
ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

$$(\alpha) (y+2)^2 =$$

$$(\beta) (x-5)(x+5) =$$

2. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$2x - 3y = 14$$

$$5x + 6y = 8$$

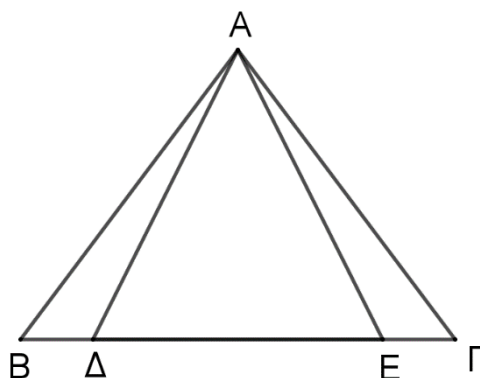
3. Κουτί σχήματος κύβου έχει ακμή $a=10$ cm. Να υπολογίσετε:

(α) τον όγκο του

(β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.



4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=AG$. Στην πλευρά ΒΓ σημειώνουμε σημεία Δ και Ε ώστε $BD=GE$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
(Πλήρης αιτιολόγηση)



5. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

(α) $3x^2 - 3x$

(β) $x^2 - 36 =$

(γ) $x^2 + 6x + 8 =$

(δ) $9x^2 + 24xy + 16y^2 =$

(ε) $y^3 + 8 =$

6. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ο Λευκός Πύργος, το χαρακτηριστικότερο μνημείο της Θεσσαλονίκης. Ένας πεζός βρίσκεται σε απόσταση $B\Gamma = 40$ m από τον πύργο, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε το ύψος του Λευκού Πύργου αν η γωνία $BA\Gamma = 50^\circ$. Η απάντηση να δοθεί κατά προσέγγιση ακεραίου.

Δίνονται:

$\eta\mu 50^\circ = 0,766$	$\sigma\upsilon\nu 50^\circ = 0,643$	$\epsilon\phi 50^\circ = 1,192$
$\eta\mu 40^\circ = 0,643$	$\sigma\upsilon\nu 40^\circ = 0,766$	$\epsilon\phi 40^\circ = 0,839$



7. Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε την πιο κάτω αλγεβρική παράσταση στην πιο απλή της μορφή:

$$\left(\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x+4} \right) : \frac{x^2 - 64}{x^2 + 6x + 8} =$$

8. Οι μαθητές ενός σχολείου, στα πλαίσια του Φεστιβάλ Ψηφιακής Δημιουργίας, κατασκεύασαν μία μακέτα (μινιατούρα) της κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας που βρίσκεται στο Μουσείο του Λούβρου στο Παρίσι. Η πυραμίδα αποτελείται μόνο από γυαλί και φθάνει σε ύψος 12cm. Η ακμή της βάσης ισούται με 18cm. Να υπολογίσετε:

(α) Τον όγκο της πυραμίδας.

(2μ)

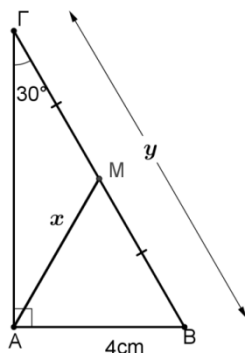


(β) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

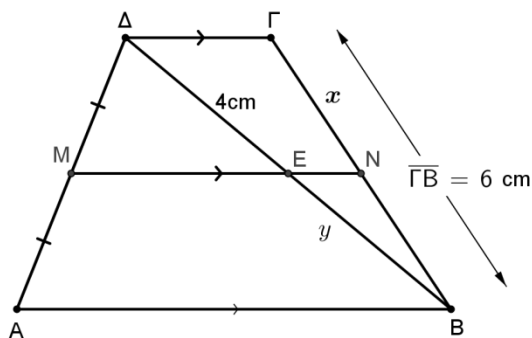
(3μ)

9. Στα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε τα μήκη x και y σε κάθε περίπτωση και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(α)



(β)



10. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (3k^2 - 4k - 8)x + 6$ και $\varepsilon_2 : y - x = 7$.

Να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου k ώστε οι ευθείες να είναι κάθετες.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. (α) Να αποδείξετε την πιο κάτω ισότητα:

$$(x+2)^3 - 6(x+1)^2 - x(x-1)(x+1) = \frac{3x-6}{x^2-4} \cdot \frac{x^2+4x+4}{3}, \quad \text{όπου } x \neq \pm 2$$

- (β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{7x}{x^2 - x - 12} - \frac{x-2}{4-x} = \frac{3}{x+3}$$

2. Εργοστάσιο φτιάχνει ξύλινα κουτιά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $x-3$, $x-3$ και $x+3$ αντίστοιχα.

(α) Να βρείτε την αλγεβρική παράσταση που δίνει το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κουτιού. (4μ)

(β) Αν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κουτιού ισούται με 270 dm^2 , να υπολογίσετε τις διαστάσεις και τον όγκο του κουτιού. (6μ)



3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και AD διάμεσός του. Από το σημείο Γ να φέρετε παράλληλη προς την AB , η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέσου AD στο E . Να δείξετε ότι:
 (α) $AD = DE$
 (β) το τετράπλευρο $A\Gamma EB$ είναι ορθογώνιο.
(Να γίνει σχήμα - Πλήρης αιτιολόγηση)

4. Κωνικό δοχείο λαδιού έχει όγκο $100\pi \text{ cm}^3$ και ύψος 12 cm . Κυλινδρικό δοχείο αποθήκευσης λαδιού έχει ύψος 45 cm και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας είκοσι φορές μεγαλύτερο από το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κωνικού δοχείου. Αν το κυλινδρικό δοχείο είναι εντελώς γεμάτο να υπολογίσετε πόσα κωνικά δοχεία μπορεί να γεμίσει.



5. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

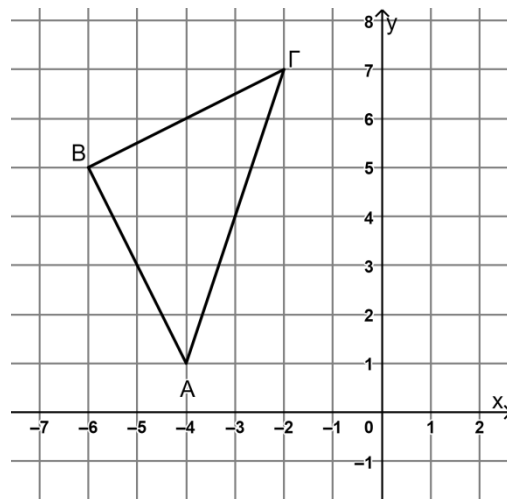
(α) Να δείξετε ότι $AB \perp B\Gamma$.

(β) Να δείξετε ότι $(AB) = (B\Gamma)$.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της $A\Gamma$ και ακολούθως να τοποθετήσετε το M στο σχήμα.

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 η οποία περνά από το M και είναι παράλληλη με την AB .

(ε) Από το M να φέρετε ευθεία κάθετη στην AB η οποία τέμνει την AB στο σημείο Λ . Αν η ϵ_1 τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο K , να δείξετε ότι το τετράπλευρο $KM\Lambda B$ είναι τετράγωνο.



ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100 μονάδες.

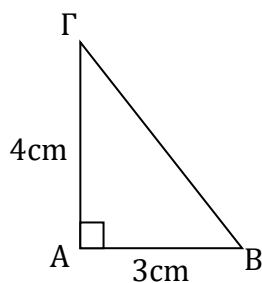
1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 4)^2 =$

β) $(x - 3) \cdot (x + 3) =$

2. Στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), ΑΒ = 3 cm και ΑΓ = 4 cm.

Να υπολογίσετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:



ημΒ =

συνΒ =

εφΓ =

3. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $4x - x\psi =$

β) $x^2 - 49\psi^2 =$

γ) $x^2 - 5x - 14 =$

4. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις $\alpha=5m$, $\beta=7m$, $\gamma=3m$. Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του

β) Τον όγκο του.

5. Να λύσετε το σύστημα:

$$3x + 2\psi = 7$$

$$2x - 3\psi = 9$$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} \div \frac{2x^2 - 8}{x - 3}$$

7. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και E τυχαίο σημείο της διχοτόμου AD .
Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις EZ και EH από τις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα είναι ίσες.
8. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon_1: y = kx + \mu$ η οποία είναι **κάθετη** με την ευθεία $\varepsilon_2: y - 2x = 1$.
Αν η ευθεία ε_1 περνά από το σημείο $A(4,3)$, να βρείτε τις τιμές των k και μ .
9. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης $\Pi_\beta = 40\text{cm}$ και το ύψος της είναι κατά 2 μεγαλύτερο από την πλευρά της βάσης.
α) Να βρείτε το απόστημα h της πυραμίδας. (μ.2)
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της πυραμίδας. (μ.3)
10. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται : AD ύψος του τριγώνου,
 $\widehat{\Gamma AD} = 30^\circ$, $\Gamma D = 3\text{cm}$, E μέσο της AB και $DE = 3\text{cm}$.
Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x}{2x-4} - \frac{2}{3-x} = \frac{2}{x^2-5x+6}$$

2. Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = (x+2)^3 - (x+3)(3-x) - (x^3 + 5x^2) - 11x$.

α) Να αποδείξετε ότι : $P(x) = 2x^2 + x - 1$. (μ.4)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$ (μ.3)

γ) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων το πολυώνυμο: (μ.3)

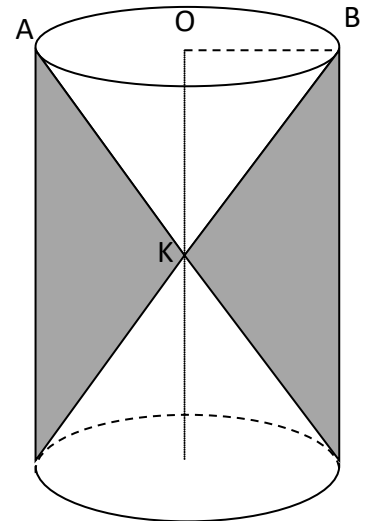
$$16x^2 + 8x + 1 - \psi^2$$

3. Από ένα κύλινδρο έχουν **αφαιρεθεί** δύο ίσοι κώνοι με κοινή κορυφή το Κ. Η βάση τους συμπίπτει με την κάθε βάση του κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η διάμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι ίση με 12 cm και $KO=8\text{cm}$. Να υπολογίσετε:

α) τον όγκο του στερεού που απομένει. (μ.5)

β) το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που απομένει. (μ.5)

Οι απαντήσεις μπορούν να δοθούν συναρτήσει του π .



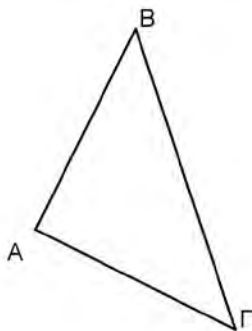
4. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με συντεταγμένες κορυφών $A(-1, 3)$, $B(1, 7)$ και $\Gamma(3, 1)$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. (μ.3)

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο. (μ.2)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου BM. (μ.2)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με την AB και περνά από το σημείο Γ. (μ.3)



5. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.

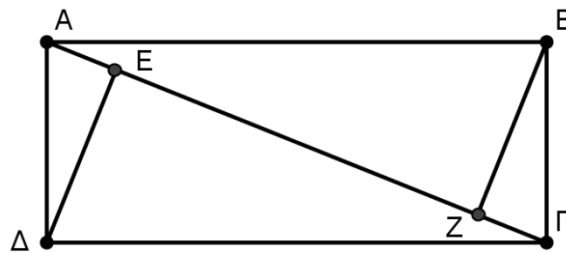
Από τις κορυφές Δ και Β φέρουμε κάθετες ΔΕ και ΒΖ πάνω στη διαγώνιο ΑΓ.

Αν Ο σημείο τομής των διαγωνίων του ΑΒΓΔ, $ΑΓ = 80\text{cm}$ και η γωνία $ΑΟΔ = 30^\circ$, να δείξετε ότι:

α) $ΔΕ = ΒΖ$ (μ.4)

β) ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (μ.4)

γ) Να βρείτε το μήκος του ΔΕ. (μ.2)



ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά

ΤΑΞΗ : Γ΄

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.****1.** Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα με χρήση ταυτοτήτων:

(α) $(x + 5)^2 =$

(β) $(a - 3)(a + 3) =$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $3x + 3y - 6 =$

(β) $4a^2 - 9 =$

3. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας, η οποία είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x + 1$ και περνά από το σημείο $A(1,1)$.**4.** Να βρείτε το **εμβαδόν της ολικής επιφάνειας**, τον **όγκο** και το **μήκος της διαγώνιου** κύβου με μήκος ακμής $3m$.**5.** Να λύσετε το σύστημα.

$$3x - 2y = 1$$

$$4x + 3y = 7$$

6. Να λύσετε την εξίσωση.

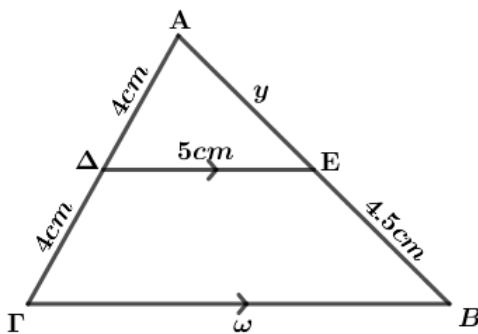
$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

7. Να αποδείξετε την ταυτότητα

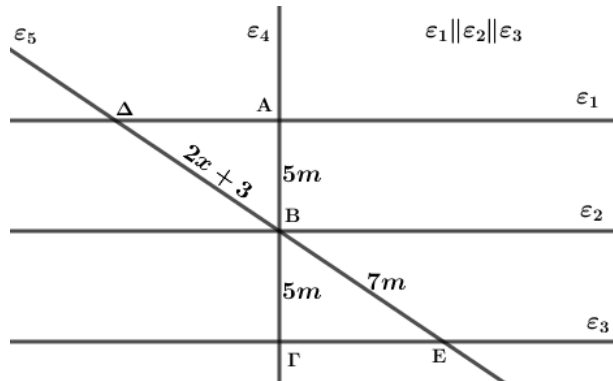
$$(a + 1)^3 - a(a - 2)(a + 2) - 2a^2 = (a + 1)^2 + 5a$$

8. Στα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε τις τιμές των χ , y και ω . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(α) (Μονάδες 3)



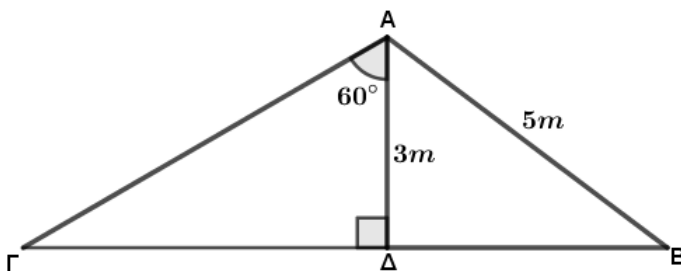
(β) (Μονάδες 2)



9. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$, το οποίο παρουσιάζεται πιο κάτω, να βρείτε:

(α) Τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B .

(β) Το μήκος του AG .



10. Το πιο κάτω τετράπλευρο είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Φέρουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ και την προεκτείνουμε προς το μέρος του B και προς το μέρος του Δ . Πάνω στις προεκτάσεις παίρνουμε σημεία K προς την πλευρά του B και Λ προς την πλευρά του Δ , τέτοια ώστε $BK = \Delta\Lambda$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AK\Gamma\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.



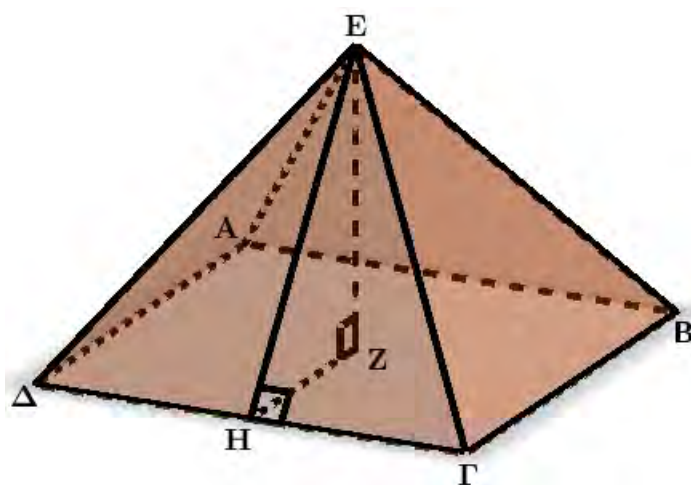
ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση.

$$\frac{3x^2 - 4x}{x^2 - x - 6} + \frac{x}{3 - x} + \frac{1}{x + 2} = 1$$

2. (α) Το πιο κάτω σχήμα είναι κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Αν το εμβαδόν του τριγώνου $ΕΓΔ$ είναι ίσο με $15m^2$ και το παράπλευρο ύψος της είναι κατά $1m$ μικρότερο από την ακμή της βάσης, να βρείτε το **ολικό εμβαδόν** και τον **όγκο** της πυραμίδας. (Μονάδες 7)



- (β) Δίνεται κύλινδρος με ακτίνα (R) και ύψος ($υ$). Να δείξετε ότι κύλινδρος με τριπλάσια ακτίνα και το ίδιο ύψος με τον αρχικό έχει εννιπλάσιο όγκο. (Μονάδες 3)

3. (α) Να κάνετε τις πράξεις και όλες τις δυνατές απλοποιήσεις.

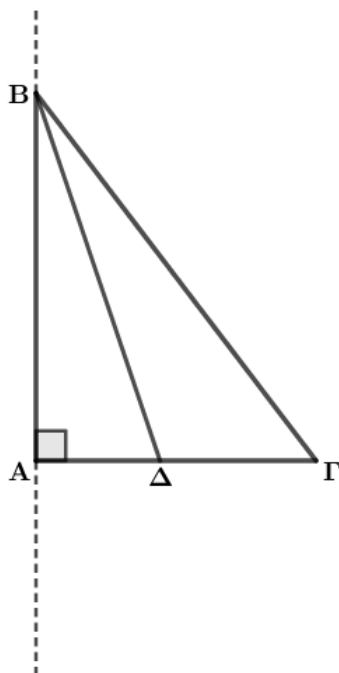
$$\frac{\left(\frac{x^2}{x-2} - \frac{2x}{x+2}\right) \cdot \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{4}\right)}{\frac{x^2+4}{4x}} =$$

- (β) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τις παραστάσεις:

(i) $\alpha x^3 + \alpha x^6 =$

(ii) $\alpha\beta + \alpha - \beta^2 - 4\beta - 3 =$

4. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $A = 90^\circ$ και το $B\Delta$ διχοτόμος. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΔE τέτοιο ώστε $\Delta E \perp B\Gamma$.
- (α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $B\Delta E$ είναι ίσα. (Μονάδες 4,25)
- (β) Αν η προέκταση του ΔE τέμνει την ευθεία AB στο Z να δείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma Z$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5,75)



5. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$ και $B(3,5)$ τα οποία βρίσκονται στην ευθεία $y = x + 2$ και το σημείο $\Gamma(3,1)$ εκτός αυτής.
- (α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
- (β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετου του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$.
- (δ) Αν $N(\beta - 2, \alpha + 2)$ και $K(\alpha, \beta)$, να δείξετε ότι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος NK βρίσκεται στην ευθεία $y = x + 2$.

ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΜΕΡΟΣ Α΄ (50 μονάδες)

Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα του μέρους Α΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1

Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα :

α) $(x - 3)^2 =$

β) $(3x - 5) \cdot (3x + 5) =$

ΘΕΜΑ 2

Να παραγοντοποιήσετε **πλήρως** σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $3y^2 - 6xy =$ (1μον.)

β) $x^2 - 6x - 27 =$ (1μον.)

γ) $x^2 - y^2 + 5x - 5y =$ (3μον.)

ΘΕΜΑ 3

Κύβος έχει ακμή 5cm. Να βρείτε:

α) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του κύβου (2μον.)

β) τον όγκο του κύβου (2μον.)

γ) τη διαγώνιο του κύβου. (1μον.)

ΘΕΜΑ 4

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), με AB = 8cm και ΑΓ = 6cm.

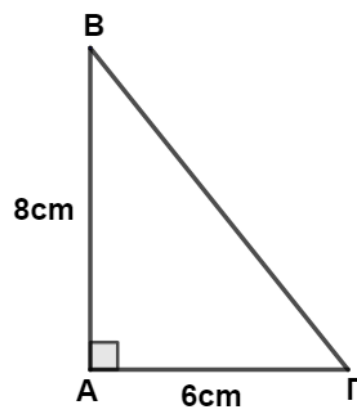
Να βρείτε:

α) την πλευρά ΒΓ

β) ημΒ

γ) συνΓ

δ) εφΒ



ΘΕΜΑ 5

Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha + \beta)^2 - (\alpha - \beta) \cdot (\beta + \alpha) = 2\beta \cdot (\alpha + \beta)$

ΘΕΜΑ 6

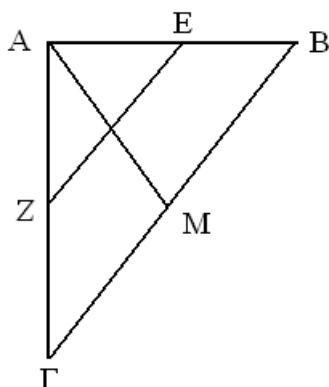
Να χαρακτηρίσετε με **Σωστό** ή **Λάθος** τις πιο κάτω προτάσεις βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

1	Αν διπλασιαστεί η ακτίνα της βάσης ενός κυλίνδρου, τότε θα διπλασιαστεί και ο όγκος του.	Σωστό / Λάθος
2	Ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αν έχει μια ιδιότητα του ορθογώνιου και μια του ρόμβου.	Σωστό / Λάθος
3	Αν μια τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 6 cm και ύψος 4 cm, τότε ο όγκος της είναι 48 cm^3 .	Σωστό / Λάθος
4	Αν δύο ευθείες συμπίπτουν, τότε το σύστημα των εξισώσεων τους είναι αδύνατο.	Σωστό / Λάθος
5	Η απόσταση των σημείων $A(1,5)$ και $B(6,7)$ είναι 13.	Σωστό / Λάθος

ΘΕΜΑ 7

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) φέρουμε τη διάμεσο AM .

Αν E είναι το μέσο της AB και Z είναι το μέσο της $A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $EZ = AM$.

**ΘΕΜΑ 8**

Δίνεται η παράσταση: $\frac{3x+8}{x^2+7x} \cdot \frac{x^2-5x-6}{x^2+2x+1} : \frac{x^2-36}{x^2+7x+6}$

α) Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε το αποτέλεσμα στην πιο απλή του μορφή. (4 μον)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ορίζεται η πιο πάνω παράσταση. (1 μον)

ΘΕΜΑ 9

α) Να εξετάσετε κατά πόσο οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 2x + 4$ και $\varepsilon_2: -6x + 3y = 1$ είναι παράλληλες ή κάθετες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το σημείο $A(-3,4)$ και είναι κάθετη με την ευθεία ε_1

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται η παράσταση: $\frac{2y}{2y+1} + \frac{5}{1-2y} - \frac{4y^2+1}{4y^2-1}$

Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε το αποτέλεσμα στην πιο απλή του μορφή.

ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα του μέρους Β'.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1

Να λύσετε το σύστημα :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{x-2y}{2} - \frac{5x-3y}{8} = \frac{15}{4} \\ \frac{3x+7y}{4} - \frac{x+9y}{6} = \frac{7}{6} \end{array} \right\}$$

ΘΕΜΑ 2

Κώνος έχει ακτίνα 12cm και ύψος 9cm.

Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας μιας σφαίρας.

Αφού κάνετε σχήμα και για τα δύο στερεά, να βρείτε:

- α) τη γενέτειρα του κώνου
- β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της σφαίρας
- γ) την ακτίνα της σφαίρας
- δ) τον όγκο της σφαίρας
- ε) τον όγκο του κώνου

(οι απαντήσεις β, δ και ε μπορούν να δοθούν συναρτήσει του π)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) .

Να προεκτείνετε την πλευρά ΒΓ προς το Β και το Γ κατά τμήματα ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, έτσι ώστε ΒΔ = ΓΕ.

Αν Κ είναι το μέσο της πλευράς ΑΒ και Λ το μέσο της ΑΓ, να αποδείξετε ότι :

- α) ΚΔ = ΛΕ
- β) τα Δ και Ε απέχουν ίσο από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα

ΘΕΜΑ 4

Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{1}{x^2-1} + \frac{4}{x^2+x} = \frac{1}{(x-1)^2}$

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$ και η γωνία B να είναι αμβλεία.

Από την κορυφή A φέρουμε την AE κάθετη στην προέκταση της ΓB και έστω M, N τα μέσα των $AB, \Delta\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο $MB\Gamma N$ είναι ρόμβος
- β) το τετράπλευρο $ME\Gamma N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 θέματα.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Θέμα 1:

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(\psi + 2)^2 =$

(β) $(\chi + 3)(\chi - 3) =$

Θέμα 2:

Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο τα πολυώνυμα:

(α) $4\chi + 4\psi - 16 =$ (μ.1,5)

(β) $\chi^2 + 5\chi + 6 =$ (μ.1,5)

(γ) $\frac{1}{3}\chi - \frac{1}{3}\psi + \alpha\chi - \alpha\psi =$ (μ.2)

Θέμα 3:

Να λύσετε το σύστημα:

$$3\chi + 5\psi = 31$$

$$\chi - 5\psi = -23$$

Θέμα 4:

Να βρείτε τον όγκο (V) και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας (Εολ) κύβου με ακμή $\alpha = 5\text{m}$.

Θέμα 5:

Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\chi^2 + 7\chi - 15 = 0$$

Θέμα 6:

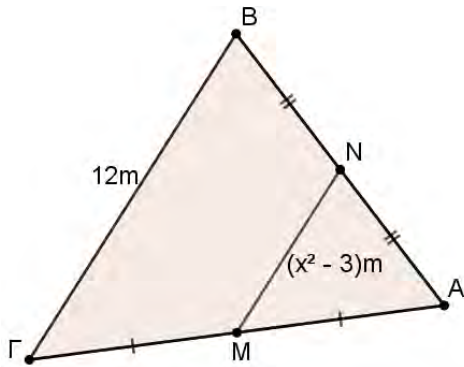
Αν $\chi + \psi = -3$, να βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$A = (\chi + 1)^2 + (\psi + 1)^2 - (\chi - \psi)^2 - 2\chi\psi$$

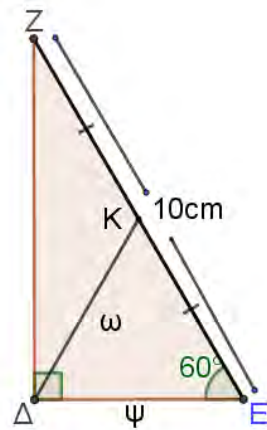
Θέμα 7:

Να υπολογίσετε τις τιμές των χ , ψ και ω , στις πιο κάτω περιπτώσεις, εξηγώντας πλήρως τον τρόπο σκέψης σας.

(α) $MN = (\chi^2 - 3)m$ και $B\Gamma = 12m$.

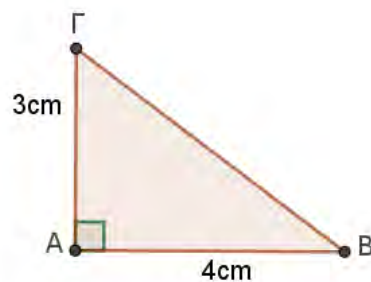


(β) $ZE = 10cm$, $\hat{E} = 60^\circ$ και K μέσον της EZ.



Θέμα 8:

(α) Ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της γωνίας Γ ισούται με $\frac{4}{3}$; (μον1)



(β) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B. (μον.4)

Θέμα 9:

Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ABΓ. Προεκτείνουμε το ύψος του ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Να αποδείξετε ότι ΕΓ=ΑΓ.

Θέμα 10:

Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\frac{3\chi+6}{\chi^2-6\chi+9} \cdot \frac{\chi^2-9}{\chi^2-4} =$

(β) $\frac{\alpha^4-\alpha^2}{\alpha-1} \div (\alpha^3 + \alpha^2) =$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 θέματα.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Θέμα 1:

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2}{x-3} + \frac{x}{2x-4} = \frac{2}{x^2-5x+6}$$

Θέμα 2:

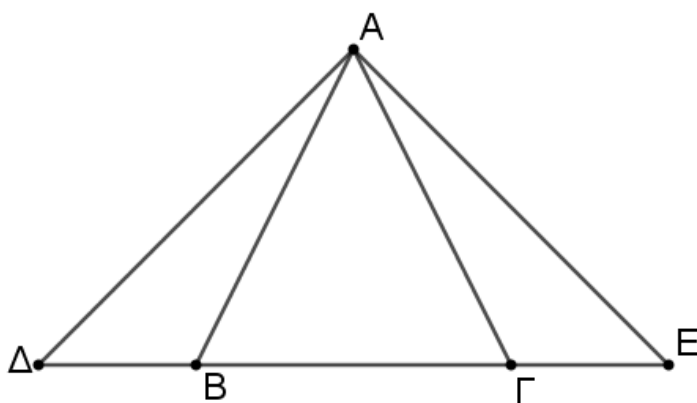
Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(3,5), B(2,1) και Γ(6,3).

- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της BΓ.
- (β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου ABΓ.
- (γ) Να βρείτε την κλίση της πλευράς AB.
- (δ) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB.

Θέμα 3:

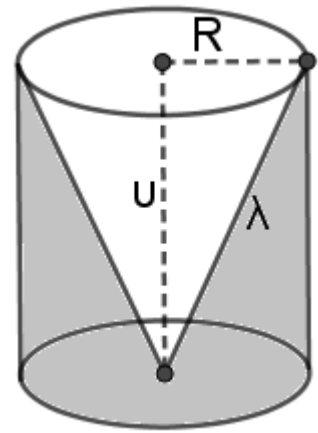
Τα τρίγωνα ABΓ και AΔΕ είναι ισοσκελή (AB=ΑΓ και ΑΔ=ΑΕ).

- (α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα AΔB και AΓΕ. (μον.4)
- (β) Αν M το μέσον της AΓ και N το μέσον της AB, να αποδείξετε ότι
ΔM = EN. (μον.4)
- (γ) Αν τα ΔM και EN τέμνονται στο K, να δείξετε ότι το KΔΕ είναι ισοσκελές. (μον.2)



Θέμα 4:

Εταιρεία κατασκευής γυάλινων ειδών κατασκευάζει κυλινδρικά βάζα, στα οποία αφαιρείται από το εσωτερικό τους κώνος, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν η ακτίνα της βάσης τους είναι $R = 6\text{ cm}$ και το εμβαδόν κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $96\pi\text{ cm}^2$, να βρείτε:



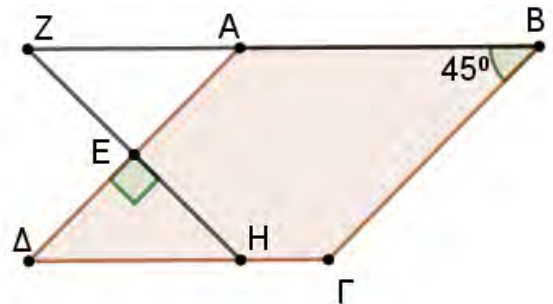
(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του βάζου. (μον. 4)

(β) Τον όγκο του γυαλιού που χρειάζεται για την κατασκευή ενός βάζου. (μον. 3)

(γ) Πόσα θα στοιχίσει στην εταιρεία το βάψιμο 200 τέτοιων βάζων, αν η μπουγιά για το βάψιμο γυαλιού στοιχίζει €1,50 το μπουκαλάκι και με κάθε μπουκαλάκι βάφονται 30 cm^2 ; (μον. 3)

Θέμα 5:

Δίνεται το διπλανό παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{B} = 45^\circ$. Η μεσοκάθετος της AD τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο H και την προέκταση της BA στο Z . Να αποδείξετε ότι το $AZ\Delta H$ είναι τετράγωνο.



ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις **δέκα (10)** ασκήσεις του **ΜΕΡΟΥΣ Α'.**

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **πέντε (5) μονάδες.**

1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 4) \cdot (x - 4) =$

(β) $(x - 3)^2 =$

2) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο κύβου με ακμή 4m.

3) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $5x^2 - 10x^3 =$

(μονάδα 1)

(β) $x^2 - 6x + 8 =$

(μονάδες 2)

(γ) $x^2 - \psi^2 + 2x - 2\psi =$

(μονάδες 2)

4) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 - 5x + 3 = 0$.

5) Να εξετάσετε αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 στις πιο κάτω περιπτώσεις τέμνονται, ταυτίζονται ή είναι παράλληλες, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

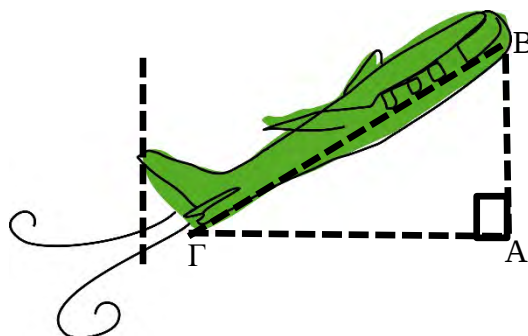
α) $\epsilon_1 : \psi = 3x + 6$
 $\epsilon_2 : \psi = 12 + 3x$

β) $\epsilon_1 : x + \psi = 5$
 $\epsilon_2 : 3\psi = 6x - 9$

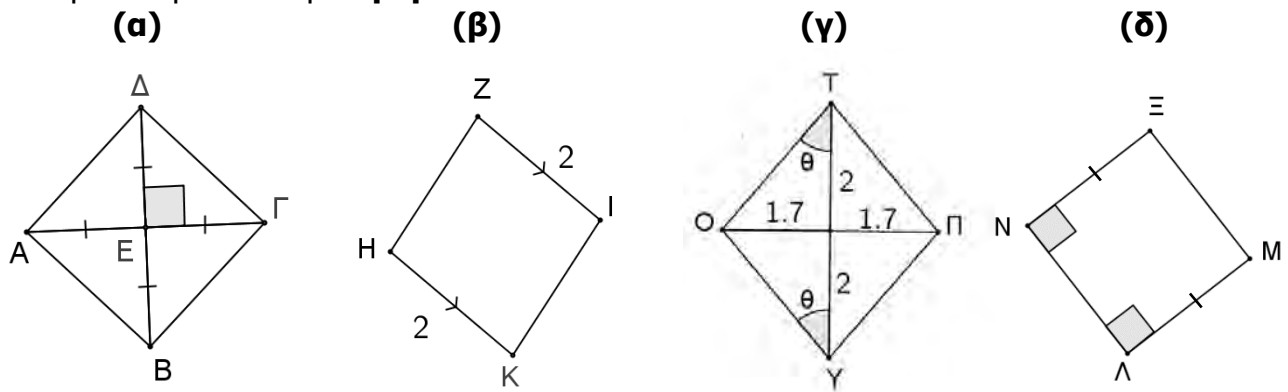
6) Να υπολογίσετε το μήκος του αεροπλάνου ΒΓ αν γνωρίζετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 40^\circ$,

$AB = 45\text{m}$, $\eta\mu 40^\circ \approx 0.64$, $\sigma\upsilon\nu 40^\circ \approx 0.77$ και $\epsilon\phi 40^\circ \approx 0.84$

Να δώσετε την απάντησή σας κατά προσέγγιση ακεραίου.



7) Δίνονται τα πιο κάτω τετράπλευρα. Να αντιστοιχίσετε κάθε σχήμα της **στήλης Α** με ένα τετράπλευρο από τη **στήλη Β**.



Στήλη Α	Στήλη Β
(α) ΑΒΓΔ τετράπλευρο	(i) Τραπεζίο
(β) ΖΙΚΗ τετράπλευρο	(ii) Ορθογώνιο Παραλληλόγραμμο
(γ) ΤΠΥΟ τετράπλευρο	(iii) Παραλληλόγραμμο
(δ) ΝΞΜΛ τετράπλευρο	(iv) Ρόμβος
	(v) Τετράγωνο

(α) →	(β) →	(γ) →	(δ) →
--------------	--------------	--------------	--------------

8) Να λύσετε το σύστημα:

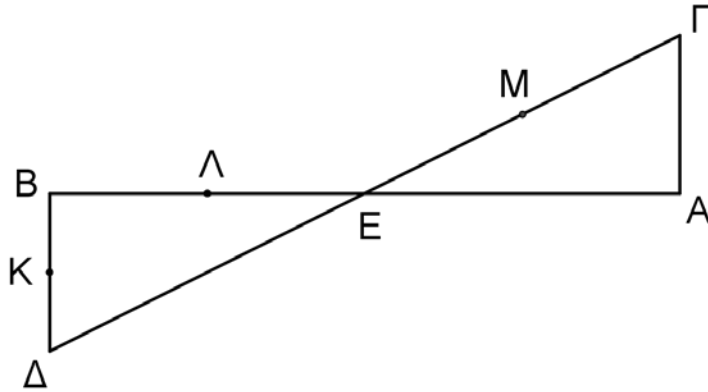
$$2(\psi - 3x) + 20 = 14$$

$$\frac{4x + 7}{5} - \frac{3(2x - \psi)}{10} = \frac{1}{2}$$

9) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{2}{x^2 - 4} - \frac{1}{x^2 + 2x} \right) : \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x} =$$

- 10)** Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι οι αποστάσεις ΓΑ και ΔΒ των σημείων Γ και Δ αντίστοιχα από την ΑΒ είναι ίσες. Αν Κ, Λ και Μ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΔ, ΒΕ και ΓΕ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:
- (α) ΔΕ=ΓΕ (μονάδες 3)
- (β) ΚΛ=ΑΜ (μονάδες 2)
- Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις **5 (πέντε)** ασκήσεις του **ΜΕΡΟΥΣ Β΄**.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **10 (δέκα)** μονάδες.

1) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2x}{x-2} + \frac{x}{5-x} = \frac{-12}{x^2 - 7x + 10}$

2) (α) Αν $\alpha = 2\beta$ να δείξετε ότι:

(μονάδες 5)

$$\frac{\frac{\frac{9}{\alpha} + \frac{9}{\beta}}{3} - \frac{1}{\beta}}{\frac{9}{\alpha^2} - \frac{9}{\beta^2}} = -6$$

(β) Αν $x + \psi = -1$ και $x \cdot \psi = -12$, να αποδείξετε τις πιο κάτω σχέσεις:

i) $x^2 + y^2 = 25$

(μονάδες 2)

ii) $(2x+3)^2 + (2\psi+3)^2 - 4(x+\psi) = 110$

(μονάδες 3)

- 3) Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$), να προεκτείνετε την πλευρά AB προς το B κατά τμήμα $BM=AB$ και την πλευρά $A\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma E=A\Gamma$. Από τα σημεία M και E να φέρετε τις αποστάσεις MD και EZ αντίστοιχα στις προεκτάσεις της πλευράς $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:
- (α) $MD=EZ$. (μονάδες 6)
- (β) Το τετράπλευρο $DZEM$ είναι ορθογώνιο. (μονάδες 4)
- (Να γίνει σχήμα – δεδομένα – ζητούμενα – απόδειξη)
- 4) Δίνονται τα σημεία $A(0, 3)$, $B(-3, -1)$, $\Gamma(0, -7)$ και $\Delta(3, -3)$.
- (α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (μονάδες 5)
- (β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου M του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ (μονάδες 2)
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που περνά από το σημείο M και είναι κάθετη στην πλευρά $B\Gamma$. (μονάδες 3)
- 5) Στο πιο κάτω σχήμα, σφαίρα είναι εγγεγραμμένη σε κύλινδρο (η σφαίρα εφάπτεται εσωτερικά του κυλίνδρου). Αν για να γεμίσει πλήρως με υγρό η σφαίρα χρειάστηκαν 18 ποτήρια σχήματος κώνου με διάμετρο βάσης 8 cm και γενέτειρα ίση με 5 cm, να βρείτε τον όγκο του κενού χώρου ανάμεσα στον κύλινδρο και την σφαίρα.



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ'

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 7)^2 =$

(β) $(x - 6)(x + 6) =$

2) Να λύσετε το σύστημα:

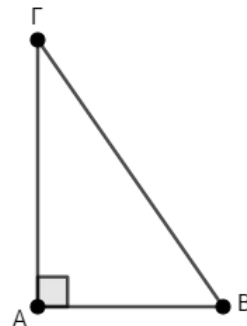
$$3\chi - 5\psi = -3$$

$$\chi + 2\psi = 10$$

3) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο τετραγωνικού πρίσματος με ακμή βάσης 5 cm και ύψος 10 cm.

4) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), η $\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \frac{5}{12}$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{5}{2}\varepsilon\varphi\hat{B} - \frac{52}{5}\sigma\upsilon\nu\hat{B} + 13\eta\mu\hat{B}$$



5) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $\alpha^2 + 5\alpha\chi =$

(β) $\chi^2 - 16 =$

(γ) $\chi^2 - 8\chi + 12 =$

(δ) $\alpha\chi + \chi^2 + \alpha\psi + \chi\psi =$

6) Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε τη διάμεσο $A\Delta$ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$. Επίσης προεκτείνουμε την $B\Gamma$ προς τα δύο μέρη έτσι ώστε $ZB = B\Gamma = \Gamma H$. Να δείξετε ότι:

(α) το τετράπλευρο $AZEH$ είναι παραλληλόγραμμο και (μον. 3)

(β) η διάμεσος $B\Theta$ του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίση με $\frac{AZ}{2}$. (μον. 2)

7) Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(2x - 3)(x - 4) = 0$

β) $2x^2 + 9x - 5 = 0$

8) Τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας $E_{\pi} = 60 \text{ m}^2$.

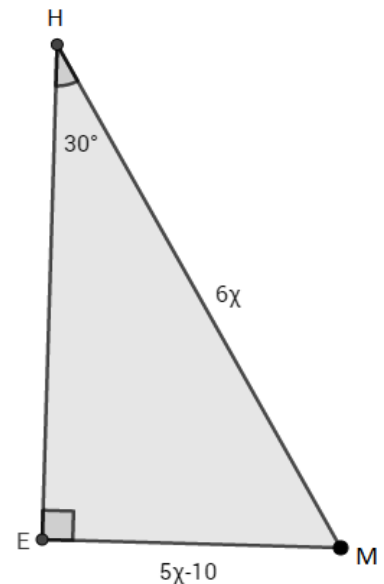
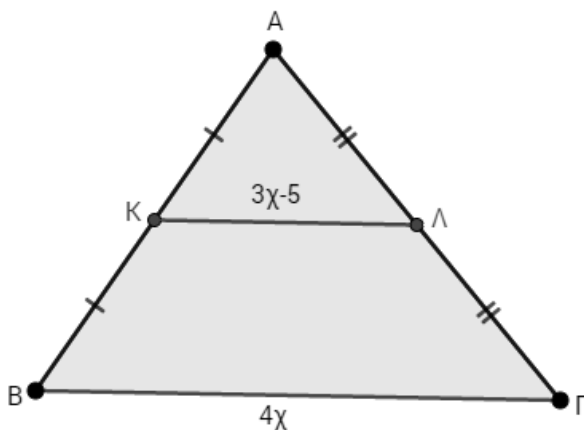
Αν η ακμή βάσης της πυραμίδας είναι $a = 6 \text{ m}$, να βρείτε:

(α) το εμβαδό της ολικής επιφάνειας ($E_{ολ}$)

(β) τον όγκο της πυραμίδας (V)

9) Να υπολογίσετε τις τιμές των x στα πιο κάτω σχήματα.

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



10) Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφές $A(-1, 3)$, $B(-2, -3)$, $\Gamma(5, 4)$.

Να βρείτε:

(α) Το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

(β) Την εξίσωση του ύψους AD .

ΜΕΡΟΣ Β΄:

Να λύσετε και τα 5 θέματα του Μέρους Β΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) (α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3x^2}{x+5} + \frac{2x}{3-x} = \frac{2x^3 - 3x^2 - 22x}{x^2 + 2x - 15} \quad (\text{μον.8})$$

(β) Να δείξετε ότι για το πολυώνυμο: $P(x) = x^2 - 7x + 8$ ισχύει η σχέση:
 $P(7 - x) = P(x)$. (μον. 2)

2) Να κάνετε τις πράξεις:

$$(α) \frac{3\chi\psi + 2\chi - 15\psi - 10}{\chi^2 + \chi - 30} \cdot \frac{\chi^2 - 36}{9\psi^2 - 4} =$$

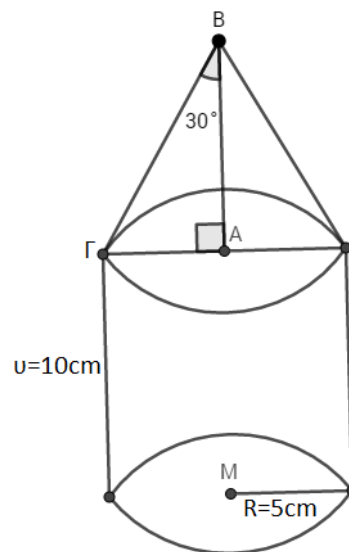
$$(β) \frac{\chi^2 - 7\chi + 12}{\chi^3 - 6\chi^2 + 9\chi} \div \left(\frac{2}{\chi} - \frac{3}{3-\chi} \right) =$$

3) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένας κύλινδρος με ακτίνα $R=5\text{cm}$ και ύψος $u=10\text{cm}$. Στην μία του βάση εφαρμόζουμε κώνο του οποίου η γενέτειρα σχηματίζει με το ύψος του γωνία 30° δηλαδή $\angle \Gamma \hat{B} A = 30^\circ$.

Να υπολογίσετε:

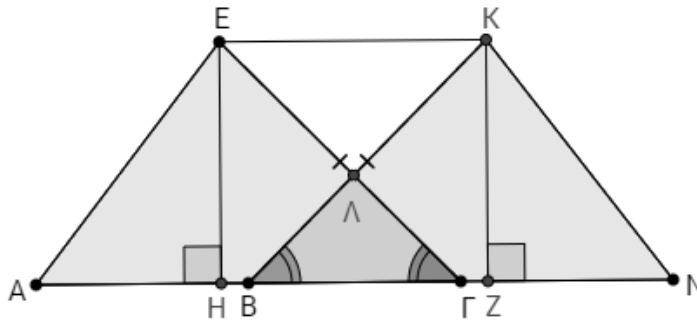
(α) τον όγκο του στερεού

(β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.



- 4) Δίνονται ορθογώνια τρίγωνα AEH ($\widehat{AHE} = 90^\circ$) και KZN ($\widehat{KZN} = 90^\circ$).
Από το πιο κάτω σχήμα έχουμε επίσης $AB = \Gamma N$, $E\Gamma = BK$ και $\widehat{A\Gamma E} = \widehat{K\hat{B}N}$.
Να αποδείξετε ότι:

- (α) Τα τρίγωνα $AE\Gamma$ και BKN είναι ίσα.
- (β) Τα ορθογώνια τρίγωνα AEH και KZN είναι ίσα.
- (γ) Το τετράπλευρο $HEKZ$ είναι ορθογώνιο
- (δ) Το τετράπλευρο $AEKN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο



- 5) Δίνεται το τετράπλευρο με κορυφές $A(-7, -4)$, $B(-8, 2)$, $\Gamma(-2, 1)$ και $\Delta(-1, -5)$.
(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.
(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο τομής των διαγώνιων του τετράπλευρου $AB\Gamma\Delta$ και είναι κάθετη με την ευθεία (ε) : $4\psi + x = -18$.

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: **Γ'**

ΜΕΡΟΣ Α Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

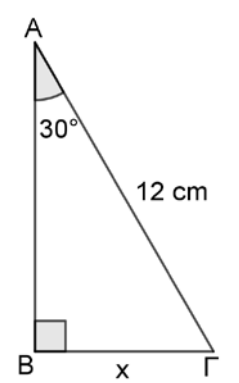
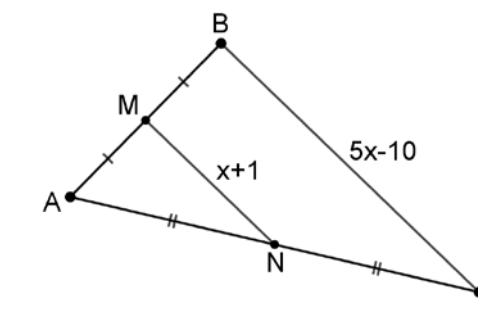
α) $(x + 5)^2 =$

β) $(4 - \alpha)(4 + \alpha) =$

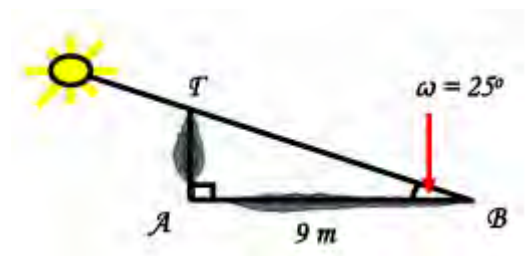
2. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11 \\ 5x + 2y = 13 \end{cases}$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή του x σε καθένα από τα πιο κάτω τρίγωνα:
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

α)  (Μον. 2)	β)  (Μον. 3)
---	--

4. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε το ύψος ΑΓ του κυπαρισσιού, αν γνωρίζετε ότι η σκιά του έχει μήκος $AB = 9\text{m}$ και οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν με το έδαφος γωνία $\omega = 25^\circ$.



Δίνονται: $\eta\mu 25^\circ \cong 0,42$, $\sigma\upsilon\nu 25^\circ \cong 0,91$
 $\epsilon\phi 25^\circ \cong 0,47$

5. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{\frac{x}{4} - \frac{9}{4x}}{x + 5 + \frac{6}{x}} =$$

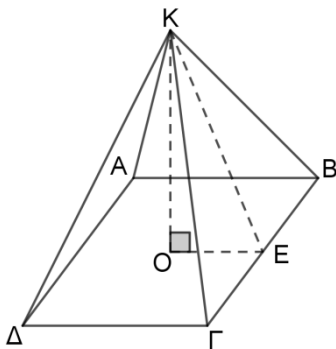
7. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Αν οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ είναι παράλληλες και ίσες, να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

8. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{x^2 - 5}{x^2 + x - 20} + \frac{3x - 1}{4 - x} + \frac{x}{2x + 10} =$$

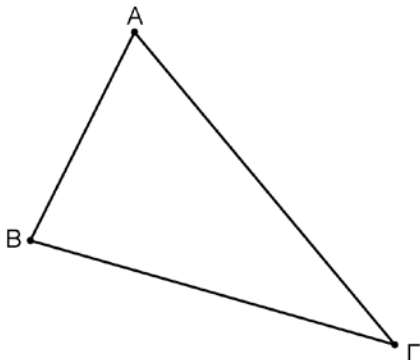
9. Η πιο κάτω κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρο ύψος $KE = 13\text{cm}$.
Αν $OE = 5\text{cm}$, να υπολογίσετε:

- α) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας, **(Mov. 1,5)**
- β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας και **(Mov. 1,5)**
- γ) τον όγκο της πυραμίδας. **(Mov. 2)**



10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να φέρετε τη διάμεσο ΑΜ και να την προεκτείνετε κατά τμήμα $MD = AM$. Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα και **(Mov. 3)**
- β) οι αποστάσεις του Α και του Δ από τη ΒΓ είναι ίσες. **(Mov. 2)**



ΜΕΡΟΣ Β Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1}{x^2 + x} + \frac{2}{x^2 - 1} + \frac{x+1}{x^2 - x} = 0$$

2. α) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

$$(x-2)^3 - (x+3)(x-3) - x(x^2 - 16x + 18) = (3x-1)^2$$

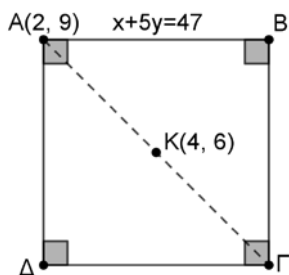
β) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$ax + \beta x - \alpha y - \beta y =$$

$$x^2 - 14x + 49 - 25y^2 =$$

3. **Τετράγωνο ΑΒΓΔ** έχει κορυφή Α(2,9) και κέντρο Κ(4,6). Η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση ΑΒ : $x + 5y = 47$. Να υπολογίσετε:

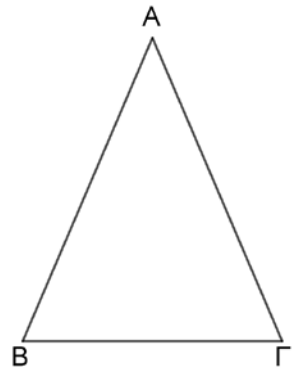
- α) την κλίση της πλευράς ΓΔ, **(Μον. 1)**
- β) την κλίση της πλευράς ΒΓ, **(Μον. 1)**
- γ) τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΚ, **(Μον. 2)**
- δ) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ, **(Μον. 2,5)**
- ε) την κλίση της διαγωνίου ΑΓ και **(Μον. 1,5)**
- στ) το μήκος της διαγωνίου ΑΓ. **(Μον. 2)**



4. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε τη διχοτόμο AH . Στις πλευρές AB και $A\Gamma$ παίρνουμε δύο σημεία Δ και E αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

α) Αν Z είναι τυχαίο σημείο της διχοτόμου AH , να δείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $A\Gamma Z$ είναι ίσα. **(Μον. 6)**

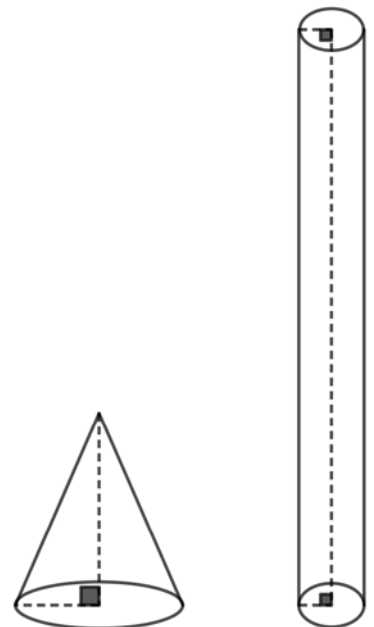
β) Αν προεκτείνουμε τη διχοτόμο AH κατά τμήμα $H\Theta = AH$, να δείξετε ότι το $AB\Theta\Gamma$ είναι ρόμβος. **(Μον. 4)**



5. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται δύο μεταλλικές κατασκευές. Η μία κατασκευή έχει σχήμα κώνου και η άλλη κατασκευή έχει σχήμα κυλίνδρου. Ο κώνος έχει όγκο $324\pi \text{ cm}^3$ και ύψος 12 cm. Ο κύλινδρος έχει ύψος δωδεκαπλάσιο της ακτίνας της βάσης του και όγκο ίσο με τον όγκο του κώνου. Να υπολογίσετε:

- α) το εμβαδόν της **κυρτής επιφάνειας** του **κώνου** και **(Μον. 4,5)**
- β) το εμβαδόν της **ολικής επιφάνειας** του **κυλίνδρου**. **(Μον. 5,5)**

Οι απαντήσεις μπορούν να δοθούν και συναρτήσει του π .



ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ '

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τα 10 ΘΕΜΑΤΑ.

Κάθε ΘΕΜΑ βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1: Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις

(α) $5\alpha + 5\beta =$

(β) $\chi^2 - 9 =$

ΘΕΜΑ 2: Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

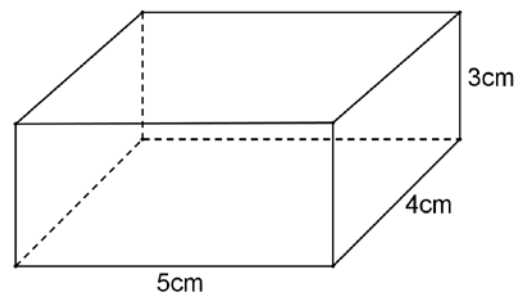
(α) $(\chi - 5)^2 =$

(β) $(2\chi + 3)(2\chi - 3) =$

ΘΕΜΑ 3: Να λύσετε την εξίσωση: $2\chi^2 + 5\chi - 12 = 0$

ΘΕΜΑ 4: Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις $\alpha=4\text{cm}$, $\beta=5\text{cm}$ και $\gamma=3\text{cm}$. Να βρείτε:

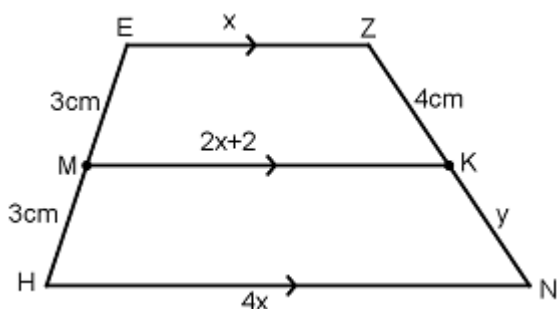
(α) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και



(β) τον όγκο του στερεού.

ΘΕΜΑ 5: Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 3\chi - 4\psi = 10 \\ 5\chi + 2\psi = 8 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 6: Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε το χ και γ . Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



ΘΕΜΑ 7: Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$), $\eta \epsilon\phi\text{B} = \frac{8}{15}$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = 30 \epsilon\phi\text{B} - 34\eta\mu\text{A} + 17\sigma\upsilon\text{nA}$

ΘΕΜΑ 8: Να αποδείξετε ότι : $\left(2\chi^3 + \frac{3}{\chi}\right)^2 - \left(2\chi^3 - \frac{3}{\chi}\right)^2 = 24\chi^2$

ΘΕΜΑ 9: Το άθροισμα των πλευρών δύο τετραγώνων είναι 8cm, ενώ η διαφορά των εμβαδών τους είναι 16cm². Να βρείτε τα μήκη των πλευρών των δύο τετραγώνων.

ΘΕΜΑ 10: Δίνεται η ρητή αλγεβρική παράσταση: $A = \frac{\chi^2 - 1}{\chi^4 + \chi} \div \frac{\chi + 1}{\chi^2 - \chi + 1}$, όπου $\chi \neq 0$ και $\chi \neq -1$.

Να αποδείξετε ότι: $A = \frac{\chi - 1}{\chi(\chi + 1)}$

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τα 5 ΘΕΜΑΤΑ.

Κάθε ΘΕΜΑ βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1: Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$ τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντιστοίχως. Προεκτείνουμε το ΔΕ κατά τμήματα ΕΖ και ΔΗ, έτσι ώστε ΔΗ = ΔΕ = ΕΖ. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τετράπλευρο ΒΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο

(β) το τετράπλευρο ΑΓΕΗ είναι ρόμβος

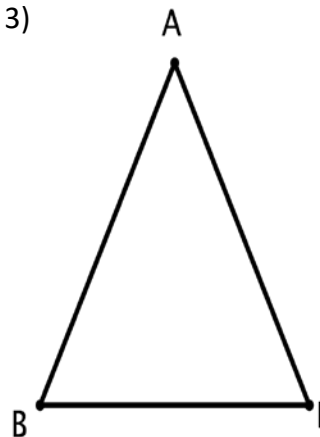
ΘΕΜΑ 2: Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\psi - 1}{\psi} - \frac{2}{\psi + 1} = \frac{\psi + 3}{\psi^2 + \psi}$

ΘΕΜΑ 3: Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ε τυχόν σημείο της διαμέσου ΑΔ. Αν Η, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) ΕΗ=ΕΖ (μον. 4)

β) Οι αποστάσεις ΗΚ και ΖΛ από την πλευρά ΒΓ είναι ίσες. (μον. 3)

γ) Το ΗΖΛΚ είναι ορθογώνιο. (μον. 3)



ΘΕΜΑ 4: Το πιο κάτω σχήμα δείχνει ένα μολύβι το οποίο αποτελείται από έναν κύλινδρο με διάμετρο 1cm και ύψος 16,8cm και έναν κώνο με ύψος 1,2cm

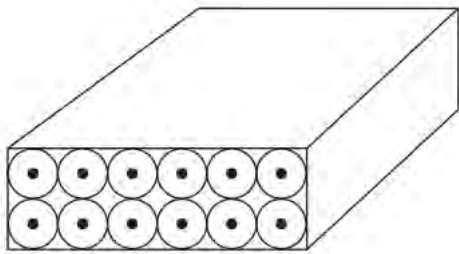


Να βρείτε:

α) τον όγκο του μολυβιού (μον. 4)
(Η απάντησή σας να δοθεί συναρτήσει του π).

β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του μολυβιού (μον. 4)
(Η απάντησή σας να δοθεί συναρτήσει του π).

γ) τον όγκο του κουτιού που δεν καταλαμβάνεται από τα μολύβια, αν δώδεκα μολύβια όπως το πιο πάνω χωράνε ακριβώς στο κουτί σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. ($\pi=3,14$) (μον. 2)



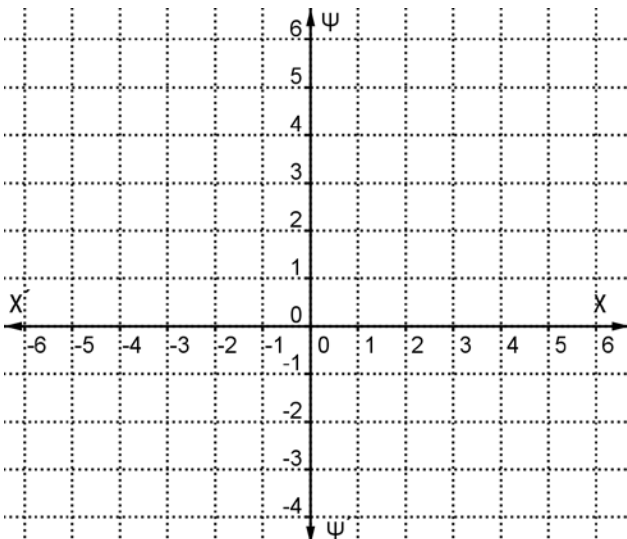
ΘΕΜΑ 5: Δίνονται τα σημεία A(-1, 2), B(3, 6), Γ(5, 4) και Δ(1, 0).

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα AB και ΓΔ έχουν μήκος ίσο με $\sqrt{32}$.

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων του.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 που περνά από την κορυφή Γ και είναι κάθετη με την ευθεία ΑΓ.



ΜΕΡΟΣ Α': Το μέρος αυτό αποτελείται από δέκα (10) ασκήσεις. Να λύσετε και τις δέκα (10).
Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

α) $(x - 5)(x + 5) =$

β) $(2x + 3)^2 =$

2. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$3x - 2\psi = 8$

$2x + \psi = 3$

3. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις βάσης 4 m και 6 m και ύψος 10 m. Να υπολογίσετε: α) τον όγκο του και
β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας

4. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$3x^2 - 5x + 2 = 0$

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 που περνά από το σημείο $A(-2, 3)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_1: \psi = -2x + 5$

6. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πιο κάτω πολυώνυμα:

α) $2\alpha^2 + 6\alpha\beta =$

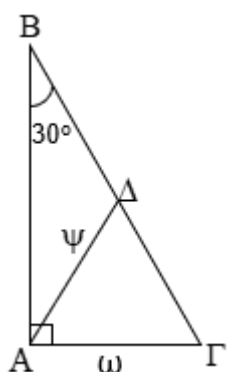
β) $\beta^2 - 49 =$

γ) $x^2 - 7x + 12 =$

δ) $\alpha^2 - 4\alpha\beta + 2\alpha - 8\beta =$

7. Να βρείτε την αριθμητική τιμή των ω , ψ και χ στα πιο κάτω σχήματα. Να δικαιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας.

α)



Δεδομένα

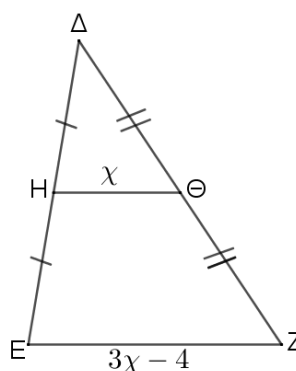
$\hat{A} = 90^\circ$

$\hat{B} = 30^\circ$

$B\Gamma = 12\text{cm}$

Δ μέσο της BΓ

β)



Δεδομένα

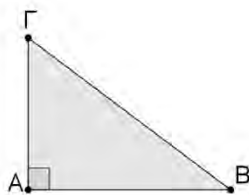
H μέσο της ΔΕ

Θ μέσο της ΔΖ

$H\Theta = \chi$

$EZ = 3\chi - 4$

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και $\eta\mu B = \frac{3}{5}$. Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: $\frac{16\varepsilon\varphi B - 5\eta\mu\Gamma}{15\sigma\upsilon\nu\Gamma} =$



9. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{\alpha+7}{\alpha^2+4\alpha+3} - \frac{3}{\alpha+1} \right) : \left(\frac{2}{\alpha+3} \right) =$$

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA να πάρετε σημεία E και H αντίστοιχα, ώστε $AE = AH$. Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMH και AME είναι ίσα.

ΜΕΡΟΣ Β': Το μέρος αυτό αποτελείται από πέντε (5) ασκήσεις. Να λύσετε και τις πέντε (5). Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ και $A\Delta$ η διχοτόμος του. Από το σημείο Δ να φέρετε ευθεία παράλληλη προς την AB που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το σημείο E να φέρετε ευθεία παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z . Να αποδείξετε ότι:

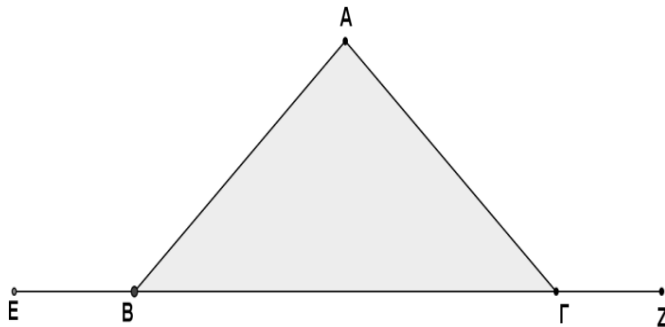
- α) Το τετράπλευρο $BZED$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές.
- γ) $AE = BZ$.

2. α) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 1$.
- (i) Να αποδείξετε ότι $P(x+1) = x^3 + 3x^2 + 3x$.
 - (ii) Αν $P(x+1) = x^3$, να βρείτε την τιμή του x .

- β) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$\frac{3x^2}{x-4} + \frac{2x}{2-x} = \frac{2x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 6x + 8}$$

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(1,5)$, $B(3,-2)$ και $\Gamma(10,0)$.
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
 - β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
 - γ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου $AB\Gamma$.
 - δ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους BD του τριγώνου $AB\Gamma$.
4. α) Η περίμετρος της βάσης συμπαγούς μεταλλικού κώνου είναι ίση με 24π cm και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του είναι ίσο με 300π cm². Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου.
- β) Λιώνουμε τον πιο πάνω κώνο και με το μέταλλο κατασκευάζουμε συμπαγείς κυλίνδρους ακτίνας 1 cm και ύψους 4 cm. Πόσους κυλίνδρους κατασκευάζουμε;
5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Να φέρετε τις διχοτόμους των γωνιών $\widehat{ABE}$ και $\widehat{A\Gamma Z}$ (τα σημεία E , B , Γ και Z είναι συνευθειακά), οι οποίες όταν προεκταθούν τέμνονται στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι:
- α) Το σημείο Δ **ισαπέχει** από τις διχοτόμους των γωνιών $\widehat{ABE}$ και $\widehat{A\Gamma Z}$.
 - β) $\Delta M \perp B\Gamma$, όπου M το μέσο της $B\Gamma$.



ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ : Γ΄

ΜΕΡΟΣ Α΄ (50 μονάδες)

Να απαντήσετε και στα 10 θέματα.

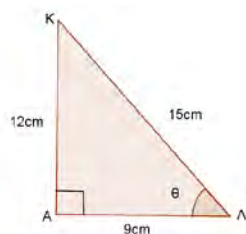
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1: Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $8\psi + 8\alpha =$

β) $\chi^2 - 9 =$

ΘΕΜΑ 2: Να βρείτε το ημίτονο και το συνημίτονο της γωνίας θ ($\eta\mu\theta$, $\sigma\upsilon\nu\theta$) .



ΘΕΜΑ 3: Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

α) $(\omega + 9)^2 =$

β) $(\alpha - 7)(\alpha + 7) =$

ΘΕΜΑ 4: Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κύβου που έχει ακμή 3 m .

ΘΕΜΑ 5: Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 5\chi - 2\psi = 11 \\ -2\chi + 2\psi = -2 \end{cases}$$

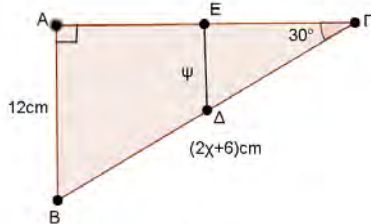
ΘΕΜΑ 6: Να λύσετε την εξίσωση:

$$5\chi^2 - 2\chi - 3 = 0$$

ΘΕΜΑ 7: Να κάνετε τις πράξεις και όλες τις δυνατές απλοποιήσεις:

$$\left(\frac{5}{\chi-2} - \frac{3\chi}{\chi^2-3\chi+2} \right) : \frac{2\chi-5}{\chi^2-3\chi+2} =$$

ΘΕΜΑ 8: Στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο δίνεται $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και η πλευρά $B\Gamma = (2\chi + 6)$ cm. Αν Ε και Δ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα να υπολογίσετε το χ και ψ (Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας αναφέροντας τα σχετικά θεωρήματα).



ΘΕΜΑ 9: Δίνονται ευθείες $\varepsilon_1: \psi = (2\omega - 18)\chi + 7$, $\varepsilon_2: 8\chi - 2\psi = 4$ που είναι παράλληλες.

- Να βρείτε την τιμή του ω .
- Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(-4, 5)$ και είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 .

ΘΕΜΑ 10: Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ προς το Β και Γ και παίρνουμε τμήματα ΒΔ και ΓΕ, αντίστοιχα, έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να απαντήσετε και στα 5 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1: Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις πιο κάτω παραστάσεις:

i) $\kappa^2(\beta - 2) + \gamma^2(2 - \beta) =$

ii) $\chi^2 - 6\chi + 9 - 25\alpha^2 =$

ΘΕΜΑ 2: Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $B\Delta = 2(A\Gamma)$. Αν οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ τέμνονται στο Ο και τα σημεία Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΟΒ και ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 3: i) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2}{x-4} - \frac{14}{x^2-x-12} = \frac{x+2}{x^2+3x}$$

ii) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\chi - 1)^3 - \chi(\chi - 2)(\chi + 2) = \chi(7 - 3\chi) - 1$$

ΘΕΜΑ 4: Τρίγωνο ΚΕΖ έχει κορυφές $K(5,3)$, $Z(-2,2)$, $E(1,-1)$.

- i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου της πλευράς ΚΕ.
- ii) Να βρείτε την κλίση των πλευρών ΚΕ, ΖΕ και ΖΚ.
- iii) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΕΖ είναι ορθογώνιο.
- iv) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους που φέρουμε από τη κορυφή Ε.

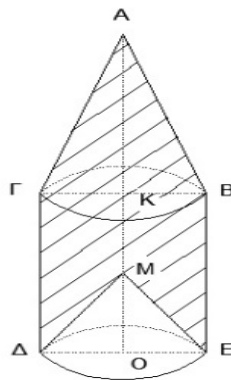
ΘΕΜΑ 5: Σε ένα συμπαγή κύλινδρο, όπως φαίνεται πιο κάτω, έχει ενσωματωθεί ένας κώνος ΑΒΓ (επίσης συμπαγής).

Το εμβαδόν της βάσης του κυλίνδρου είναι $25\pi \text{ m}^2$ και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου ΑΒΓ είναι $65\pi \text{ m}^2$. Το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με το ύψος του κώνου ΑΒΓ και Μ είναι το μέσο του τμήματος ΟΚ.

Από το στερεό αυτό αφαιρείται ο κώνος ΜΔΕ.

Να υπολογίσετε: i) τον όγκο του στερεού που απομένει

- ii) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που απομένει
(Η απάντηση μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π).



Μάθημα: **Μαθηματικά Γ' Τάξης**

ΜΕΡΟΣ Α: Να απαντήσετε **και** στις δέκα (10) ερωτήσεις του Α μέρους. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

- 1) (α) Να εξετάσετε κατά πόσο το σημείο $(1, -1)$ είναι η λύση του συστήματος. (2 μ)

$$\psi = \chi - 1$$

$$\psi = 2\chi - 1$$

- (β) Να γράψετε μια ευθεία που να ταυτίζεται με την ευθεία $\psi = 2\chi - 1$. (2 μ)

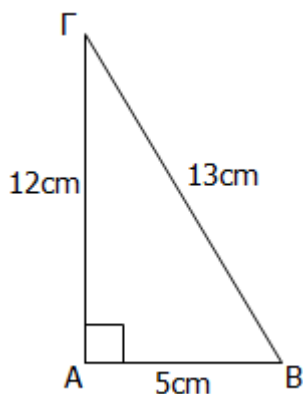
- (γ) Να γράψετε μια ευθεία που να είναι παράλληλη με την ευθεία $\psi = 2\chi - 1$. (1 μ)

- 2) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $3\chi\psi - 9\psi =$

(β) $\chi^2 - 8\chi + 15 =$

- 3) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $AB = 5\text{cm}$, $A\Gamma = 12\text{cm}$ και $B\Gamma = 13\text{cm}$. Να χαρακτηρίσετε με Ορθό ή Λάθος τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς, κυκλώνοντας τον σωστό χαρακτηρισμό.



$\eta\mu B = \frac{12}{13}$	Ορθό / Λάθος
$\sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{5}{13}$	Ορθό / Λάθος
$\epsilon\phi\Gamma = \frac{5}{12}$	Ορθό / Λάθος
$\eta\mu\Gamma = \frac{5}{13}$	Ορθό / Λάθος
$\epsilon\phi B = \frac{5}{12}$	Ορθό / Λάθος

- 4) Να βρείτε τα αναπτύγματα χρησιμοποιώντας ταυτότητες:

(α) $(x + 4)^2 =$ (1 μ)

(β) $(2\omega - 1)(2\omega + 1) =$ (1 μ)

(γ) $(x - 2)^3 =$ (3 μ)

5) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με $AB = AG$ και Μ τυχαίο σημείο του ύψους ΑΔ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΜΔΒ και ΜΔΓ είναι ίσα. (Να κάνετε το σχήμα)

6) Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα με πλευρά βάσης 6cm και ύψος 4cm, να υπολογίσετε:

(α) τον όγκο της.

(β) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας.

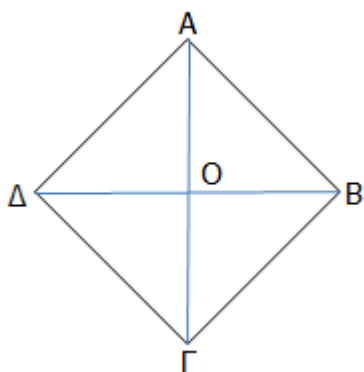
7) Σε τυχαίο τρίγωνο ABΓ, ΑΕ διχοτόμος της γωνίας Α και Ζ, Η σημεία πάνω στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα έτσι ώστε $AZ = AH$. Να δείξετε ότι $ZE = HE$. (Να κάνετε το σχήμα)

8) Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\frac{\chi\psi^2}{\chi^2+3\chi-18} \cdot \frac{4\chi+24}{\chi\psi} =$

(β) $\frac{3x^2-3}{x^3+x^2-2x} \div \left(\frac{3}{x^2-4} + \frac{1}{x+2} \right) =$

9) Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ. Αν $AO=OB$ και $\widehat{OAB} = 45^\circ$ να δείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι τετράγωνο.



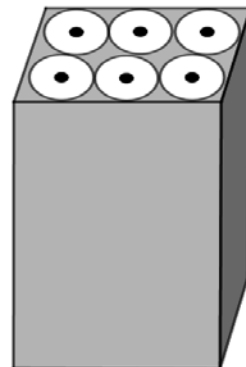
10) Αν $\alpha + \beta = 7$ και $\alpha\beta = 3$, να βρείτε την αριθμητική τιμή των παραστάσεων:

(α) $(\alpha + 3)(\beta + 3)$

(β) $\alpha^2 + \beta^2$

ΜΕΡΟΣ Β: Να απαντήσετε **και** στις 5 ερωτήσεις του Β μέρους. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

- 1) Μια συσκευασία μολυβιών σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, περιέχει 6 μολύβια σε δύο σειρές των τριών. Τα μολύβια έχουν σχήμα κυλινδρικό και δεν είναι ξυσμένα. Αν η διάμετρος κάθε μολυβιού είναι 1cm και το μήκος του 16cm, να υπολογίσετε τον κενό χώρο της συσκευασίας.



