delta D \cdot \lambda \Rightarrow$$

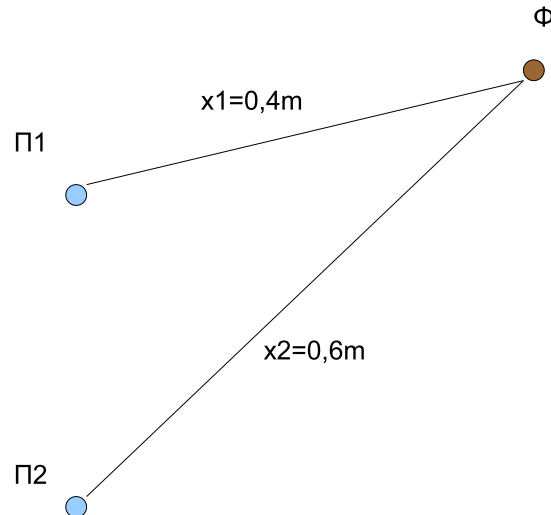
$$\Rightarrow a = \frac{\Delta D \cdot \lambda}{\Delta'_{\delta\alpha\delta\sigma\chi\iota\kappa\omega\nu} - \Delta_{\delta\alpha\delta\sigma\chi\iota\kappa\omega\nu}} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10^{-7}}{0.003 - 0.001} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 6 \cdot 10^{-4} m$$

6. Εισαγωγικές 2005:

Στην επιφάνεια του υγρού διαδίδονται εγκάρσια κύματα με συχνότητα $f = 2Hz$, πλάτος $y_0 = 0.01m$ και ταχύτητα διάδοσης $v = 0.1 \frac{m}{s}$. Τα κύματα παράγονται με τη βοήθεια δύο κατακόρυφων ακίδων και ενός δονητή. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ οι ακίδες τίθενται σε ταλάντωση και εκπέμπουν κύματα σε φάση. Μικρός φελλός Φ απέχει απόσταση $x_1 = 0.4m$ από την πηγή Π_1 και $x_2 = 0.6m$ από την πηγή $\Pi_2 = 2$. Ζητούνται:

- Να γράψετε τη μαθηματική εξίσωση του κύματος που διαδίδεται από την πηγή Π_1 κατά μήκος της ευθείας $\Pi_1\Phi$ δεδομένου ότι οι ακίδες τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ βρίσκονται στη θέση ισορροπίας και κινούνται προς τη θετική απομάκρυνση.
- Να εξετάσετε και να δικαιολογήσετε εάν στη θέση του φελλού παρατηρείται ενισχυτική ή καταστροφική συμβολή.
- Να γίνει σε βαθμολογημένους άξονες η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του φελλού, σε σχέση, με το χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 8s$.



Σχήμα 4.15: Διάταξη που δημιουργεί τα κύματα στην επιφάνεια του νερού.

Λύση:

Η εξίσωση του κύματος που δημιουργείται από την πηγή 1 μπορεί να υπολογιστεί αν καθοριστούν τα χαρακτηριστικά του κύματος, που είναι τα ακόλουθα:

- Πλάτος ταλάντωσης $y_0 = 0.01\text{m}$
- Συχνότητα ταλάντωσης $f = 2\text{Hz}$
- Ταχύτητα διάδοσης $v = 0.1 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
- Μήκος κύματος $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{0.1}{2} = 0.05\text{m}$

Αντικαθιστώντας τα πιο πάνω χαρακτηριστικά μεγέθη στην εξίσωση του κύματος:

$$y = y_0 \sin \left[2\pi \left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

καθορίζεται η ζητούμενη εξίσωση:

$$y = y_0 \sin \left[2\pi \left(f \cdot t - \frac{x}{\lambda} \right) \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 0.01 \sin \left[2\pi \left(2t - \frac{x}{0.05} \right) \right]$$

Τα δύο κύματα που δημιουργούνται από τις πηγές, είναι σύγχρονα και συμβάλλουν στο σημείο όπου βρίσκεται ο φελλός. Ζητείται να καθοριστεί το είδος της συμβολής στη θέση όπου βρίσκεται ο φελλός. Όπως έχει μελετηθεί και στην άσκηση 3 της σελίδας 161 η εξίσωση που δείχνει πώς συμβάλλουν δύο σύγχρονα κύματα στο χώρο είναι:

$$\Psi = 2y_0 \cdot \cos \left[2\pi \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \right) \right] \cdot \sin \left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right) \right]$$

Αν λοιπόν ο πρώτος όρος του γινομένου (συνημίτονο) δίνει -1 ή 1 τότε η συμβολή είναι ενισχυτική ενώ αν δίνει 0 τότε η συμβολή είναι καταστροφική. Αντικαθίστανται τα δεδομένα στη γωνία του συνημιτόνου και γίνονται οι υπολογισμοί:

$$\begin{aligned} \cos \left[2\pi \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \right) \right] &= \cos \left[2\pi \cdot \left(\frac{0.6 - 0.4}{2 \cdot 0.05} \right) \right] \\ &= \cos \left[2\pi \cdot \left(\frac{0.2}{0.1} \right) \right] \\ &= \cos(4\pi) = 1 \end{aligned}$$

Συνεπώς από το αποτέλεσμα που έχει εξαχθεί και από τις παρατηρήσεις που έχουν ήδη γίνει, τα κύματα στη θέση του φελλού συμβάλλουν ενισχυτικά.

Τέλος, πρέπει να σχεδιαστεί η απομάκρυνση του φελλού από τη θέση ισορροπίας για το διάστημα $0 \leq t \leq 8s$. Πρωτού όμως γίνει αυτό κρίνεται σκόπιμο να γίνουν κάποιες παρατηρήσεις.

Παρατηρήσεις:

- Τα κύματα έχουν διαφορετικές αποστάσεις από το σημείο που βρίσκεται ο φελλός, συνεπώς, δε θα φτάσουν την ίδια χρονική στιγμή στο εν λόγω σημείο. Πρώτα θα υπολογιστεί λοιπόν ο χρόνος που χρειάζεται το κάθε κύμα έτσι ώστε να φτάσει στο φελλό.

- Μετά από ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα τα δύο κύματα φτάνουν το φελλό. Απο εκείνη τη χρονική στιγμή και μετά ο φελλός θα εκτελεί ταλάντωση με εξίσωση αυτή της συμβολής των δύο κυμάτων.

Ο χρόνος που χρειάζεται το κύμα από την πηγή 1 για να φτάσει το φελλό είναι:

$$v = \frac{x_1}{t_1} \Rightarrow t_1 = \frac{x_1}{v} = \frac{0.4}{0.1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_1 = 4s$$

Αντίστοιχα, ο χρόνος που χρειάζεται το κύμα από την πηγή 2 για να φτάσει το φελλό είναι:

$$v = \frac{x_2}{t_2} \Rightarrow t_2 = \frac{x_2}{v} = \frac{0.6}{0.1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 6s$$

Η απομάκρυνση του φελλού από τη θέση ισορροπίας χωρίζεται λοιπόν σε τρία χρονικά διαστήματα:

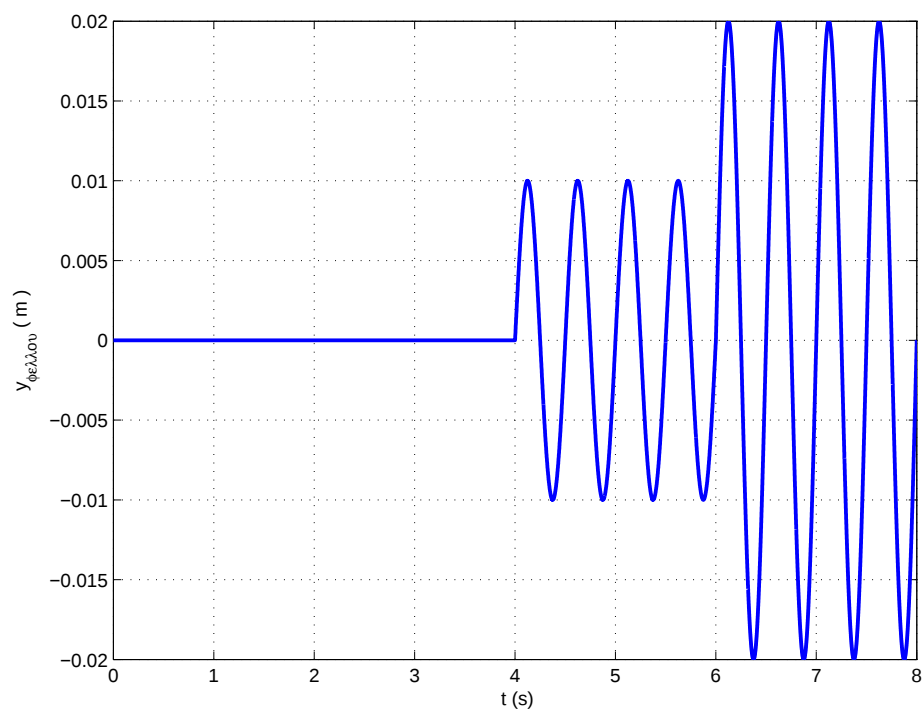
- Στο διάστημα $0 \leq t \leq 4s$ όπου κανένα από τα δύο κύματα δεν έχει φτάσει το φελλό και συνεπώς ο φελλός παραμένει ακίνητος
- Στο διάστημα $4 \leq t \leq 6s$ όπου μόνο το κύμα της πηγής 1 έχει φτάσει το φελλό και συνεπώς ο φελλός ταλαντώνεται με βάση την εξίσωση του κύματος της πρώτης πηγής

$$y = 0.01 \sin \left[2\pi \left(2t - \frac{x}{0.05} \right) \right]$$

- Στο διάστημα $6 \leq t \leq 8s$ όπου και τα δύο κύματα φτάνουν το φελλό και συνεπώς ο φελλός ταλαντώνεται με βάση την εξίσωση συμβολής των δύο κυμάτων

$$\Psi = 2y_0 \cdot \cos \left[2\pi \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{2\lambda} \right) \right] \cdot \sin \left[2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1 + x_2}{2\lambda} \right) \right]$$

Η γραφική παράσταση της απομάκρυνσης φαίνεται στο σχήμα 4.16.



Σχήμα 4.16: Γραφική παράσταση απομάκρυνσης φελλού συναρτήσει του χρόνου t .

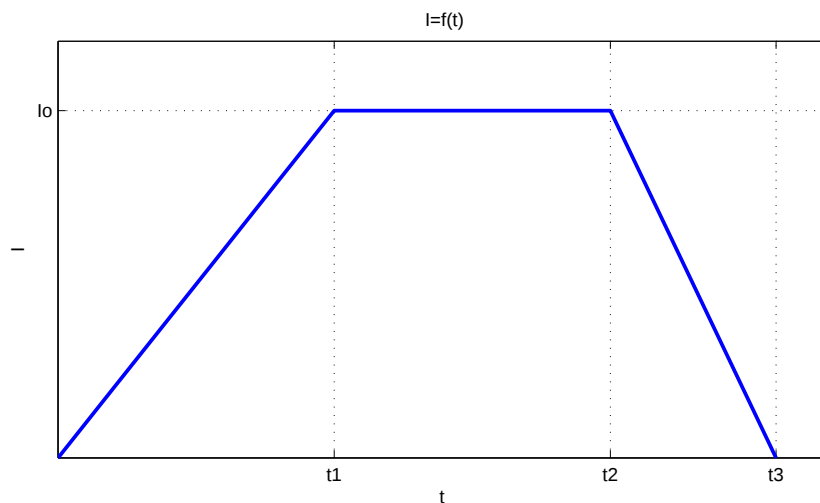
Κεφάλαιο 5

Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή

5.1 Ασκήσεις

1. **Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου Τόμος II - Άσκηση 1 σελίδα 24:**

Η ένταση του ρεύματος που διαρέει ένα πηνίο αυτεπαγωγής Λ , σε συνάρτηση με το χρόνο, δίνεται από το διάγραμμα του σχήματος 5.1. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα που δίνει την τάση αυτεπαγωγής που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου.



Σχήμα 5.1: Γραφική έντασης ρεύματος συναρτήσει του χρόνου t .

Λύση :

Για να κατασκευαστεί η γραφική παράσταση της τάσης αυτεπαγωγής που αναπτύσσεται στα άκρα του πηνίου πρέπει πρώτα να υπολογιστούν

οι τάσεις αυτεπαγωγής για κάθε χρονική στιγμή. Η τάση αυτεπαγωγής υπολογίζεται με βάση τη σχέση 5.1

$$E_{av\tau} = -L \frac{dI}{dt} \quad (5.1)$$

Από τη σχέση 5.1 είναι φανερό ότι για να δημιουργείται τάση αυτεπαγωγής στα άκρα ενός πηνίου πρέπει να μεταβάλλεται η ένταση του ρεύματος που το διαρρέει. Επιπλέον αν η μεταβολή αυτή είναι σταθερή τότε και η τάση αυτεπαγωγής του πηνίου θα είναι σταθερή. Από τα προηγούμενα συνάγεται το συμπέρασμα ότι η γραφική παράσταση του σχήματος 5.1 μπορεί να χωριστεί σε τρεις περιοχές και να υπολογιστεί

(α) Περιοχή I: Το ρεύμα μεταβάλλεται από $0 \rightarrow I_0$ μέσα σε χρόνο $0 \rightarrow t_1$. Για την περιοχή αυτή λοιπόν παρατηρείται τάση αυτεπαγωγής που είναι:

$$\begin{aligned} E_{av\tau} &= -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{av\tau} &= -L \frac{(I_0 - 0)}{(t_1 - 0)} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{av\tau} &= -L \frac{I_0}{t_1} \end{aligned}$$

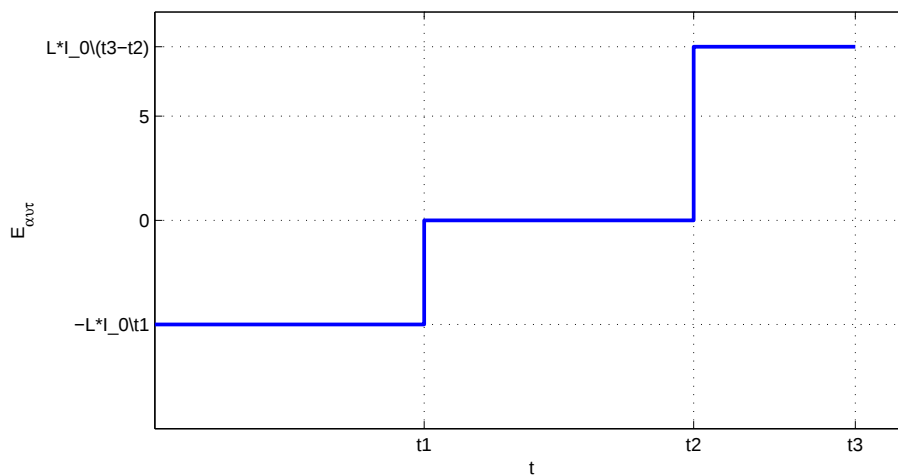
(β) Περιοχή II: Το ρεύμα παραμένει σταθερό και ίσο με $I = I_0$ μέσα σε χρόνο $t_1 \rightarrow t_2$. Για την περιοχή αυτή δεν προκύπτει τάση αυτεπαγωγής όπως φαίνεται και πιο κάτω:

$$\begin{aligned} E_{av\tau} &= -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{av\tau} &= -L \frac{(I_0 - I_0)}{(t_2 - t_1)} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{av\tau} &= 0 \end{aligned}$$

(γ) Περιοχή III: Το ρεύμα μεταβάλλεται από $I_0 \rightarrow 0$ μέσα σε χρόνο $t_2 \rightarrow t_3$. Για την περιοχή αυτή λοιπόν παρατηρείται τάση αυτεπαγωγής που είναι:

$$\begin{aligned}
 E_{\alpha\upsilon\tau} &= -L \frac{dI}{dt} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t} \Rightarrow \\
 \Rightarrow E_{\alpha\upsilon\tau} &= -L \frac{(0 - I_0)}{(t_3 - t_2)} \Rightarrow \\
 \Rightarrow E_{\alpha\upsilon\tau} &= -L \frac{I_0}{t_3 - t_2}
 \end{aligned}$$

Η γραφική παράσταση που προκύπτει δίνεται στο σχήμα 5.2.



Σχήμα 5.2: Γραφική τάσης αυτεπαγωγής συναρτήσει του χρόνου t .

2. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου Τόμος II - Άσκηση 6 σελίδα 26:

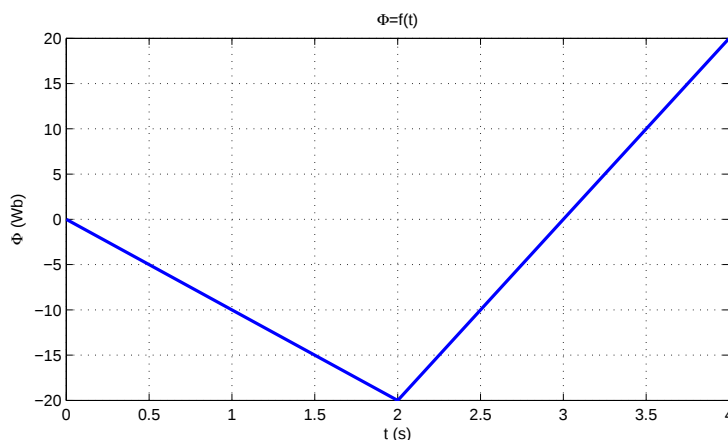
Το διάγραμμα του σχήματος 5.3 παριστάνει τη μεταβολή της μαγνητικής ροής που περνά από ένα συρμάτινο πλαίσιο σε συνάρτηση με το χρόνο. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα που παριστάνει την επαγόμενη τάση η οποία αναπτύσσεται στα άκρα του πλαισίου.

Λύση:

Για να λυθεί η άσκηση πρέπει να χρησιμοποιηθεί ο νόμος της επαγωγής του Faraday που λέει:

“Η επαγόμενη Ηλεκτρεγερτική Δύναμη σε ένα αγωγό είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής που διαπερνά τον αγωγό”

Η μαθηματική έκφραση του νόμου αυτού είναι:



Σχήμα 5.3: Γραφική μαγνητικής ροής πλαισίου συναρτήσεως του χρόνου t .

$$E = -\eta \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \quad (5.2)$$

Στην άσκηση παρουσιάζεται μόνο ένα συρμάτινο πλαίσιο και συνεπώς ο συντελεστής η που εκφράζει πόσα ίδια πλαίσια βρίσκονται διατεταγμένα σε σειρά είναι $\eta = 1$. Για τον υπολογισμό της ηλεκτρεγερτικής δύναμης (ΗΕΔ), η γραφική παράσταση του σχήματος 5.3 χωρίζεται σε δύο περιοχές εφόσον η μεταβολή στη μονάδα του χρόνου είναι σταθερή (δύο ευθείες) και για την κάθε περιοχή υπολογίζεται η ΗΕΔ από την κλίση. Το γεγονός ότι η κλίση είναι η ΗΕΔ προκύπτει άμεσα από την εξίσωση 5.2.

(α') Περιοχή Ι: Η μαγνητική ροή μεταβάλλεται από $\Phi = 0 \rightarrow \Phi = -20\text{Wb}$ μέσα σε χρόνο $t = 0 \rightarrow t = 2\text{s}$. Για την περιοχή αυτή λοιπόν παρατηρείται ΗΕΔ που είναι:

$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{-20 - 0}{2 - 0} \Rightarrow$$

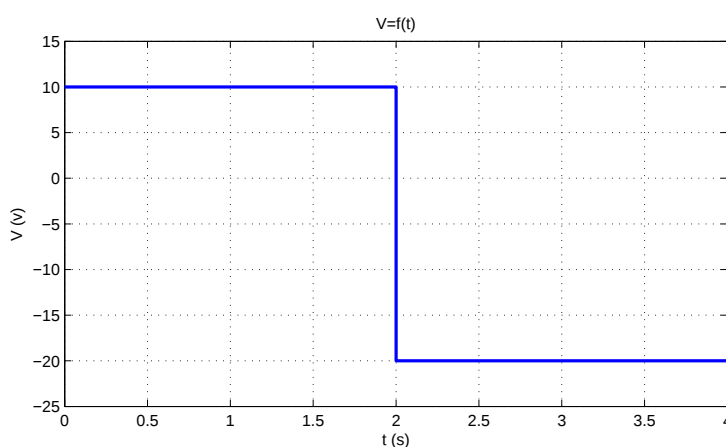
$$E = -\frac{-20}{2} = 10 \text{ V}$$

(β') Περιοχή ΙΙ: Η μαγνητική ροή μεταβάλλεται από $\Phi = -20 \rightarrow \Phi = 20\text{Wb}$ μέσα σε χρόνο $t = 2 \rightarrow t = 4\text{s}$. Για την περιοχή αυτή λοιπόν παρατηρείται ΗΕΔ που είναι:

$$E = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{20 - (-20)}{4 - 2} \Rightarrow$$

$$E = -\frac{40}{2} = -20 \text{ V}$$

Η γραφική παράσταση της ΗΕΔ συναρτήσει του χρόνου t δίνεται στο σχήμα 5.4.