- 2) (α) Σ' ένα διαγώνισμα με 20 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής, για κάθε σωστή απάντηση ο μαθητής παίρνει 5 βαθμούς, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση χάνει 2 βαθμούς. Αν ο μαθητής πήρε συνολικά 65 βαθμούς, να βρείτε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και πόσες λάθος. (Να λυθεί με σύστημα) (4 μ)

(β) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1, -2), Β(3, 4) και Γ(7, -4).

(i) Να δείξετε ότι $\hat{A} = 90^\circ$. (3 μ)

(ii) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΑΔ. (3 μ)

- 3) (α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(i) $\alpha^2 + 2\alpha + 1 - 16\beta^2 =$ (2,5 μ)

(ii) $\alpha\beta - 10\beta - \alpha + 10 =$ (2,5 μ)

(β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: (5 μ)

$$\left(\frac{\chi}{\psi} - 2 + \frac{\psi}{\chi}\right) \div \left(\frac{\chi}{\chi\psi + \psi^2} - \frac{\psi}{\chi^2 + \chi\psi}\right) = \chi - \psi$$

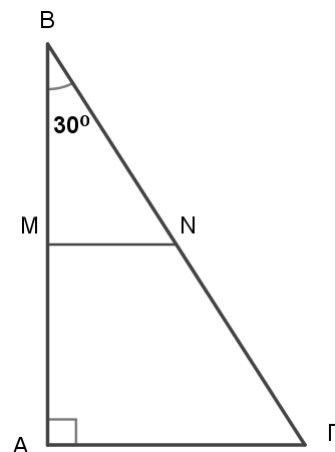
- 4) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ και ΒΓ = 32cm.

Αν Μ, Ν μέσα των

πλευρών ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα,

(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΝΓΑ είναι ορθογώνιο τραπέζιο.

(β) Να προεκτείνετε την πλευρά ΜΝ κατά τμήμα ΝΚ έτσι ώστε ΜΝ=ΝΚ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΜΚΓΑ είναι ορθογώνιο.



(γ) Να προεκτείνετε την πλευρά NM κατά τμήμα ΜΛ έτσι ώστε $NM=ML$.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΛΝΓΑ είναι παραλληλόγραμμο.

(δ) Αν Δ μέσο της ΜΑ, Ε μέσο της ΝΓ, να υπολογίσετε το μήκος ΔΕ.

- 5) (α) Να βρείτε τις διαστάσεις ορθογωνίου, αν γνωρίζουμε ότι το μήκος του είναι 4 μονάδες μεγαλύτερο από το πλάτος του και το εμβαδόν του 8 μονάδες μεγαλύτερο από την περίμετρό του. (4 μ)

(β) Να λύσετε την εξίσωση:

(6 μ)

$$\frac{x^2+5}{x^2-25} + \frac{3}{5-x} = \frac{2}{x+5} - 1$$

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+5)^2 =$

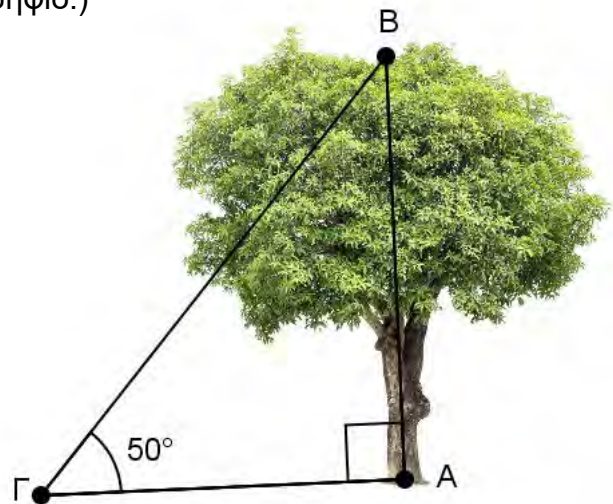
β) $(x+11)(x-11) =$

2. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα εξισώσεων.

$$5x - 6y = 8$$

$$3x + 6y = -24$$

3. Ο κύριος Φίλιππος στέκεται στο σημείο Γ και θέλει να υπολογίσει το ύψος ενός δέντρου. Τοποθέτησε ένα γωνιόμετρο σε απόσταση $AG = 8m$ από τον κορμό του δέντρου και υπολόγισε ότι το μέτρο της γωνιάς προς την κορυφή του δέντρου είναι 50° . Με τη χρήση τριγωνομετρικών αριθμών να υπολογίσετε:
- α) το ύψος του δέντρου και
 - β) την απόσταση ΒΓ.
- (Οι απαντήσεις σας να δοθούν με ένα δεκαδικό ψηφίο.)



4. Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις πιο κάτω παραστάσεις:

(Μονάδες: 1 / 1 / 1 / 2)

α) $x^2 - 11x =$

β) $x^2 - 16\psi^2 =$

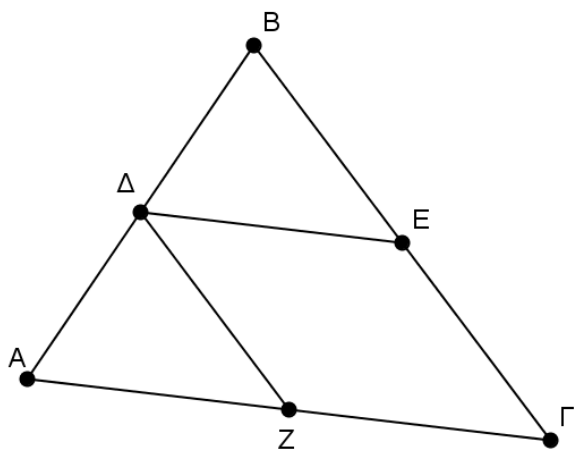
γ) $x^2 - 5x - 6 =$

δ) $x^2 - \psi^2 - 15x + 15\psi =$

5. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30° , τότε η απέναντι πλευρά της, ισούται με το μισό της υποτείνουσας.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Ένα παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαγώνιοί του ισούνται είναι ρόμβος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του ίσες και οι διαγώνιοί του ισούνται και τέμνονται κάθετα είναι τετράγωνο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το ύψος το οποίο φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας, είναι ίσο με το μισό της υποτείνουσας.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Δύο ορθογώνια τρίγωνα, τα οποία έχουν τις δύο οξείες γωνίες τους ίσες μία προς μία, είναι πάντοτε ίσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία Δ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΑΔΖ είναι ίσα. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



7. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(2x - 1)^2 = x$$

8. Γυναικείο άρωμα πωλείται σε δύο συσκευασίες στην ίδια τιμή. Η πρώτη συσκευασία είναι σε σχήμα τετραγωνικής πυραμίδας με παράπλευρο ύψος $(4\sqrt{13})$ cm και ύψος 12 cm. Η δεύτερη συσκευασία είναι σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου με μήκος 17 cm, πλάτος 5 cm και ύψος ίσο με το ύψος της πυραμίδας. Να βρείτε ποια από τις δύο συσκευασίες μάς συμφέρει να αγοράσουμε. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

9. Να δείξετε ότι η παράσταση: $A = \left(\frac{2x+20}{x^2-16} + 1 \right) \div \frac{x^3-8}{x^2+2x-8}$ είναι αντίστροφη της παράστασης $x-4$.

10. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3x-1}{x+3} - \frac{3-2x}{4-x} = \frac{33-17x}{x^2-x-12}$$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο πλαίσιο της ημέρας <<Καινοτομία και Επιχειρηματικότητα>> οι μαθητές του Β2 έφτιαξαν και πωλούσαν φανέλες. Οι φανέλες είχαν διαφορετικές τιμές ανάλογα με το χρώμα του τυπώματος, αν ήταν δηλαδή μαύρο ή χρυσό. Το τμήμα Α6 παράγγειλε 12 φανέλες με μαύρο τύπωμα και 5 με χρυσό τύπωμα και πλήρωσε €129. Το τμήμα Α7 παράγγειλε 8 φανέλες με μαύρο τύπωμα και 7 με χρυσό τύπωμα και πλήρωσε €119. Να βρείτε πόσα στοιχίζει μια φανέλα με μαύρο τύπωμα και πόσα μια φανέλα με χρυσό τύπωμα.

Να λύσετε το πρόβλημα με τη βοήθεια συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.

2. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ στο οποίο η γωνία Β είναι ίση με τη γωνία Γ ($\hat{B} = \hat{\Gamma}$). Στην πλευρά ΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε, έτσι ώστε $BD = EG$.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις ΔΖ και ΕΗ, των σημείων Δ και Ε από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, είναι ίσες.

β) Δύο δρομείς αναχωρούν από το σημείο Α. Ο πρώτος ακολουθεί τη διαδρομή ΑΖΔΑ και ο άλλος τη διαδρομή ΑΗΕΑ. Αν κινούνται και οι δύο με την ίδια ταχύτητα, να δείξετε ότι ο χρόνος που θα χρειαστούν για να καλύψουν τη διαδρομή είναι ο ίδιος.

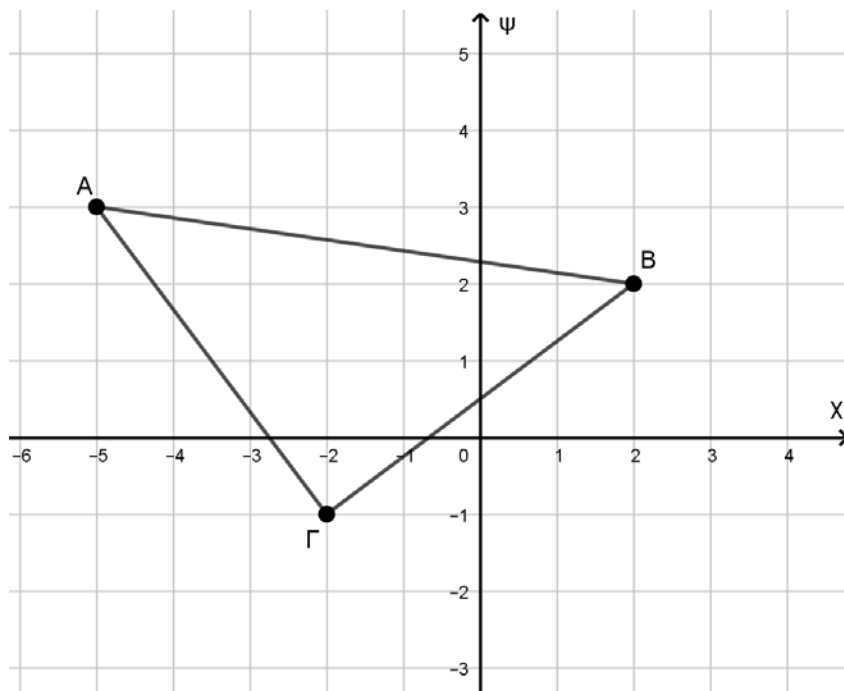
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ABΓ.

(Μονάδες: 2,5 / 2 / 2,5 / 3)

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB.



(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Γ και είναι παράλληλη με την ευθεία AB.

(δ) Οι πλευρές AΓ και BΓ είναι κάθετες μεταξύ τους και οι εξισώσεις τους δίνονται πιο κάτω:

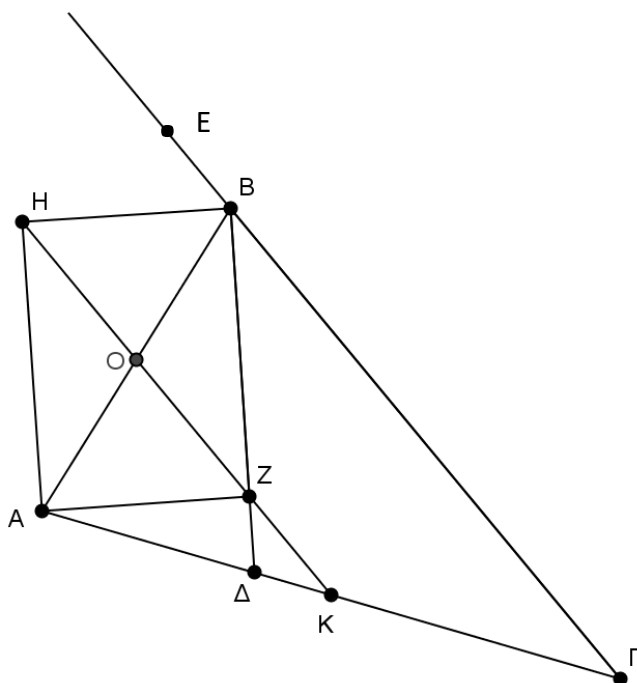
AΓ: $3\psi = (\kappa^2 - 5\kappa)\chi - 11$ και BΓ: $4\psi = 3\chi + 2$. Να βρείτε τις τιμές του κ .

4. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Η BZ είναι η διχοτόμος της $\hat{A}B\Gamma$ και η BH είναι η διχοτόμος της $\hat{A}B\epsilon$. Αν $AZ \perp BZ$ και $AH \perp BH$ να αποδείξετε με πλήρη δικαιολογία ότι: (Μονάδες 4 / 3 / 3)

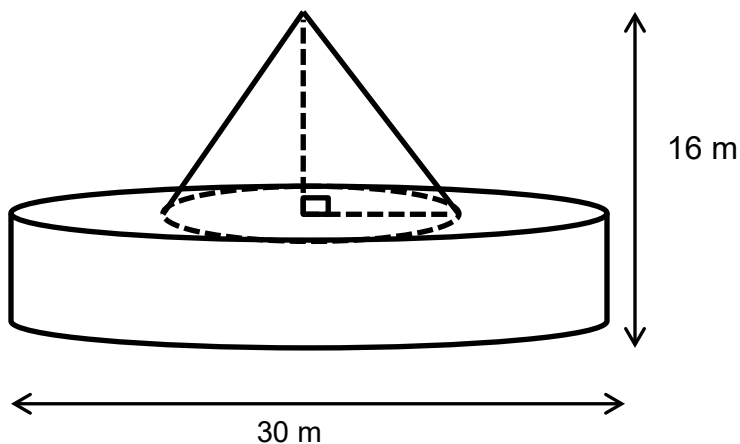
α) Το HBZA είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο

β) $\hat{B}ZH = \hat{Z}B\Gamma$.

γ) Το K είναι το μέσο της AΓ.



5. Στο πιο κάτω σχήμα, η κατασκευή αποτελείται από έναν κύλινδρο και έναν κώνο. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι $65\pi \text{ m}^2$ και η γενέτειρά του είναι 13m . Αν το άθροισμα των υψών των δύο στερεών είναι 16m και η διάμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι 30m , να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της κατασκευής. (Οι απαντήσεις σας μπορούν να δοθούν συναρτήσει του π .)



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ

: Γ΄

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τα 10 θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

(1) Να βρείτε τα αναπτύγματα των πιο κάτω, **χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες**.

(α) $(5x - 2)^2$

(β) $(x + 4)(x - 4)$

(2) Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα.

$$5x + 3y = 7$$

$$3x - 5y = 11$$

(3) Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τα πιο κάτω πολυώνυμα.

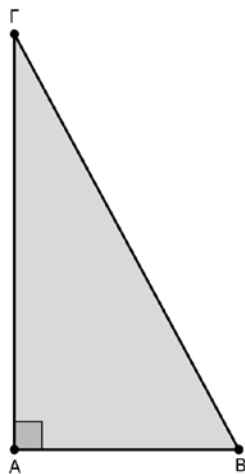
(α) $3a^2 + 5a$

(β) $x^2 - 9$

(γ) $x^2 + 2x - 8$

(δ) $2ax - ay - 6x + 3y$

(4) Δίνεται το πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο ισχύει ότι $\varepsilon\phi B = \frac{12}{5}$.



(α) Να βρείτε το $\eta\mu B$, το $\sigma\upsilon\nu B$ και την $\varepsilon\phi\Gamma$.

(μον. 3)

(β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας Γ (**κατά προσέγγιση ακεραίου**)

(μον. 2)

(5) Δίνονται τα σημεία με συντεταγμένες $A(-3, 2)$ και $B(1, -6)$.

(α) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

(μον. 1,5)

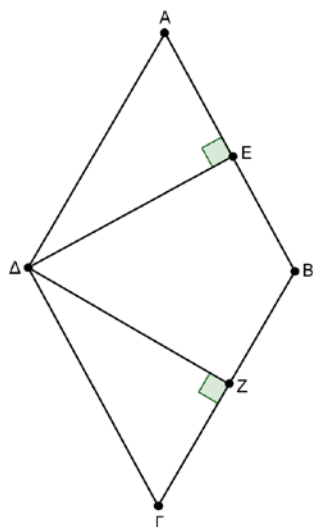
(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

(μον. 1,5)

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία Α και Β.

(μον. 2)

(6) Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος. Αν $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\Delta\Delta E$ και $\Gamma\Delta Z$ είναι ίσα.



(7) (α) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση.

(μον. 2)

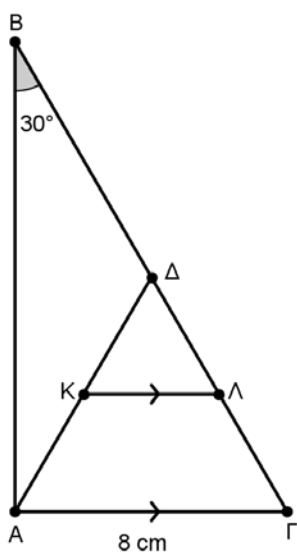
$$\chi^3 - \chi = 0$$

(β) Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε την πιο κάτω παράσταση στην πιο απλή της μορφή.

(μον. 3)

$$\left(\frac{\chi-7}{\chi-3}+\frac{5}{\chi}+\frac{7}{\chi^2-3\chi}\right):\frac{\chi^2+4\chi+4}{\chi^2-\chi-6}$$

(8) Στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, το σημείο Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$ και το σημείο K το μέσο της $A\Delta$.
Αν $K\Lambda \parallel A\Gamma$, $\hat{B} = 30^\circ$ και $A\Gamma = 8 \text{ cm}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:



(α) να βρείτε το μήκος της ΒΓ.

(μον. 1,5)

(β) να βρείτε το μήκος της ΑΔ.

(μov. 1,5)

(γ) να βρείτε το μήκος της ΚΛ.

(μον. 2)

(9) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \psi = (\kappa^2 + 5\kappa)\chi + \mu$ και $\varepsilon_2: 6\chi + \psi = 7$. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων κ και μ ώστε οι ευθείες αυτές να είναι παράλληλες.

(10) Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει τον ίδιο όγκο με μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Στο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, το μήκος είναι ίσο με 12 cm, το πλάτος είναι ίσο με 4 cm και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας είναι ίσο με 352 cm². Το ύψος της πυραμίδας είναι ίσο με το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τα 5 θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

(1) (α) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα.

(μον. 6)

$$(\chi - 2)^3 - \chi(\chi - 5)^2 = (2\chi - 3)(2\chi + 3) - 13(\chi - 1) - 12$$

(β) Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τα πιο κάτω πολυώνυμα.

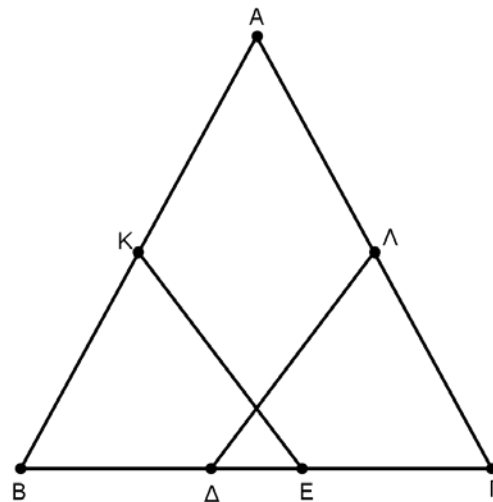
(μον. 4)

(i) $\chi^2(\beta - 4) + \alpha^2(4 - \beta)$

(ii) $\chi^2 + 2\chi + 1 - 9\psi^2$

(2) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με AB = AΓ. Τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των πλευρών AB και AΓ αντίστοιχα. Πάνω στην πλευρά BΓ τοποθετούμε σημεία Δ και Ε έτσι ώστε BΔ = ΓΕ.

(α) Να αποδείξετε ότι EK = ΔΛ.



(β) Να κατασκευάσετε στο σχήμα τις αποστάσεις KΖ και ΛΗ των σημείων K και Λ από την πλευρά BΓ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο KΛΗΖ είναι ορθογώνιο.

(3) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση.

$$\frac{4}{\chi + 1} - \frac{2\chi}{3 - \chi} = \frac{11\chi - 9}{\chi^2 - 2\chi - 3}$$

(4) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ με κορυφές $A(2, 4)$ και $B(-2, 2)$ και η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ είναι $x + 3y = 4$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AG .

(β) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής Γ είναι $(4, 0)$.

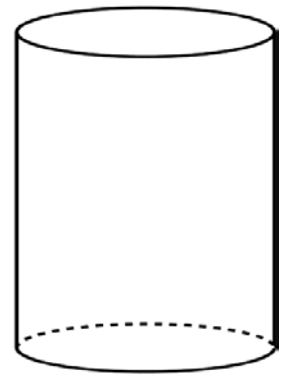
(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 που περνά από το σημείο A και είναι παράλληλη με την πλευρά $B\Gamma$.

(δ) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ισοσκελές, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(ε) Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα μέσα των πλευρών AB και AG .

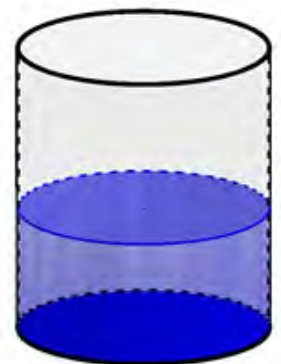
(5) Κυλινδρική δεξαμενή η οποία είναι **ανοικτή στο πάνω μέρος**, έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $36\pi \text{ m}^2$ και το ύψος της είναι διπλάσιο από την ακτίνα της.

(α) Να βρείτε την ακτίνα της βάσης και το ύψος της δεξαμενής. (μον. 4)



(β) Θέλουμε να βάψουμε εσωτερικά τη δεξαμενή. Κάθε συσκευασία της μπογιάς που θα χρησιμοποιήσουμε βάφει 40 m^2 . Να βρείτε πόσες συσκευασίες μπογιάς θα χρειαστεί να αγοράσουμε. ($\pi = 3,14$) (μον. 3)

(γ) Στη δεξαμενή υπάρχει νερό που φθάνει σε ύψος $3,5 \text{ m}$. Βυθίζουμε μέσα στο νερό σιδερένιους κώνους ακτίνας 2 m και ύψους 3 m . Ποιος είναι ο **μέγιστος αριθμός** τέτοιων κώνων που μπορούμε να τοποθετήσουμε χωρίς η δεξαμενή να υπερχειλίζει; (μον. 3)



ΜΕΡΟΣ Α΄:

- Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(\psi + 5)^2 =$

(β) $(\chi - 3) \cdot (\chi + 3) =$

2. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις $\alpha = 3\text{cm}$, $\beta = 4\text{cm}$ και $\gamma = 8\text{cm}$. Να υπολογίσετε:

- (α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του
(β) τον όγκο του

3. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $2\chi^2 - 4\chi =$

(Μονάδες. 1,5)

(β) $9\chi^2 - 16 =$

(Μονάδες. 1,5)

(γ) $\alpha^2 - 4\alpha\beta - 2\alpha + 8\beta =$

(Μονάδες. 2)

4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\chi^2 + 3\chi - 5 = 0$$

5. Να λύσετε το σύστημα :

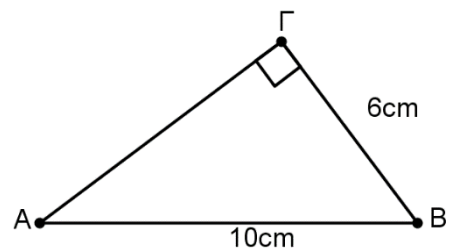
$$2\chi + 5\psi = 12$$

$$4\chi - 3\psi = -2$$

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $B\Gamma = 6\text{cm}$ και $AB = 10\text{cm}$.

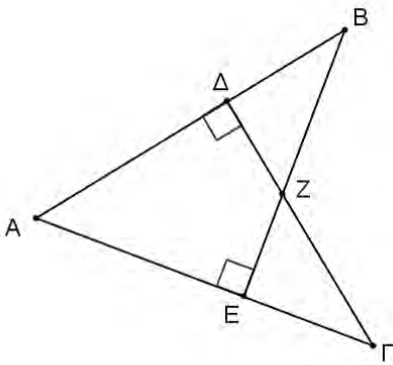
Να αποδείξετε ότι:

$$9\epsilon\phi B - 10\sigma\upsilon\nu A + 15\eta\mu B = 16$$



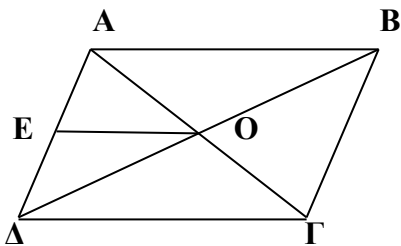
7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο με πλευρά 6m και εμβαδόν ολικής επιφάνειας 96m^2 . Να υπολογίσετε:
- (α) το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας
- (β) τον όγκο της πυραμίδας

8. Στο πιο κάτω επίπεδο σχήμα $(\Delta B) = (E\Gamma)$. Τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta$ και BE είναι κάθετα στα ευθύγραμμα τμήματα AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $(\Delta Z) = (ZE)$.



9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{B} = 30^\circ$. Τα σημεία Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.
- (α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ είναι ορθογώνιο.
- (β) Αν επιπλέον $AZ = 5\text{cm}$, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

10. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν $OE \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Gamma = \Gamma\Delta$ να δείξετε ότι $\Gamma E \perp A\Delta$.



ΜΕΡΟΣ Β΄:

- Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β΄.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\chi-7}{\chi^2-5\chi+4} - \frac{1}{4-\chi} = \frac{\chi-3}{\chi^2-\chi}$$

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $EZ\Theta$ ($EZ = E\Theta$). Να προεκτείνετε την πλευρά EZ προς το Z και την πλευρά $E\Theta$ προς το Θ κατά τμήματα $ZH = \Theta I$. Αν K είναι το σημείο τομής των $H\Theta$ και ZI , να αποδείξετε ότι:
- (α) τα τρίγωνα EZI και $E\Theta H$ είναι ίσα
- (β) το τρίγωνο IKH είναι ισοσκελές

3. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{6\chi}{\chi^2 - 9} + \frac{\chi}{\chi + 3}$, $B = \frac{\chi^2 - 4}{\chi^2 + 2\chi} \div \left(\frac{2}{\chi^2} - \frac{1}{\chi} \right)$ και

$\Gamma = B \div A$, όπου $\chi \neq 3$, $\chi \neq -3$, $\chi \neq -2$, $\chi \neq 0$ και $\chi \neq 2$

(α) Να αποδείξετε ότι: $A = \frac{\chi}{\chi - 3}$, $B = -\chi$ και $\Gamma = 3 - \chi$ (Μονάδες. 3-3-2)

(β) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma^3 - B^2(9 - \chi) = 27(1 - \chi)$ (Μονάδες. 2)

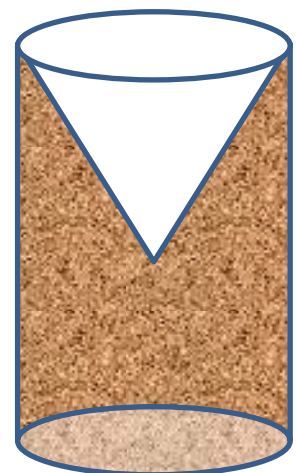
4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,4)$, $B(-4,-1)$ και $\Gamma(2,1)$

- (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- (β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΓE
- (γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- (δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου.
- (ε) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου.

5. Το διπλανό σχήμα αποτελείται από ένα ξύλινο κυλινδρικό στερεό με ακτίνα βάσης 6 cm και με όγκο ίσο με $576\pi \text{ cm}^3$.

Με τη βοήθεια τόνου αφαιρέθηκε μέρος του σε σχήμα κώνου με ύψος ίσο με το $\frac{1}{2}$ του ύψους του κυλίνδρου. Να υπολογίσετε:

- (α) Το ύψος του κυλίνδρου (Μονάδες. 2)
- (β) Τον όγκο του ξύλου που αφαιρέθηκε (Μονάδες. 3)
- (γ) Το **εμβαδόν** της ολικής επιφάνειας και τον **όγκο** του στερεού που απέμεινε (Μονάδες. 5)



ΜΕΡΟΣ Α΄

Το μέρος αυτό αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες (5/100).

1) Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

α) $(\psi - 4)^2 =$

β) $(2\chi + 3)(2\chi - 3) =$

2) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $\chi^2 - 25 =$

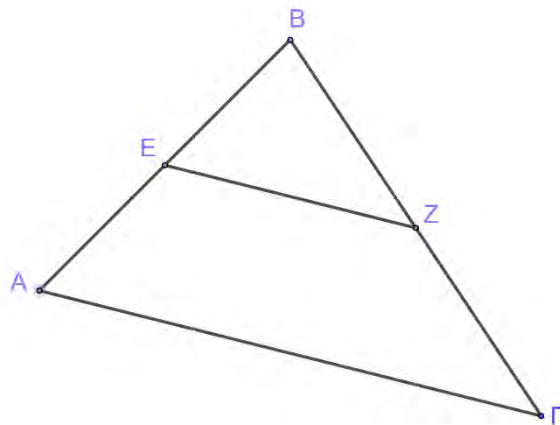
β) $3\alpha^2\beta\gamma^3 - 6\alpha\beta\gamma^2 =$

γ) $\chi^2 - 8\chi + 15 =$

δ) $\alpha^2 + 4\alpha - 2\alpha\beta - 8\beta =$

3) Να υπολογίσετε τον όγκο σφαίρας με επιφάνεια $144\pi \text{ cm}^2$.

4) Στο πιο κάτω τρίγωνο δίνονται $EZ // AG$, $BE = 2\text{ cm}$, $AE = 2\text{ cm}$, $AG = 6\text{ cm}$ και $BZ = 3\text{ cm}$. Να υπολογίσετε το μήκος των τμημάτων EZ και ZG .



5) Να λύσετε το σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} 2\chi - \psi = 3 \\ 3\chi - 4\psi = -8 \end{array} \right\}$$

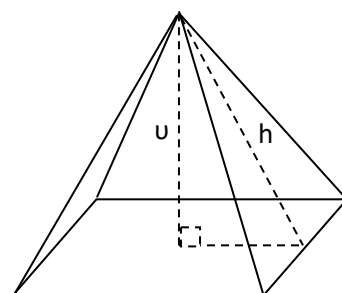
- 6) Ένα ενυδρείο έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου. Οι εσωτερικές διαστάσεις της βάσης του είναι $15dm$ και $7dm$ και του ύψους του είναι $10dm$. Να υπολογίσετε πόσα λίτρα νερού θα χρειαστούν, για να γεμίσει το ενυδρείο κατά τα $\frac{4}{5}$ του.



- 7) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 144 cm^2 και παράπλευρο ύψος $h = 10 \text{ cm}$.

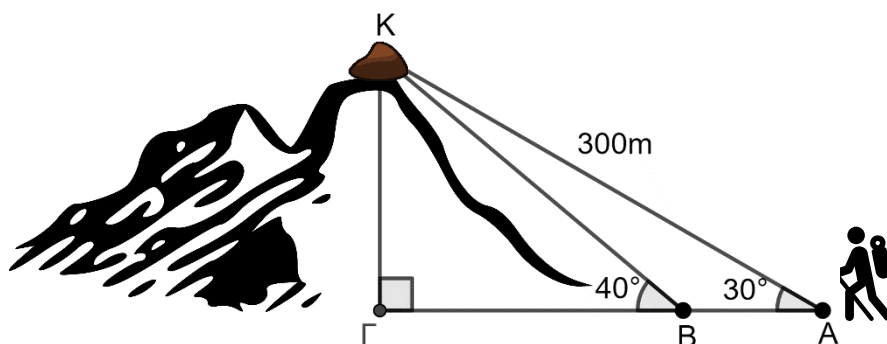
Να υπολογίσετε:

- α) το ύψος u της πυραμίδας,
β) το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της και
γ) τον όγκο της.



- 8) Μια ομάδα ορειβατών παρατήρησε την κορυφή K ενός κατακόρυφου βράχου από το σημείο A της οριζόντιας επιφάνειας του εδάφους με γωνία ύψους 30° . Στη συνέχεια προχώρησε προς το βράχο στο σημείο B και παρατήρησε την κορυφή με γωνία ύψους 40° . Να υπολογίσετε το ύψος του βράχου και την απόσταση ΓB .

(Δίνονται: $\eta\mu 40^\circ \cong 0,64$, $\sigma\upsilon\nu 40^\circ \cong 0,77$, $\epsilon\phi 40^\circ \cong 0,84$, $\eta\mu 30^\circ = 0,5$, $\sigma\upsilon\nu 30^\circ \cong 0,87$, $\epsilon\phi 30^\circ \cong 0,58$)



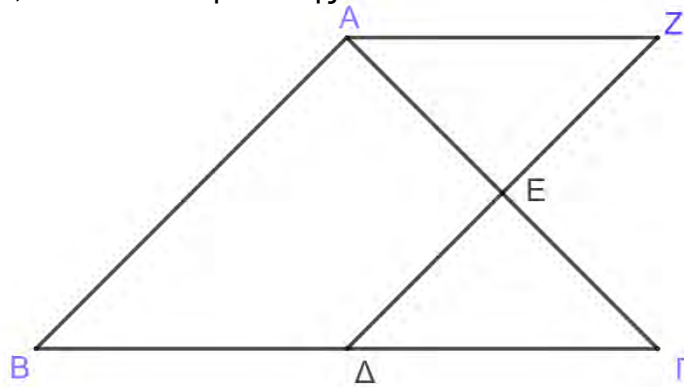
- 9) Μια ευθεία (ε) έχει εξίσωση $(1 - 3\kappa)\chi - 2\psi = -\kappa - 5$, όπου $\kappa \in \mathbb{R}$.
 α) Αν η ευθεία (ε) περνά από το σημείο $A(2, -9)$, να δείξετε ότι $\kappa = 5$.
 β) Αν η ευθεία (ε) είναι παράλληλη με την ευθεία $(\varepsilon_1): \psi = 2\chi + 3$, να υπολογίσετε την τιμή του κ .
 γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία $\psi + 2\chi - 1 = 0$.
- 10) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και οι διχοτόμοι του $B\Delta$ και ΓE .
 Αν $EH \perp B\Gamma$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:
 α) Τα τρίγωνα $B\Gamma\Delta$ και ΓBE είναι ίσα.
 β) Το τετράπλευρο $E\Delta ZH$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ΜΕΡΟΣ Β΄

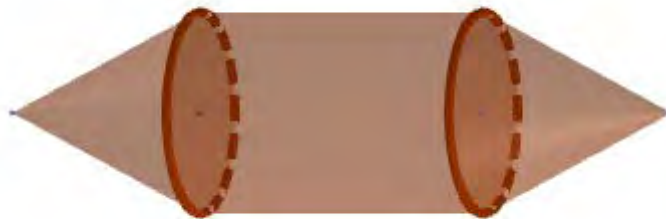
Το μέρος αυτό αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες (10/100).

- 1) Δίνονται τα πολυώνυμα $A(\chi) = 2\chi^2 + 4\chi^3$, $B(\chi) = 2\chi^2 + \chi - 15$ και $\Gamma(\chi) = 2\chi - 5$.
 Να βρείτε τα παρακάτω :
 α) $A(\chi) - B(\chi) =$
 β) $A(\chi) \cdot \Gamma(\chi) - 2\chi \cdot B(\chi) =$
 γ) $A(\chi + 1) =$
 δ) $B(-2) + \Gamma(3) =$
- 2) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\psi}{\psi^2 - \psi - 12}$, $B = \frac{\psi - 2}{4 - \psi}$ και $\Gamma = \frac{1}{\psi + 3}$.
 α) Να δείξετε ότι $A : B = -\frac{\psi}{\psi - 2} \cdot \Gamma$
 β) Να λύσετε την εξίσωση: $7 \cdot A - B = 3 \cdot \Gamma$

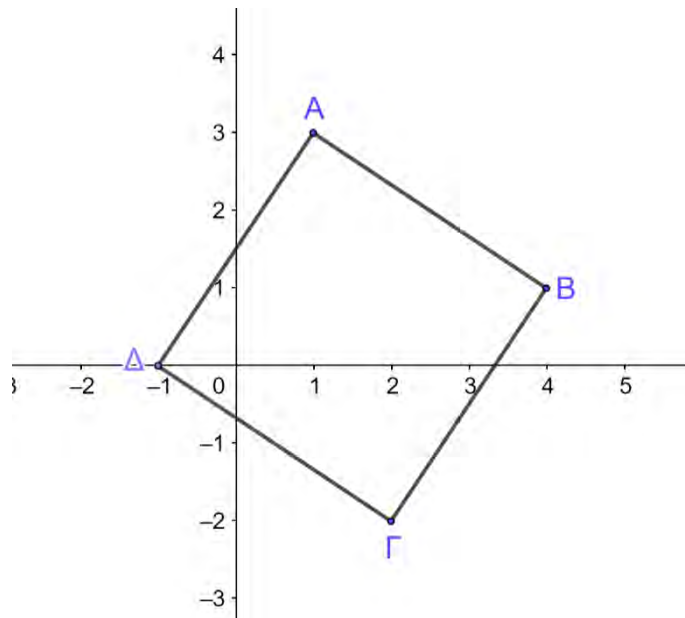
- 3) Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με $AB=AG$. Το Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$, το E είναι το μέσο της AG και $\Delta E=EZ$.



- α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
- β) Στη συνέχεια προεκτείνω την $\Delta\Gamma$ προς το Γ , κατά τμήμα $\Gamma H=B\Delta$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AZHB$ που σχηματίζεται, είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- 4) Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται ένα βαρίδιο που χρησιμοποιείται για ψάρεμα. Αποτελείται από δύο ίσους κώνους και έναν κύλινδρο με περίμετρο βάσης 6π cm. Ο κύλινδρος έχει ύψος διπλάσιο της ακτίνας του και οι κώνοι έχουν ύψος 4cm ο καθένας. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του βαριδίου.



- 5) Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(1,3)$, $\Gamma(2,-2)$ και $\Delta(-1,0)$.
- α) Αν H το σημείο τομής των διαγωνίων του, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου H .
 - β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής B του παραλληλογράμμου.
 - γ) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$.
 - δ) Να δείξετε ότι το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος και να υπολογίσετε την περίμετρο του.



ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά

ΤΑΞΗ : Γ΄

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να βρείτε τα αναπτόγματα:

α) $(x + 2)^2 =$

β) $(\psi - 4)(\psi + 4) =$

2) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $7x + 7x\psi =$

β) $x^2 - 25 =$

3) Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κύβου με ακμή 2 cm.

4) Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $(x + 2)(x - 7) = 0$

β) $x^2 + 8x + 15 = 0$

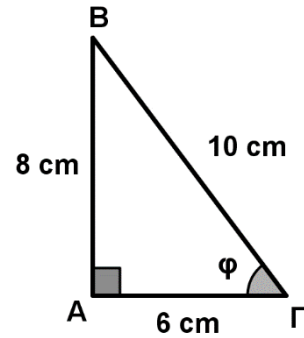
5) Να χαρακτηρίσετε με **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

α) Ένα παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία είναι ορθογώνιο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
β) Αν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιοι του διχοτομούνται κάθετα, τότε είναι ρόμβος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
γ) Ένα τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνιές του ορθές είναι τετράγωνο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
δ) Αν οι διαγώνιοι ενός τραπέζιου είναι ίσες, τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
ε) Αν δύο απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι παράλληλες, τότε είναι παραλληλόγραμμο .	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

- 6) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ η AB = 8 cm, η AΓ = 6 cm και η BΓ = 10 cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας φ .

ημφ =

συνφ =

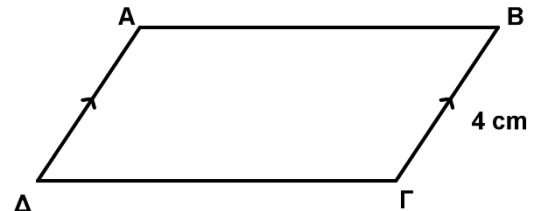


- 7) Σε τρίγωνο ABΓ φέρουμε τη διάμεσο AM. Αν οι αποστάσεις του M από τις πλευρές AB και AΓ είναι ίσες, να δείξετε ότι το AM είναι και ύψος του τριγώνου ABΓ.

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

- 8) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, αν $AD \parallel BΓ$, $BΓ = 4$ cm και

$$AD = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4x + 4} \cdot \frac{4x^2 + 8x}{x^2 - 2x}, \quad (x \neq 0, x \neq \pm 2)$$



- 9) Σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ABΓΔ, το E είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από το E να φέρετε παράλληλη προς την AΔ η οποία τέμνει την ΔΓ στο σημείο Θ. Στη συνέχεια να προεκτείνετε την EΘ κατά τμήμα ΘΗ = EΘ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΗ είναι ρόμβος.

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

- 10) Σε παραλληλόγραμμο ABΓΔ, το M είναι το μέσο της πλευράς ΓΔ. Η προέκταση της AM προς το M τέμνει την προέκταση της BΓ στο E. Φέρουμε τη BH $\perp$ AM. Να δείξετε ότι ΗΓ = AΔ.

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(-3, 2), B(-2, 4) και Γ(0, 3).

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς AΓ. (Mov.2)
- β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο. (Mov.3)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους BΔ. (Mov.3)
- δ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. (Mov.2)

2) Οι ευθείες $\varepsilon_1 : \psi = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)x + 4$ και $\varepsilon_2 : \psi = \left(\frac{\lambda-2}{3}\right)x - 5$ είναι παράλληλες και ισχύει η σχέση

$$(2\kappa + 1)^2 + 3(\lambda + 2) - 4\kappa\lambda = (\lambda - 2\kappa)^2 + (3 + \lambda)(3 - \lambda).$$

Να βρείτε τις τιμές των κ και λ .

3) Στο πιο κάτω σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνια ($\widehat{B} = 90^\circ$ και $\widehat{\Delta} = 90^\circ$), K το σημείο τομής των $B\Gamma$ και ΔA , Θ το μέσο της AK , H το μέσο της $K\Gamma$ και $AB = \Delta\Gamma$.

α) Να δείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα ABK και $\Gamma K\Delta$ είναι ίσα,

(Mov.3)

ii) το τρίγωνο $AK\Gamma$ είναι ισοσκελές,

(Mov.1)

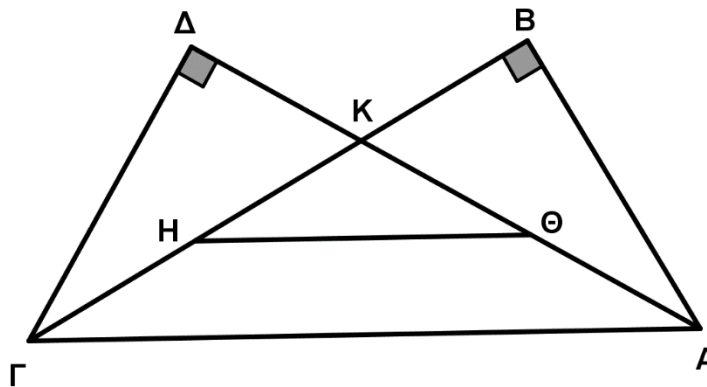
iii) το τετράπλευρο $\Theta H\Gamma A$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Mov.3)

β) Αν $\widehat{\Gamma K\Delta} = 60^\circ$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Theta H\Delta$ είναι ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(Mov.3)

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)



4) α) Αν $\alpha \neq -\beta$, να δείξετε ότι $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta} - \alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$

(Mov.3)

Στην συνέχεια να υπολογίσετε την τιμή της πιο κάτω παράστασης χωρίς τη χρήση υπολογιστικής

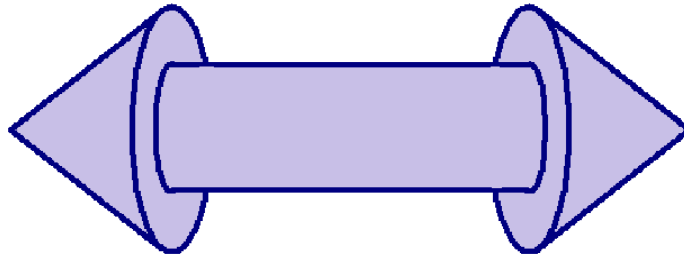
$$\text{μηχανής } A = \frac{4015^3 + 4010^3}{8025} - 4015 \cdot 4010$$

(Mov.2)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x^2-9} = \frac{x+1}{x^2+3x}$

(Mov.5)

5) Ένα βαράκι γυμναστικής αποτελείται από ένα κύλινδρο ο οποίος έχει στην κάθε του βάση ένα κώνο όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το εμβαδόν της βάσης του κυλίνδρου είναι ίσο με $9\pi \text{ cm}^2$ και το ύψος του είναι ίσο με 20 cm. Ο κώνος κατασκευάστηκε με τέτοιο τρόπο ώστε το ύψος και η ακτίνα του να έχουν άθροισμα 14 cm, ενώ το πενταπλάσιο του ύψους του ισούται με το τριπλάσιο της ακτίνας του αυξημένο κατά 22 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας που έχει το βαράκι. (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)
(Οι απαντήσεις σας μπορούν να δοθούν συναρτήσει του π .)



ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ'

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε ΚΑΙ τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-3)^2 =$

β) $(2x-5) \cdot (2x+5) =$

2. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

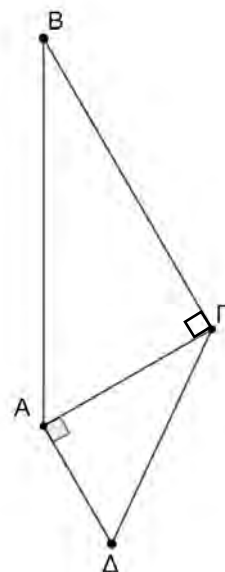
α) $4x^2 - 2x =$

β) $xy + 3x + 2y + 6 =$

γ) $x^2 - 2x - 35 =$

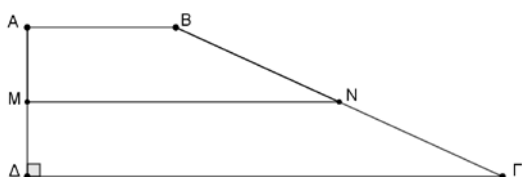
δ) $x^3 - 8 =$

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΓΒ και ΓΑΔ με $\hat{A}\hat{G}B = 90^\circ$, $\hat{G}\hat{A}\Delta = 90^\circ$, $AB = 20\text{cm}$, $A\Delta = 7\text{cm}$ και $\hat{A}\hat{B}\Gamma = 30^\circ$. Να βρείτε την πλευρά ΑΓ και τη γωνία ΑΓΔ.



4. Να κάνετε τις πράξεις $\left(\frac{4}{5-x} - \frac{4}{x+5} \right) \div \frac{4}{x^2-25} =$

5. Σε ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) δίνεται $AB = x^2 - 6$, $\Gamma\Delta = 2x^2$ και η διάμεσος $MN = x^2 + 5$. Να υπολογίσετε την τιμή του x .



6. Να βρείτε τις σχετικές θέσεις των πιο κάτω ευθειών.

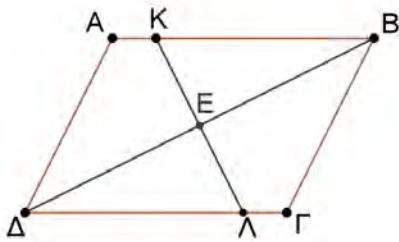
- α) $\varepsilon_1: y = 3$
 $\varepsilon_2: 2y - 5 = 0$
- β) $\varepsilon_3: y = -3x + 4$
 $\varepsilon_4: y - 3x = 4$

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με K, Λ, M να είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, AB, A\Gamma$ αντίστοιχα.

- α) Να δείξετε ότι $AMK\Lambda$ είναι ορθογώνιο
 β) Αν $B\Gamma = 10\text{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AK .

8. Αν $A = \frac{y}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$ και $B = \frac{y}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$, να δείξετε ότι $A^2 - B^2 = y^2$

9. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο, $DE = EB$ και $K\Lambda$ ευθύγραμμο τμήμα που περνά από το σημείο E . Να αποδείξετε ότι $\Delta K B \Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.



10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας 90cm^2 και πλευρά βάσης 5cm . Να υπολογίσετε τον όγκο της.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε ΚΑΙ τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{2x^2 - 2xy}{x^2 - (1+y)x + y} : \frac{2x^3 - 12x^2 - 32x}{(x+3)(x-3)^2 - 25(x+3)}$

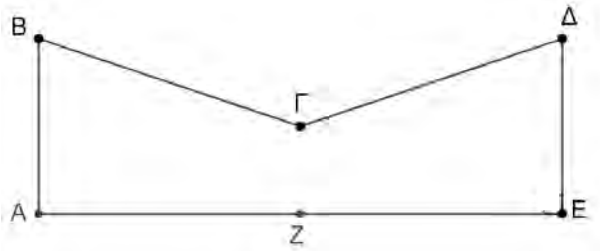
β) $\frac{1 - \frac{a}{\beta} - \frac{\beta}{a}}{\frac{a}{\beta^2} + \frac{\beta}{a^2}} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta}\right) =$

2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι $AB = ED$, $B\Gamma = \Gamma\Delta$, $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{E}\hat{\Delta}\hat{\Gamma}$, και Z είναι το μέσο της AE .

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $ED\Gamma$ είναι ίσα.

β) τα τρίγωνα ABZ και EDZ είναι ίσα.



3. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α) $(x+3)(x-4) = -12$

β) $x^2 + 7 = 0$

γ) $9x^2(x-5) - 6x(x-5) + x-5 = 0$

δ) $\frac{x-1}{x+2} - \frac{x-4}{x-3} + 1 = 0$

4. Τα σημεία $A(-2, 1)$ και $\Gamma(4, -1)$ είναι απέναντι κορυφές ρόμβου. Οι πλευρές AB και $B\Gamma$ του ρόμβου ανήκουν στις ευθείες με εξισώσεις $-x + y = 3$ και $7x + y = 27$ αντιστοίχως. Να βρείτε:

α) το μήκος της διαγωνίου AG .

β) τις συντεταγμένες του μέσου της AG .

γ) την εξίσωση της διαγωνίου BD .

δ) τις συντεταγμένες της κορυφής B .

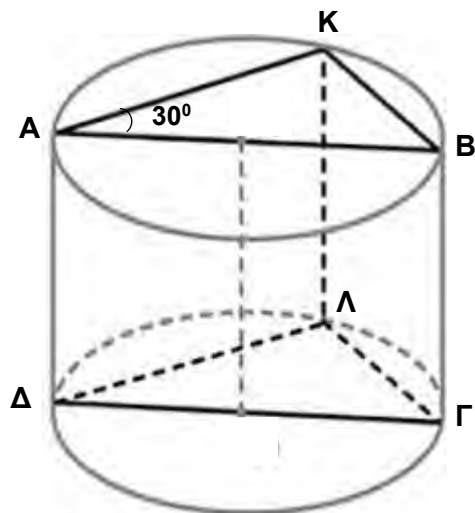
ε) την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Γ και είναι παράλληλη με τη BD .

5. Στο πιο κάτω στερεό φαίνεται ένας συμπαγής κύλινδρος που από μέσα τού έχει αφαιρεθεί ένα τριγωνικό πρίσμα το οποίο έχει βάσεις ορθογώνια τρίγωνα ($\hat{K} = 90^\circ$). Το εμβαδόν της

παράπλευρης έδρας $AB\Gamma\Delta$ του πρίσματος είναι 24cm^2 , το μήκος AK είναι $2\sqrt{3}\text{cm}$ και AB είναι διάμετρος. Να υπολογίσετε:

α) τον όγκο του στερεού.

β) την επιφάνεια του στερεού.



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ'

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα με τη χρήση ταυτοτήτων:

(α) $(x + 7)^2 =$

(β) $(8x - 3)(8x + 3) =$

2. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $15x - 15y =$

(β) $x^2 - 11x + 18 =$

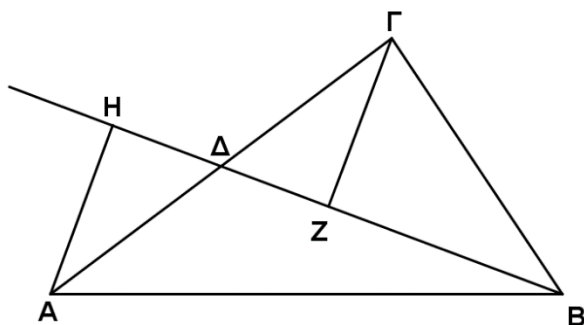
(γ) $a^2(x - 3) - y^2(x - 3) =$

(δ) $a^2 - 3ab + 2a - 6b =$

3. Δύο ενυδρεία σε ένα υδροπάρκο, έχουν την ίδια χωρητικότητα. Το ένα έχει σχήμα κύβου και το άλλο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου. Αν η ακμή του πρώτου ενυδρείου είναι 4 m και οι διαστάσεις της βάσης του δεύτερου είναι 8m και 4m , να βρείτε το ύψος του ενυδρείου που έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



4. Στο πιο κάτω σχήμα η ΒΔ είναι η διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Αν ΓΖ είναι το ύψος του τριγώνου ΒΓΔ και ΑΗ ⊥ ΗΒ, να αποδείξετε ότι ΑΗ = ΓΖ.



5. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{\alpha^3 - 4\alpha}{\alpha^3 - 8} \div \frac{\alpha^2 + 2\alpha}{2\alpha - 4} =$$

6. Να σημειώσετε ΟΡΘΟ ή ΛΑΘΟΣ , βάζοντας σε κύκλο τον κατάλληλο χαρακτηρισμό.

(α) Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, ισχύει $\varepsilon\varphi B = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$.	ΟΡΘΟ/ ΛΑΘΟΣ
(β) Αν δύο ευθείες ταυτίζονται , τότε το σύστημα των εξισώσεων έχει άπειρες λύσεις και ονομάζεται αόριστο.	ΟΡΘΟ/ ΛΑΘΟΣ
(γ) Ένα τετράπλευρο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες, είναι τετράγωνο.	ΟΡΘΟ/ ΛΑΘΟΣ
(δ) Οι παράγοντες του πολυωνύμου $\chi^2 - 6\chi + 9$ είναι οι $\chi + 3$ και $\chi - 3$.	ΟΡΘΟ/ ΛΑΘΟΣ
(ε) Η αλγεβρική παράσταση $\frac{18\psi}{\psi^2 - 6\psi}$ ορίζεται για $\psi \neq 6$.	ΟΡΘΟ/ ΛΑΘΟΣ

7. Δίνονται τα σημεία Α(2 , 5) και Β(10 , 1).

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ, του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ. (β. 2)

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που περνά από το σημείο Α(2 , 5) και είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_2: 2\chi + \psi = 8$. (β. 3)

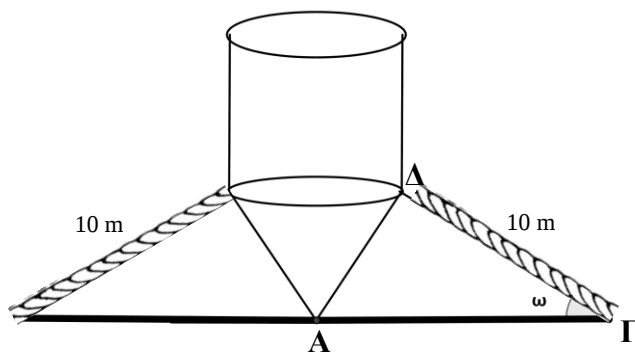
8. Να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{\chi^2 + 2\chi + 1}{\chi^2 + 2\chi - 3} - \frac{\chi - 1}{1 - \chi} = \frac{\chi + 2}{\chi + 3}$$

9. Η κλειστή μεταλλική κατασκευή του πιο κάτω σχήματος, χρησιμοποιείται ως αποθηκευτικός χώρος για το γάλα. Η κατασκευή αποτελείται από έναν κύλινδρο με ύψος 6m και έναν κώνο με ακτίνα 3m και γενέτειρα 5m . Για σκοπούς ασφάλειας , η κατασκευή στερεώθηκε και από τις δύο πλευρές με σχοινί μήκους 10m.

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία ω που σχηματίζει το σχοινί με το έδαφος, όπως φαίνεται στο σχήμα. (Η απάντησή σας να δοθεί κατά προσέγγιση ακεραίου) (β. 3)

(β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ. (Η απάντησή σας να δοθεί κατά προσέγγιση δεκάτου) (β. 2)

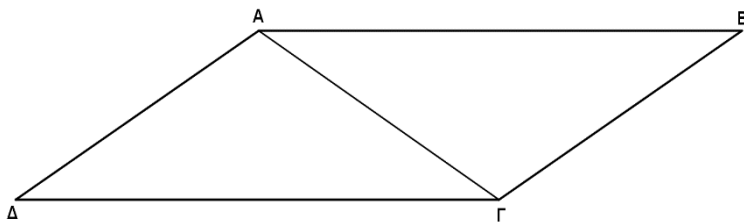


10. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 30^\circ$, $AG = BG$, $\Gamma Z \perp AB$ και N το μέσο της AG . Να προεκτείνετε την πλευρά $\Delta\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma H = \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι :

(α) Το τετράπλευρο $ABH\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο. (β. 2)

(β) Το τρίγωνο $ZN\Gamma$ είναι ισόπλευρο. (β. 3)



ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- (α) Αν ισχύει η σχέση $(2\alpha + 1)^3 - 3(2\alpha + 3)(2\alpha - 3) = \beta + 6 + 8\alpha^3$, να αποδείξετε ότι $6\alpha - \beta = -22$. (β. 3,5)

(β) Αν $\alpha - \chi = 10$ και $\alpha^2 - \beta\chi - \alpha(\chi - \beta) = 80$, να αποδείξετε ότι $\alpha + \beta =$ (β. 3,5)

(γ) Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις $6\alpha - \beta = -22$ και $\alpha + \beta = 8$, να υπολογίσετε τις τιμές των α και β . (β. 3)
- Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(2,3)$, $B(3,6)$, $\Gamma(6,5)$ και $\Delta(5,2)$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.
- (α) **Να λύσετε το πιο κάτω πρόβλημα με εξίσωση.**

Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι κατά $10m^2$ μικρότερο από το διπλάσιο του εμβαδού ενός τετραγώνου πλευράς χ . Αν γνωρίζετε ότι το μήκος του ορθογωνίου είναι κατά $5m$ μεγαλύτερο από την πλευρά του τετραγώνου και το πλάτος του κατά $2m$ μικρότερο από την πλευρά του τετραγώνου, να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου.

(β) Αν $3\alpha + \beta = 5$ και $\alpha \cdot \beta = 3$, να αποδείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι σταθερή.

$$\left(\frac{2\alpha + \beta}{2}\right)^2 + \left(\frac{2\alpha - \beta}{2}\right)^2 + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{4}$$

4.

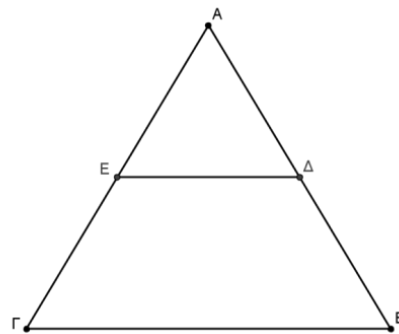
Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$). Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

(α) Αν $\Delta E = \left(5\chi - \frac{1}{\chi}\right) \text{ cm}$ και $B\Gamma = 8 \text{ cm}$, να

βρείτε τις τιμές του χ .

(β) Να προεκτείνετε τις πλευρές AB και $A\Gamma$ κατά τμήματα BZ και ΓN , έτσι ώστε $BZ = \Gamma N$.

Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων Z και N από την πλευρά $B\Gamma$ είναι ίσες.



5. Ο κύριος Γιάννης είναι κτηνοτρόφος και αποφάσισε να φτιάξει μια κατασκευή για την αποθήκευση των σιτηρών. Η κατασκευή αποτελείται από έναν κύλινδρο που έχει ένα ημισφαίριο στη μία βάση και έναν κώνο στην άλλη βάση (όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα). Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι $15\pi \text{ m}^2$, η γενέτειρα του είναι ίση με 5m και το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με 6m . Ο κύριος Γιάννης για να φτιάξει την πιο κάτω κατασκευή θα χρησιμοποιήσει φύλλα λαμαρίνας σχήματος ορθογωνίου, διαστάσεων 2m και 3m . Κάθε φύλλο λαμαρίνας στοιχίζει $\text{€}8$.

(α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κυλίνδρου είναι 3m .

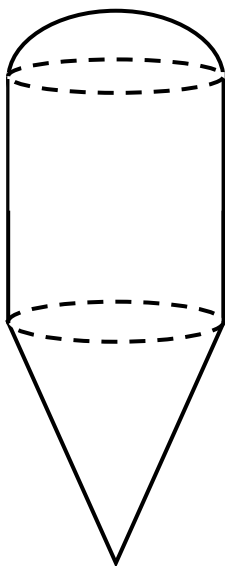
(β. 2)

(β) Να υπολογίσετε: i. Πόσα φύλλα λαμαρίνας θα χρειαστεί.

(β. 7)

ii. Πόσα θα στοιχίσει η κατασκευή.

(β. 1)



Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Χρόνος: 2 ΩΡΕΣ

Μέρος Α΄:

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 4) \cdot (x - 4) =$

(β) $(x + 3)^2 =$

2. Να υπολογίσετε τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $\alpha = 2 \text{ cm}$, $\beta = 3 \text{ cm}$ και $\gamma = 5 \text{ cm}$.

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$2x - 3y = 8$$

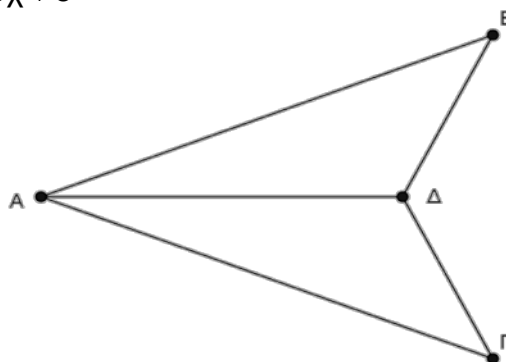
$$x + 3y = -5$$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $y^2 - 4y =$

(β) $x^2 + 6x + 8 =$

5. Στο διπλανό σχήμα η ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ. Αν $AB = AG$, να δείξετε ότι $BD = DG$.

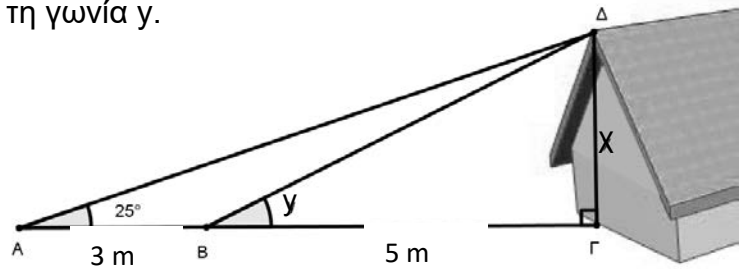


6. Να χαρακτηρίσετε με **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

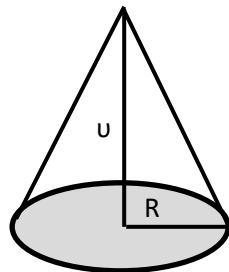
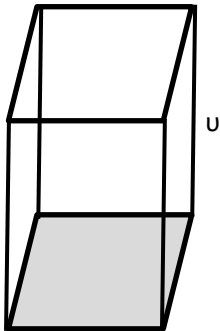
	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
α) Οι διαγώνιοι ενός ρόμβου είναι ίσες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
β) Οι διαγώνιοι ενός τραπεζίου διχοτομούνται.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
γ) Οι απέναντι πλευρές ενός τετραγώνου είναι ίσες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
δ) Ένα τετράγωνο είναι και ορθογώνιο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
ε) Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών ενός τριγώνου είναι ίσο και παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

7. Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 + 7x - 6 = 0$

8. Δύο γωνιόμετρα είναι τοποθετημένα σε έναν επίπεδο δρόμο στα σημεία A και B, όπως φαίνεται στο σχήμα. Δίνονται $AB = 3 \text{ m}$, $B\Gamma = 5 \text{ m}$, $\angle A\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ$ και $\angle \Delta\hat{A}\Gamma = 25^\circ$. Να υπολογίσετε το ύψος x του σπιτιού και τη γωνία y .

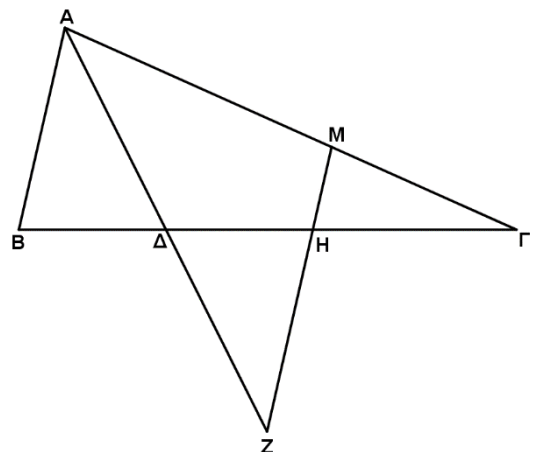


9. Δίνεται ορθό τετραγωνικό πρίσμα με περίμετρο βάσης 16 cm και κώνος με ακτίνα 5 cm . Αν τα δύο στερεά έχουν το ίδιο ύψος (u) και ο όγκος του κώνου είναι $100\pi \text{ cm}^3$, να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του πρίσματος.



10. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και $A\Delta$ διχοτόμος της $\angle B\hat{A}\Gamma$. Προεκτείνουμε την $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta Z = A\Delta$. Αν το Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$ και η ευθεία $Z\Gamma$ τέμνει την AB στο σημείο M να δείξετε ότι:

α) $\angle B\hat{A}\Delta = \angle Z\hat{H}\Gamma$



β) Το τρίγωνο $\triangle AMZ$ είναι ισοσκελές.

ΜΕΡΟΣ Β΄:

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται τα σημεία $A(-2, 4)$, $B(-3, 1)$ και $\Gamma(-5, 5)$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM .

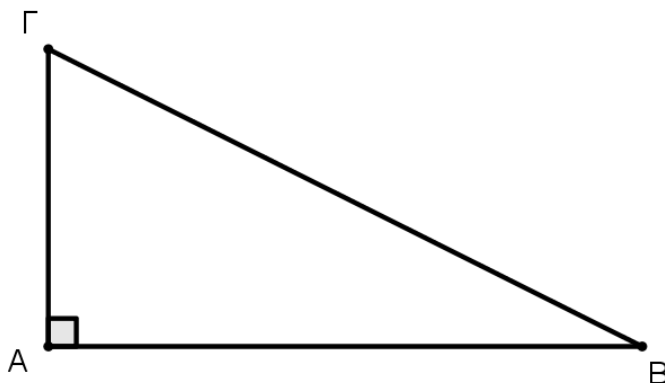
2. Κυλινδρικό δοχείο με διάμετρο βάσης 16 cm περιέχει νερό, η στάθμη του οποίου φτάνει μέχρι 12 cm από τη βάση του δοχείου. Μέσα στο δοχείο τοποθετούμε ένα μεταλλικό αντικείμενο και η στάθμη του νερού ανεβαίνει κατά 2 cm.
Να υπολογίσετε τον όγκο του μεταλλικού αντικειμένου που τοποθετήσαμε μέσα στο δοχείο.
(Η απάντηση μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π)

3. (α) Να απλοποιήσετε την πιο κάτω αλγεβρική παράσταση:

$$A = \frac{1 - \frac{y}{x}}{y - x - \frac{3y}{x} + 3}, \quad \text{με } x \neq 0, x \neq 3 \text{ και } x \neq y \quad (4 \text{ μονάδες})$$

β) Αν $A = \frac{1}{3-x}$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{4}{x^2 + 3x} + 3A = \frac{3-2x}{x^2 - 9}$ (6 μονάδες)

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα.



α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta EZ$ είναι ορθογώνιο. (6 μονάδες)

β) Αν M είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του $A\Delta EZ$, να αποδείξετε ότι

$$AM = \frac{B\Gamma}{4}. \quad (4 \text{ μονάδες})$$

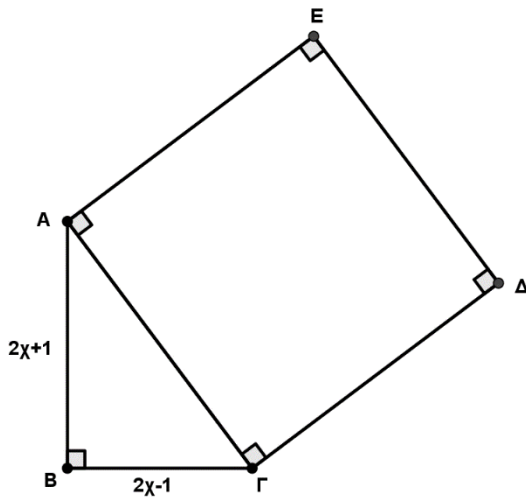
5. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

(6 μονάδες)

$$x^3 - 1 + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = (x+1)^3 - x(x+3)$$

β) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο ΑΓΔΕ και ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{B} = 90^\circ$) με $AB = (2x+1)$ cm και $B\Gamma = (2x-1)$ cm. Αν το εμβαδόν του τετραγώνου είναι 74 cm^2 , να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου.

(4 μονάδες)



ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1

Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(a + 3)^2 =$

(β) $(\omega - 2)(\omega + 2) =$

ΘΕΜΑ 2

Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις 6cm, 8cm και 10cm. Να υπολογίσετε:

(α) τον όγκο και

(β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του.

ΘΕΜΑ 3

Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $3x^2 + 4x^3$

(β) $x^2 - 25$

ΘΕΜΑ 4

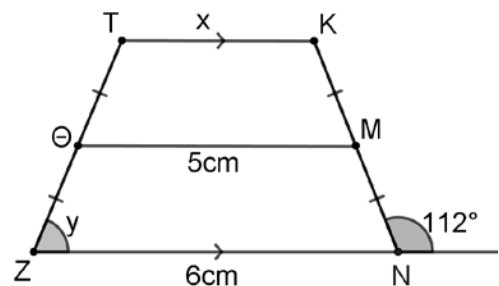
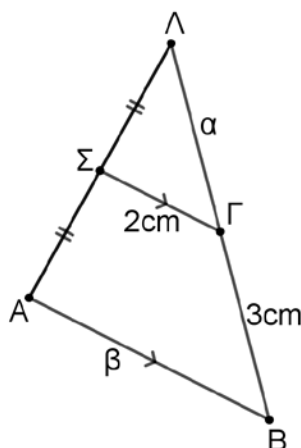
Να λύσετε το σύστημα με την μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ 4x + y = 7 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 5

Να υπολογίσετε τις τιμές των α , β , x και y στα πιο κάτω σχήματα:

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



ΘΕΜΑ 6

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x(x-4) = 0$

(β) $2x^2 - 3x - 2 = 0$

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A\Gamma=AB$). Να προεκτείνετε τις πλευρές ΓA και BA προς το μέρος του A . Στις προεκτάσεις των πλευρών ΓA και BA , να πάρετε σημεία Z και H αντίστοιχα, έτσι ώστε $AZ=AH$. Να αποδείξετε ότι $\Gamma H=BZ$. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

ΘΕΜΑ 8

(α) Η ευθεία ϵ_1 περνά από τα σημεία $A(1, 5)$ και $B(-1, 1)$. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ϵ_1 .
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

(β) Να βρείτε την τιμή του α , ώστε οι ευθείες ϵ_1 και $\epsilon_2: (12 - \alpha)x + 2y = 4$ να είναι παράλληλες. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

ΘΕΜΑ 9

Να αποδείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι σταθερή.

$$\frac{x^2 - 2xy + y^2}{x^3y - y^4} : \frac{y - x}{y(x^2 + xy + y^2)}$$

ΘΕΜΑ 10

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($A\Gamma=AB$) και $\epsilon \parallel \Gamma B$.

Τα σημεία N και M είναι τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Από τα σημεία N και M να φέρετε τις κάθετες NH και MT αντίστοιχα στην ευθεία ϵ .

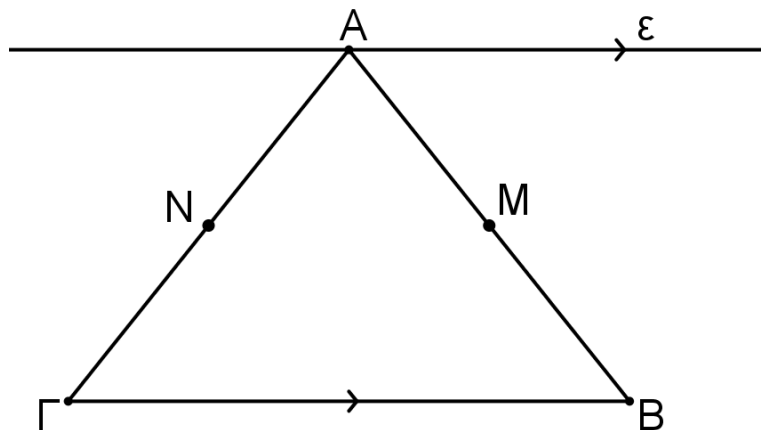
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $NHTM$ είναι ορθογώνιο.

(Μον. 2)

(β) Αν $AB=6\text{cm}$ και $\Gamma B=8\text{cm}$ να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B .

(Μον. 3)



ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1

(α) Να λύσετε την εξίσωση:

(Mov. 5)

$$\frac{x-1}{x-2} - \frac{1}{x+2} = \frac{2x}{x^2-4}$$

(β)/i. Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

(Mov. 2)

$$A = x^2 y - x y^2 - x + y$$

(β)/ii. Αν στην πιο πάνω παράσταση $A=56$ και $xy=8$, να βρείτε

$$\text{την τιμή του } x^2 + y^2$$

(Mov. 3)

ΘΕΜΑ 2

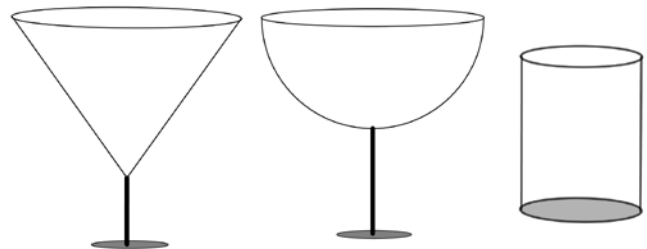
Στο διπλανό σχήμα δίνονται τρία ποτήρια.

Το κωνικό ποτήρι έχει ακτίνα 6cm και ύψος 8cm.

Το ποτήρι σχήματος ημισφαιρίου έχει ακτίνα 6cm.

Το κυλινδρικό ποτήρι έχει ακτίνα 5cm και ύψος 7cm.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



(α) Να βρείτε την εξωτερική επιφάνεια του κάθε ποτηριού.

(Mov. 3)

(β) Ποιο από τα δύο πρώτα ποτήρια (κωνικό ή ημισφαίριο), έχει την μεγαλύτερη χωρητικότητα;

(Mov. 2)

(γ) Γεμίζουμε το κωνικό ποτήρι με πορτοκαλάδα και μετά το αδειάζουμε στο κυλινδρικό ποτήρι.

Να βρείτε σε ποιο ύψος του κυλινδρικού ποτηριού θα φθάσει η πορτοκαλάδα.

(Mov. 3)

(δ) Στο χυμό πορτοκαλάδας που βρίσκεται μέσα στο κυλινδρικό ποτήρι ρίχνω τώρα

4 παγάκια σχήματος κύβου πλευράς 1cm. Να υπολογίσετε τον νέο όγκο του περιεχομένου, όταν λιώσουν τα παγάκια.

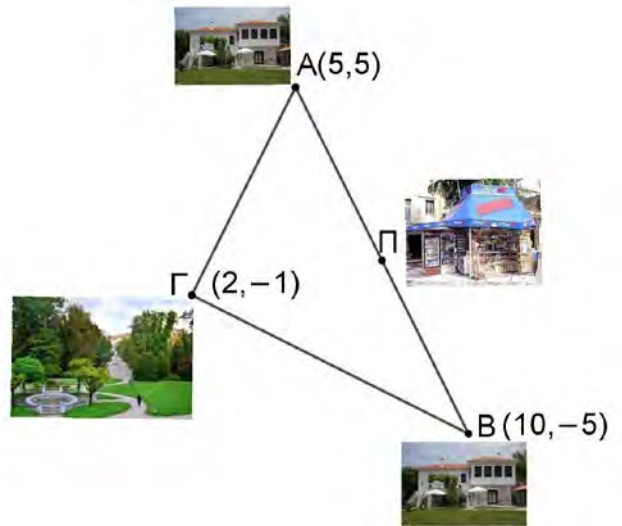
(Mov. 2)



ΘΕΜΑ 3

Στο διπλανό σχήμα στο σημείο $A(5, 5)$ βρίσκεται το σπίτι του Αντώνη και στο σημείο $B(10, -5)$ το σπίτι του Βασίλη. Στο σημείο $\Gamma(2, -1)$ είναι το πάρκο της γειτονιάς. Στο μέσο της απόστασης των δύο σπιτιών στο σημείο Π , βρίσκεται ένα περίπτερο.