Σχήμα 5.4: Γραφική ΗΕΔ συναρτήσει του χρόνου t .

3. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου Τόμος II - Άσκηση 1 σελίδα 27:

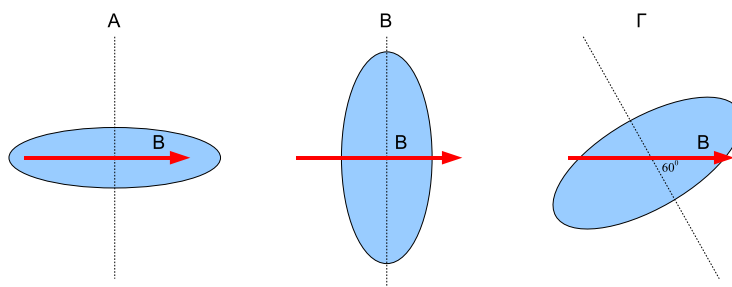
Το σχήμα 5.5 δείχνει τρία πηνία τα οποία έχουν τον ίδιο αριθμό σπειρών. Το εμβαδόν της επιφάνειας τους είναι S_A , $S_B = 2 \cdot S_A$ και $S_\Gamma = 3 \cdot S_A$ αντίστοιχα. Σε ποίο πηνίο περνά :

- (α') η μικρότερη μαγνητική ροή ;
- (β') η μεγαλύτερη μαγνητική ροή ;

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση :

Η μαγνητική ροή μέσα από μία επιφάνεια είναι ο αριθμός των μαγνητικών γραμμών που περνά διαμέσου μιας επιφάνειας. Συμβολίζεται με το γράμμα Φ και έχει μονάδες μέτρησης τα *Weber* $\rightarrow Wb$. Για να υπολογιστεί η μαγνητική ροή μέσα από μία επιφάνεια χρησιμοποιείται η σχέση :



Σχήμα 5.5: Πλαίσια μέσα σε μαγνητικό πεδίο.

$$\Phi = B \cdot S \Rightarrow \Phi = BS \cos \theta \quad (5.3)$$

- B Είναι η μαγνητική επαγωγή του πεδίου
- S Είναι το εμβαδόν της επιφάνειας του πλαισίου
- θ Είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της επιφάνειας¹ S με την μαγνητική επαγωγή B .

Το σχήμα 5.6 δείχνει τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της επιφάνειας σε κάθε περίπτωση με το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής.

Με βάση τώρα την εξίσωση 5.3 και τις γωνίες που φαίνονται στο σχήμα 5.6 υπολογίζεται η μαγνητική ροή για την κάθε περίπτωση:

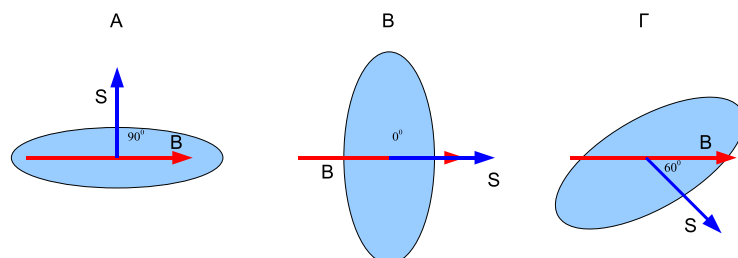
(α') Περίπτωση I:

$$\begin{aligned} \Phi_A &= B \cdot S_A = BS_A \cos \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi_A &= BS_A \cos 90^\circ = 0 \quad Wb \end{aligned}$$

(β') Περίπτωση II:

$$\begin{aligned} \Phi_B &= B \cdot S_B = BS_B \cos \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi_B &= BS_B \cos 0^\circ = 2BS_A \quad Wb \end{aligned}$$

¹Το διάνυσμα της επιφάνειας είναι ένα διάνυσμα το οποίο έχει μέτρο ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας, διεύθυνση που είναι κάθετη στο επίπεδο της επιφάνειας και φορά που ορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Σχήμα 5.6: Γωνία διανύσματος επιφάνειας με το διάνυσμα της επαγωγής.

(γ') Περίπτωση III :

$$\begin{aligned}\Phi_{\Gamma} &= B \cdot S_{\Gamma} = BS_{\Gamma} \cos \theta \Rightarrow \\ \Rightarrow \Phi_{\Gamma} &= 3BS_A \cos 60^\circ = 1.5BS_A \quad \text{Wb}\end{aligned}$$

Συνεπώς διαμέσου του πρώτου πλαισίου περνά η μικρότερη μαγνητική ροή ενώ διαμέσου του δεύτερου η μεγαλύτερη.

4. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου Τόμος II - Άσκηση 2 σελίδα 27:

Μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής 1 T , βρίσκεται πηνίο το οποίο αποτελείται από 15 σπείρες, κυκλικής διατομής, με διάμετρο 20 cm . Το επίπεδο των σπειρών του πηνίου είναι κάθετο στη μαγνητική επαγωγή του πεδίου. Να υπολογίσετε την ΗΕΔ επαγωγής που παράγεται στο πηνίο, αν ελαττωθεί η μαγνητική επαγωγή του πεδίου στο μισό της αρχικής της, σε χρόνο 0.1 s .

Λύση :

Το πηνίο που δίνεται είναι κυκλικό και έχει διάμετρο $d = 20 \text{ cm}$. Από το δεδομένο αυτό υπολογίζεται το εμβαδόν που παρουσιάζει στη διέλευση των δυναμικών γραμμών :

$$\begin{aligned}S &= \pi \cdot r^2 = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \pi \cdot \left(\frac{0.2}{2}\right)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow S &= 0.0314 \text{ m}^2\end{aligned}$$

Επιπλέον το πηνίο είναι κάθετο μέσα στις μαγνητικές γραμμές του πεδίου. Αυτό υποδηλώνει ότι το διάνυσμα της επιφάνειας σχηματίζει γωνία

$\theta = 0^0$ με τις δυναμικές γραμμές του πεδίου. Με δεδομένο ότι η τελική μαγνητική επαγωγή γίνεται η μισή της αρχικής, δηλαδή $B_{τελ} = \frac{B_{αρχ}}{2}$ και χρησιμοποιώντας το νόμο της επαγωγής του Faraday υπολογίζεται η ΗΕΔ που παράγεται στο πηνίο με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{aligned} E &= -\eta \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= -\eta \frac{B_{τελ} S \cos\theta - B_{αρχ} S \cos\theta}{\Delta t} = -15 \frac{0.5 \cdot 0.0314 \cdot 1 - 1 \cdot 0.0314 \cdot 1}{0.1} \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= 2.353 \text{ V} \end{aligned}$$

5. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου Τόμος II - Άσκηση 3 σελίδα 27:

Ένα αεροπλάνο κινείται οριζόντια, από το νότο προς το βορρά, με ταχύτητα $v = 360 \text{ km/h}$. Να υπολογίσετε την ΗΕΔ επαγωγής στα φτερά όταν αυτά έχουν μήκος $l = 30 \text{ m}$. Δίνεται η κατακόρυφη συνιστώσα του γήινου μαγνητικού πεδίου $B = 0.3 \times 10^{-4} \text{ T}$.

Λύση:

Καθώς το αεροπλάνο κινείται, σαρώνει ένα συγκεκριμένο εμβαδόν επιφάνειας. Λόγο του ότι υπάρχει κατακόρυφη συνιστώσα μαγνητικής επαγωγής από το γήινο μαγνητικό πεδίο στα άκρα των φτερών του αεροπλάνου θα εμφανιστεί ΗΕΔ. Για τον υπολογισμό της ΗΕΔ πρέπει αρχικά να υπολογιστεί το εμβαδόν που σαρώνει το αεροπλάνο κατά τη διάρκεια της κίνησης του και στη συνέχεια να εφαρμοστεί ο νόμος του Faraday.

Η ταχύτητα του αεροπλάνου δεν δίνεται σε μονάδες μέτρησης του συστήματος $S.I$ και συνεπώς θα πρέπει να γίνει μετατροπή των μονάδων αυτών:

$$v = 360 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 360 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 100 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Το μαγνητικό πεδίο δεν μεταβάλλεται. Εκείνο που μεταβάλλεται είναι το εμβαδόν της επιφάνειας που σαρώνει το αεροπλάνο. Βάση αυτής της παρατήρησης και του νόμου του Faraday υπολογίζεται η ΗΕΔ με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{aligned}
 E &= -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta}{\Delta t}(BS) \Rightarrow \\
 \Rightarrow E &= -B \cdot \frac{\Delta}{\Delta t}(l \cdot x) = -B \cdot l \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \\
 \Rightarrow E &= -B \cdot l \cdot v = -0.3 \cdot 10^{-4} \cdot 30 \cdot 100 \Rightarrow \\
 \Rightarrow E &= -0.09 \text{ V}
 \end{aligned}$$

6. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου Τόμος II - Άσκηση 4 σελίδα 27:

Ένα τετράγωνο πηνίο μιας μόνο σπείρας έχει πλευρά $0.2m$ και τοποθετείται μέσα σε σταθερό μαγνητικό πεδίο με το επίπεδο του κάθετα μέσα σ' αυτό. Όταν η επιφάνεια του πηνίου ελαττώνεται με ρυθμό $0.1 \frac{m^2}{s}$, επάγεται σ' αυτό ΗΕΔ ίση με $18mV$. Ποίο είναι το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου;

Λύση:

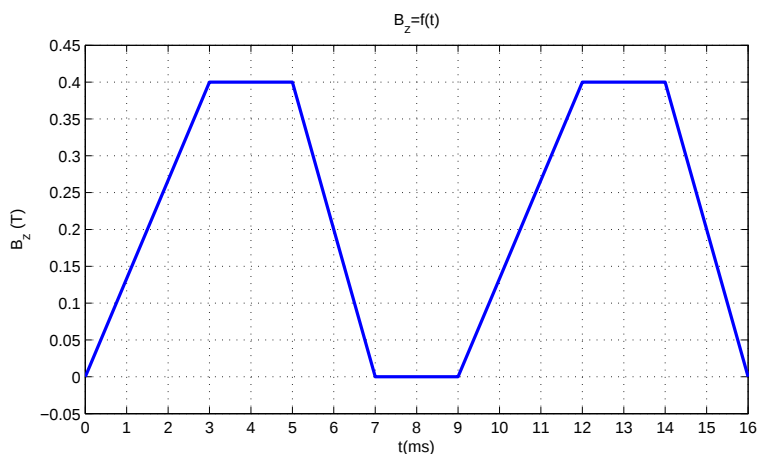
Όπως έχει ήδη σχολιαστεί και σε προηγούμενες ασκήσεις ο ρυθμός μεταβολής της μαγνητικής ροής που διαρρέει μια επιφάνεια είναι η αιτία που προκαλεί ΗΕΔ. Η μεταβολή της μαγνητικής ροής που διαρρέει μια επιφάνεια μπορεί να προκαλείται είτε από μεταβολή της μαγνητικής επαγωγής, είτε από μεταβολή της επιφάνειας που παρουσιάζει ένα πλαίσιο είτε ακόμη από μεταβολή και των δύο αυτών μεγεθών. Στη περίπτωση της άσκησης αυτής εκείνο που παρατηρείται είναι η μεταβολή της επιφάνειας που παρουσιάζει το πλαίσιο με ρυθμό $\frac{\Delta S}{\Delta t} = -0.1 \frac{m^2}{s}$. Το πρόσημο – τοποθετείται γιατί η επιφάνεια ελαττώνεται, συνεπώς η τελική επιφάνεια θα είναι μικρότερη της αρχικής και η διαφορά τελικής μείον αρχικής θα είναι αρνητική. Ο υπολογισμός της μαγνητικής επαγωγής γίνεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned}
 E &= -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta}{\Delta t}(BS) \Rightarrow \\
 \Rightarrow E &= -B \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \\
 \Rightarrow B &= -E \cdot \frac{1}{\frac{\Delta S}{\Delta t}} = -18 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{1}{-0.1} \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow B = -18 \cdot 10^{-2} \text{ T}$$

7. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου Τόμος II - Άσκηση 5 σελίδα 28:

Ένα τετράγωνο πλαίσιο, πλευράς $a = 0.4\text{m}$, τοποθετείται οριζόντια μέσα σε μαγνητικό πεδίο. Η κατακόρυφη συνιστώσα B_z του μαγνητικού πεδίου μεταβάλλεται όπως δείχνει το διάγραμμα του σχήματος 5.7. Να κατασκευάσετε το διάγραμμα $E = f(t)$ της ΗΕΔ που επάγεται, σε βαθμολογημένους άξονες.



Σχήμα 5.7: Γραφική παράσταση μαγνητικής επαγωγής B_z συναρτήσει του χρόνου t .

Λύση:

Η άσκηση μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας τον νόμο του Faraday. Η ΗΕΔ υπολογίζεται από τη μεταβολή της μαγνητικής ροής. Στην περίπτωση αυτή το εμβαδόν της επιφάνειας παραμένει σταθερό και εκείνο που μεταβάλλεται είναι η συνιστώσα του διανύσματος της μαγνητικής επαγωγής B , το B_z . Η σχέση που θα δίνει την ΗΕΔ σε κάθε περίπτωση υπολογίζεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} E &= -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta}{\Delta t}(BS) \Rightarrow \\ \Rightarrow E &= -S \cdot \frac{\Delta B_z}{\Delta t} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν τη σχέση 5.4 και τη γραφική παράσταση 5.7 υπολογίζεται η ΗΕΔ για τα 7 διαφορετικά τμήματα της γραφικής παράστασης.

Παρατήρηση:

Η κλίση της γραφικής παράστασης 5.7 είναι ο όρος $\frac{\Delta B_z}{\Delta t}$. Το πλάισιο είναι τετραγωνικό και συνεπώς το εμβαδόν του είναι $S = a \cdot a = 0.16m^2$

- Τμήμα 1:

$$E = -S \cdot \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = -0.16 \frac{0.4 - 0}{(3 - 0) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E = -21.33 \text{ V}$$

- Τμήμα 2:

$$E = -S \cdot \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = -0.16 \frac{0.4 - 0.4}{(5 - 3) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E = 0 \text{ V}$$

- Τμήμα 3:

$$E = -S \cdot \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = -0.16 \frac{0 - 0.4}{(7 - 5) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E = 32 \text{ V}$$

- Τμήμα 4:

$$E = -S \cdot \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = -0.4 \frac{0 - 0}{(9 - 7) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E = 0 \text{ V}$$

- Τμήμα 5:

$$E = -S \cdot \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = -0.4 \frac{0.4 - 0}{(12 - 9) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow E = -21.33 \text{ V}$$

- Τμήμα 6:

$$E = -S \cdot \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = -0.16 \frac{0.4 - 0.4}{(14 - 12) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow$$

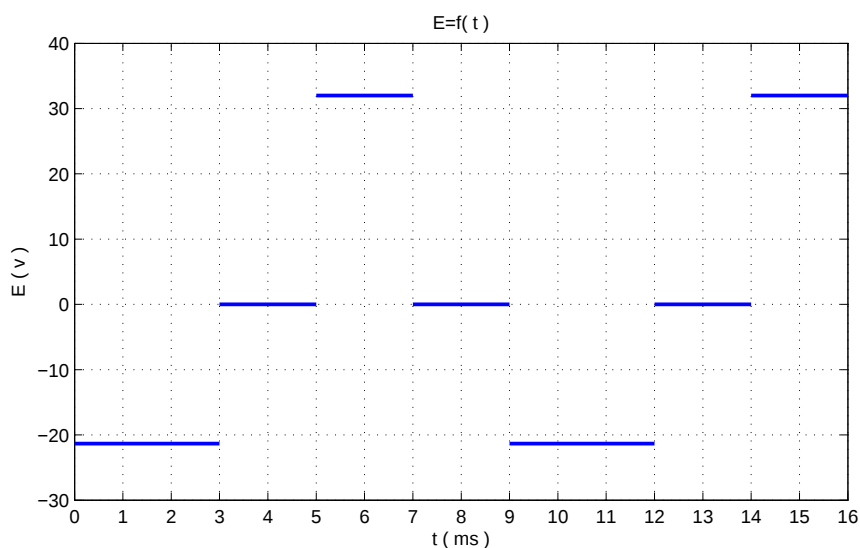
$$\Rightarrow E = 0 \text{ V}$$

- Τμήμα 7:

$$E = -S \cdot \frac{\Delta B_z}{\Delta t} = -0.16 \frac{0 - 0.4}{(16 - 14) \cdot 10^{-3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = 32 \text{ V}$$

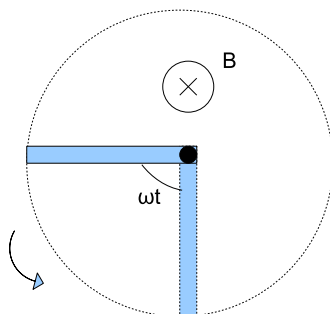
Η γραφική παράσταση δίνεται στο σχήμα 5.8



Σχήμα 5.8: Γραφική παράσταση ΗΕΔ E συναρτήσει του χρόνου t .

8. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου Τόμος II - Άσκηση 6 σελίδα 28:

Το σχήμα 5.9 δείχνει μια χαλύβδινη ράβδο, η οποία έχει μήκος $l = 1\text{m}$ και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, μαγνητικής επαγωγής $B = 0.5\text{T}$. Ο άξονας περιστροφής της ράβδου είναι κάθετος στο ένα άκρο της και είναι



Σχήμα 5.9: Περιστρεφόμενη ράβδος μέσα σε μαγνητικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο της.

παράλληλος προς τις μαγνητικές γραμμές του πεδίου. Να υπολογίσετε την ΗΕΔ επαγωγής που αναπτύσσεται μεταξύ των άκρων της ράβδου.

Λύση:

Καθώς η ράβδος περιστρέφεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο διαγράφει επιφάνεια κύκλου. Δεδομένης της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου υπολογίζεται η επιφάνεια που διαγράφει σε χρόνο μιας περιόδου, που είναι ένας πλήρης κύκλος. Εφόσον έχει υπολογιστεί το εμβαδόν που διαγράφει η ράβδος μέσα στο χρόνο μιας περιόδου και είναι γνωστό ότι η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή, συνάγεται το συμπέρασμα ότι: ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας θα είναι ίσος με το πηλίκο του εμβαδού της επιφάνειας του κύκλου, ακτίνας ίσης με το μήκος της ράβδου, διά την περίοδο περιστροφής. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το νόμο του Faraday υπολογίζεται η ΗΕΔ στα άκρα της ράβδου.

- Η περίοδος υπολογίζεται από τη γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi}{10} s$$

- Το εμβαδόν του κύκλου ακτίνας $r = l = 1m$ είναι:

$$S = \pi r^2 = \pi 1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \pi \cdot m^2$$

- Ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας δίνεται από τη σχέση :

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S_T}{T} = \frac{\pi}{\frac{10}{s}}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta t} = 10 \frac{m^2}{s}$$

Με τα δεδομένα που έχουν υπολογιστεί προηγουμένως και το νόμο του Faraday μπορεί να υπολογιστεί η τάση στα άκρα της ράβδου.

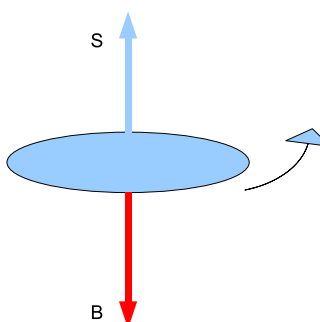
Παρατήρηση :

Η ράβδος κινείται αντιωρολογιακά. Συνεπώς το διάνυσμα της επιφάνειας θα σχηματίζει γωνία 180° με το διάνυσμα της μαγνητικής επαγωγής B όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.10.