(α)/i Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των σπιτιών του Αντώνη και του Βασίλη. (Μov. 2)



(α)/ii Να βρείτε τις συντεταγμένες της θέσης του περιπτέρου (σημείο Π). (Μov. 2)

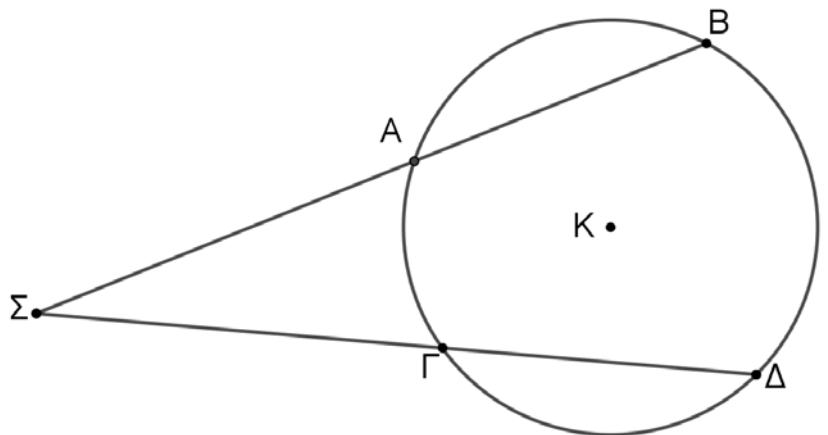
(α)/iii Να αποδείξετε ότι ο δρόμος $A\Gamma$ είναι κάθετος με τον δρόμο $B\Gamma$. (Μov. 2)

(β) Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Ένας παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 64 βαθμούς, ενώ ένας άλλος έδωσε 4 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 28 βαθμούς. Πόσους βαθμούς παίρνει η κάθε σωστή απάντηση και πόσοι βαθμοί αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση; (Να λυθεί με σύστημα) (Μov. 4)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται κύκλος $(K, 4\text{cm})$ και $B\Sigma = \Delta\Sigma$. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

(α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΣBK και $\Sigma \Delta K$ είναι ίσα. (Μov. 3)



(β) Να δείξετε ότι η προέκταση του ΣK τέμνει κάθετα την χορδή $B\Delta$. (Μov. 2)

(γ) Να δείξετε ότι το κέντρο K του κύκλου, ισαπέχει από τις χορδές AB και $\Gamma\Delta$. (Μov. 3)

(δ) Αν $\eta\mu \hat{K}\Delta\Gamma = \frac{3}{4}$, να βρείτε την $\epsilon\phi \hat{K}\Delta\Gamma$ (κατά προσέγγιση δεκάτου). (Μov. 2)

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$. Το BE είναι ύψος του ρόμβου και η γωνία $EB\Gamma$ ισούται με 30° . Να φέρετε την διάμεσο EM του τριγώνου $EB\Gamma$ και την MK παράλληλη προς την $\Gamma\Delta$ (K το σημείο που τέμνει την $A\Delta$).

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

(α) Να δείξετε ότι το $KM\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. **(Μον. 3)**

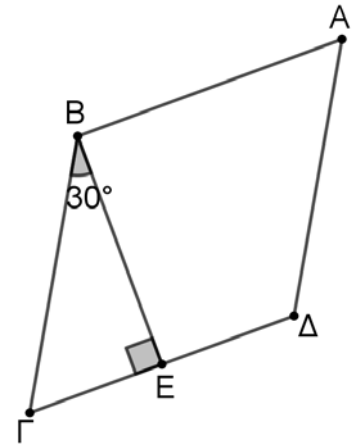
(β) Να φέρετε τη διαγώνιο του ρόμβου $B\Delta$ η οποία να τέμνει την MK στο σημείο Λ .

Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $\Lambda M E \Delta$ είναι ρόμβος.

(Μον. 5)

(γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $K\Delta\Lambda$ είναι ισοσκελές.

(Μον. 2)



ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του ΜΕΡΟΥΣ Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x+3)^2 =$

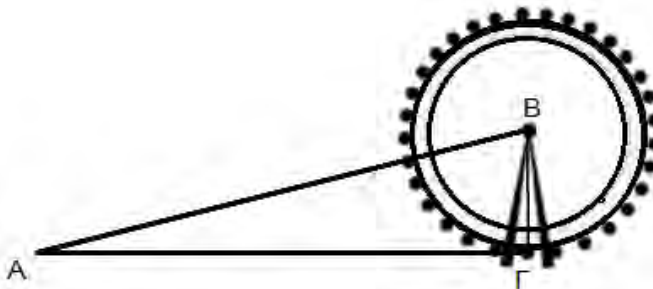
(β) $(x-4)(x+4) =$

2. Να λύσετε το σύστημα: $-2x + \psi = 3$
 $3x - 7\psi = 1$

3. Να λύσετε την εξίσωση: $4x^2 - 5x - 6 = 0$

4. Στο σχήμα φαίνεται ένας από τους μεγαλύτερους τροχούς στον κόσμο (London Eye). Αν το σημείο Β είναι το κέντρο του τροχού, $B\Gamma \perp A\Gamma$, $A\Gamma = 90$ m και $\hat{A} = 35^\circ$, να υπολογίσετε την ακτίνα ΒΓ του τροχού.

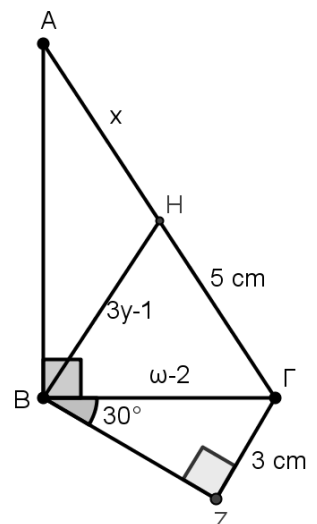
Δίνονται: $\eta\mu 35^\circ = 0,574$, $\sigma\upsilon\nu 35^\circ = 0,819$, $\epsilon\phi 35^\circ = 0,700$
 $\eta\mu 55^\circ = 0,819$, $\sigma\upsilon\nu 55^\circ = 0,574$, $\epsilon\phi 55^\circ = 1,428$



5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$) και $\triangle BZ\Gamma$ ($\hat{Z} = 90^\circ$).

Η ΒΗ είναι διάμεσος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, $\Gamma H = 5$ cm, $\Gamma Z = 3$ cm και $\hat{\Gamma BZ} = 30^\circ$.

Να υπολογίσετε τις τιμές των x , y και ω , δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



6. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

i. $3\alpha^2\beta + 6\beta =$

ii. $25x^2 - 4 =$

iii. $x^2 + 4x - 12 =$

iv. $\alpha^2 - \beta^2 - 3\alpha + 3\beta =$

7. (α) Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο κύβου ακμής $a = 3\text{ cm}$.

(β) Ποιο είναι το μήκος ακμής κύβου, ο οποίος έχει όγκο αριθμητικά ίσο με το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς του;

8. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.

(α) Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΑΔ, φέρουμε τη ΒΜ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΒΜ=ΜΕ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο.

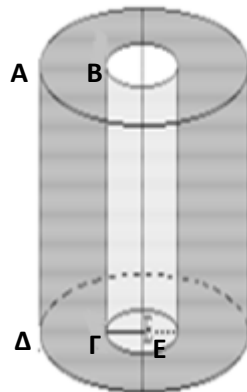
(β) Από τις κορυφές Α και Β του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, φέρουμε κάθετες ΑΖ και ΒΘ στη ΓΔ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΘΖ είναι ορθογώνιο.
(Να γίνει το σχήμα)

9. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται: $AD \perp AB$, $AE \perp AG$, $AD = AB$ και $AE = AG$.
Να δείξετε ότι $BE = GD$.



10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται: $\Delta E = \rho$, $\Gamma E = \alpha$, $B\Gamma = 2\rho$.

(α) Να αποδείξετε ότι ο όγκος που περιέχεται μεταξύ των δύο κυλίνδρων του σχήματος ισούται με: $V = 2\pi\rho(\rho - \alpha)(\rho + \alpha)$



(β) Αν V είναι ο όγκος του πιο πάνω σχήματος, να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\frac{\rho^3 - \alpha^3}{V} \div \frac{\rho^2 + \alpha\rho + \alpha^2}{\rho + \alpha}.$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του ΜΕΡΟΥΣ Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2}{x^2 - 5x + 6} + \frac{x}{2 - x} = \frac{2}{x - 3}$

2. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(-1, 4)$, $B(4, -2)$ και $\Gamma(10, 3)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$. (μον.2)

(β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. (μον.3)

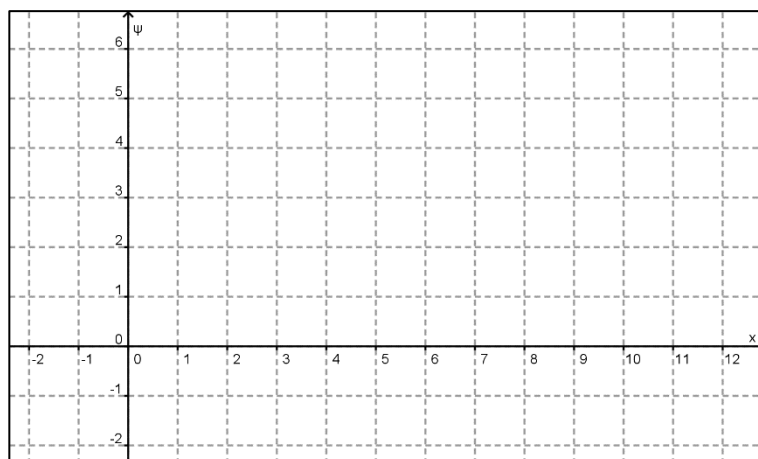
(γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$ είναι $5x - 6y - 32 = 0$. (μον.2)

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $E(5, 2)$

και είναι παράλληλη με την AB .

(μον.3)

(Να γίνει το σχήμα)



3. (α) Να κάνετε τις πράξεις: $\left(\frac{5x}{x+2} - \frac{3x}{x-2} \right) \div \frac{2x-16}{x^3+2x^2}$

(β) Αν $x = \alpha - \frac{1}{2}$ και $\psi = \alpha + \frac{1}{2}$ να αποδείξετε ότι: $x^2 + 4x\psi - \psi^2 + 1 = 2\alpha(2\alpha - 1)$

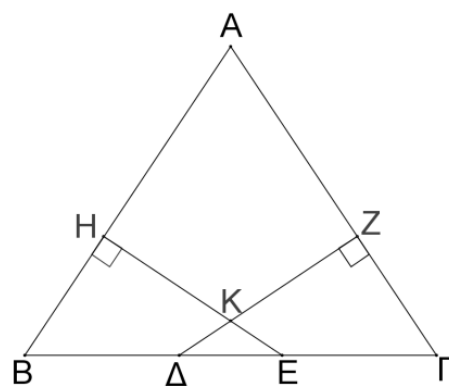
4. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB=AG$) και $BD=EG$. Τα ευθύγραμμα τμήματα EH και ΔZ είναι οι αποστάσεις των σημείων E και Δ από τις πλευρές AB και AG αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle BHE$ και $\triangle GZ\Delta$ είναι ίσα. (μον.5)

(β) Αν K είναι το σημείο τομής των ευθυγράμμων τμημάτων EH και ΔZ , να δείξετε ότι:

i. η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$
(μον.3)

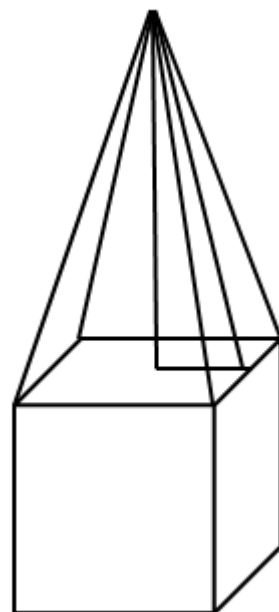
ii. το τρίγωνο $\triangle K\Delta E$ είναι ισοσκελές
(μον.2)



5. Η πιο κάτω κατασκευή αποτελείται από μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα και ένα ορθό τετραγωνικό πρίσμα, έτσι ώστε οι ακμές της βάσης της πυραμίδας να αποτελούν και ακμές της βάσης του πρίσματος. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος ισούται με 240 m^2 , το ύψος του πρίσματος είναι 6 m και το ύψος της πυραμίδας 12 m .

(α) Να βρείτε τον συνολικό όγκο της κατασκευής.

(β) Αν η κατασκευή πρέπει να βαφτεί εξωτερικά (χωρίς τη βάση) με μπογιά που στοιχίζει €5,50 το τετραγωνικό μέτρο, να υπολογίσετε το συνολικό κόστος της μπογιάς.



ΤΑΞΗ: Γ'

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΜΕΡΟΣ Α': (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(x + 2)^2 =$

(β) $(y - 5)(y + 5) =$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $3x + 3y =$

(β) $a^2 - 9 =$

3. Να υπολογίσετε τον όγκο κύβου με ακμή $a = 3\text{cm}$.

4. Να λύσετε το σύστημα:

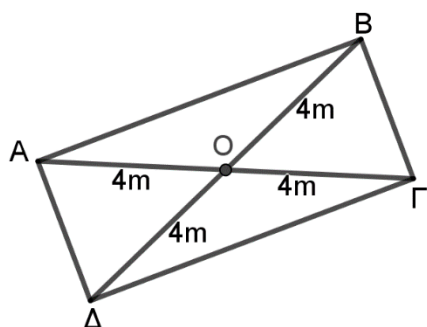
$$2x + y = 13$$

$$3x - y = -3$$

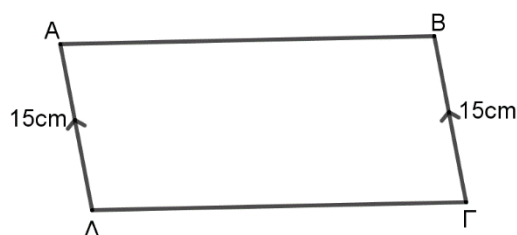
5. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - 7x + 3 = 0$

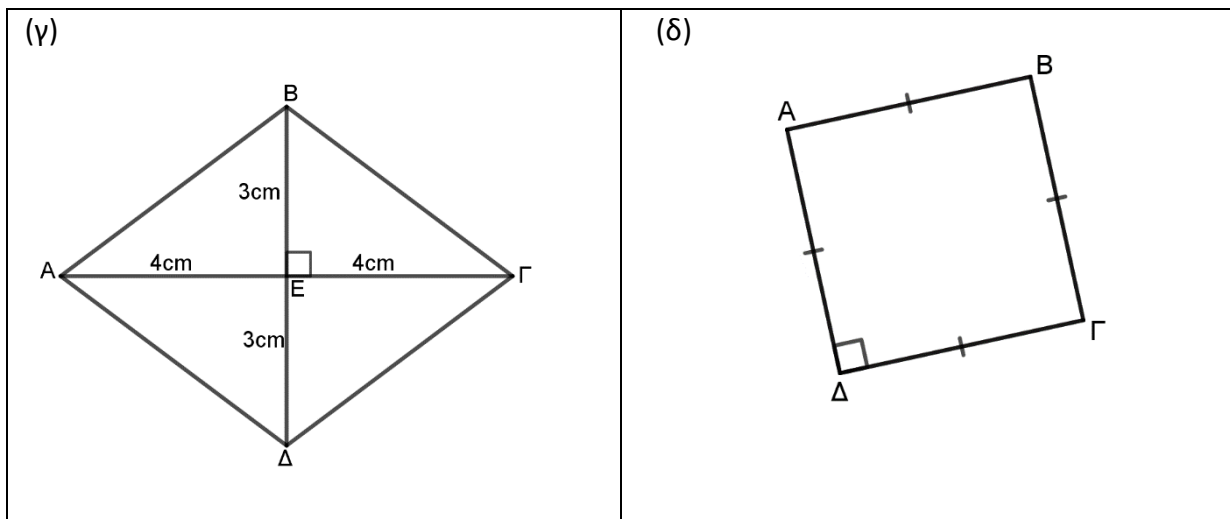
6. Να χαρακτηρίσετε τα πιο κάτω τετράπλευρα ως προς το είδος τους (παραλληλόγραμμο, ρόμβος, ορθογώνιο, τετράγωνο) και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(α)



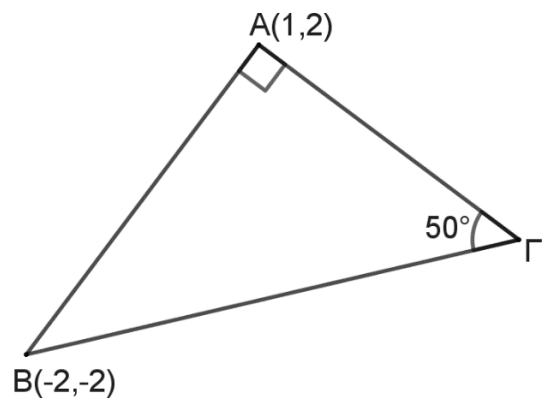
(β)



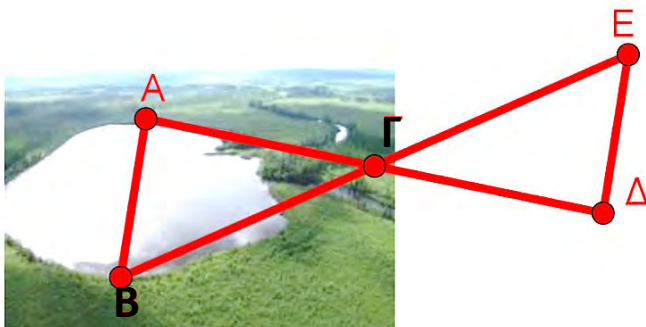


7. Το διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) έχει κορυφές $A(1, 2)$, $B(-2, -2)$ και γωνία $\hat{\Gamma} = 50^\circ$. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών AB και $B\Gamma$.

($\eta\mu 50^\circ \cong 0,766$, $\sigma\upsilon\nu 50^\circ \cong 0,643$, $\epsilon\phi 50^\circ \cong 1,192$)



8. Προκειμένου ένας τοπογράφος μηχανικός να μετρήσει το πλάτος μιας λίμνης, τοποθέτησε δύο δείκτες A και B στις όχθες της λίμνης και ένα τρίτο δείκτη Γ στη ξηρά, ώστε να μπορεί να μετρήσει τις αποστάσεις ΓA και ΓB . Κατόπιν, στην προέκταση των ημιευθειών $A\Gamma$ και $B\Gamma$ πήρε τα ευθύγραμμα τμήματα $\Gamma\Delta = \Gamma A$ και $\Gamma E = \Gamma B$. Ο τοπογράφος μέτρησε την απόσταση των Δ και E και ισχυρίστηκε ότι είναι ίση με το πλάτος AB της λίμνης. Να δικαιολογήσετε γιατί ο ισχυρισμός του τοπογράφου είναι σωστός.

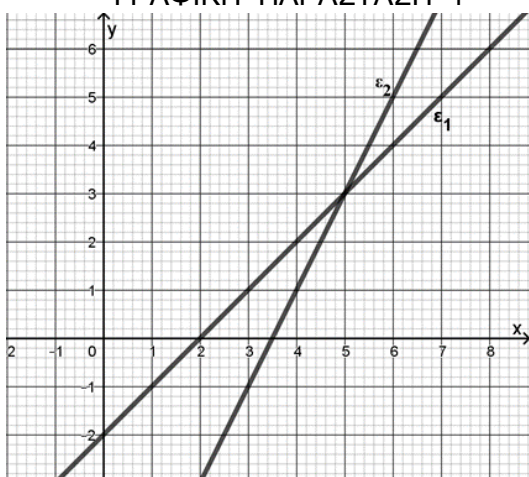


9. Να κάνετε τις πράξεις:

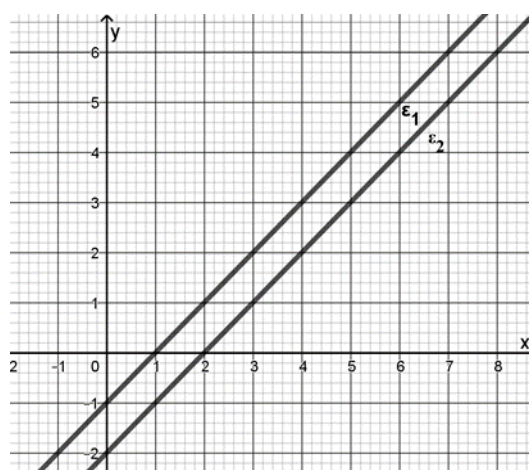
$$\frac{9x^3 - 12x^2 + 4x}{2x^3 - 6x^2} \div \left(\frac{x}{x^2 - 3x} - \frac{8 - x}{2x^2 - 18} \right)$$

10. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

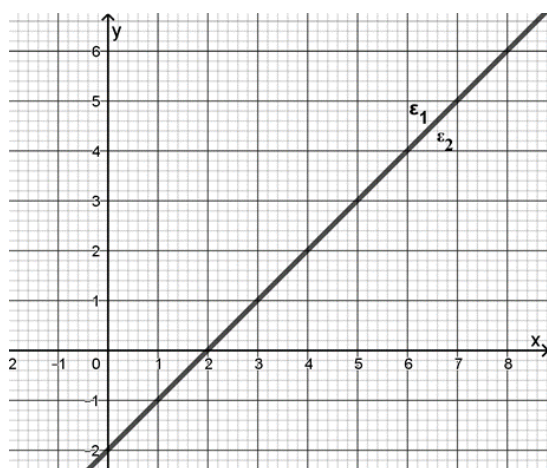
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 1



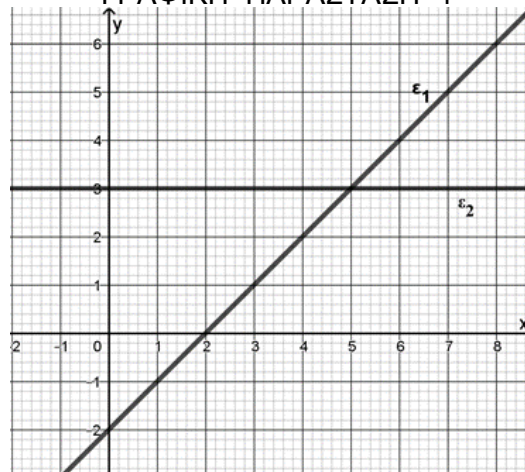
ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 2



ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 3



ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ 4



Σύστημα εξισώσεων	Γραφική Παράσταση	Λύση
$y = 2x - 7$ $x - y = 2$		
$y = 3$ $x - y = 2$		
$x - y = 2$ $3x - 3y = 6$		
$x - y = 2$ $x - y = 1$		

ΜΕΡΟΣ Β': (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x-1}{x+3} - \frac{x-4}{x-2} = \frac{35}{x^2+x-6}$

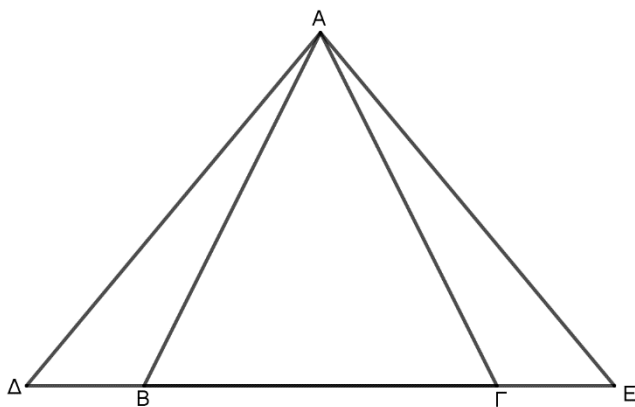
2. Στο πιο κάτω σχήμα τα τρίγωνα ABΓ και AΔΕ είναι ισοσκελή με AB=ΑΓ και AΔ=ΑΕ.

(α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AΔΒ και ΑΓΕ είναι ίσα.

(β) Αν Η το μέσο της ΑΓ και Ζ το μέσον της ΑΒ, να αποδείξετε ότι ΔΗ=ΕΖ.

(γ) Αν τα ΔΗ και ΕΖ τέμνονται στο Θ να δείξετε ότι το τρίγωνο ΘΔΕ είναι ισοσκελές.

(Σχήμα – Δεδομένα – Ζητούμενα – Απόδειξη)



3. Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $A = (3x + 1)^2 - 6(1 + x)(x - 1) - (x + 1)^3 + x^3 - 2(y + 3)$

(α) Να κάνετε τις πράξεις και να δείξετε ότι $A = 3x - 2y$

(β) Αν $A = -4$ και $xy = 2$, να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραστάσεων:

i. $12x^3y^2 - 8x^2y^3$

ii. $9x^2 + 4y^2$

4. Ένας αρωματοπώλης έχει στη διάθεσή του δύο γυάλινες συσκευασίες αρωμάτων. Η μία συσκευασία έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 6cm, 4cm και 11cm. Η άλλη συσκευασία έχει σχήμα τετραγωνικής πυραμίδας με πλευρά βάσης 7cm και ύψος 9cm. Θέλει να επιλέξει μία από τις δύο συσκευασίες για να συσκευάσει ένα άρωμα που το αγοράζει σε κυλινδρικό δοχείο με εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $588\pi \text{ cm}^2$ και ακτίνα διπλάσια από την πλευρά της βάσης της τετραγωνικής πυραμίδας.



(α) Να βρείτε πόσες συσκευασίες αρωμάτων μπορεί να συσκευάσει από το κάθε σχήμα ($\pi = \frac{22}{7}$). (μονάδες 8)

(β) Αν η συσκευασία σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου πωλείται προς €75 και η συσκευασία σχήματος τετραγωνικής πυραμίδας προς €40, να βρείτε ποια από τις δύο συσκευασίες του συμφέρει να επιλέξει. (μονάδες 2)



€75

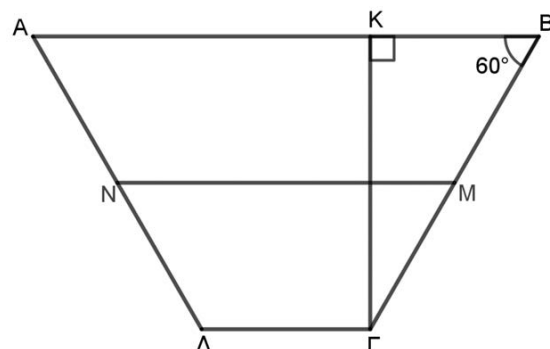


€40

5. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΒΓ=2(ΓΔ), ΓΔ=3cm και $\widehat{B} = 60^\circ$. Φέρουμε το ύψος ΓΚ και τη διάμεσο ΜΝ του τραpezίου.

- (α) Να υπολογίσετε το μήκος του ΚΒ.
 (β) Να φέρετε το ύψος ΔΛ του τραpezίου ΑΒΓΔ και να αποδείξετε ότι ΑΛ=ΚΒ.
 (γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΚ είναι ισόπλευρο.
 (δ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΚΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.
 (ε) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΜΚΝ είναι ορθογώνιο.

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

i. $(x + 5)^2 =$

ii. $(x - 3) \cdot (x + 3) =$

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πιο κάτω πολυώνυμα:

i. $\beta^2 + 3\beta =$

(μον. 1,5)

ii. $x^2 + 7x + 10 =$

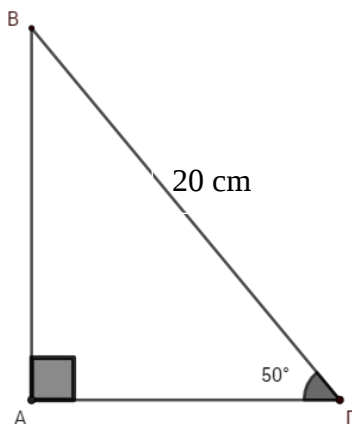
(μον. 1,5)

iii. $x^2 - 49 =$

(μον. 2)

3. Αν στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο, η γωνία $\Gamma = 50^\circ$ και η πλευρά $B\Gamma = 20\text{cm}$, να βρείτε το μήκος της πλευράς AB .

($\eta\mu 50^\circ = 0,766$, $\sigma\upsilon\nu 50^\circ = 0,643$, $\epsilon\phi 50^\circ = 1,192$)



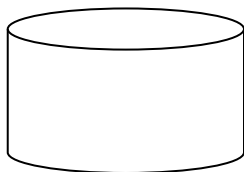
4. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$2x^2 - 7x - 4 = 0$$

5. Αν ο πιο κάτω κλειστός κύλινδρος έχει ύψος 5 cm και ακτίνα βάσης 4 cm, να υπολογίσετε,

- i το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου,
- ii τον όγκο του κυλίνδρου.

(να δώσετε τις απαντήσεις σας συναρτήσει του π)



6. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα με όποια μέθοδο θέλετε:

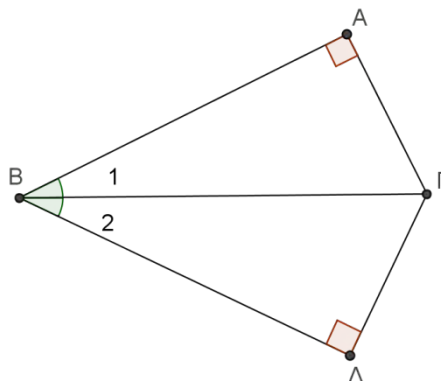
$$\varepsilon_1 : 3x + 2y = 34$$

$$\varepsilon_2 : 3x + 5y = 58$$

7. Αν στο διπλανό σχήμα

δίνονται $ΑΓ=ΓΔ$, $ΒΑ \perp ΑΓ$

και $ΒΔ \perp ΓΔ$, να δείξετε ότι $\widehat{B_1} = \widehat{B_2}$.



8. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών ε_1 και ε_2 στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

i. $\varepsilon_1 : 4y = 8x - 6$

$\varepsilon_2 : y = 2x + 4$

ii. $\varepsilon_1 : 3x - 5y = 6$

$\varepsilon_2 : 6x - 10y = 12$

9. Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

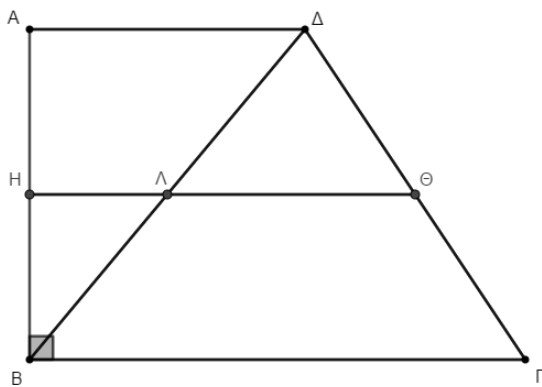
$$(\alpha + \beta)^3 - \alpha(\alpha - 3\beta)^2 + 6\alpha\beta^2 = \beta(9\alpha^2 + \beta^2)$$

10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 90^\circ$ και πλευρές $AD = 5\text{cm}$ και $BG = 13\text{cm}$.

Αν τα σημεία Η και Θ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα,

- i. να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΗΘ, (μον. 1.5)
- ii. να υπολογίσετε την **παράμετρο κ**, αν η ευθεία ΗΘ έχει εξίσωση $y = (\kappa + 2)x - 3$ και η ευθεία ΒΓ έχει εξίσωση $y = 4x - 2$, (μον. 1.5)
- iii. να δείξετε ότι το Λ είναι μέσο της ΒΔ, και να υπολογίσετε το ΗΛ (μον. 2)

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να κάνετε τις πράξεις στη πιο κάτω αλγεβρική παράσταση και να την φέρετε στην πιο απλή μορφή της.

$$\left(\frac{x^2 - 9}{x^2 + 5} : \frac{x^2 - 5x + 6}{x^3 + 2x^2 + 5x + 10} \right) \cdot \frac{x - 2}{x^2 + 3x} =$$

2. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

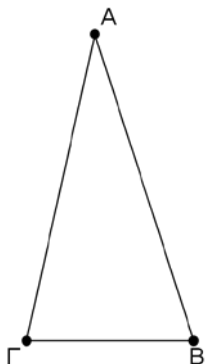
$$\frac{4}{x-2} - \frac{x+2}{x-x^2} = \frac{x-4}{x^2-3x+2}$$

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-5,-6) , Β(-3,-2) και Γ(1,-4)

- i. να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΓ, (μον. 3)
- ii. να βρείτε το μήκος της διαμέσου ΒΜ , (μον. 3)
- iii. να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Γ και είναι παράλληλη με την ευθεία ΑΒ . (μον. 4)

(Να δώσετε τις απαντήσεις σας αλγεβρικά χωρίς την χρήση αξόνων)

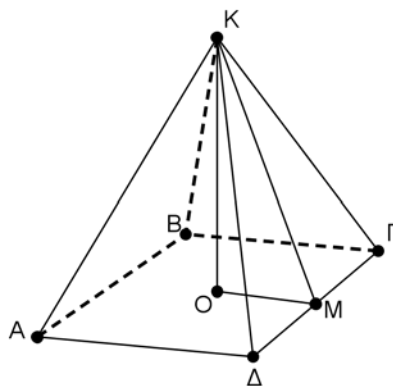
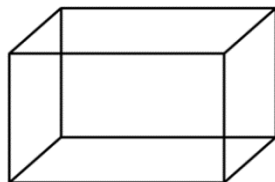
4. Δίνεται το πιο κάτω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Προεκτείνουμε την βάση ΒΓ κατά τμήματα έτσι ώστε ΒΖ=ΒΓ=ΓΗ. Φέρουμε την ΑΜ διάμεσο του τριγώνου ΑΒΓ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε ΑΜ=ΜΚ. Να αποδείξετε ότι ΑΖΚΗ ρόμβος.



5. Μια βιομηχανία αρωμάτων κατασκευάζει αρώματα σε διαφορετικές συσκευασίες. Μία από τις συσκευασίες γυναικείου αρώματος έχει σχήμα **κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας**, ενώ μία άλλη έχει σχήμα **ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου** όπως φαίνεται στα πιο κάτω σχήματα.

- i. Αν η χωρητικότητα του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι 288cm^3 και το ύψος του 2cm να υπολογίσετε το εμβαδόν της βάσης του. **(μον. 4)**
- ii. Αν το εμβαδόν της βάσης της τετραγωνικής πυραμίδας είναι ίσο με το εμβαδόν της βάσης του παραλληλεπιπέδου, και η γωνία που σχηματίζει το παράπλευρο ύψος της (h) με το ύψος της (u) είναι 30° , να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας.

(μον. 6)



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τάξη: Γ΄ Διάρκεια: 2 ώρες

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε **ΟΛΕΣ** τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $4\alpha + 4\beta - 4\gamma =$

β) $x^2 - 9 =$

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 6)^2 =$

β) $(x - 5) \cdot (x + 5) =$

3. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κύβου με ακμή $a = 4\text{cm}$.

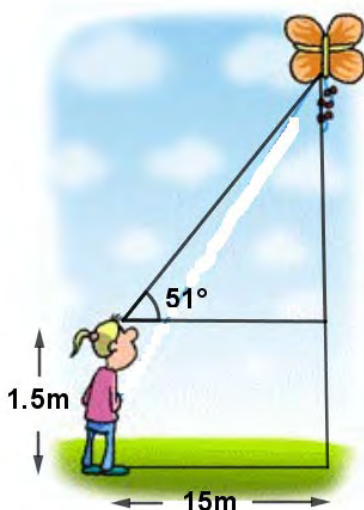
4. Να λύσετε το σύστημα:

$$2x - \psi = 4$$

$$x + \psi = -1$$

5. Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 - 7x + 2 = 0$

6. Η Μαρία πήγε εκδρομή και πέταξε τον χαρταετό της, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν το ύψος της Μαρίας είναι 1.5m, να υπολογίσετε το ύψος που έχει φτάσει ο χαρταετός.



Γωνία	ημω	συνω	εφω
39°	0.63	0.78	0.81
51°	0.78	0.63	1.23

7. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{\chi^3 - \chi^2}{4\chi^2 - 1} \div \frac{\chi^2 - 2\chi + 1}{6\chi + 3} =$$

8. Ένα τούβλο έχει μήκος 40cm , πλάτος 20cm και ύψος 15cm. Στο εσωτερικό του έχει τρεις ίσες κυλινδρικές τρύπες με διάμετρο βάσης 4cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του υλικού που χρειάζεται για να κατασκευαστεί το τούβλο.

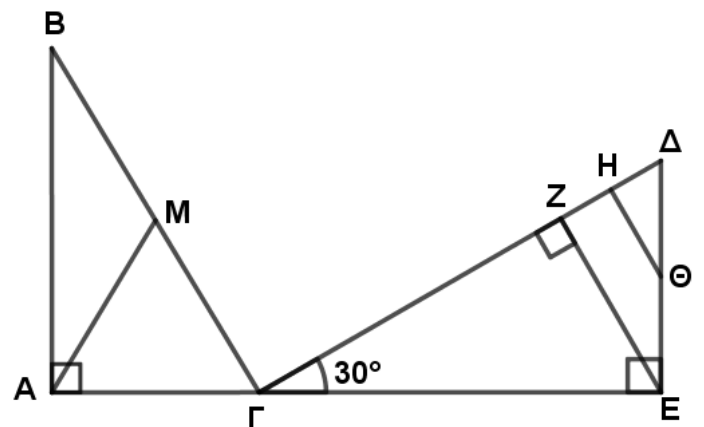
(Η απάντηση μπορεί να δοθεί συναρτήση του π)



9. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\triangle \Gamma\Delta E$ ($\hat{E} = 90^\circ$).

Ισχύει ότι $B\Gamma = \Gamma E$, $AM = 6\text{cm}$ διάμεσος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, $\angle \Gamma\Delta E = 30^\circ$, $EZ \perp \Gamma\Delta$ και H, Θ είναι τα μέσα των πλευρών $Z\Delta$ και $E\Delta$ αντίστοιχα. Να βρείτε το μήκος του $H\Theta$.

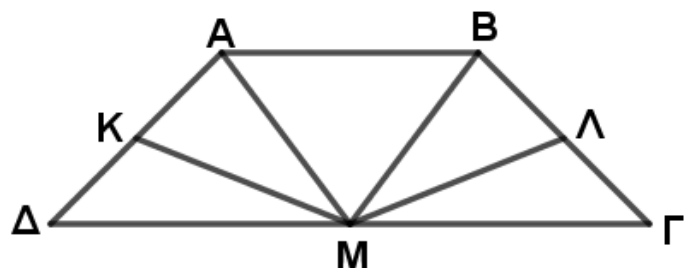
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



10. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma$). Το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα σημεία K και Λ είναι τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

α) $KM = \Lambda M$

β) $\widehat{KMA} = \widehat{\Lambda MB}$



ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε ΟΛΕΣ τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2\chi - 1}{\chi^2 - \chi - 12} + \frac{5 - \chi}{4 - \chi} = \frac{6}{\chi + 3}$$

2. α) Δίνεται κώνος με ακτίνα $R = (\alpha + 2\beta)\text{cm}$ και ύψος $u = (2\alpha - \beta)\text{cm}$. Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 5$, να δείξετε ότι η γενέτειρα του κώνου είναι $\lambda = 5\text{cm}$.

β) Αν το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πιο πάνω κώνου είναι $E_{ολ} = 24\pi \text{ cm}^2$, να βρείτε τον όγκο του.

3. α) Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(-1,2)$, $B(3,5)$ και $\Gamma(6,1)$.

- i. Να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.
- ii. Να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.
- iii. Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $\Gamma\Delta$.

(μον. 6)

β) Αν ελαττώσουμε το μήκος ενός ορθογωνίου κατά 2cm και αυξήσουμε το πλάτος κατά 3cm , το εμβαδόν του αυξάνεται κατά 10cm . Αν αυξήσουμε το μήκος κατά 3cm και μειώσουμε το πλάτος κατά 2cm , το εμβαδόν του παραμένει το ίδιο. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου. (Να λυθεί με σύστημα).

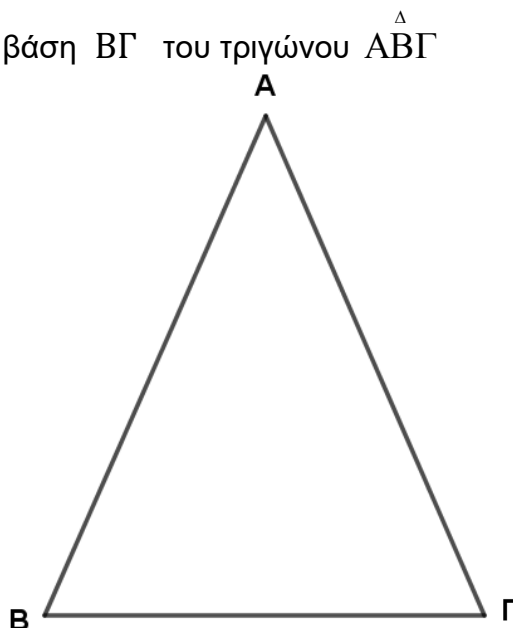
(μον. 4)

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $A\Delta$ διχοτόμο και M τυχαίο σημείο της $A\Delta$. Η BM τέμνει την $A\Gamma$ στο E και η ΓM τέμνει την AB στο Z . Να δείξετε ότι:

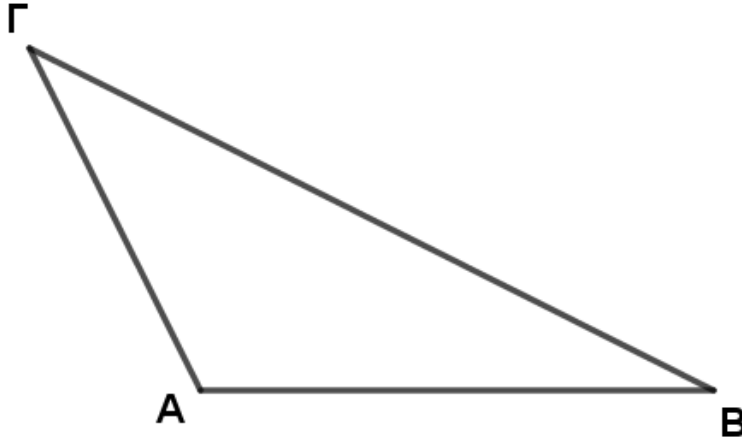
α) το τρίγωνο $\triangle BM\Gamma$ είναι ισοσκελές (μον. 2)

β) $\triangle ABE = \triangle A\Gamma Z$ (μον. 4)

γ) τα σημεία Z και E ισαπέχουν από την βάση $B\Gamma$ του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ (μον. 4)



5. Δίνεται αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με αμβλεία γωνία $\hat{A}$. Τα σημεία K, Λ, M είναι τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.
- α) Να δείξετε ότι το $BK\Lambda M$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Αν φέρουμε $K\Delta$ κάθετη στη $B\Gamma$, και ΛE κάθετη στη $B\Gamma$, να δείξετε ότι το $K\Lambda E\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ'

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες (από τις 100).

1. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $2x^2 + 4x - 3$

β) $x^2 - 36 =$

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x - 5)^2 =$

β) $(2x + 7) \cdot (2x - 7) =$

3. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κύβου αν ο όγκος του είναι 27 m^3 .

4. Στο τετράπλευρο ΑΒΓΔ δίνονται $AO = OG$ και $\angle AOB = \angle G$. Να δείξετε ότι:

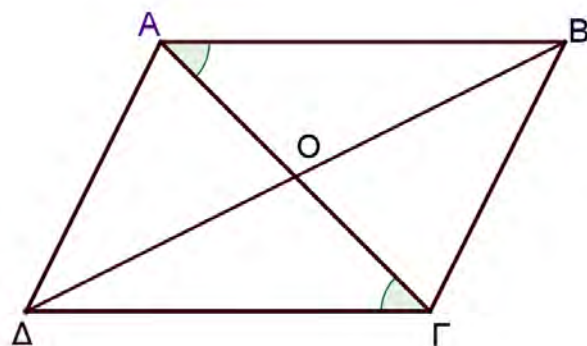
α) Τα τρίγωνα ΑΒΟ και ΟΔΓ είναι ίσα.

(μον. 3)

β) Το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(μον. 2)

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



5. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\angle A = 90^\circ$) δίνεται $\sin B = \frac{8}{17}$.

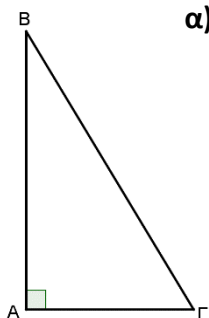
α) Να υπολογίσετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

(μον.4)

$\sin \Gamma =$

$\cos \Gamma =$

$\cos B =$



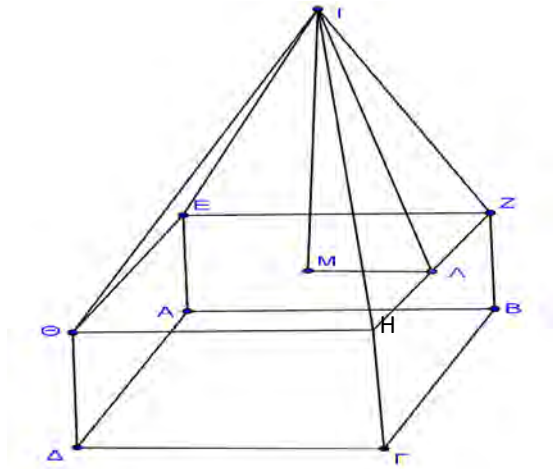
β) Να υπολογίσετε το μέτρο της οξείας γωνίας Β κατά προσέγγιση ακεραίου.

(μον.1)

6. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\frac{x^3 + 5x^2 - 14x}{x^3 + 7x^2 - 4x - 28} =$

7. Να λύσετε την εξίσωση: $x(3x+1) = 2$

8. Στο πιο κάτω στερεό η κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης 40 cm και παράπλευρο ύψος 13cm. Αν το ύψος του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου είναι ίσο με τα $\frac{2}{3}$ του ύψους της πυραμίδας, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.



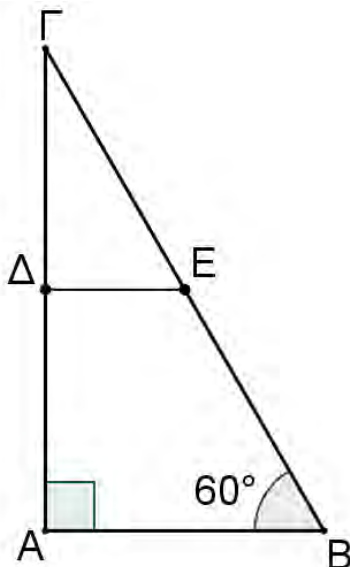
9. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), $\hat{B} = 60^\circ$ και Δ, Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε το ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ έτσι ώστε $EZ = DE$.

Να δείξετε ότι:

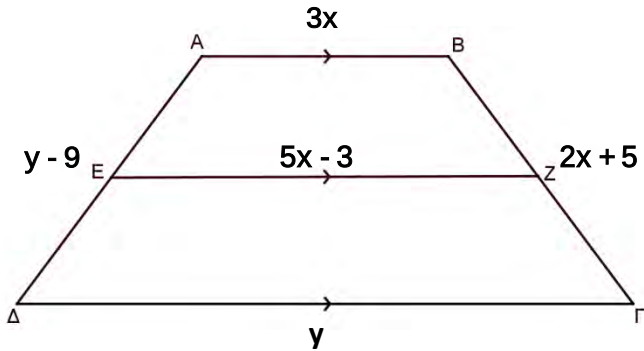
α) το ΑΔΖΒ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (μον.3)

β) το ΑΕΒ είναι ισόπλευρο τρίγωνο. (μον.2)

Οι απαντήσεις σας να είναι πλήρως δικαιολογημένες.



10. Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB \parallel \Delta\Gamma$ δίνονται, $\overline{AB} = (3x) \text{ cm}$, $\overline{AD} = (y) \text{ cm}$, $\overline{BC} = (2x + 5) \text{ cm}$ και $\overline{CD} = (y - 9) \text{ cm}$. Αν ΕΖ είναι η διάμεσος του τραpezίου και $\overline{EZ} = (5x - 3) \text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος των βάσεων του τραpezίου.

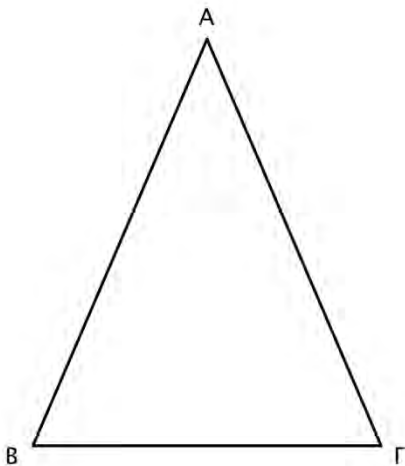


ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες (από τις 100).

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x+5}{2x+2} - \frac{2x}{3x-6} = \frac{-4}{x^2-x-2}$

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$) και Δ, Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στις προεκτάσεις της πλευράς ΒΓ παίρνουμε ευθύγραμμα τμήματα ΒΚ και ΓΛ έτσι ώστε $BK = GL$.

- α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΔΚ και ΕΓΛ είναι ίσα. (μον.3,5)
 β) Αν ΚΜ και ΛΝ είναι οι αποστάσεις των σημείων Κ και Λ από τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $KM = LN$. (μον.3,5)
 γ) Αν Ζ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΖΕ είναι ρόμβος. (μον.3)



3. α) Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{x^2+6x+9}{x^2-x-12} \div \left(\frac{x+1}{x^2-16} - \frac{2x}{4x-x^2} \right) =$

β) Αν $x - y = 4$ και $xy = 3$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $\leq x^3y + xy^3$.

4. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ, με κορυφές Α(2,6), Β(8,-2), Γ(4,-5) και Δ(-2,3).

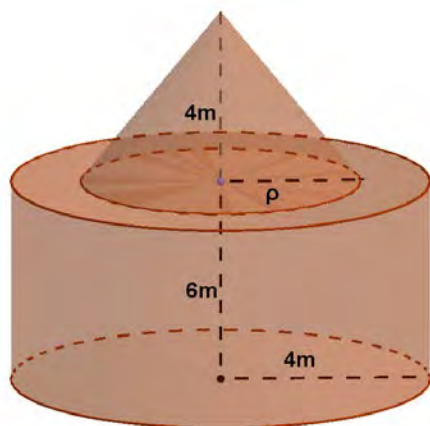
α) Να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (μον.6)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το μέσο Μ της πλευράς ΑΒ και είναι κάθετη στη διαγώνιο ΒΔ. (μον.4)

5. Η πιο κάτω μεταλλική κατασκευή αποτελείται από έναν κύλινδρο ακτίνας 4m και ύψος 6m και από έναν κώνο ακτίνας ρ και ύψος 4m. Ο συνολικός όγκος της κατασκευής είναι $108\pi \text{ m}^3$.

α) Να βρείτε την ακτίνα ρ του κώνου. (μον.4)

β) Η κατασκευή είναι τοποθετημένη στο έδαφος και η εξωτερική της επιφάνεια πρέπει να καλυφθεί με αντισεισμικό υλικό. Να βρείτε το συνολικό κόστος της εφαρμογής του υλικού, αν η κάθε συσκευασία πωλείται προς €12 και καλύπτει $15,7\text{m}^2$ και η αμοιβή του τεχνίτη είναι €160. (μον.6)



ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+7)^2 =$

β) $(x-5)(x+5) =$

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $5x-5\psi =$ (Mov. 1)

β) $\alpha^2-100 =$ (Mov. 2)

γ) $x^2-11x + 28 =$ (Mov. 2)

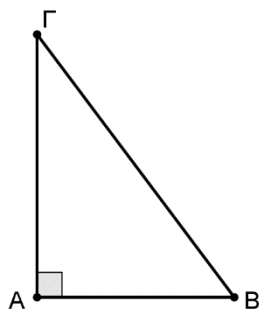
3. Να λύσετε το σύστημα:

$$2x-\psi = 5$$

$$x+ \psi = 1$$

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ΑΒ=6 cm και ΑΓ=8 cm.

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ (ημΓ , συνΓ , εφΓ).



5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 81 = 0$ (Mov. 2)

β) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (Mov. 3)

6. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{x^2 - 5x}{2x + 2} \div \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 25} =$$

7. Στο διπλανό σχήμα, το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και Μ το μέσο της ΔΓ.

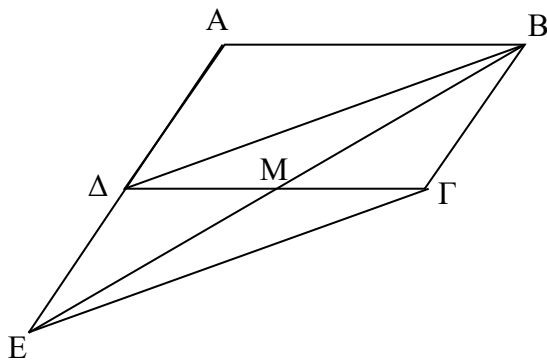
Προεκτείνουμε την ΒΜ, η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο σημείο Ε.

Να δείξετε ότι:

(α) Το τετράπλευρο ΔΒΓΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μον. 3)

(β) Αν Ζ το μέσο της ΕΓ τότε $MZ = \frac{AD}{2}$. (Μον. 2)

(Να δικαιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας)



8. Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 στις πιο κάτω περιπτώσεις:

α) $\epsilon_1: \psi = -\frac{2}{3}x + 4$

β) $\epsilon_1: 3x + \psi = 5$

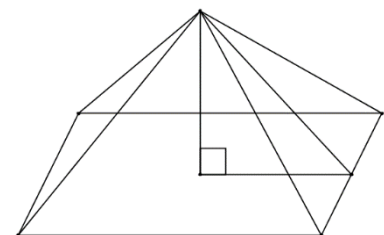
$\epsilon_2: \frac{2}{3}x - 4 = \psi$

$\epsilon_2: 2\psi + 6x = 10$

9. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης $a=18m$ και ύψος $u=12m$.

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας $E_{ολ}$ της πυραμίδας.

(Μον. 3)



β) Να υπολογίσετε τον όγκο V της πυραμίδας.

(Μον. 2)

10. Να βρείτε την τιμή των χ , ψ και ω στα πιο κάτω σχήματα **δικαιολογώντας** τις απαντήσεις σας:

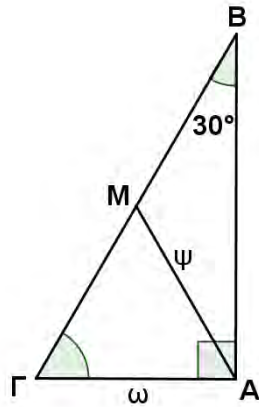
α) Δεδομένα

$$\hat{A} = 90^\circ$$

$$\hat{B} = 30^\circ$$

$$B\Gamma = 16\text{cm}$$

M μέσο BΓ



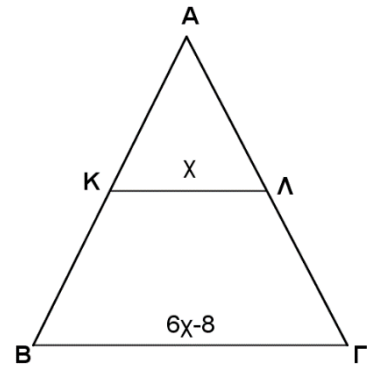
β) Δεδομένα

K μέσο AB

Λ μέσο AΓ

$$K\Lambda = \chi$$

$$B\Gamma = 6\chi - 8$$



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) α) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

(Μον. 6)

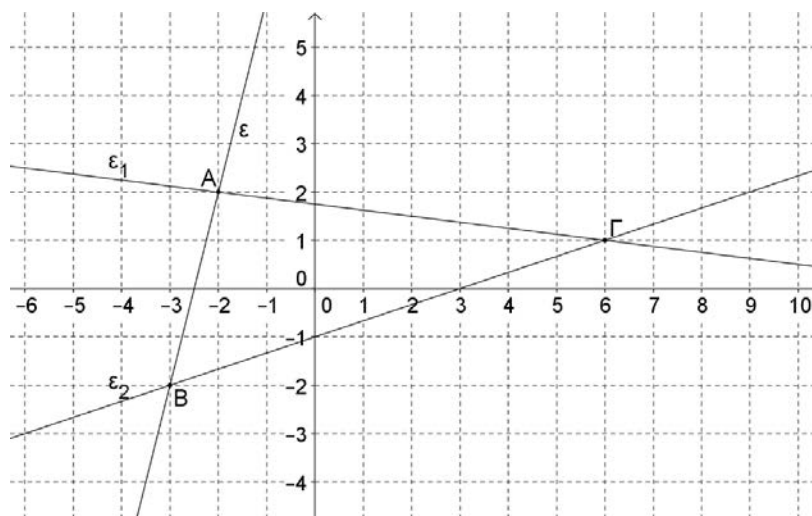
$$\frac{x}{x+5} - \frac{2}{3-x} = \frac{4x+4}{x^2+2x-15}$$

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

(Μον. 4)

$$(x+2)^3 - x(x^2+2x) - (x+1)^2 = (3x+7)(x+1)$$

2) Δίνονται οι ευθείες ϵ , ϵ_1 και ϵ_2 και τα σημεία A, B και Γ που είναι κορυφές του τριγώνου ABΓ.



α) Να **υπολογίσετε** το μήκος της πλευράς AB του τριγώνου ABΓ.

β) Να **βρείτε** τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AΓ.

γ) Να **βρείτε** την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου.

δ) Να **βρείτε** την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Α και είναι παράλληλη με την ευθεία ΒΓ.

3) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Τοποθετούμε τα σημεία Ζ και Η πάνω στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΑΖ=ΑΗ.

α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις ΖΘ και ΗΕ των σημείων Ζ και Η , από την πλευρά ΒΓ είναι ίσες. Να **δικαιολογήσετε** την απάντησή σας.

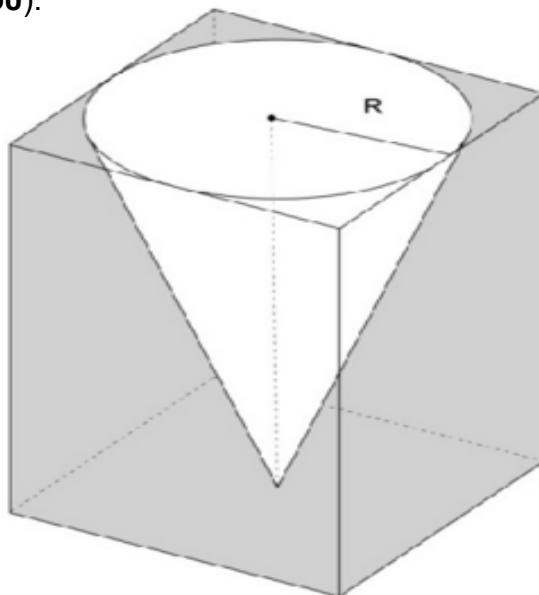
β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΗΕΘ είναι ορθογώνιο. Να **δικαιολογήσετε** την απάντησή σας:

$$\frac{\alpha^2 - 4\alpha\beta}{\beta^2} + 4 =$$

4) α) Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{\alpha}{\beta} - \frac{4\beta}{\alpha}$

β) Σε ένα εκπαιδευτικό τηλεπαιχνίδι μια ομάδα μαθητών απάντησε σε 20 ερωτήσεις και πήρε €80. Αν για κάθε σωστή απάντηση κέρδιζε €7 και για κάθε λανθασμένη απάντηση έχανε €5, να βρείτε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά και πόσες λανθασμένα .

5) Ο Ανδρέας αγόρασε για τα γενέθλια της μητέρας του ένα πέτρινο δοχείο, το οποίο είναι σε σχήμα τετραγωνικού πρίσματος που έχει μέσα γυάλινο βάζο σε σχήμα κώνου. Το εμβαδόν της βάσης του τετραγωνικού πρίσματος είναι 144 cm^2 και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι $60\pi \text{ cm}^2$. Αν το ύψος του κώνου είναι ίσο με το ύψος του πρίσματος, να υπολογίσετε τον όγκο της πέτρας (του σκιασμένου στερεού).



ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(\chi + 7)^2 =$

(β) $(\psi - 5) \cdot (\psi + 5) =$

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $\chi\psi + 5\psi =$

(β) $\chi^2 - 2\chi - 8 =$

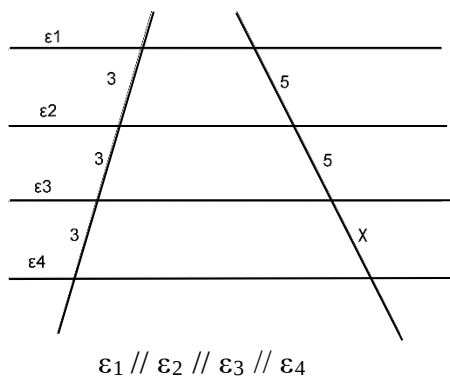
3. Δίνεται κύβος με ακμή $a = 3\text{cm}$ Να υπολογίσετε:

α) Τον όγκο του.

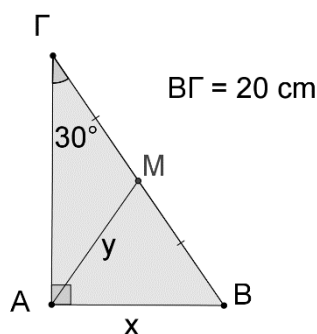
β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

4. Να υπολογίσετε τις τιμές των χ και ψ στα πιο κάτω σχήματα.

α)



β)



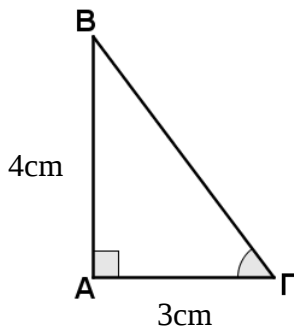
5. Να λύσετε το σύστημα:

$$3\chi + 5\psi = -1$$

$$\chi - 3\psi = 9$$

6. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - 3x - 5 = 0$

7. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο.



(α) $\eta\mu\hat{\Gamma} =$

(β) $\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} =$

(γ) $\epsilon\varphi\hat{\Gamma} =$

8. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ να φέρετε τη διάμεσο AM και να την προεκτείνετε κατά τμήμα $M\Delta = AM$.
Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = B\Delta$. (Να κάνετε σχήμα, να χρησιμοποιήσετε δεδομένα – ζητούμενα και να δικαιολογείτε τις απαντήσεις σας).

9. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφές $A(2, 4)$, $B(-1, 5)$ και $\Gamma(3, 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $B\Gamma$.

10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 256 cm^2 και ύψος $u = 6 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε:

α) Τον όγκο της. (Μον. 2)

β) Το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας. (Μον. 3)

ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. α) Να λύσετε την εξίσωση (Να χρησιμοποιήσετε περιορισμούς):

$$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{x + 2}{x + 3}$$

β) Να απλοποιήσετε την πιο κάτω παράσταση:

$$\frac{x^2 - 8x + 12}{x^2 - 16} \div \frac{4x - 8}{x^2 - x - 12} =$$

2. α) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

$$(\alpha - 2)^3 - \alpha(\alpha - 5)^2 + 17 = (2\alpha - 3)^2 - \alpha$$

β) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων το πολυώνυμο:

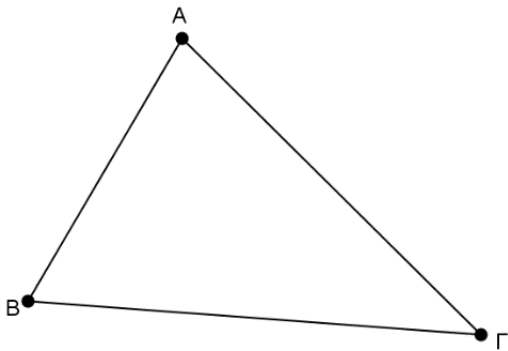
$$\chi\psi + 5\psi + \chi^2 + 2\chi - 15 =$$

3. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΓΔ και ΓΕ αντίστοιχα, έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma\text{E}$. Αν Ζ είναι ένα τυχαίο σημείο πάνω στη διχοτόμο ΓΗ να δείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΖΔΕ είναι ισοσκελές.

β) Οι αποστάσεις του σημείου Ζ από τις πλευρές ΑΓ και ΒΓ είναι ίσες.

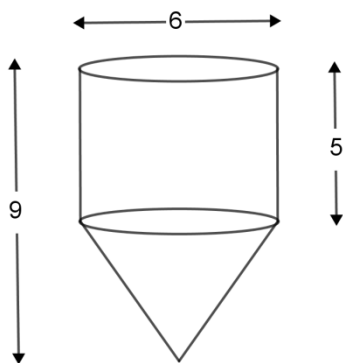
(Να κάνετε σχήμα, να χρησιμοποιήσετε δεδομένα – ζητούμενα και να δικαιολογείτε τις απαντήσεις σας).



4. Ένα δοχείο είναι κατασκευασμένο από έναν κύλινδρο και έναν κώνο με διαστάσεις σε cm που φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα.

α) Να υπολογίσετε τον όγκο του δοχείου.

β) Αν το δοχείο είναι ανοικτό από πάνω και το υλικό κατασκευής του κοστίζει 20 σεντ το κάθε cm^2 , να υπολογίσετε το συνολικό κόστος του υλικού που θα χρειαστεί για την κατασκευή 12 δοχείων.



5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και Δ το μέσο της AB , να προεκτείνετε τη $M\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = M\Delta$.
- (α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΓΜΕ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μον. 4)
- (β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΑΜΒΕ$ είναι ρόμβος. (Μον. 4)
- (γ) Αν $BE = 20\text{ cm}$, να υπολογίσετε τα μήκη των $B\Gamma$ και AB . (Μον. 2)
- (Να κάνετε σχήμα, να χρησιμοποιήσετε δεδομένα – ζητούμενα και να δικαιολογείτε τις απαντήσεις σας).

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**ΤΑΞΗ:** Γ**ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα :

α) $(\alpha + 5)^2 =$

β) $(2x - 7)(2x + 7) =$

2. Να λύσετε το σύστημα :

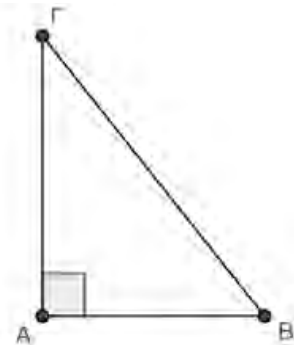
$4x + 3\psi = 5$

$5x - 2\psi = 12$

3. Να λύσετε την εξίσωση : $3x^2 - 5x - 2 = 0$

4. Σοκολατένιος κύβος με ακμή 8 cm λιώνεται και μετατρέπεται σε πλάκες σοκολάτας σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 2cm, 4cm, 1cm . Πόσες τέτοιες πλάκες μπορούν να γίνουν;

5. Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) δίνεται το $\epsilon\phi\Gamma = \frac{8}{15}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\epsilon\phi\text{B}$, $\eta\mu\Gamma$.



6. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα :

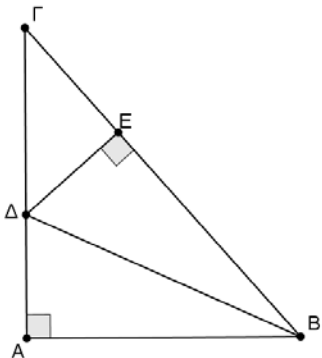
α) $8x^2y^4 - 4x^3y^3 + 12x^4y =$

β) $49\psi^2 - 9 =$

γ) $x^2 - 2x - 15 =$

δ) $4x^2 - 20x + 25 =$

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), η διχοτόμος $B\Delta$ του τριγώνου και η $\Delta E \perp B\Gamma$ όπου E σημείο της $B\Gamma$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.



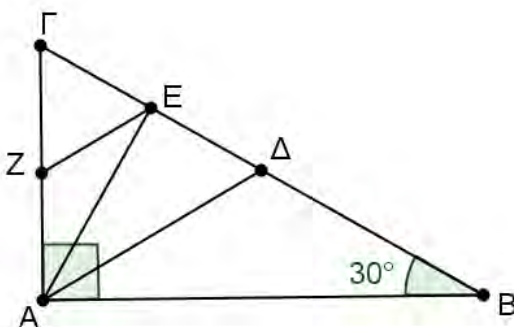
8. Δίνονται τα σημεία $A(-2, -3)$ και $B(-8, 5)$. Να βρείτε:
- τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB .
 - το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB .
 - την εξίσωση της ευθείας, η οποία περνά από το M και είναι παράλληλη στην AB .
9. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\left(\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2} \right) \cdot \frac{x-y}{x+y} = \left(\frac{x-y}{xy} \right)^2$$

- β) Να βρείτε τον αριθμό K χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής:

$$K = \sqrt{\left(\frac{1}{16} - \frac{1}{36} \right) \cdot \frac{2}{10}}$$

10. Στο πιο κάτω σχήμα η AD είναι διάμεσος και ισούται με 8cm , η AE είναι ύψος και $ZE \parallel AD$. α) Να βρείτε το μήκος της $B\Gamma$ και το μήκος της ZE .
 β) Να βρείτε τη γωνία AZE .
 γ) Αν $\Delta H \perp AB$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Delta H$ είναι ορθογώνιο.



ΜΕΡΟΣ Β΄ : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση :

$$\frac{2}{2x^2 - x} + \frac{2x + 7}{1 - 4x^2} = \frac{3}{2x^2 + x}$$

2. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta} + \alpha\beta = (\alpha + \beta)^2$$

- β) Να λυθεί η εξίσωση:

$$(x + 3)^2 - (4 + x)(4 - x) = (2x - 1)^2 - 3(x^2 - 1)$$

3. Ένας μαθητής που βρίσκεται στο εργαστήριο Χημείας έχει στη διάθεση του έναν κυλινδρικό δοκιμαστικό σωλήνα βάθους 24cm και διάμετρο 2cm. Ο σωλήνας περιέχει υγρό μέχρι τη μέση. Ο μαθητής άδειασε το περιεχόμενο του σωλήνα σε δοχείο σχήματος κώνου ακτίνας βάσης 3cm, ο οποίος και γέμισε.

Να υπολογίσετε: α) το βάθος του κωνικού δοχείου

β) το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κωνικού δοχείου.

4. Οι κορυφές ενός τετράπλευρου ΑΒΓΔ είναι Α(-2, -2), Β(0, 2), Γ(2, 1) και Δ(0, -3).

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

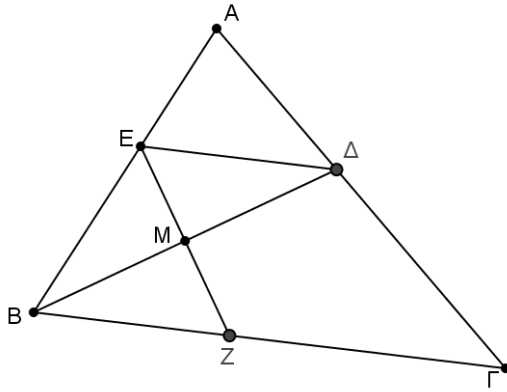
β) Να βρείτε το σημείο τομής των διαγωνίων του.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΒ.

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ.

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος του $B\Delta$ και M μέσο της $B\Delta$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο Z . Να αποδείξετε ότι: α) $EM=MZ$

β) το ΔEBZ είναι ρόμβος.



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 3)^2 =$

β) $(x - 4) \cdot (x + 4) =$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $3x + 3\psi =$

β) $x^2 - 25 =$

3. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κύβου με ακμή 5 cm.

4. Να χαρακτηρίσετε με **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

i. Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν έχει τρεις γωνίες ορθές.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
ii. Ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αν είναι ορθογώνιο και ρόμβος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
iii. Οι διαγώνιοι ενός ορθογωνίου είναι ίσες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
iv. Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν και τις τρεις γωνιές τους μία προς μία αντίστοιχα ίσες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
v. Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), με πλευρές $B\Gamma = 5\text{ cm}$ και $A\Gamma = 3\text{ cm}$.

α) Ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της γωνίας $\hat{B}$ είναι

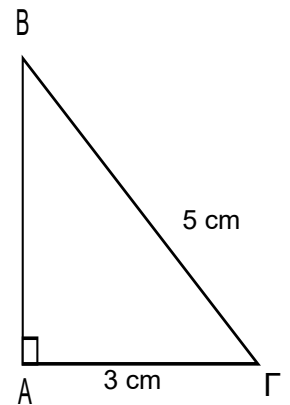
ίσος με $\frac{3}{5}$;

(μ.1)

β) Με ποιο τριγωνομετρικό αριθμό της γωνίας $\hat{\Gamma}$ είναι

ίσος ο λόγος $\frac{AB}{A\Gamma}$;

(μ.1)



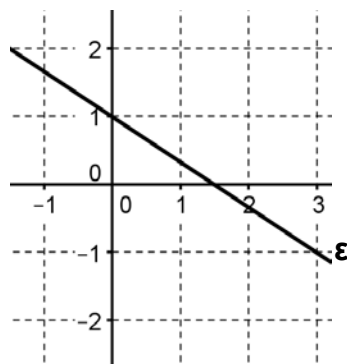
γ) Να υπολογίσετε το $\sin \hat{B}$ και την $\varepsilon\hat{\Gamma}$.

(μ.3)

6. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{aligned} 2\chi - 5\psi &= -1 \\ 3\chi + \psi &= 7 \end{aligned}$$

7. Να λύσετε την εξίσωση: $3\chi^2 - 7\chi + 2 = 0$

8. α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα: (μ.3)



- β) Αν η πιο πάνω ευθεία έχει εξίσωση $\varepsilon: \psi = -\frac{2}{3}\chi + 1$ και είναι κάθετη με την ευθεία $\varepsilon_1: \psi = 5 + (\mu + 1)\chi$, να υπολογίσετε την τιμή του μ . (μ.2)

9. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει $E_{\pi} = 60\text{ cm}^2$ και παράπλευρο ύψος 5 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

10. Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$. Να δείξετε ότι το σημείο M ισαπέχει από τις πλευρές AB και $A\Gamma$.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2\psi-1}{\psi^2-\psi-12} + \frac{5-\psi}{4-\psi} = \frac{6}{\psi+3}$$

2. α) Να κάνετε τις πράξεις :

$$\left(\frac{2}{\chi-3} - \frac{1}{\chi+3}\right) : \frac{2\chi+18}{\chi^2+3\chi} = \quad (\mu. 5)$$

- β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha + \beta)^3 - \alpha(\alpha - 3\beta)^2 + 6\alpha\beta^2 = \beta(9\alpha^2 + \beta^2) \quad (\mu. 5)$$

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-5,6)$, $B(-3,2)$ και $\Gamma(1,4)$.

- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς AG . (μ. 2)

- β) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM . (μ. 2)

- γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο. (μ. 3)

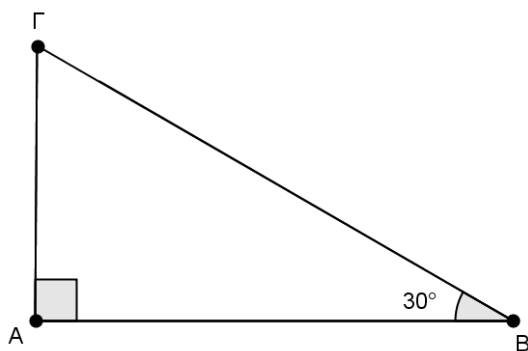
- δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Γ και είναι παράλληλη με την ευθεία AB . (μ. 3)

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ και η AM διάμεσος του τριγώνου. Από το σημείο M να φέρετε κάθετη στην AB , την οποία τέμνει στο σημείο Δ . Να προεκτείνετε την $M\Delta$ κατά τμήμα ΔE έτσι ώστε $M\Delta = \Delta E$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο ABM είναι ισοσκελές, (μ. 3)

- β) το τετράπλευρο $AEM\Gamma$ είναι ρόμβος. (μ. 7)

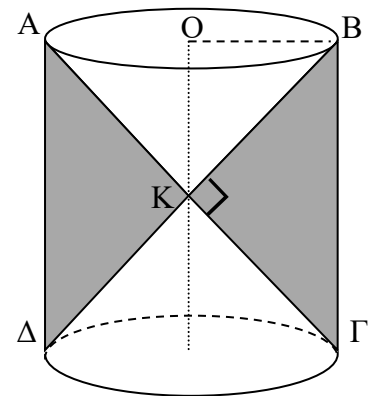


5. Στο πιο κάτω σχήμα οι δύο κώνοι είναι ίσοι και η κοινή κορυφή τους K είναι το μέσο του ύψους $υ$, του κυλίνδρου. Το ύψος του κυλίνδρου είναι $υ = 16\text{ cm}$.