Παρατήρηση :

Η μαγνητική επαγωγή δεν μεταβάλλεται και συνεπώς ισχύει :

$$E = -\frac{\Delta}{\Delta t}(B \cdot S) = -B \frac{\Delta S}{\Delta t}$$



Σχήμα 5.10: Διανύσματα επιφάνειας $\vec{S}$ και μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$.

$$E = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -\frac{\Delta}{\Delta t}(B \cdot S) \Rightarrow$$

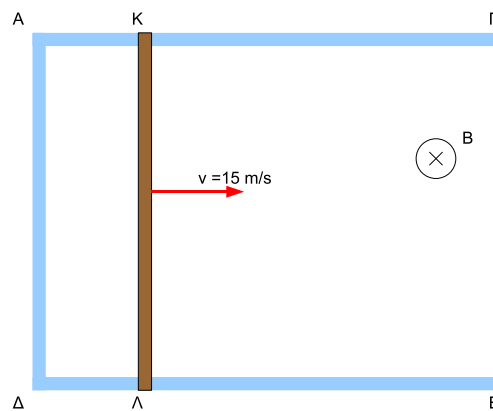
$$\Rightarrow E = -B \frac{\Delta S}{\Delta t} \cos \theta = -0.5 \cdot 10 \cdot \cos 180^\circ = -0.5 \cdot 10 \cdot (-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E = 5 \text{ V}$$

9. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου Τόμος II - Άσκηση 7 σελίδα 28:

Αγωγός που έχει σχήμα Π βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $B = 0.2T$ με το επίπεδο του κάθετο μέσα στις μαγνητικές γραμμές του πεδίου όπως δείχνει το σχήμα 5.11. Δεύτερος αγωγός ΚΛ γλιστρά χωρίς τριβή πάνω στο τμήμα ΑΓ και ΔΕ με σταθερή ταχύτητα $v = 15 \frac{m}{s}$ και σε χρόνο $t = 0$ βρίσκεται στη θέση ΑΔ. Το μήκος ΑΔ είναι $x_{A\Delta} = 0.5m$. Να βρείτε:

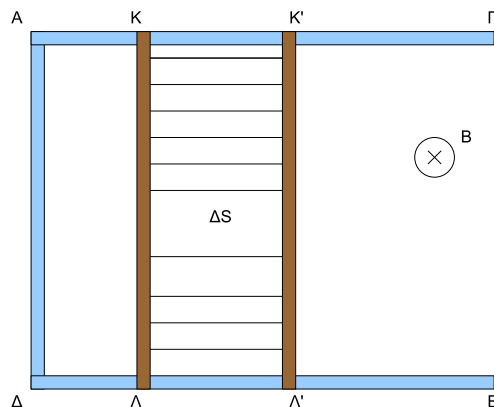
- (α') τη μεταβολή της μαγνητικής ροής, που περνά μέσα από το πλαίσιο σε συνάρτηση με το χρόνο
 (β') Πόση επαγωγική τάση αναπτύσσεται μεταξύ Κ και Λ;



Σχήμα 5.11: Ράβδος που κινείται πάνω σε αγωγό τύπου Π.

Λύση:

Ο αγωγός του σχήματος 5.11 κινούμενος με ταχύτητα $v = 15 \frac{m}{s}$ μέσα στο μαγνητικό πεδίο διαγράφει μια ορθογωνική επιφάνεια. Μέσα από την επιφάνεια αυτή περνά μια επιπλέον μαγνητική ροή που ζητείται να υπολογιστεί. Το σχήμα 5.12 αναπαριστά την επιφάνεια η οποία έχει διαγραφεί. Η μεταβολή της μαγνητικής ροής ως ακολούθως:



Σχήμα 5.12: Μεταβολή επιφάνειας.

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} &= B \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} &= B \cdot \frac{\Delta(l \cdot x)}{\Delta t} \Rightarrow \quad l = \sigma \tau \alpha \theta. \\ \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} &= B \cdot l \frac{\Delta x}{\Delta t} = B \cdot l \cdot v \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} &= 0.2 \cdot 0.5 \cdot 15 = 1.5 \text{ Wb} \end{aligned}$$

Στη συνέχεια πρέπει να υπολογιστεί η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού ΚΛ. ΜΕ βάση το νόμο του Faraday και το γεγονός ότι $\eta = 1$ υπολογίζεται η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού ΚΛ :

$$E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} = -\eta \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -1.5 \text{ V}$$

10. Φυσική Γ' Ενιαίου Λυκείου Τόμος II - Άσκηση 8 σελίδα 28:

Ένα πηνίο με μήκος $1m$, αποτελείται από 10^3 σπείρες που έχουν εμβαδόν $30cm^2$ η κάθεμιά. Να βρείτε το συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου . Πόσος θα γίνει ο συντελεστής αυτεπαγωγής, όταν μέσα στο

πηνίο τοποθετείται πυρήνας από μαλακό σίδηρο σχετικής μαγνητικής διαπερατότητας $\mu = 1950$;

Λύση:

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής υπολογίζεται από τη σχέση 5.5:

$$E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} = -L \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t} \quad (5.5)$$

Για να επιλυθεί η άσκηση αυτή πρέπει να βρεθεί ο συντελεστής που βρίσκεται μπροστά από τη μεταβολή του ρεύματος σε συνάρτηση με το χρόνο. Είναι γνωστό ότι η εξίσωση 5.5 είναι μια άλλη έκφραση του νόμου του Faraday. Συνεπώς γράφεται ο νόμος του Faraday και μετασχηματίζεται ώστε να έρθει στην επιθυμητή μορφή.

Παρατηρήσεις:

- Το εμβαδόν της επιφάνειας που παρουσιάζει η κάθε σπείρα του πηνίου είναι σταθερό, συνεπώς δεν υπάρχει καμία μεταβολή του εμβαδού αυτού.
- Η μαγνητική επαγωγή του σωληνοειδούς δίνεται από τη σχέση

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} &= -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \cdot S) \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} &= -\frac{dB}{dt} \cdot S - \frac{dS}{dt} \cdot B \Rightarrow \frac{dS}{dt} = 0 \\ \Rightarrow E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} &= -\frac{d\left(\frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{l}\right)}{dt} \cdot S \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} &= -\frac{\mu_0 \cdot N}{l} \cdot S \cdot \frac{dI}{dt} \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας την τελευταία εξίσωση με τη σχέση 5.5, προκύπτει ο συντελεστής αυτεπαγωγής που είναι:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot S}{l} \Rightarrow$$

- Μαγνητική διαπερατότητα του κενού $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$
- Σπείρες $N = 10^3$
- Μήκος σωληνοειδούς $l = 1m$
- Εμβαδόν κάθε σπείρας $S = 30 \cdot 10^{-4}m^2$

$$L = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^3 \cdot 30 \cdot 10^{-4} \cdot 10^3}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = 3.77 \text{ mH}$$

Αν τώρα τοποθετηθεί μαλακός σίδηρος τότε εκείνο που θα αλλάξει είναι η μαγνητική διαπερατότητα. Πρέπει λοιπόν η εξίσωση 5.5 να πολλαπλασιαστεί με το $\mu = 1950$ του πυρήνα που τοποθετήθηκε :

$$L = \mu \cdot \frac{\mu_0 \cdot N \cdot S}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L = 1950 \cdot 3.77 \Rightarrow$$

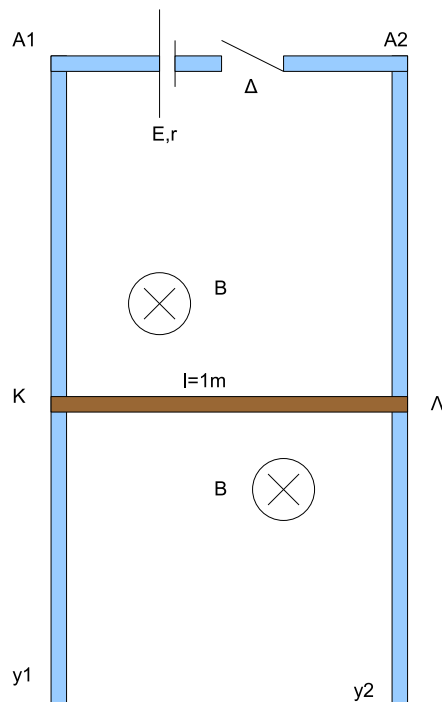
$$\Rightarrow L = 7.35 \text{ H}$$

11. Υποστηρικτικό Υλικό - Κατηγορία Γ' - Άσκηση 23:

Οι κατακόρυφοι μεταλλικοί αγωγοί A_1y_1 και A_2y_2 απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση $1m$ και έχουν αμελητέα ωμική αντίσταση. Τα άκρα A_1 και A_2 συνδέονται, μέσω διακόπτη Δ , με πηγή συνεχούς ρεύματος Η.Ε.Δ $E = 20V$ και εσωτερικής αντίστασης $r = 2\Omega$. Αγωγός ΚΛ, μήκους $l = 1m$, μάζας $m = 0.3kg$ και ωμικής αντίστασης 8Ω , έχει τα άκρα του Κ, Λ πάνω στους κατακόρυφους αγωγούς A_1y_1 και A_2y_2 και είναι κάθετος σ'αυτούς. Η όλη διάταξη βρίσκεται σε περιοχή που επικρατεί οριζόντιο ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $B = 1T$, το οποίο είναι κάθετο στο επίπεδο των αγωγών A_1y_1 και A_2y_2 . Αρχικά ο αγωγός ΚΛ είναι ακίνητος και είναι δυνατόν να ολισθαίνει κατά μήκος των αγωγών χωρίς τριβές. Κλείνουμε το διακόπτη Δ και τη χρονική στιγμή $t = 0s$ αφήνουμε τον αγωγό ΚΛ ελεύθερο. Ζητούνται :

- (α') Η ένταση του ρεύματος και οι δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό ΚΛ μόλις αυτός αφεθεί ελεύθερος.

- (β') Η κατεύθυνση κίνησης του αγωγού ΚΛ και η αρχική του επιτάχυνση
- (γ') Να εξηγήσετε γιατί ο αγωγός ΚΛ θα αποκτήσει τελικά μια σταθερή ταχύτητα v_{op} και να υπολογίσετε την τιμή της, καθώς και την ένταση του ρεύματος όταν $v = v_{op}$.
- (δ') Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της έντασης I του ρεύματος σε συνάρτηση με την ταχύτητα v του αγωγού, $I = f(v)$ από την έναρξη της κίνησης του.
- (ε') Όταν $v = v_{op}$, να υπολογίσετε:
- την ισχύ που παρέχει η πηγή στο κύκλωμα
 - το ρυθμό με τον οποίο η ηλεκτρική ενέργεια μετατρέπεται σε θερμική
 - το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του αγωγού.



Σχήμα 5.13: Αγωγός μέσα σε μαγνητικό πεδίο.

Λύση:

Ο αγωγός κινείται μέσα στο μαγνητικό πεδίο διαγράφοντας ένα εμβαδόν επιφάνειας. Το γεγονός αυτό, προκαλεί μεταβολή της μαγνητικής ροής που διαρρέει τον αγωγό και με βάση τον νόμο του Faraday προκύπτει Η.Ε.Δ στα άκρα του αγωγού.

(α') Για να υπολογιστεί η ένταση του ρεύματος και να σχεδιαστούν οι δυνάμεις που ασκούνται πάνω σ' αυτόν πρέπει πρώτα να βρεθεί η ολική αντίσταση του κυκλώματος. Η πηγή που δίνεται παρουσιάζει ωμική αντίσταση $r = 2\Omega$ ενώ παράλληλα ο αγωγός ΚΛ παρουσιάζει ωμική αντίσταση $R_{ΚΛ} = 8\Omega$. Οι δύο αντιστάτες αυτοί, διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα, άρα είναι συνδεδεμένοι σε σειρά και συνεπώς για να υπολογιστεί η συνολική αντίσταση που παρουσιάζουν αθροίζονται:

$$\begin{aligned} R_{ολ} &= r + R_{ΚΛ} = 2 + 8 \Rightarrow \\ R_{ολ} &= 10\Omega \end{aligned}$$

Μόλις ο αγωγός αφεθεί ελεύθερος το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα μπορεί να υπολογιστεί από το νόμο του Ohm :

$$I = \frac{V}{R_{ολ}} = \frac{20}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = 2 \text{ A}$$

(β') Ο υπολογισμός της επιτάχυνσης γίνεται αφού πρώτα καθοριστούν οι δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό. Βάσει των δυνάμεων αυτών και του θεμελιώδους νόμου της μηχανικής $\Sigma F = m \cdot a$ προκύπτει η επιτάχυνση.

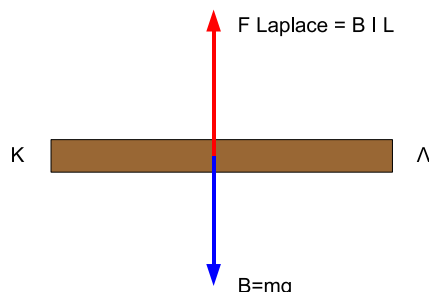
Οι δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό είναι:

- Λόγω βαρύτητας $B = mg = 0.3 \cdot 10 = 3 \text{ N}$
- Δύναμη Laplace $F_L = B \cdot I \cdot L = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2 \text{ N}$

$$\Sigma F = m \cdot a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\Sigma F}{m} = \frac{B - F_L}{m} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{3 - 2}{0.3} = 3.33 \frac{m}{s^2}$$



Σχήμα 5.14: Δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό ΚΛ.

(γ') Ο αγωγός ΚΛ κινείται προς τα κάτω και συνεπώς το εμβαδόν της επιφάνειας θα αυξάνεται. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση της μαγνητικής ροής μέσα από την επιφάνεια, που από το νόμο του Faraday θα δώσει Η.Ε.Δ. Η αύξηση της Η.Ε.Δ. προκαλεί αύξηση του ρεύματος $I = \frac{E_{επιφ\alpha\chi}}{R_{ολ}}$ και συνεπώς αύξηση της δύναμης Laplace $F_L = B \cdot I \cdot L$. Λόγω του ότι η δύναμη F_L είναι αντίρροπη του βάρους αυτό έχει σαν αποτέλεσμα τη σταδιακή μείωση του μέτρου της επιτάχυνσης μέχρις ότου αυτή γίνει ίση με μηδέν $a = 0 \frac{m}{s^2}$ και συνεπώς ο αγωγός ΚΛ αποκτά μια οριακή ταχύτητα. Ο υπολογισμός της οριακής ταχύτητας λοιπόν γίνεται αν αρχικά εφαρμοστεί η σχέση $\Sigma F = 0$ έτσι ώστε να βρεθεί η Η.Ε.Δ στα άκρα του αγωγού εκείνη τη στιγμή και στη συνέχεια με εφαρμογή του νόμου του Faraday.

$$\begin{aligned} \Sigma F = 0 &\Rightarrow F_L - B = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow F_L = B &\Rightarrow B \cdot I_{o\lambda} \cdot L = mg \Rightarrow \\ \Rightarrow I_{o\lambda} &= \frac{mg}{BL} = 3 \text{ A} \end{aligned}$$

Το ρεύμα όμως αυτό δεν προέρχεται εξ ολοκλήρου από τη μεταβολή της μαγνητικής ροής. Για να εφαρμοστεί ο νόμος του Faraday θα πρέπει να υπολογιστεί το ρεύμα που προέρχεται μόνο από την μεταβολή της μαγνητικής ροής. Η πηγή μπορεί να δώσει

ρεύμα ίσο με

$$I_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma} = \frac{E_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma}}{R} = \frac{20}{10} = 2 \text{ A}$$

Το υπόλοιπο ρεύμα παράγεται από την Η.Ε.Δ λόγω της μεταβολής της μαγνητικής ροής και συνεπώς μπορεί να υπολογιστεί η Η.Ε.Δ αυτεπαγωγής:

$$I_{\epsilon\pi\alpha\gamma} = I_{o\lambda} - I_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma} = 3 - 2 = 1 \text{ A}$$

$$E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} = I_{\epsilon\pi\alpha\gamma} \cdot R_{o\lambda} = 1 \cdot 10 = 10V$$

Χρησιμοποιώντας την τάση επαγωγής αυτή και το νόμο του Faraday προκύπτει η οριακή ταχύτητα:

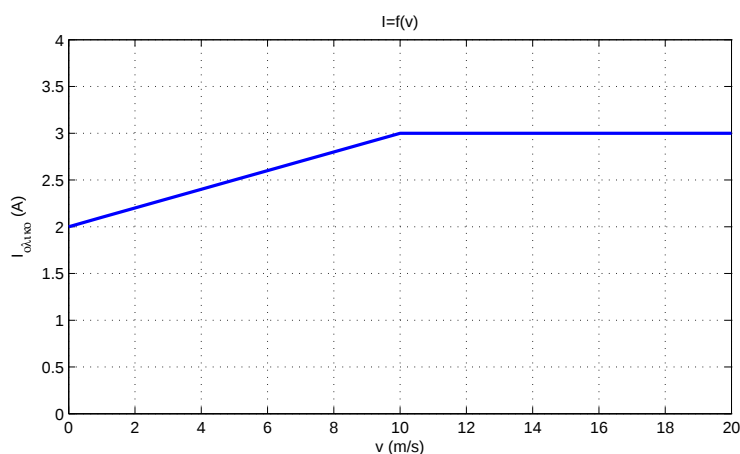
$$\begin{aligned} E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} &= -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = -B \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} &= -B \cdot \frac{\Delta(l \cdot y)}{\Delta t} \Rightarrow l = \sigma\tau\alpha\theta. \Rightarrow \frac{\Delta l}{\Delta t} = 0 \\ \Rightarrow E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} &= -B \cdot l \frac{\Delta y}{\Delta t} = -B \cdot l \cdot v_{op} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_{op} &= -\frac{E_{\epsilon\pi\alpha\gamma}}{B \cdot l} = -\frac{10}{1 \cdot 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_{op} &= -10 \frac{m}{s} \end{aligned}$$

Συνεπώς ο αγωγός κινείται προς τα κάτω με ταχύτητα $v_{op} = 10 \frac{m}{s}$

- (δ) Στη συνέχεια πρέπει να χαραχθεί η γραφική παράσταση που δίνει την ένταση του ρεύματος συναρτήσει της ταχύτητας. Από το γεγονός ότι η ένταση του ρεύματος είναι το άθροισμα της έντασης λόγω της πηγής και της επαγωγής προκύπτει:

$$\begin{aligned} I &= I_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma} + I_{\epsilon\pi\alpha\gamma} \Rightarrow \\ \Rightarrow I &= \frac{E_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma}}{R_{o\lambda}} + \frac{\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}}{R_{o\lambda}} \Rightarrow \\ \Rightarrow I &= 2 + \frac{B \cdot v \cdot l}{R_{o\lambda}} \Rightarrow \\ \Rightarrow I &= 2 + \frac{v}{10} \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση αναπαρίσταται γραφικά με στο σχήμα 5.15.



Σχήμα 5.15: Ένταση του ρεύματος, I , συναρτήσει της ταχύτητας v .

(ε) Ακολουθώς υπολογίζονται:

i. Η ισχύς που παρέχεται από την πηγή στο κύκλωμα:

$$P_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma} = I \cdot V_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma} = 3 \cdot 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma} = 60 \text{ W}$$

ii. Η ισχύς που μετατρέπεται από ηλεκτρική σε θερμική ενέργεια:

$$P_{\theta\epsilon\rho} = I \cdot V_{o\lambda} = 3 \cdot 30 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\theta\epsilon\rho} = 90 \text{ W}$$

iii. Η ισχύς λόγω της μεταβολής της δυναμικής ενέργειας:

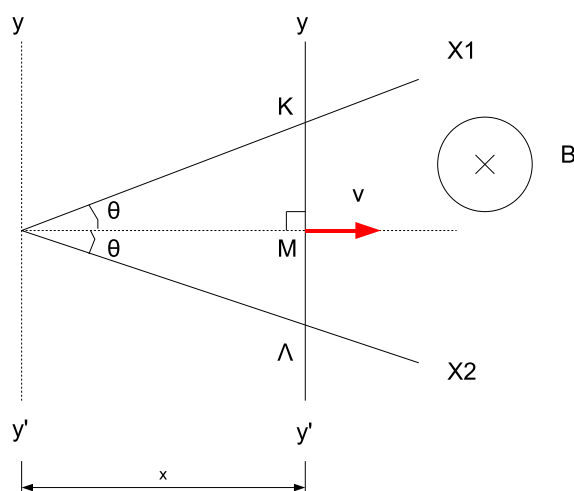
$$P_{\delta\nu\nu} = I \cdot V_{o\lambda} = P_{\theta\epsilon\rho} - P_{\pi\eta\gamma\eta\varsigma} = 90 - 60 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\delta\nu\nu} = 30 \text{ W}$$

12. Εισαγωγικές 2004:

Δύο ευθύγραμμες αγωγιμες ράβδοι OX_1 και OX_2 μεγάλου μήκους, είναι ενωμένες στο κοινό σημείο O , σχηματίζοντας σταθερή γωνία

X_1OX_2 , το επίπεδο της οποίας είναι οριζόντιο. Ευθύγραμμος αγωγός yy' κινείται με σταθερή ταχύτητα v ώστε να είναι συνέχεια κάθετος στη διχοτόμο της γωνίας X_1OX_2 και να βρίσκεται σε επαφή με τις ράβδους. Η κίνηση του αγωγού γίνεται χωρίς τριβή. Το σύστημα βρίσκεται σε κατακόρυφο μαγνητικό πεδίο σταθερής μαγνητικής επαγωγής B , όπως φαίνεται και στο σχήμα 5.16. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0s$ ο αγωγός yy' βρίσκεται στο σημείο O και τη χρονική στιγμή $t(t > 0s)$ βρίσκεται σε επαφή με τις ράβδους OX_1 και OX_2 στα σημεία K και Λ . Ζητούνται:



Σχήμα 5.16: Διάταξη που περιγράφεται στην άσκηση.