α) Αν $\widehat{BKT} = 90^\circ$, να δείξετε ότι $R = 8\text{ cm}$, όπου R είναι η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου. (μ.3)

β) Αν V είναι ο όγκος του κυλίνδρου και V_κ ο όγκος του κάθε κώνου, να δείξετε ότι $\frac{V}{V_\kappa} = 6$. (μ.3)

γ) Να υπολογίσετε τον όγκο του μέρους του κυλίνδρου που περικλείεται από τον κύλινδρο και τους δύο κώνους. (μ.4)



Μέρος Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄ .
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $(x + 6)^2 =$

(β) $(x - 5)(x + 5) =$

[2,5 M + 2,5 M]

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $2x^3 - 8x^2 =$

(β) $x^2 + 6x + 9 =$

[2,5 M + 2,5 M]

3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 - 4x = 0$$

4. Να βρείτε τη λύση του πιο κάτω συστήματος:

$$x + \psi = 15$$

$$2x + \psi = 14$$

5. Να απλοποιήσετε το κλάσμα:

$$\frac{\alpha^2 - 6\alpha - 16}{2\alpha^2 - 8} =$$

6. Ο όγκος ενός κύβου είναι 27 cm^3 . Να βρείτε το **εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας**.

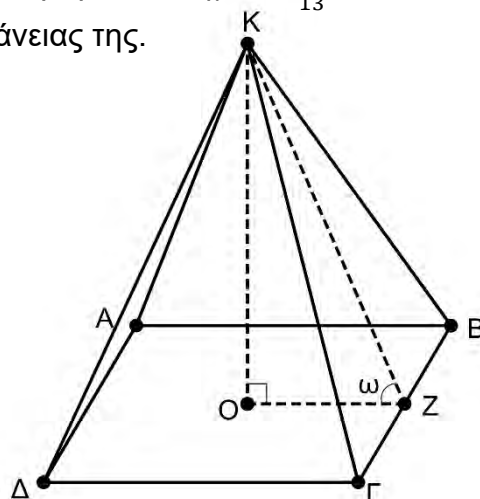
7. Δίνεται ρόμβος με τις διαγώνιους του να βρίσκονται πάνω στις ευθείες

$$\psi = (\kappa + 2)x + 1 \text{ και } 3\psi = x + 2. \text{ Να υπολογίσετε την τιμή του } \kappa.$$

8. Αν $A = \frac{1}{2x+\psi} + \frac{1}{\psi-2x}$ και $4x^2 - \psi^2 = 1$, να δείξετε ότι $A = -2\psi$.

9. Στο πιο κάτω σχήμα είναι μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα και $\eta\mu\omega = \frac{12}{13}$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της.



10. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), τα σημεία Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $EZ\Delta A$ είναι **ορθογώνιο** παραλληλόγραμμο.

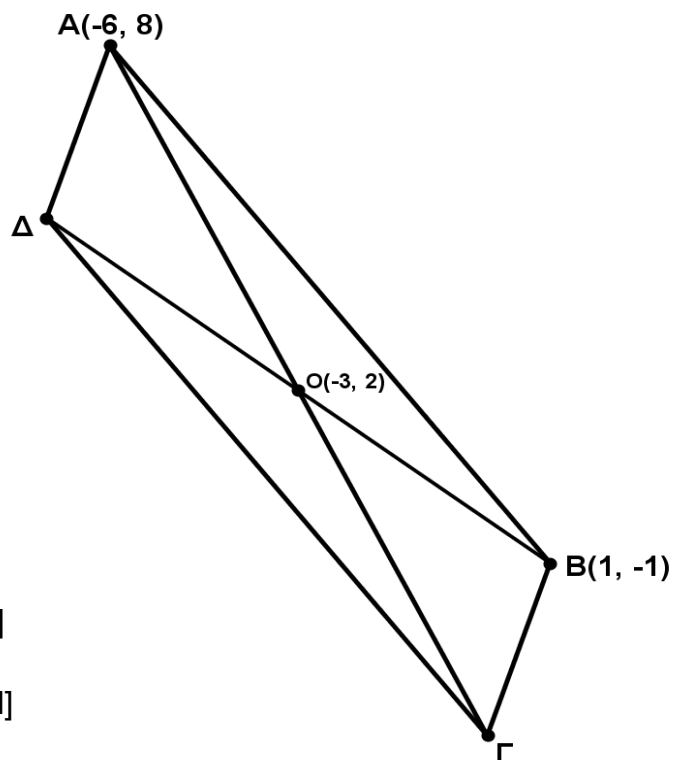
ΜΕΡΟΣ Β΄ : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\chi+1}{2\chi+4} + \frac{1}{\chi+1} = \frac{1}{\chi^2+3\chi+2}$$

2. Στο διπλανό σχήμα είναι ένα παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$

με $A(-6, 8)$, $B(1, -1)$ και $O(-3, 2)$.



(α) **Να βρείτε:**

(i) τις συντεταγμένες της κορυφής Δ . [2 M]

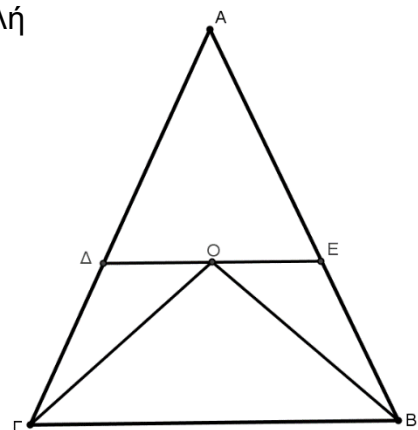
(ii) την κλίση της πλευράς $\Delta\Gamma$. [2 M]

(iii) το μήκος της πλευράς $\Delta\Gamma$. [2 M]

(β) **Να δείξετε ότι** τα σημεία B και Δ **ισαπέχουν** από τη διαγώνιο $A\Gamma$. [4 M]

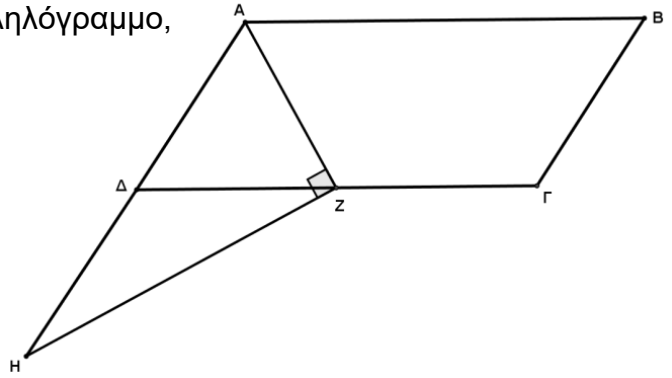
3. Στο διπλανό σχήμα τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma O B$ είναι ισοσκελή ($AB = A\Gamma$, $\Gamma O = BO$) και $\Delta E \parallel B\Gamma$.

Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $\Delta O \Gamma$ και $E O B$ είναι ίσα.



4. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο,
 $\widehat{AZH} = 90^\circ$ και $A\Delta = \Delta H$.

- (α) Να δείξετε ότι η AZ είναι **διχοτόμος**
 της γωνίας A . [5 M]

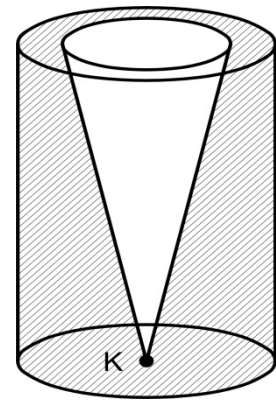


- (β) Αν $\widehat{H} = 30^\circ$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma Z$ είναι **ισοσκελές τραπέζιο**. [5 M]

5. Στο διπλανό σχήμα έχουμε ένα δοχείο. Το δοχείο είναι ένας κύλινδρος
 που αφαιρέθηκε από μέσα ένας κώνος. Η ακτίνα του κυλίνδρου
 είναι κατά 1 dm **μεγαλύτερη** από την ακτίνα του κώνου.

Το ύψος του κυλίνδρου **ισούται** με το ύψος του κώνου και
 είναι 6 dm. Αν ο όγκος του στερεού που μένει όταν από
 τον κύλινδρο αφαιρεθεί ο κώνος είναι $46\pi \text{ dm}^3$, **να βρείτε:**

- (α) την ακτίνα του **κυλίνδρου** και του **κώνου**. [7 M]



- (β) το εμβαδόν της **εσωτερικής επιφάνειας** του δοχείου, αν η ακτίνα
 του κώνου είναι 2 dm. [3 M]

ΜΕΡΟΣ Α΄:

Το μέρος αυτό αποτελείται από **δέκα (10)** ασκήσεις. Να λύσετε **και τις δέκα (10)**. Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με **πέντε (5)** μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

α) $(\alpha - 3)(\alpha + 3) =$

β) $(\chi + 2)^2 =$

2. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{aligned} 2\chi - 3\psi &= 9 \\ \chi + 2\psi &= 1 \end{aligned}$$

3. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $\chi^2 - 7\chi =$

β) $\omega^2 - 25 =$

γ) $\chi^2 - 6\chi + 8 =$

δ) $\alpha^2 + 3\alpha - 3\beta - \beta^2 =$

4. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο 240 cm^3 . Αν το πλάτος του είναι 6 cm και το ύψος του 5 cm να βρείτε:

α) το μήκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου,

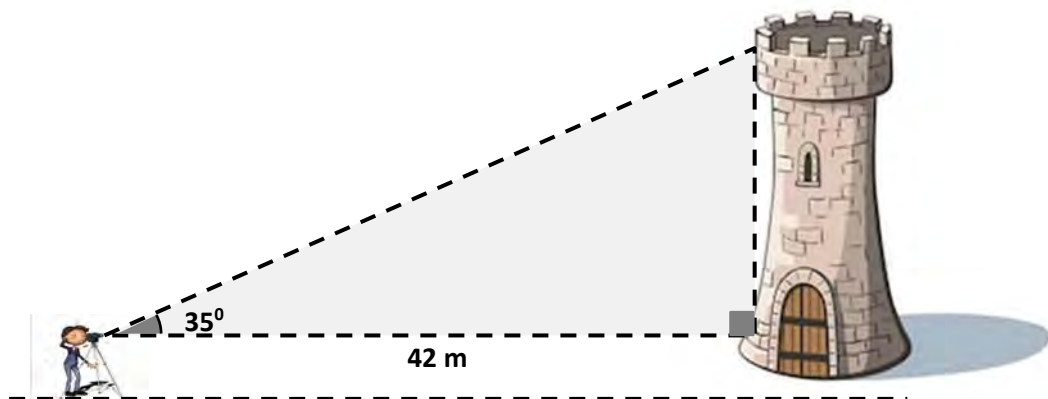
β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

5. Να λύσετε την εξίσωση: $2\chi^2 - 5\chi + 3 = 0$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{\alpha^2 - 9}{\alpha^2 + \alpha - 6} : \frac{\alpha^2 - 4\alpha + 3}{\alpha^2 - 4\alpha + 4} =$$

7. Ένας φωτογράφος στέκεται σε απόσταση 42 m από έναν πύργο και τον φωτογραφίζει, έχοντας τη φωτογραφική μηχανή του στερεωμένη σε τρίποδα ύψους 170 cm. Αν το μέτρο της γωνίας υπό την οποία βλέπει την κορυφή του πύργου είναι 35° , να υπολογίσετε το ύψος του πύργου. (Η απάντηση να δοθεί σε ένα δεκαδικό ψηφίο).

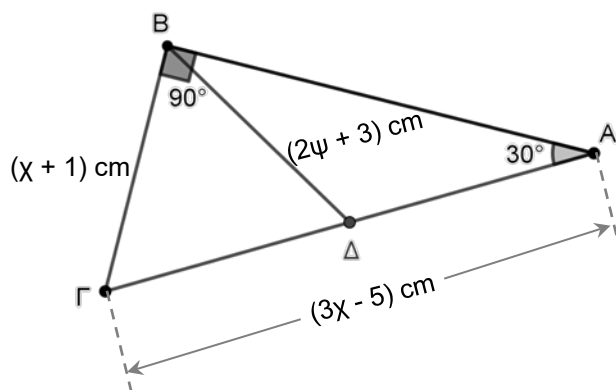


8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Δ μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και E μέσο της $A\Gamma$. Φέρουμε τη ΔE και την προεκτείνουμε προς το μέρος του E κατά τμήμα $EZ = \Delta E$. Να δείξετε ότι το $A\Delta Z$ είναι ορθογώνιο. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$), $\hat{A} = 30^\circ$, Δ μέσο της $A\Gamma$, $B\Gamma = (\chi + 1)$ cm, $A\Gamma = (3\chi - 5)$ cm και $B\Delta = (2\psi + 3)$ cm.

Να υπολογίσετε:

- α) τις τιμές των παραμέτρων χ και ψ ,
 β) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



10. Να κατασκευάσετε τυχαίο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε $A\Gamma = B\Delta$. Αν E , Z , H και Θ είναι τα μέσα των πλευρών AB , $B\Gamma$, $\Delta\Gamma$ και $A\Delta$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Το μέρος αυτό αποτελείται από **πέντε (5)** ασκήσεις. Να λύσετε **και** τις **πέντε (5)**. Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με **δέκα (10)** μονάδες.

1. α) Να λύσετε την εξίσωση: **(μον. 5)**

$$\frac{3\chi}{\chi^2 - \chi - 12} + \frac{1}{4 - \chi} = \frac{\chi - 3}{\chi^2 + 3\chi}$$

β) Δίνεται η παράσταση $A(\chi) = (\chi - 2)^3 + (\chi + 6)(\chi + 2) - \chi(\chi - 3)^2 - 7\chi$

i) Να δείξετε ότι $A(\chi) = (\chi + 2)^2$. **(μον. 3)**

ii) Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $A(\chi) = 9$. **(μον. 2)**

2. α) Να αναλύσετε τα πιο κάτω πολυώνυμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων: **(μον. 5)**

i) $\alpha^2 - \beta^2 - 8\alpha + 16 =$

ii) $\chi^3 - 2\chi^2 - 4\chi + 8 =$

β) Αν $A = \frac{\chi^2 + 3\chi - 10}{\chi^2 - 4}$ και $B = \frac{\chi^2 + 3\chi + 2}{\chi^2 + 6\chi + 5}$ **(μον. 5)**

i) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A και B.

ii) Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4$.

3. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(6,-1), B(0,-3) και Γ(7,4).

α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ABΓ ως προς τις πλευρές του. **(μον. 3)**

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας BΓ. **(μον. 2)**

γ) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ πάνω στην ευθεία BΓ, ώστε η γωνία $\widehat{B\Delta\Gamma} = 90^\circ$. **(μον. 5)**

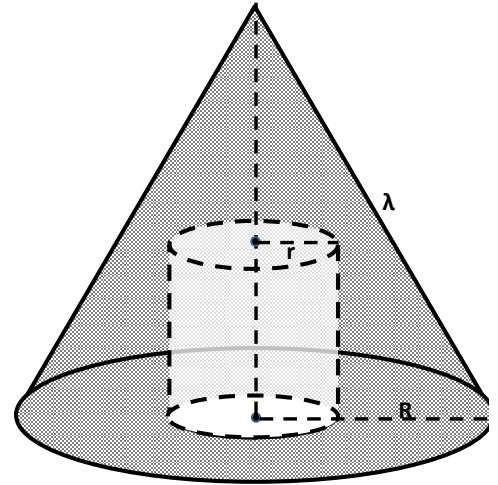
4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κώνος με ακτίνα βάσης R και γενέτειρα λ . Στη βάση του κώνου υπάρχει μια κυλινδρική οπή ακτίνας $r = \frac{R}{3}$, της οποίας το ύψος

φτάνει μέχρι το μέσο του ύψους του κώνου.

Αν $\lambda - R = 4$ και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι ίσο με $60\pi \text{ cm}^2$, να υπολογίσετε:

- α) τις ακτίνες R και r , (μον. 4)
β) τον όγκο του στερεού, (μον. 3)
γ) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού. (μον. 3)

(Οι απαντήσεις να δοθούν συναρτήσει του π)



5. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ όπου Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε τα ευθύγραμμα τμήματα BE και $\Gamma\Delta$, κατά τμήματα EZ και ΔH αντίστοιχα, ώστε $BE = EZ$ και $\Gamma\Delta = \Delta H$. Να δείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $A\Delta H$ και $B\Delta\Gamma$ είναι ίσα, (μον. 4)
β) το $HZ \parallel 2B\Gamma$. (μον. 6)

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα

Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100)

Θέμα 1: Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(\alpha + 3)^2 =$

(β) $(\alpha + 5) \cdot (\alpha - 5) =$

Θέμα 2: Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τα πιο κάτω πολυώνυμα:

(α) $5x + 5y =$

(β) $x^2 + 7x + 10 =$

(γ) $x^2 - y^2 =$

(δ) $4x + \alpha y + 4y + \alpha x =$

(ε) $x^3 + 8 =$

Θέμα 3: Κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης ίση με 3 cm και ύψος ίσο με 8 cm

Να υπολογίσετε: (α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του

(β) Τον όγκο του.

(Η απάντηση μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π)

Θέμα 4: Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 + 10x - 8 = 0$ (με τη χρήση τύπου)

Θέμα 5: Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{aligned} 2x + y &= 8 \\ 3x - 2y &= 5 \end{aligned}$$

Θέμα 6: Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\alpha - 1)x + 7$ και $\varepsilon_2: y - 3x = 2$

Να βρείτε την τιμή του α , ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες.

Θέμα 7: Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) δίνονται: $AB = 2\alpha$, $A\Gamma = 2\alpha - 1$ και $B\Gamma = 2\alpha + 1$

α) Να υπολογίσετε την τιμή του α

(μ.2)

β) Να υπολογίσετε: i) $\eta\mu B$

(μ.3)

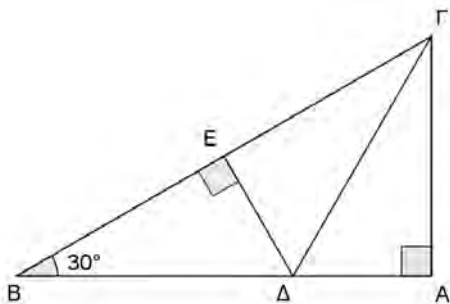
ii) $\sigma\upsilon\nu B$

iii) $\varepsilon\phi\Gamma$ (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής)

Θέμα 8: Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α) Ένα παραλληλόγραμμο που έχει τις διαγώνιές του ίσες είναι πάντοτε ορθογώνιο	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) Ορθογώνιο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες είναι τετράγωνο	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) Ένα τετράπλευρο που οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα, είναι πάντοτε ρόμβος	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) Τραπεζίο που έχει δύο πλευρές ίσες είναι πάντοτε ισοσκελές τραπέζιο	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε) Ένα τετράπλευρο που έχει δύο πλευρές παράλληλες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, είναι πάντοτε ρόμβος	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Θέμα 9: Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$
 Το ευθύγραμμο τμήμα ΓΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας Γ και $\Delta E \perp BG$
 Να δείξετε ότι $BE = AG$



Θέμα 10: Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) το σημείο Κ είναι το μέσο της ΑΒ και το σημείο Μ το μέσο της ΒΓ. Να προεκτείνετε το ΜΚ κατά τμήμα ΚΔ, τέτοιο ώστε $MK = KD$
 Να αποδείξετε ότι: α) Το τετράπλευρο ΑΓΜΔ είναι παραλληλόγραμμο
 β) Το τετράπλευρο ΑΜΒΔ είναι ρόμβος.
 (Να γίνει σχήμα – δεδομένα – ζητούμενα – απόδειξη)

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα

Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες (10/100)

Θέμα 1: Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{3x}{x+2} - \frac{x+1}{3-x} = \frac{2x+14}{x^2-x-6}$

Θέμα 2: Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$)

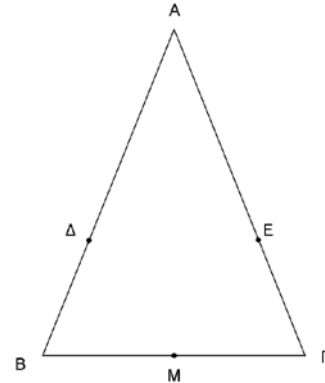
Στις πλευρές AB και $A\Gamma$ παίρνω σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $A\Delta = AE$

Το σημείο M είναι το μέσο της $B\Gamma$

α) Να δείξετε ότι $\Delta M = EM$

β) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων B και Γ από τις προεκτάσεις των EM και ΔM αντίστοιχα, ισούνται.

(Να γίνει σχήμα – δεδομένα – ζητούμενα – απόδειξη)



Θέμα 3: Δίνονται οι ρητές αλγεβρικές παραστάσεις A και B

$$A = \left(\frac{2x-1}{x^2-9} - \frac{1}{x+3} \right) \cdot \frac{x^2-9}{x^3+2x^2}$$

$$B = \frac{4y^2-6y}{4y^2-12y+9} : \frac{4y^4+6y^3}{4y^2-9}$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $A = \frac{1}{x^2}$ και $B = \frac{1}{y^2}$ (μ.6)

(β) Χρησιμοποιώντας τις αλγεβρικές παραστάσεις $A = \frac{1}{x^2}$ και $B = \frac{1}{y^2}$

και επιπλέον αν ισχύει: $A \cdot B = 1$, $x + y = 2$, $x > 0$ και $y > 0$,

να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A + B$ (μ.4)

Θέμα 4: Το πιο κάτω στερεό αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και μία τετραγωνική πυραμίδα της οποίας το ύψος ($υ$) ισούται με 5 cm

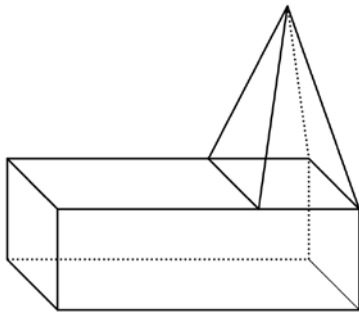
Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο ίσο με 24 cm^3 . Το ύψος του παραλληλεπιπέδου ισούται με το πλάτος του και το μήκος του είναι τριπλάσιο από το πλάτος του.

Να βρείτε: (α) Τις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου (μ.2)

(β) Το παράπλευρο ύψος (h) της πυραμίδας (μ.1)

(γ) Τον όγκο του στερεού (μ.3)

(δ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού. (μ.4)



Θέμα 5: Δίνεται το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές τα σημεία $A(-2,1)$, $B(1,-1)$ και $\Gamma(5,5)$

Η εξίσωση της πλευράς $A\Delta$ είναι $3x - 2y + 8 = 0$ και

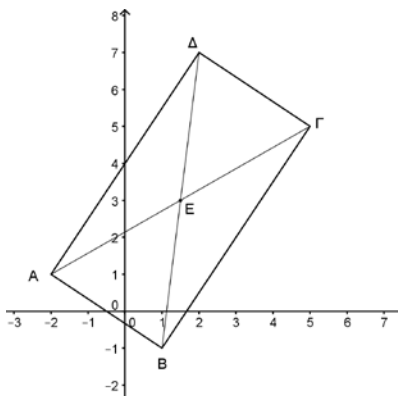
η εξίσωση της διαγωνίου $B\Delta$ είναι $y = 8x - 9$

α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $\Delta(2,7)$ (μ.2)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο (μ.5)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου E (σημείου τομής των διαγωνίων) του ορθογωνίου (μ.1)

δ) Να υπολογίσετε το μήκος των διαγωνίων του ορθογωνίου. (μ.2)



ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 θέματα του Μέρους Α'.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες (5/100).

ΘΕΜΑ 1:

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x-4)^2 =$

(β) $(2\psi-3)(2\psi+3) =$

ΘΕΜΑ 2:

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\alpha^2 - 3\alpha\beta =$

(β) $x^2 - 4x - 21 =$

(γ) $\psi^2 - 25 =$

(δ) $\chi\psi - \psi\alpha - \chi\alpha + \alpha^2 =$

ΘΕΜΑ 3:

Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\psi - 3x = -3$$

$$2x + 3\psi = -20$$

ΘΕΜΑ 4:

Να λύσετε τις εξισώσεις:

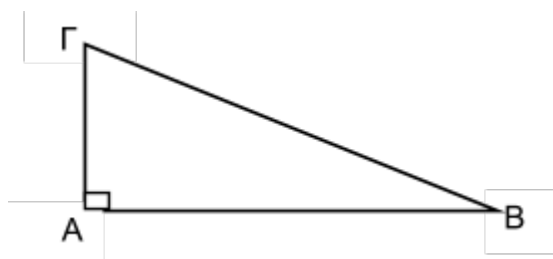
(α) $x(x-4) = 0$

(β) $x(x-3) + x^2 = 5$

ΘΕΜΑ 5:

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) αν $\eta\mu B = \frac{5}{13}$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης :

$$5\epsilon\phi\Gamma - 13\sigma\upsilon\nu B$$



ΘΕΜΑ 6:

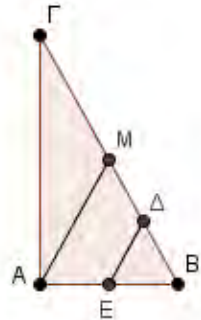
Δίνεται η ευθεία $\varepsilon: y = (3\kappa - 2)\chi + 4$. Να βρείτε την τιμή του κ :

α) Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη με την $\varepsilon_1: y = 4\chi - 1$.

β) Αν η ευθεία ε είναι κάθετη με την $\varepsilon_2: 2\chi + 6y = -3$.

ΘΕΜΑ 7:

Το $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$. Το AM είναι διάμεσος και Δ , E μέσα των BM και AB αντίστοιχα. Αν $AM = 10\text{cm}$, να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου $\triangle EB\Delta$. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

**ΘΕΜΑ 8:**

Να κάνετε τις πράξεις:

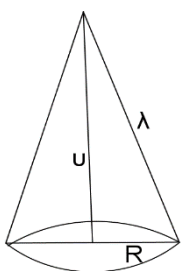
$$\left(\frac{3}{\chi^2 - 16} - \frac{3}{\chi - 4} \right) : \frac{\chi + 3}{2\chi - 8} =$$

ΘΕΜΑ 9:

Δίνεται παραλληλόγραμμο $\triangle EZH$. Αν K και Λ είναι σημεία στη διαγώνιο EH τέτοια ώστε $EK = \Lambda H$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\triangle KZ\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 10:

Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κώνου είναι $24\pi \text{ cm}^2$ και η ακτίνα της βάσης του είναι 3cm . Να υπολογίσετε τον όγκο του. (Η απάντηση μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π)



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 θέματα του Μέρους Β'.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες (10/100).

ΘΕΜΑ 1:

(α) Να λύσετε την εξίσωση:

(μον. 6)

$$\frac{2}{x-3} = \frac{2}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x}{2x-4}$$

(β) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(μον. 4)

(i) $\psi^2 - 2\psi - 15 + \alpha\psi - 5\alpha =$

(ii) $4\chi^2(\chi - 3) + 9(3 - \chi) =$

ΘΕΜΑ 2:

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $x(x^2 + 10x + 12) - (x + 2)^3 + 7 = (2x - 1)(2x + 1)$

(μον. 5)

(β) Αν $\alpha + \beta = -7$ και $\alpha\beta = +5$ να αποδείξετε τις σχέσεις:

(μον.5)

(i) $\alpha^2 + \beta^2 = 39$

(ii) $(\alpha - \beta)^2 = 29$

ΘΕΜΑ 3:

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με AB = ΑΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB, ΑΓ προς τα Β και Γ παίρνουμε σημεία Δ, Ε αντίστοιχα ώστε ΒΔ = ΓΕ. Από τα σημεία Δ και Ε φέρουμε κάθετες στη προέκταση της ΒΓ την οποία τέμνουν στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

(i) ΔΖ = ΗΕ

(ii) το τετράπλευρο ΖΔΕΗ είναι ορθογώνιο

ΘΕΜΑ 4:

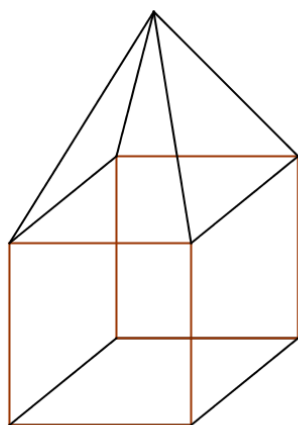
Στον αποθηκευτικό χώρο που φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα, πρέπει να επενδυθούν οι τοίχοι και η στέγη με μονωτικό υλικό που στοιχίζει €30 το m². Οι τοίχοι του αποθηκευτικού χώρου είναι έδρες ενός κύβου με ακμή 6m. Η στέγη, σχήματος πυραμίδας, έχει ύψος 4m.

(α) Να βρείτε πόσα θα στοιχίσει η τοποθέτηση του μονωτικού υλικού.

(7 μονάδες)

(β) Να βρείτε τη χωρητικότητα του αποθηκευτικού χώρου.

(3 μονάδες)



ΘΕΜΑ 5:

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,4)$, $B(2,3)$ και $\Gamma(-1,0)$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

(β) Να βρεθεί η εξίσωση της διαμέσου BM .

(γ) Να βρεθεί η εξίσωση του ύψους BD .

(δ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με την ευθεία BM και περνά από το σημείο Γ .

Μάθημα: Μαθηματικά

Τάξη: Γ΄

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10(δέκα) ασκήσεις του Μέρους Α΄.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5(πέντε) μονάδες.****1.** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-5)(x+5) =$

β) $(2x+3)^2 =$

2. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm , 4cm και 5cm .**3.** Να λύσετε το σύστημα:

$$2x - y = 5$$

$$x + 3y = -1$$

4. Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις: (μον.1 / 1 / 1 / 2)

α) $2x^2 - x =$

β) $x^2 - 16 =$

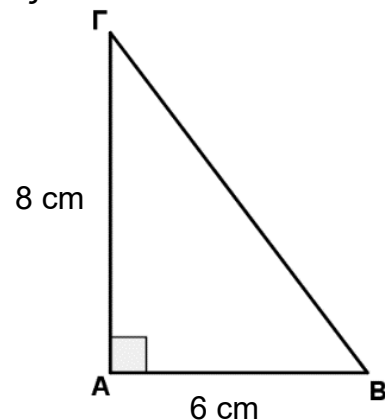
γ) $x^2 + 8x + 15 =$

δ) $ax - 4a + xp - 4p =$

5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) , με πλευρές $AB = 6\text{cm}$, και $A\Gamma = 8\text{cm}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

α) $\eta\mu B =$

β) $\epsilon\phi\Gamma =$



6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

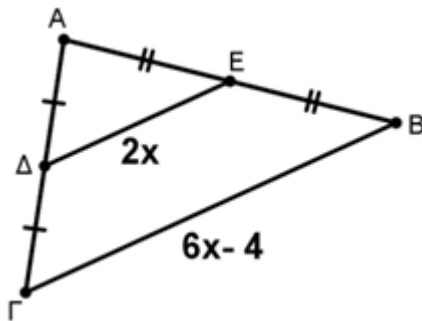
α) $\chi^2 - 7\chi = 0$

β) $\chi(\chi + 4) - 3 = 2\chi$

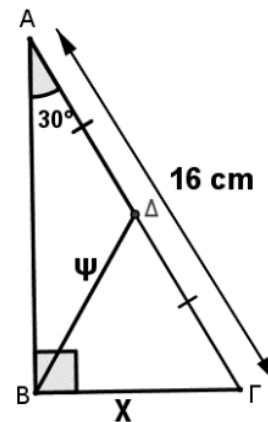
7. Να υπολογίσετε τις τιμές των χ και ψ στα πιο κάτω σχήματα.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α)



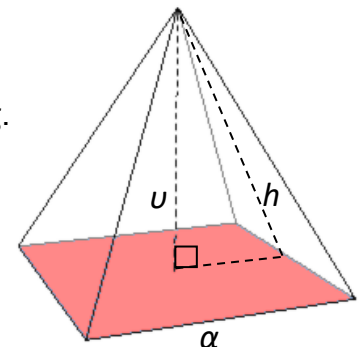
β)



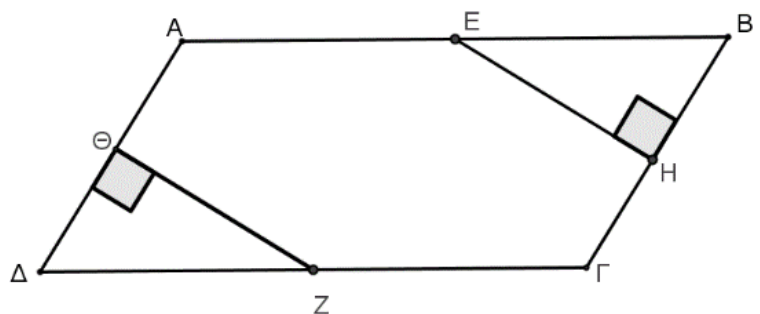
8. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: \psi = (2\kappa^2 + 3)\chi + 3$ και $\varepsilon_2: 5\kappa\chi - \psi = 3$.

Αν οι ευθείες είναι παράλληλες, να υπολογίσετε τις τιμές του κ .

9. Μια κανονική πυραμίδα έχει βάση τετράγωνο πλευράς 6 cm. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας είναι 96 cm^2 . Να υπολογίσετε το παράπλευρο ύψος και τον όγκο της πυραμίδας.



10. Στο πιο κάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και τα σημεία Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα. Αν $ΕΗ \perp ΒΓ$ και $ΖΘ \perp ΑΔ$, να δείξετε ότι $ΔΘ = ΒΗ$. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 (πέντε) ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 (δέκα) μονάδες.

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση:

(μον. 7 / 3)

$$\frac{x}{x+1} - \frac{2}{3-x} = \frac{4}{x^2 - 2x - 3}$$

- (β) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

$$(x+1)^3 - x(x-2)^2 - 6x^2 - 1 = x(x-1)$$

2. (α) Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

$$\text{i)} \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) : \frac{4x+12}{x^3+3x^2+2x} =$$

$$\text{ii)} \frac{\alpha + \frac{\beta^2}{\alpha} - 2\beta}{1 - \frac{\beta}{\alpha}} =$$

- (β) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$\text{i)} x^2 - 10x + 25 - 9\psi^2 =$$

$$\text{ii)} x^2(x-3) - (6x-9)(x-3) =$$

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Ε τυχαίο σημείο πάνω στην ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΑΒ προς το Β κατά τμήμα ΒΔ=ΓΕ. Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΔ τέμνει τη ΒΓ στο Μ.

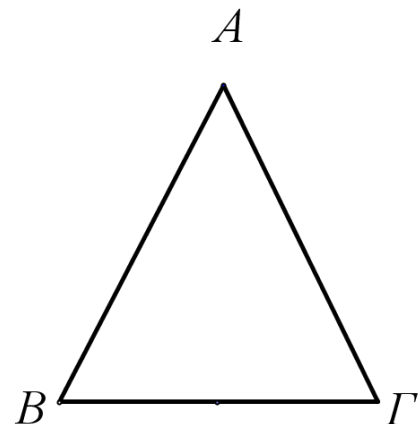
Προεκτείνουμε τη ΒΓ προς το Γ κατά τμήμα ΓΖ=ΒΜ. Να δείξετε ότι (μον. 5 / 3 / 2)

α) τα τρίγωνα ΒΜΔ και ΓΕΖ είναι ίσα,

(Σχήμα – Δεδομένα – Ζητούμενα)

β) το τρίγωνο ΕΜΖ είναι ισοσκελές,

γ) ΜΕ=ΜΔ.

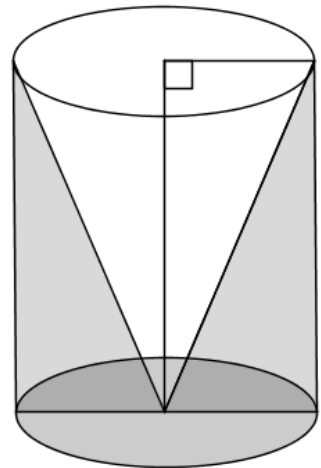


4. Στο διπλανό στερεό αφαιρέσαμε από τον κύλινδρο έναν κώνο. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι $135\pi \text{ cm}^2$ και η περίμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι $18\pi \text{ cm}$.

Να υπολογίσετε:

(μον. 4 / 4 / 2)

- (α) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.
(β) Τον όγκο του στερεού.
(γ) Την ολική επιφάνεια του στερεού.
(Οι απαντήσεις σας να δοθούν συναρτήσει του π)



5. Δίνονται τα σημεία: $A(-5, 1)$, $B(1, 4)$, $\Gamma(3, 0)$ και $\Delta(-3, -3)$. (μον. 1 / 2 / 2 / 2 / 1 / 2)

- (α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση των σημείων A και Γ ισούται με $\sqrt{65}$.
(β) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $A\Delta$ και $B\Gamma$ έχουν κλίση $\lambda = -2$.
(γ) Να αποδείξετε ότι $AB \perp B\Gamma$.
(δ) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.
(ε) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής M των διαγωνίων του.
(στ) Να βρεθεί η εξίσωση της ευθείας ϵ_1 που περνά από την κορυφή A και είναι κάθετη με την ευθεία $A\Gamma$.



ΜΕΡΟΣ Α΄: (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε τα αναπτύγματα:

(α) $(x - 4)(x + 4) =$

(β) $(\alpha + 3)^2 =$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $2x + 2y =$

(β) $\kappa^2 - 25 =$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$x + 2y = 5$$

$$3x - y = 1$$

4. Στο διπλανό σχήμα $\hat{B} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ και $B\Gamma = \Gamma\Delta$.

Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Gamma\Delta E$ είναι ίσα.

5. Δίνονται τα σημεία $A(3,4)$ και $B(-1,1)$. Να βρείτε:

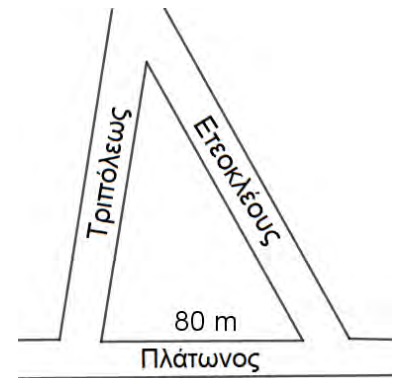
(α) Τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB .

(β) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB .

6. Στο διπλανό σχήμα η σκιά του δέντρου έχει μήκος $ΑΓ=3,8$ m.
Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 35^\circ$, να υπολογίσετε το ύψος του δέντρου κατά προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου.