- (α') Να διατυπώσετε το νόμο του Faraday
- (β') Να εκφράσετε το μήκος $K\Lambda$ και το εμβαδόν του τριγώνου $OK\Lambda$ σαν συνάρτηση του χρόνου t .
- (γ') Να αποδείξετε ότι κατά τη χρονική στιγμή t , η Η.Ε.Δ. μεταξύ των σημείων K και Λ δίνεται από τη σχέση $E_{επ} = (-2Bv^2 \tan \theta)t$
- (δ') Να βρείτε την αντίσταση του κυκλώματος δεδομένου ότι οι ράβδοι OX_1 και OX_2 έχουν αμελητέα ωμική αντίσταση και η ωμική αντίσταση του yy' ανά μονάδα μήκους είναι r .
- (ε') Να αποδείξετε ότι το ηλεκτρικό ρεύμα στο κλειστό κύκλωμα είναι ανεξάρτητο του χρόνου.
- (ϛ') Να εξηγήσετε γιατί πρέπει να ασκείται στον αγωγό εξωτερική δύναμη, στην ίδια κατεύθυνση με την ταχύτητα έτσι ώστε αυτό να

κινείται με σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε το μέτρο της δύναμης αυτής σαν συνάρτηση των δεδομένων μεγεθών.

Λύση:

(α') Αρχικά πρέπει να διατυπωθεί ο νόμος του Faraday :

“Η επαγόμενη Ηλεκτρεγερτική Δύναμη σε ένα αγωγό είναι ανάλογη με το ρυθμό μεταβολής της μαγνητικής ροής που διαπερνά τον αγωγό”

(β') Στη συνέχεια πρέπει να εκφραστεί το μήκος ΚΛ και το εμβαδόν συναρτήσει του χρόνου. Το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ που φαίνεται στο σχήμα 5.16 είναι ίσο με 2 φορές το ΚΜ. Επιπλέον η απόσταση x που καλύπτει το σώμα στην οριζόντια διεύθυνση είναι ίση με $v \cdot t$ γιατί η ταχύτητα είναι σταθερή και συνεπώς ισχύει η σχέση $v = \frac{x}{t}$ της ομαλής ευθύγραμμης κίνησης.

$$\tan\theta = \frac{KM}{x} \quad (5.7)$$

$$x = v \cdot t \quad (5.8)$$

Από τις εξισώσεις 5.7, 5.8 και το γεγονός ότι $KL = 2KM$ προκύπτει ότι :

$$\frac{KM}{\tan\theta} = v \cdot t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow KM = \tan\theta \cdot v \cdot t$$

$$KL = 2KM = 2 \cdot \tan\theta \cdot v \cdot t \Rightarrow$$

Το εμβαδόν του τριγώνου δίνεται από τη σχέση, $E = \frac{\beta\alpha\sigma\eta \times \upsilon\psi\omicron\varsigma}{2}$, συνεπώς από τα γεωμετρικά στοιχεία του σχήματος 5.16 υπολογίζεται το εμβαδόν:

$$S = \frac{KL \cdot x}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = \frac{(2 \cdot \tan\theta \cdot v \cdot t) \cdot (v \cdot t)}{2}$$

$$\Rightarrow S = \tan\theta \cdot v^2 \cdot t^2$$

(γ') Η επαγωγική τάση που αναπτύσσεται στα άκρα του αγωγού ΚΛ δίνεται από το νόμο του Faraday :

$$E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B \cdot S) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} = -B \frac{dS}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} = -B \frac{d(\tan\theta \cdot v^2 \cdot t^2)}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{\epsilon\pi\alpha\gamma} = -2B \tan\theta \cdot v^2 \cdot t$$

(δ') Η ωμική αντίσταση του κυκλώματος υπολογίζεται από το μήκος του αγωγού ΚΛ πολλαπλασιαζόμενο με την ωμική αντίσταση ανά μονάδα μήκους:

$$R_{K\Lambda} = r \cdot K\Lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{K\Lambda} = 2r \cdot \tan\theta \cdot v \cdot t$$

(ε') Στη συνέχεια ζητείται να αποδειχτεί ότι το ηλεκτρικό ρεύμα δεν είναι ανεξάρτητο του χρόνου. Εφόσον έχει υπολογιστεί η Η.Ε.Δ λόγω επαγωγής, καθώς επίσης και η αντίσταση που παρουσιάζει το κύκλωμα με βάση το νόμο του Ohm, μπορεί να υπολογιστεί το ρεύμα που διαρρέει το κύκλωμα:

$$I_{\epsilon\pi\alpha\gamma} = \frac{E_{\epsilon\pi\alpha\gamma}}{R_{o\lambda}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{\epsilon\pi\alpha\gamma} = \frac{-2B \tan\theta \cdot v^2 \cdot t}{2r \cdot \tan\theta \cdot v \cdot t} \Rightarrow$$

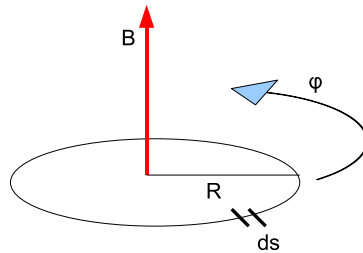
$$\Rightarrow I_{\epsilon\pi\alpha\gamma} = -\frac{B \cdot v}{r}$$

(F') Για να μπορεί ο αγωγός να κινείται με σταθερή ταχύτητα θα πρέπει πάνω σ' αυτόν να ασκείται μια δύναμη η οποία να είναι ίση και αντίθετη από τη δύναμη Laplace F_L . Με τον τρόπο αυτό η συνισταμένη δύναμη που θα ασκείται πάνω στο σώμα θα είναι ίση με 0 και με βάση τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα το σώμα θα κινείται με σταθερή ταχύτητα (την ταχύτητα που έχει αποκτήσει μέχρι να εξισωθούν οι δυνάμεις), v_{op} . Ο υπολογισμός της δύναμης αυτής γίνεται ως ακολούθως:

$$\begin{aligned} F_{\epsilon\xi} &= -F_L \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{\epsilon\xi} &= -B \cdot I \cdot L \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{\epsilon\xi} &= -B \cdot \left(-\frac{B \cdot v}{r}\right) \cdot (2 \cdot \tan\theta \cdot v \cdot t) \Rightarrow \\ \Rightarrow F_{\epsilon\xi} &= \frac{B^2 \cdot v^2}{r} \cdot 2 \tan\theta \cdot t \end{aligned}$$

13. Άσκηση:

Να υπολογιστεί το μαγνητικό πεδίο που δημιουργείται από κυκλικό ρευματοφόρο αγωγό στο κέντρο του.



Σχήμα 5.17: Μεγέθη που περιλαμβάνονται στο νόμο των Biot-Savart.

Λύση:

Για τον υπολογισμό της μαγνητικής επαγωγής ενός ρευματοφόρου αγωγού χρησιμοποιείται ο νόμος των Biot-Savart που δίνεται από τη σχέση 5.9:

$$d\vec{B} = \mu_0 \frac{I}{4\pi R^2} ds \sin\theta \quad (5.9)$$

- I είναι το ρεύμα που διαρρέει τον αγωγό
- ds είναι το στοιχειώδες μήκος του αγωγού
- θ είναι η γωνία που σχηματίζει ο αγωγός με το μαγνητικό πεδίο

Για τον υπολογισμό της έντασης του μαγνητικού πεδίου πρέπει να ολοκληρωθεί η σχέση των Biot-Savart για γωνίες από $\phi = 0 \rightarrow \phi = 2\pi$. Ισχύουν τα ακόλουθα:

- Ο αγωγός είναι κάθετος στη διεύθυνση του πεδίου και για το λόγο αυτό η γωνία $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- Το στοιχειώδες μήκος τόξου του αγωγού ds μπορεί να γραφεί συναρτήσει της γωνίας ϕ

$$ds = R d\phi$$

Με ολοκλήρωση προκύπτει το μαγνητικό πεδίο:

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \mu_0 \frac{I}{4\pi R^2} ds \sin\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow B &= \int_0^{2\pi} \mu_0 \frac{I}{4\pi R^2} ds \sin\theta \Rightarrow \\ \Rightarrow B &= \int_0^{2\pi} \mu_0 \frac{I}{4\pi R^2} R d\phi \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow B &= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\phi]_0^{2\pi} \Rightarrow \\ \Rightarrow B &= \frac{\mu_0 I}{2R} \end{aligned}$$

Περιεχόμενα

Αφιερωμένο	3
Πρόλογος	4
1 Μηχανική Συστήματος Σωμάτων σε μια διάσταση	5
1.1 Ερωτήσεις	5
1.2 Ασκήσεις Κατηγορίας Β	11
1.3 Ασκήσεις Κατηγορίας Γ	23
2 Μηχανική Στερεού Σώματος	33
2.1 Κατηγορία Α	33
2.2 Κατηγορία Β	33
2.3 Κατηγορία Γ	40
2.4 Ασκήσεις που δόθηκαν σε διαγωνίσματα και εξετάσεις	46
3 Ταλαντώσεις	57
3.1 Κατηγορία Α	57
3.2 Κατηγορία Β	67
3.3 Κατηγορία Γ	82
3.4 Ασκήσεις από Διαγωνίσματα και Εισαγωγικές Εξετάσεις	92
4 Κύματα	161
4.1 Ερωτήσεις	161
4.2 Ασκήσεις	170
4.3 Ασκήσεις για χορδές και ανοικτούς σωλήνες	184
4.4 Πείραμα Young	191
4.4.1 Ερωτήσεις	191
4.4.2 Ασκήσεις	196
4.5 Ασκήσεις απο Ενιαίες και Εισαγωγικές εξετάσεις	199
5 Ηλεκτρομαγνητική Επαγωγή	217
5.1 Ασκήσεις	217

Κατάλογος Σχημάτων

1.1 Διαγράμματα $P = f(v), E = f(p)$	9
1.2 Διάγραμμα $v = f(t)$	12
1.3 Διαγράμματα $F = f(t)$ και $F = f(x)$	14
1.4 Διαγράμματα $P = f(t)$ και $E_{\kappa\iota\nu} = f(t)$	15
1.5 Κρούση σφαιρών	17
1.6 Κρούση σφαιρών	18
1.7 Γραφική παράσταση ορμής κάθε σώματος	21
1.8 Γραφική παράσταση ορμής κάθε σώματος	21
1.9 Γραφική παράσταση ορμής κάθε σώματος	22
1.10 Διαγράμματα $P = f(t)$ και $E_{\kappa\iota\nu} = f(t)$	25
1.11 Διαγράμματα $P = f(t)$ και $E_{\kappa\iota\nu} = f(t)$	27
1.12 Έκρηξη βλήματος	28
2.1 Σύστημα δίσκου πλαστελίνης σε κάτοψη	34
2.2 Περιστρεφόμενη ράβδος ως προς σημείο Ο.	41
2.3 Κίνηση μπάλας σε κεκλιμένο επίπεδο.	44
2.4 Σύστημα σωμάτων αναρτημένων σε τροχαλία.	47
2.5 Σύστημα δίσκου - σώματος.	49
2.6 Σύστημα δίσκου - σώματος, α) Πρίν β) Μετά.	51
2.7 Στροφορμή δίσκου (μπλέ) και σώματος (κόκκινο)	54
3.1 Επιτάχυνση συναρτήσει της ταχύτητας στη Γ.Α.Τ	57
3.2 Απομάκρυνση συναρτήσει της ταχύτητας στη Γ.Α.Τ	60
3.3 Δυναμική και κινητική ενέργεια σώματος σε ελατήριο	61
3.4 Κινητική, Δυναμική και Ολική ενέργεια ταλαντωτή	62
3.5 Διάταξη εκκρεμους	63
3.6 Επιτάχυνση συναρτήσει της θέσης για την Α.Α.Τ.	70
3.7 Πτώση πλαστελίνης από ύψος h	74
3.8 Ταλάντωση δύο σωμάτων	75
3.9 Δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ των δύο σωμάτων	75
3.10 Σύστημα ελατηρίων σώματος	76

3.11 Εκτροπή του σώματος Σ και δυνάμεις που του ασκούνται . . .	77
3.12 Σύστημα σωμάτων - ελατηρίου	80
3.13 Θερμοκρασιακή μεταβολή	84
3.14 Κρούση πλαστελίνης σε ταλαντωτή	85
3.15 α) Αρχική θέση β) Θέση Ισορροπίας γ) Ελατήριο σε έκταση . . .	89
3.16 Γραφική παράσταση $a = f(x)$	93
3.17 Γραφική παράσταση $x = f(t)$	94
3.18 Γραφική παράσταση $v = f(x)$	96
3.19 Απόσταση Α - Β σώματος που εκτελεί Γ.Α.Τ	97
3.20 Γραφική παράσταση $a = f(x)$	100
3.21 Γραφική παράσταση $x = f(t)$	101
3.22 Γραφική παράσταση $x = f(t)$	103
3.23 Σώμα αναρτημένο σε ελατήριο γραφική $F = f(x)$	104
3.24 Γραφική παράσταση $T^2 = f(m)$	107
3.25 α) Αρχική θέση β) Θέση Ισορροπίας γ) Ελατήριο σε έκταση . . .	109
3.26 Εκκρεμές	113
3.27 Δυνάμεις που ασκούνται στο εκκρεμές	114
3.28 Εξάρτηση ταλάντωσης από το πλάτος	121
3.29 Εξάρτηση ταλάντωσης από τη μάζα	121
3.30 Εξάρτηση ταλάντωσης από τη μάζα	122
3.31 Δεδομένα από μετρήσεις και βέλτιστη ευθεία για υπολογισμό του g	123
3.32 Κίνηση σώματος μέσα σε ανελκυστήρα	127
3.33 Δυνάμεις που ασκούνται στο εκκρεμές	128
3.34 Μηχανική - Κινητική - Δυναμική ενέργεια συναρτήσει του x^2 .	131
3.35 Σώμα αναρτημένο σε δίσκο	132
3.36 α) Αρχική θέση β) Θέση Ισορροπίας με δίσκο και σώμα γ) Ε- λατήριο σε έκταση	133
3.37 Ταχύτητα συναρτήσει του χρόνου	135
3.38 Επιτάχυνση συναρτήσει του χρόνου	136
3.39 Δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και δύναμη ελατηρίου στο δίσκο.	136
3.40 Σώματα αναρτημένα σε ελατήριο.	138
3.41 Ταλάντωση σώματος μεταξύ των σημείων Α - Α'	142
3.42 Αρχική θέση σώματος	144
3.43 Ταλάντωση σώματος σε οριζόντιο επίπεδο.	145
3.44 Κινητική ενέργεια σώματος M συναρτήσει της απομάκρυνσης. .	148
3.45 Δυναμική ενέργεια σώματος M συναρτήσει της απομάκρυνσης. .	150
3.46 Πειραματική διάταξη για τη μελέτη του συντονισμού.	151
3.47 Συχνότητα ταλαντωτή συναρτήσει του πλάτους a	152
3.48 Συχνότητα διεγέρτη συναρτήσει του πλάτους a	153

3.49 Εξαναγκασμένη ταλάντωση.	154
3.50 Γραφική παράσταση πλάτους συναρτήσει μάζας που αναρτάται στον ταλαντωτή.	156
3.51 Εκκρεμές που ταλαντούται.	158
4.1 Απομάκρυνση του M	172
4.2 Στιγμιότυπο για τη χρονική στιγμή $t = 13s$	173
4.3 Συμβολή κυμάτων σε θέση M	174
4.4 Θεμελιώδης συχνότητα κλειστού ηχητικού σωλήνα.	187
4.5 Στάσιμο κύμα σε χορδή, με 4 δεσμούς.	189
4.6 α) Οπή μεγαλύτερη από το μήκος κύματος β) Οπή τάξης μεγέ- θους του μήκους κύματος.	191
4.7 Διάταξη για το πείραμα Young	193
4.8 Στιγμιότυπο κύματος.	199
4.9 Απομάκρυνση της πηγής συναρτήσει του χρόνου.	199
4.10 Στιγμιότυπο κύματος.	201
4.11 Φάση του κύματος για $t = t_0$	203
4.12 Στιγμιότυπο κύματος για $t = 0.2s$	205
4.13 Φάση του κύματος για $t = 0.3s$	206
4.14 Στιγμιότυπο κύματος για $t = t_0$	208
4.15 Διάταξη που δημιουργεί τα κύματα στην επιφάνεια του νερού.	212
4.16 Γραφική παράσταση απομάκρυνσης φελλού συναρτήσει του χρόνου t	215
5.1 Γραφική έντασης ρεύματος συναρτήσει του χρόνου t	217
5.2 Γραφική τάσης αυτεπαγωγής συναρτήσει του χρόνου t	219
5.3 Γραφική μαγνητικής ροής πλαισίου συναρτήσει του χρόνου t	220
5.4 Γραφική ΗΕΔ συναρτήσει του χρόνου t	221
5.5 Πλαίσια μέσα σε μαγνητικό πεδίο.	222
5.6 Γωνία διανύσματος επιφάνειας με το διάνυσμα της επαγωγής.	223
5.7 Γραφική παράσταση μαγνητικής επαγωγής B_z συναρτήσει του χρόνου t	226
5.8 Γραφική παράσταση ΗΕΔ E συναρτήσει του χρόνου t	228
5.9 Περιστρεφόμενη ράβδος μέσα σε μαγνητικό πεδίο κάθετο στο επίπεδο της.	229
5.10 Διανύσματα επιφάνειας $\vec{S}$ και μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$	230
5.11 Ράβδος που κινείται πάνω σε αγωγό τύπου Π.	231
5.12 Μεταβολή επιφάνειας.	232
5.13 Αγωγός μέσα σε μαγνητικό πεδίο.	235
5.14 Δυνάμεις που ασκούνται στον αγωγό ΚΛ.	237
5.15 Ένταση του ρεύματος, I , συναρτήσει της ταχύτητας v	239

5.16 Διάταξη που περιγράφεται στην άσκηση.	240
5.17 Μεγέθη που περιλαμβάνονται στο νόμο των Biot-Savart.	243

Κατάλογος Πινάκων

3.1	Μετρήσεις για προσδιορισμό της εξάρτησης της ταλάντωσης από τις παραμέτρους m, x_0, k	118
3.2	Μεταβολή του X_0 . m, k σταθερά	120
3.3	Μεταβολή της μάζας m . X_0, k σταθερά	120
3.4	Μεταβολή του k . m, X_0 σταθερά	120
3.5	Μετρήσεις για εύρεση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g	122
3.6	Προσθήκη των δύο στηλών για εύρεση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g	123
3.7	Μετρήσεις για εύρεση της επιτάχυνσης της βαρύτητας g	125
3.8	Διερεύνηση εξάρτησης περιόδου από τη μάζα	125
3.9	Διερεύνηση εξάρτησης περιόδου από το πλάτος	126
3.10	Διερεύνηση εξάρτησης περιόδου από το μήκος νήματος	126
3.11	Μετρήσεις για το φαινόμενο του συντονισμού	150
3.12	Συχνότητες για τα διάφορα σταθμά	155

Βιβλιογραφία

- [1] Π. Δωρίτης, Γ. Κατσελλής (1997), *Φυσική Γ'Ενιαίου Λυκείου, Ειδικευση Α Τόμος Ι* 7^η Έκδοση, Λευκωσία Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων
- [2] Σ. Βασιλειάδης, Π. Δωρίτης (1998): *Φυσική Γ'Ενιαίου Λυκείου, Ειδικευση Α Τόμος ΙΙ* 7^η Έκδοση, Λευκωσία Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων
- [3] Γ. Πουλλής, Κ. Πουργουρίδης(1987): *Προβλήματα Φυσικής Γ• Λυκείου συνδιασμός Σ2,* 3^η Έκδοση, Λευκωσία Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων
- [4] Χ. Κρασιάς, Α. Παπαστυλιανού, Κ. Σαββίδου (2001): *Φυσική Γ'Ενιαίου Λυκείου, Ειδικευση Β Τόμος ΙΙ, Λευκωσία Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
- [5] Χ. Κρασιάς, Ε. Λουκαΐδου, Α. Παπαστυλιανού, Κ. Σαββίδου (2001): *Φυσική Γ'Ενιαίου Λυκείου, Ειδικευση Β Τόμος Ι, Λευκωσία Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
- [6] Θ. Χειμωνίδου, Ν. Θεοφίλου, Α. Αλεξάνδρου, Γ. Ασπρομάλλης, Α. Δημητρίου, Κ. Σαββίδου, Α. Παναγή, Μ. Πουαγκαρέ, Σ. Βασιλειάδης Π. Ελευθερίου, Μ. Λοΐζου, Χ. Αθανασιάδης, Ν. Νικολάου, Γ. Τσαλακός, Δ. Φιλίππου (2007): *Φυσική Γ' Λυκείου, Υποστηρικτικό Υλικό για το νέο αναλυτικό πρόγραμμα, Λευκωσία Υπηρεσία Ανάπτυξης Προγραμμάτων*
- [7] Tom Duncan (1973): *Advanced Physics,* 5th Edition, London Hodder Murray, a member of the Hodder Murray Headline Group
- [8] Mark Ellse, Chris Honeywill (2003): *Waves and our Universe, Revised Edition, Nelson and Thornes Cheltenham, United Kingdom*
- [9] Harvey J. Greenberg (2004): *A Simplified Introduction to L^AT_EX,* University of Colorado, Denver

- [10] Tobias Oetiker, Hubert Partl, Irene Hyna and Elisabeth Schlegl (2000):
The Not So Short Introduction to L^AT_EX 2 ϵ