7. Σε ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($ΑΒ = ΑΓ$), τα σημεία Δ και $Ε$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα. Αν $Ζ$ και $Η$ είναι σημεία της πλευράς $ΒΓ$ έτσι ώστε $ΒΖ = ΓΗ$, να δείξετε ότι $Ζ\Delta = ΗΕ$.

8. Η νησίδα του διπλανού σχήματος περικλείεται από τις οδούς Τριπόλεως, Ετεοκλέους και Πλάτωνος. Η πλευρά της νησίδας που βρίσκεται στην οδό Πλάτωνος ισούται με 80 m. Το Δημοτικό Συμβούλιο της πόλης θέλει να κατασκευάσει μονοπάτι που να αρχίζει από το μέσο της πλευράς της νησίδας που βρίσκεται στην οδό Τριπόλεως και να καταλήγει στο μέσο της πλευράς της νησίδας που βρίσκεται στην οδό Ετεοκλέους. Με τα υλικά που διαθέτουν, κατασκευάζουν μονοπάτι μήκους 36 m. Είναι αρκετά τα υλικά που διαθέτουν για το μονοπάτι που θέλουν να κατασκευάσουν;



9. Ο κύριος Νίκος ρωτήθηκε από τους μαθητές του πόσων χρονών είναι ο γιος του. Ο κύριος Νίκος απάντησε: «Το άθροισμα του κύβου και του τετραγώνου της ηλικίας του γιου μου, ισούται με 30 φορές την ηλικία του». Να βρείτε, με χρήση εξίσωσης, την ηλικία του γιου του κύριου Νίκου.
10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδό βάσης 144 cm^2 και παράπλευρο ύψος 10 cm. Να υπολογίσετε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

ΜΕΡΟΣ Β': (50 μονάδες)

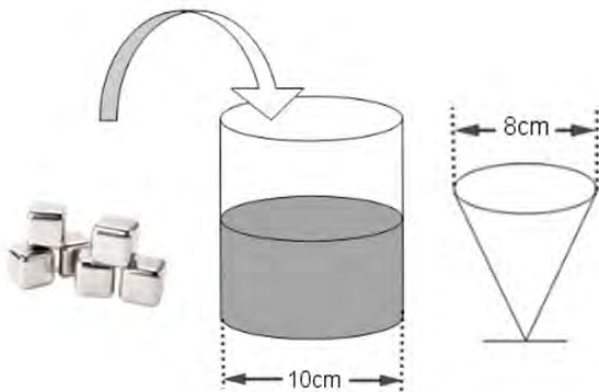
Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση

$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$

- (β) Δίνεται η παράσταση $\frac{x^2-x}{x^2-3x+2} \div \frac{x^2}{x^2-4x+4}$ η οποία ορίζεται για $x \neq +2, x \neq +1, x \neq 0$.
Να την απλοποιήσετε.

2. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$), να φέρετε το ύψος AD και να πάρετε τυχαίο σημείο E πάνω στο ύψος. Αν H, Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
- (α) $EH = EZ$
- (β) Αν $EH = \left(\frac{x+1}{x^2-1}\right)\text{cm}$ και $EZ = \left(\frac{3}{x-1} - 1\right)\text{cm}$ να βρείτε την τιμή του x .
3. Οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και έχουν εξισώσεις $\varepsilon_1: y = \frac{\kappa+1}{2}x$ και $\varepsilon_2: y = \lambda x$.
- (α) Να δείξετε ότι $2\lambda - \kappa = 1$ (3 μονάδες)
- (β) Να βρείτε τις τιμές των κ, λ , αν ισχύει η σχέση $(\kappa - 6)^2 - (\lambda - 4)^2 = (\kappa - \lambda)(\kappa + \lambda)$ (7 μονάδες)
4. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{B} = 30^\circ$. Να φέρετε τη διάμεσο AM του τριγώνου.
- (α) Να δείξετε ότι $AM=AG$.
- (β) Από το σημείο M να φέρετε ευθύγραμμο τμήμα MD όπου D είναι το μέσο της AB , και να το προεκτείνετε κατά τμήμα $DE=MD$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $BMAE$ είναι ρόμβος.
5. Σε ένα κυλινδρικό δοχείο με ύψος 16 cm και διάμετρο 10 cm, βάζουμε χυμό μέχρι το μέσο του.
- (α) Να υπολογίσετε την ποσότητα του χυμού που βάλामε στο δοχείο. (2 μονάδες)
- (β) Στη συνέχεια, ρίχνουμε στο δοχείο 6 κυβικά παγάκια ακμής 2 cm. Να βρείτε πόσο ανέβηκε η στάθμη του χυμού στο δοχείο, κατά προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου. (4 μονάδες)
- (γ) Όταν λιώσουν τα παγάκια (θεωρούμε ότι ο όγκος του πάγου δεν μεταβάλλεται όταν γίνει νερό), αδειάζουμε το χυμό σε όμοια ποτήρια σε σχήμα κώνου με διάμετρο 8 cm και ύψος 10 cm. Να βρείτε πόσα ποτήρια μπορούμε να γεμίσουμε. (4 μονάδες)



ΜΕΡΟΣ Α΄: Να απαντήσετε και στις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x - 3)^2 =$

(β) $(y - 5)(y + 5) =$

2. Κύβος έχει όγκο 27 m^3 . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2x^2 + 7x - 4 = 0$$

4. Να λύσετε το σύστημα:

$$3x + 4y = 2$$

$$2x - 3y = 7$$

5. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

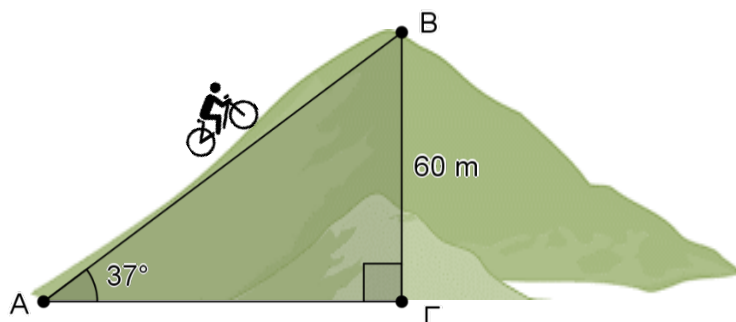
(α) $4x + 12 =$

(β) $y^2 - 16 =$

(γ) $x^2 - 7x + 10 =$

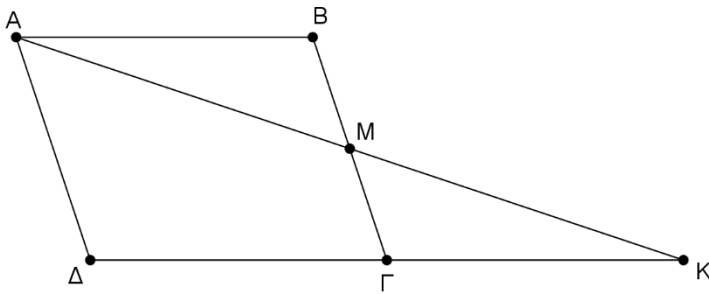
(δ) $\beta x + 3\beta - xy - 3y =$

6. Ένας ανηφορικός δρόμος σχηματίζει γωνία $\hat{A} = 37^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο. Να υπολογίσετε την απόσταση AB που διένυσε ο Γιώργος με το ποδήλατό του, για να ανεβεί στην κορυφή του δρόμου αν $B\Gamma = 60 \text{ m}$.



θ	$\eta\mu\theta$	$\sigma\upsilon\nu\theta$	$\epsilon\varphi\theta$
37°	0,60	0,80	0,75
53°	0,80	0,60	1,33

7. Στο πιο κάτω σχήμα το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΓΜΚ είναι ίσα.



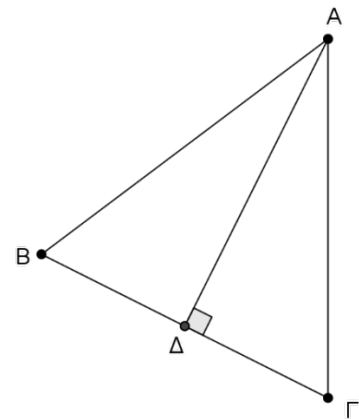
8. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x} \cdot \frac{5x + 10}{x^3 - 8} : \frac{x^2 - 4}{x^3 + 2x^2 + 4x} =$$

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε το ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ έτσι ώστε ΔΕ = ΑΔ.

(α) Να δείξετε ότι το ΑΓΕΒ είναι ρόμβος.

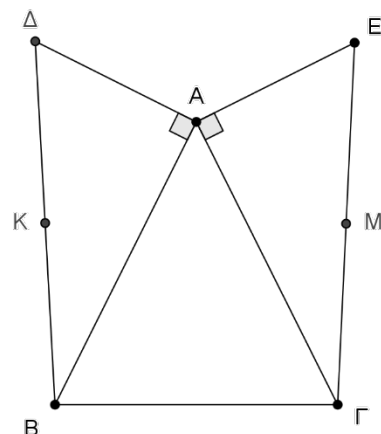
(β) Αν η εξίσωση της ΒΓ είναι $2y + x = 4$ και η εξίσωση της ΑΕ είναι $y = (5\mu - 13)x - 8$, να υπολογίσετε την τιμή του μ .



10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Από το σημείο Α φέρουμε εκτός του τριγώνου, ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ = ΑΕ τέτοια ώστε $AD \perp AB$ και $AE \perp AG$.

(α) Να αποδείξετε ότι $BD = GE$.

(β) Αν Κ και Μ είναι τα μέσα των ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΚΜ είναι ισοσκελές.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να απαντήσετε και στις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4x-11}{x^2-x-20} + \frac{1}{5-x} = \frac{2x+1}{x^2+4x}$$

2. (α) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

(Μον. 4 / 6)

$$(3x+1)^2 + (x-1)^3 - x(x-4)(x+4) - x^2 = 5x(x+5)$$

- (β) Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = \frac{2 - \frac{18}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}} \quad \text{και} \quad B = \left(\frac{2}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} \right) : \frac{2x^2-2}{x^3+4x^2+3x}.$$

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις και να δείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

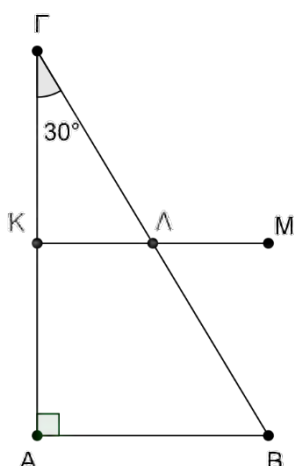
3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και Κ, Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ κατά τμήμα ΛΜ, έτσι ώστε $ΚΛ = ΛΜ$. Να δείξετε ότι:

(α) το τετράπλευρο ΓΜΒΚ είναι παραλληλόγραμμο

(β) το τετράπλευρο ΑΚΜΒ είναι ορθογώνιο

(γ) $ΚΛ = \frac{ΒΓ}{4}$

(Μον. 3 / 4 / 3)

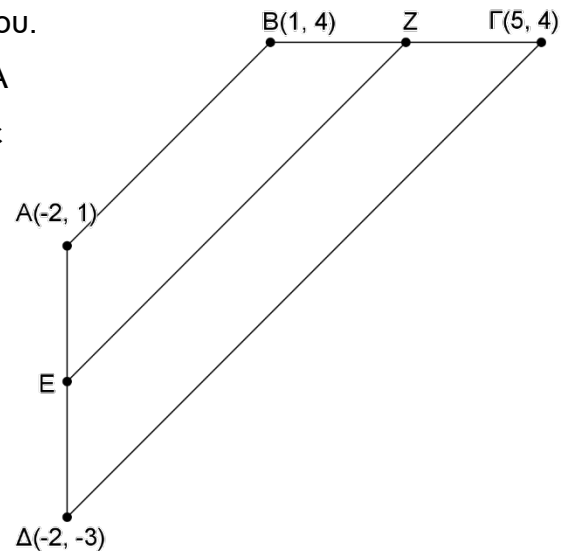


4. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές Α(-2, 1), Β(1, 4), Γ(5, 4), Δ(-2, -3):

(α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΕΖ του τραπέζιου.

(γ) Να προεκτείνετε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ προς το Α κατά τμήμα ΑΜ και προς το Β κατά τμήμα ΒΝ, έτσι ώστε $AM = BN$. Να δείξετε ότι $MD = NG$. (Μον. 4 / 3 / 3)

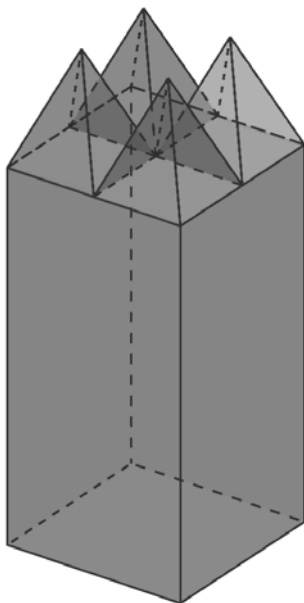


5. Σε ένα διαγωνισμό δημιουργικότητας και καινοτομίας, μια ομάδα φοιτητών κατασκεύασε ένα κλειστό δοχείο από πλαστικό, όπως φαίνεται στο σχήμα. Το δοχείο αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και τέσσερις ίσες τετραγωνικές πυραμίδες. Ο όγκος του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου είναι 16000 cm^3 , το μήκος του είναι ίσο με το πλάτος του και το ύψος του είναι διπλάσιο του μήκους του. Ο όγκος της κάθε πυραμίδας είναι 400 cm^3 .

(α) Πόσα στοίχισε η κατασκευή, αν το πλαστικό στοιχίζει €65 το τετραγωνικό μέτρο.

(β) Για να είναι πιο σταθερή η κατασκευή, οι φοιτητές γέμισαν την κατασκευή με άμμο. Αν αδειάσουμε το περιεχόμενο της κατασκευής σε ένα κυλινδρικό δοχείο με εμβαδό βάσης $100\pi \text{ cm}^2$, να υπολογίσετε, κατά προσέγγιση ακεραίας μονάδας, σε ποιο ύψος θα φτάσει η άμμος στο κυλινδρικό δοχείο.

(Για την επίλυση της άσκησης το πάχος του πλαστικού να θεωρηθεί αμελητέο) (Μον. 7 / 3)



ΜΕΡΟΣ Α: Να απαντήσετε και στα δέκα (10) θέματα του μέρους Α΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

Θέμα 1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 4)^2 =$

(β) $(x + 6)(x - 6) =$

Θέμα 2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο A(2,1) και είναι παράλληλη με την ευθεία $\epsilon_1 : \psi = -3x + 4$.

Θέμα 3. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

(α) $3ax - 6x =$

(β) $2x + 2\psi + ax + a\psi =$

Θέμα 4. Να λύσετε το σύστημα :

$$3x + 5\psi = 1$$

$$4x - 3\psi = -18$$

Θέμα 5. Ο Γιάννης ανεβαίνει ένα λόφο ύψους 500m. Η γωνία κλίσης του λόφου με το έδαφος είναι 12 μοίρες. Πόσα μέτρα θα χρειαστεί να περπατήσει από το σημείο A για να φτάσει στην κορυφή K του λόφου; ($KB \perp AB$)



ημ12	0,208
συν12	0,978
εφ12	0,213

Θέμα 6. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις 3cm , 5cm και 6cm.

Να βρείτε : (α) το εμβαδό της ολικής του επιφάνειας

(β) τον όγκο του.

Θέμα 7. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση : $3x^2 - 7x + 2 = 0$

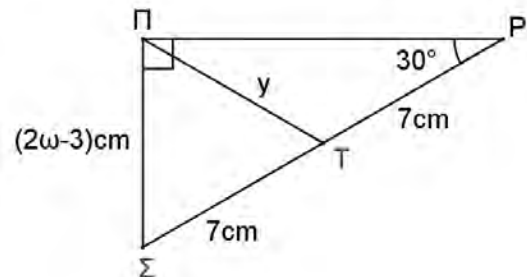
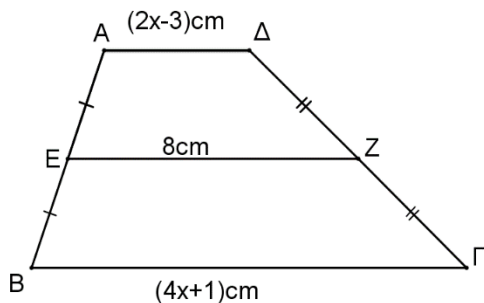
Θέμα 8. Να κάνετε τις πράξεις : $\frac{x^2 - 5x}{2x + 2} \cdot \frac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 25}$ ($x \neq 5$, $x \neq -5$ και $x \neq -1$)

Θέμα 9. Να αποδείξετε την ταυτότητα :

$$(x-2)^3 - x(x-3)^2 - (1-x)(x+1) = (x+9)(x-1) - 5x$$

Θέμα 10. Στα πιο κάτω σχήματα δίνεται $AD \parallel BG$ και $\hat{\Pi} = 90^\circ$

Να υπολογίσετε τα x , y και ω . (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

Θέμα 1. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση :

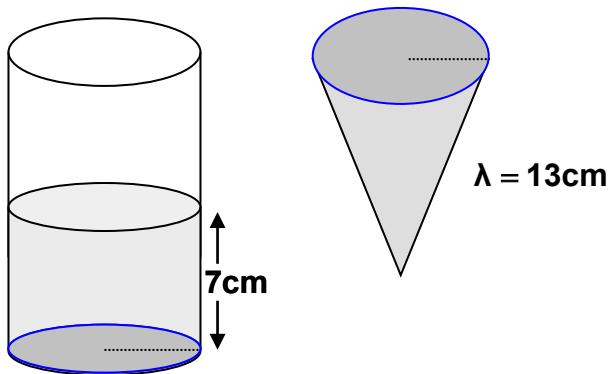
$$\frac{x-7}{x^2-5x+4} - \frac{1}{4-x} = \frac{x-3}{x^2-x}$$

Θέμα 2. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές τα σημεία Α(-1, 2), Β(3, 6), Γ(5, 4) και Δ(1, 0).

- (α) Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών ΑΒ και ΓΔ.
(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.
(γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων του.
(δ) Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου μ ώστε η ευθεία $\psi = (2\mu - 5)x + 7$ να είναι κάθετη στην διαγώνιο ΒΔ.



Θέμα 3. Ένα κυλινδρικό δοχείο ακτίνας 10cm, περιέχει νερό που φτάνει σε ύψος μέχρι τα 7cm . Αν αδειάσω ένα ποτήρι σχήματος κώνου (το οποίο είναι γεμάτο επίσης με νερό), μέσα στο κυλινδρικό δοχείο, πόσο θα ανέβει η στάθμη του νερού, αν το κωνικό ποτήρι έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $E_k = 65\pi \text{ cm}^2$ και η γενέτειρά του ισούται με 13cm.



Θέμα 4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Το K είναι μέσο της πλευράς $A\Gamma$ και Δ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη με την $A\Gamma$ που τέμνει την AB στο E και προεκτείνουμε το ΔE κατά τμήμα EZ , έτσι ώστε $EZ = \Delta E$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Delta BZ$ είναι ρόμβος. (μονάδες 6)

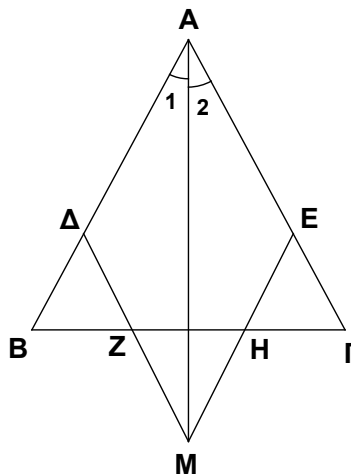
(β) Αν η γωνία $B\hat{\Delta}E = 30^\circ$ και $BE = 5 \text{ cm}$, να υπολογίσετε: (μονάδες 4)

- i. το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$
- ii. το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $K\Delta$
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

Θέμα 5. Στις ίσες πλευρές AB και $A\Gamma$ ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε σημεία Δ και E έτσι ώστε: $A\Delta = AE$. Έστω M τυχαίο σημείο της διχοτόμου της γωνίας A . Αν Z, H τα σημεία στα οποία οι $M\Delta$ και ME τέμνουν την $B\Gamma$ να δείξετε ότι :

(α) τα τρίγωνα $A\Delta M$ και $A M E$ είναι ίσα

(β) $BZ = \Gamma H$



ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\chi - 2)^2 =$

β) $(\psi + 3)(\psi - 3) =$

(μον : 2 x 2,5)

2. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned} 2\chi - y &= 6 \\ 3\chi + y &= 14 \end{aligned}$$

(μον : 5)

3. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κύβου είναι 150 cm^2 .
Να υπολογίσετε τον όγκο του.

(μον : 5)

4. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $\psi^2 + 5\psi =$

β) $9\chi^2 - 16 =$

γ) $2\psi^2 + \beta\psi + 6\psi + 3\beta =$

δ) $\chi^2 - 8\chi + 12 =$

(μον : 4 x 1,25)

5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\chi \cdot (\chi + 6) = 0$

β) $\chi^2 + 2\chi - 15 = 0$

(μον : 2 x 2,5)

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με υποτείνουσα
ΒΓ=15 cm. Αν η κάθετη πλευρά ΑΒ=12 cm, να υπολογίσετε
την τιμή της παράστασης: $A = 15 \cdot \eta\mu\Gamma - 12 \cdot \varepsilon\phi\beta$

(μον : 5)

7. Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{2\chi^3+2}{5\chi-10} \div \frac{\chi^2-\chi+1}{\chi^2+3\chi-10} =$

(μον : 5)

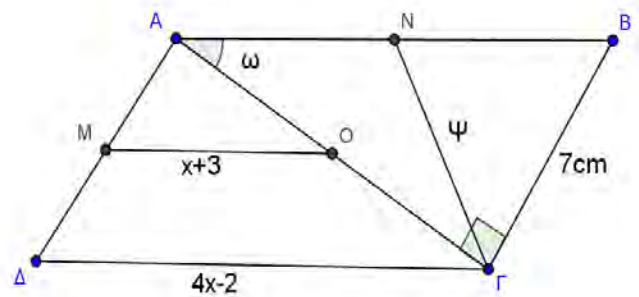
8. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ.

Τα σημεία Μ και Ο είναι τα μέσα των πλευρών ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα.

Αν $\hat{A}\hat{\Gamma}B = 90^\circ$, Ν μέσο της ΑΒ και $B\Gamma = 7\text{cm}$, να υπολογίσετε:

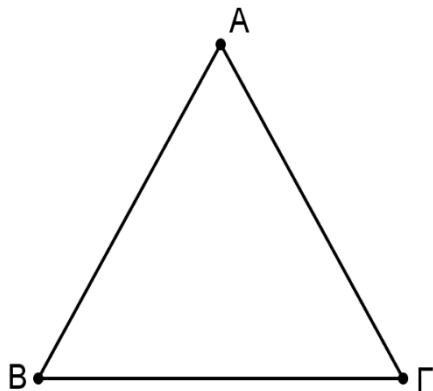
- τις τιμές των χ, ψ (μον: 4)
- τη γωνία ω . (μον: 1)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ που τέμνονται στο σημείο Σ. Να δείξετε ότι:

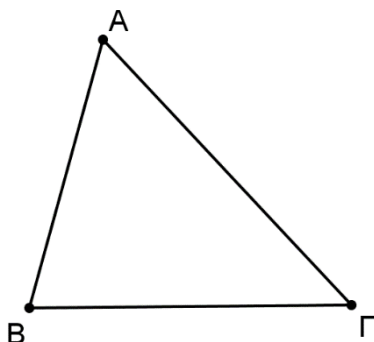
- τα ύψη ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα
- η ΑΣ είναι διχοτόμος της $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma}$



(μον : 2 x 2,5)

10. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΔ και την προεκτείνουμε κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Επίσης προεκτείνουμε την ΒΓ προς τα δύο μέρη της έτσι ώστε ΖΒ=ΒΓ=ΓΗ. Να δείξετε ότι:

- το τετράπλευρο ΑΖΕΗ είναι παραλληλόγραμμο και
- η διάμεσος ΒΘ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίση με $\frac{EH}{2}$.



(μον : 2 x 2,5)

ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε τις εξισώσεις :

α) $2\chi^2 - 5\chi - 3 = 0$

(μον : 5)

β) $\frac{\chi-7}{\chi^2-5\chi+4} - \frac{\chi-3}{\chi^2-\chi} = -\frac{1}{\chi-4}$

(μον : 5)

2. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(4\chi + 3\psi)^2 - (3\chi + 4\psi)^2 = 7(\chi + \psi)(\chi - \psi)$$

(μον : 5)

β) Αν $\chi + \psi = 5$ και $\chi \cdot \psi = 6$, να βρείτε την αριθμητική τιμή των πιο κάτω παραστάσεων:

i) $\chi^2 + \psi^2$

(μον : 2)

ii) $\chi^3 + \psi^3$

(μον : 3)

3. Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΔΖ διχοτόμος της γωνίας Δ (Ζ σημείο της ΑΒ). Φέρουμε ΑΚ κάθετη στη ΔΖ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΓΔ στο Ε. Να δείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

(μον : 2)

β) Τα τρίγωνα ΑΚΖ και ΔΚΕ είναι ίσα.

(μον : 4)

γ) Το τετράπλευρο ΑΖΕΔ είναι ρόμβος

(μον : 4)

(ΣΧΗΜΑ-ΔΕΔΟΜΕΝΑ- ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ- ΑΠΟΔΕΙΞΗ)



4. Οι κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ είναι: $A(-1,3)$, $B(3,-1)$ και $\Gamma(4,4)$.
- α) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του. (μον : 4)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ. (μον : 3)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Β και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ. (μον : 3)
5. Κύλινδρος έχει περίμετρο βάσης 8π cm και εμβαδόν ολικής επιφάνειας 272π cm².
- α) Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου. (μον : 4)
- β) Δοχείο σχήματος κώνου είναι γεμάτο με νερό. Ο κώνος έχει εμβαδόν βάσης 144π cm² και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας 156π cm². Αδειάζουμε το περιεχόμενο του κώνου στον κύλινδρο. Να βρείτε το ύψος της στάθμης του νερού στον κύλινδρο. (μον : 5)
- γ) Στην συνέχεια τοποθετούμε μια μεταλλική σφαίρα ακτίνας 3 cm μέσα στον κύλινδρο. Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού που εκτοπίζεται. (μον : 1)
- (Το πάχος των δοχείων θεωρείται αμελητέο. Οι απαντήσεις να δοθούν συναρτήσει του π.)

ΜΕΡΟΣ Α': (50 μονάδες)

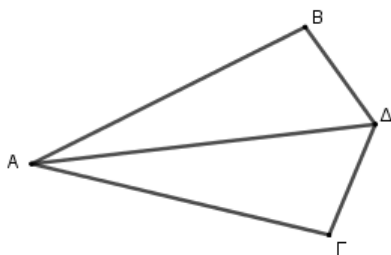
Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτόγματα:

(α) $(x + 2)^2 =$

(β) $(x + 3)(x - 3) =$

2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται $AB = A\Gamma$ και AD διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$. Να δείξετε ότι $BD = D\Gamma$. (Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας).



3. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) ισχύει $\eta\mu B = \frac{3}{5}$. Να υπολογίσετε τις πλευρές AB και $B\Gamma$ και το $\sigma\upsilon\nu B$.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 9x = 0$

β) $4x^2 + 7x - 2 = 0$

5. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πιο κάτω πολυώνυμα:

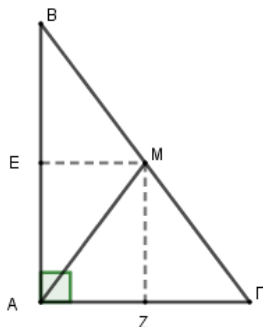
α) $ax^2 + a^2xy =$

β) $x^2 - 5x - 6 =$

γ) $4x^2 - 9 =$

δ) $2x^3 - 16 =$

6. Σε ένα ταξίδι με τρένο το εισιτήριο της Α' θέσης κοστίζει €50 και της Β' θέσης κοστίζει €15 λιγότερα. Αν σε ένα ταξίδι κόπηκαν 350 εισιτήρια συνολικής αξίας €13750, να βρείτε πόσα εισιτήρια κόπηκαν της Α' θέσης και πόσα της Β'.
7. Δίνεται η ευθεία $\varepsilon_1: 2y + 6x - 3 = 0$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην ε_1 και περνά από το σημείο $(-1, 4)$.
8. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) και η AM είναι η διάμεσος του. Αν E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, να δείξετε ότι το $AEMZ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας).



9. Δίνεται ορθό τετραγωνικό πρίσμα με περίμετρο βάσης 32cm και κώνος ακτίνας 6cm . Αν τα δύο στερεά έχουν το ίδιο ύψος και ο όγκος του κώνου είναι $60\pi\text{cm}^3$ να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του πρίσματος.

10. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{x^2 - 1}{2x + 2} \cdot \frac{2}{x^2 - x}$ και $B = 1 - \frac{2}{x}$, ($x \neq 0, x \neq -1, x \neq 1$)

α) Να δείξετε ότι $\frac{B}{A} = x - 2$.

β) Να βρείτε το ανάπτυγμα $\left(\frac{B}{A}\right)^3$

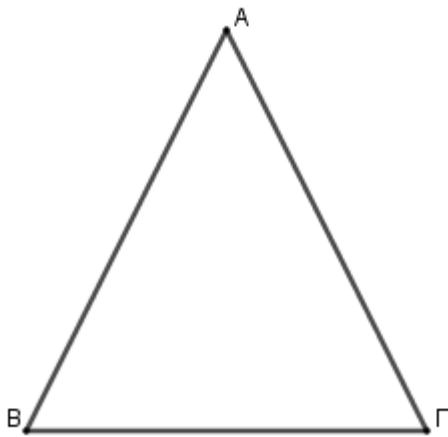
Μέρος Β: (50 μονάδες)

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

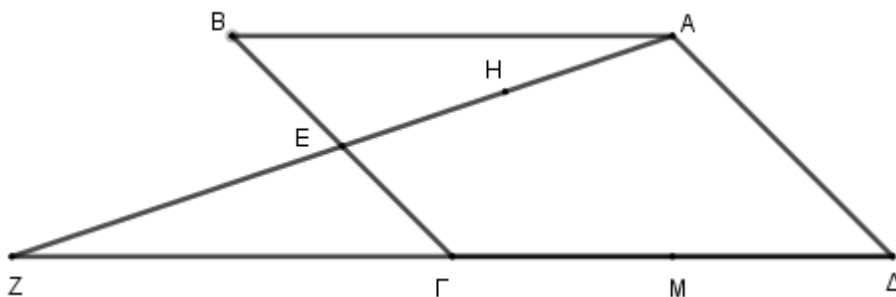
1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x-7}{x^2-5x+4} - \frac{x-3}{x^2-x} = \frac{1}{4-x}$

2. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(-2,1)$, $B(3,2)$, $\Gamma(4,-1)$, $\Delta(-1,-2)$.
- Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.
 - Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων του.
 - Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $(1,0)$ και είναι παράλληλη με τις πλευρές $A\Delta$ και $B\Gamma$.
 - Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$.
- (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας σε όλα τα ερωτήματα).

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(AB) = (A\Gamma)$ και K, Λ, M τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.
- Να ονομάσετε το είδος του τριγώνου ABM ως προς τις γωνίες του.
 - Να δείξετε ότι το τρίγωνο AKM είναι ισοσκελές.
 - Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AKM\Lambda$ είναι ρόμβος.
 - Αν $KM = 5\text{cm}$ και $AM = 8\text{cm}$, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{B}$.
- (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας σε όλα τα ερωτήματα)



4. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και E, M τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα. Οι προεκτάσεις των AE και $\Delta\Gamma$ τέμνονται στο σημείο Z .
- Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και ΓEZ είναι ίσα. (5μον)
 - Να ονομάσετε το είδος του τετραπλεύρου $AE\Gamma\Delta$. (1μον)
 - Αν H είναι το μέσο της πλευράς AE και $HM = 6\text{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος της $A\Delta$. (4μον)
- (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας σε όλα τα ερωτήματα)



5. Η επιφάνεια μιας σφαίρας έχει εμβαδόν ίσο με τα $\frac{9}{17}$ της ολικής επιφάνειας ενός κυλίνδρου ακτίνας $R = 7\text{cm}$ και ύψους $υ = 14\text{cm}$.
- α) Να βρείτε την ολική επιφάνεια του κυλίνδρου.
- β) Να βρείτε την ακτίνα της σφαίρας.
- γ) Ο κύλινδρος είναι γεμάτος νερό. Να υπολογίστε τον όγκο του.
- δ) Πόσος όγκος νερού θα εκτοπιστεί αν βυθίσουμε τη σφαίρα στον κύλινδρο;

ΤΑΞΗ : Γ΄ Γυμνασίου

ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.**Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 3)^2 =$

β) $(2x - \psi)(2x + \psi) =$

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πιο κάτω πολυώνυμα:

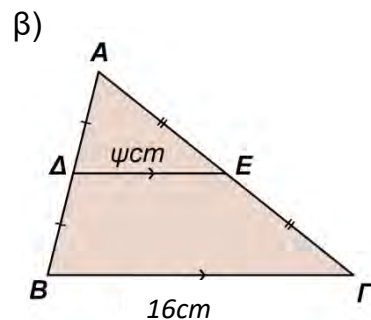
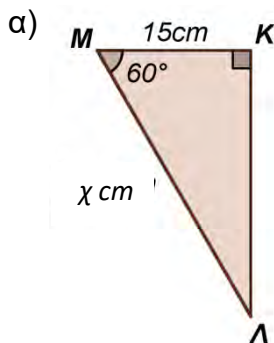
α) $7\beta + 7\gamma - 7\omega =$

β) $9x^2 - 25 =$

3. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα εξισώσεων:

$4x + 3\psi = 1$

$3x - \psi = 4$

4. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις τιμές των x και ψ δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.5. Σε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να κυκλώσετε το γράμμα **Σ**, αν ο ισχυρισμός είναι Σωστός και το γράμμα **Λ**, αν ο ισχυρισμός είναι Λανθασμένος.

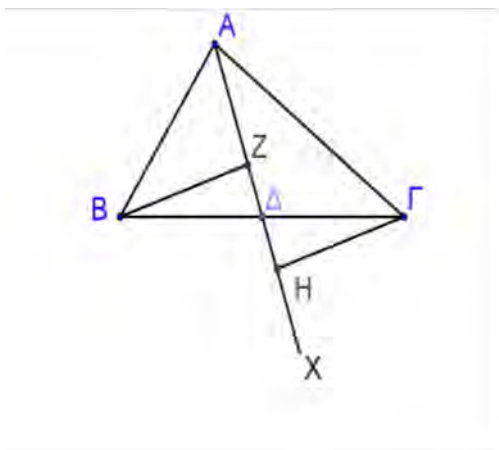
Τετράπλευρο με απέναντι γωνίες ίσες και διαγώνιους που τέμνονται κάθετα είναι ρόμβος	Σ	Λ
Κάθε τετράγωνο είναι ορθογώνιο	Σ	Λ
Οι διαγώνιοι του τετραγώνου διχοτομούν τις γωνίες του	Σ	Λ
Οι διαγώνιοι κάθε τραπεζίου ισούνται μεταξύ τους	Σ	Λ
Τετράπλευρο που έχει ίσες τις πλευρές του και ίσες τις διαγώνιούς του είναι τετράγωνο	Σ	Λ

6. Να αντιστοιχίσετε κάθε ευθεία της στήλης Α με την κλίση της από την στήλη Β:

	Στήλη Α		Στήλη Β
1	$\psi = 3\chi + 1$	α	$\lambda = 0$
2	$\chi = -3$	β	$\lambda = \text{δεν ορίζεται}$
3	$\psi = 3$	γ	$\lambda = 3$
4	$\chi - 3\psi = 1$	δ	$\lambda = \frac{1}{3}$
		ϵ	$\lambda = -\frac{1}{3}$

1 $\rightarrow$, 2 $\rightarrow$, 3 $\rightarrow$, 4 $\rightarrow$

7. Στο πιο κάτω σχήμα, η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ και $BZ \perp AX$, $GH \perp AX$.
Να αποδείξετε ότι $BZ = GH$.



8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\chi^2 - 7\chi + 10 = 0$

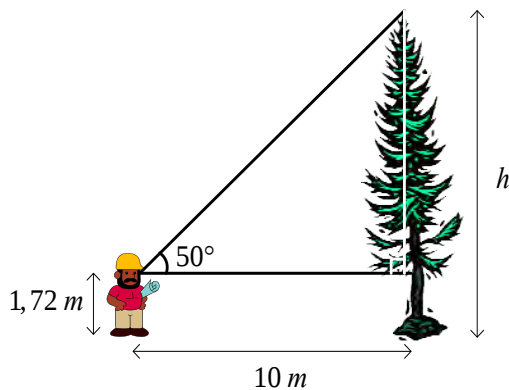
β) $\frac{1}{\chi + 1} - \frac{2}{1 - \chi^2} = \frac{3}{\chi^2 - 3\chi + 2}$

9. Σοκολατένιος κύβος με ακμή 10cm λιώνεται και μετατρέπεται σε πλάκες σοκολάτας σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 5cm, 4cm, 1cm. Πόσες τέτοιες πλάκες σοκολάτας μπορούν να γίνουν; (Για την επίλυση της άσκησης, η απώλεια της σοκολάτας να θεωρηθεί αμελητέα).

10. Ο κύριος Σαββίδης βρίσκεται σε απόσταση 10m από ένα δέντρο το οποίο φαίνεται υπό γωνία 50° (όπως φαίνεται στο σχήμα). Αν το ύψος του κύριου Σαββίδη είναι 1,72m, να υπολογίσετε κατά προσέγγιση ακεραίου:

α) το ύψος h του δέντρου

β) τη γωνία υπό την οποία θα παρατηρεί ο κύριος Σαββίδης το δέντρο, από το ίδιο σημείο, αν σε ένα χρόνο το δέντρο θα ψηλώσει κατά 0,7m ακόμα. (Το ύψος του κύριου Σαββίδη να θεωρηθεί ότι παραμένει το ίδιο).



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\chi^3 + 3\chi^2 - 10\chi}{\chi^2 + 5\chi}$ και $B = \frac{\chi^4 - 8\chi}{2\chi^3 + 4\chi^2 + 8\chi}$

α) Να απλοποιήσετε πλήρως τις παραστάσεις A και B

β) Να δείξετε ότι $\frac{B}{A} = \frac{1}{2}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2\chi^2 = -3\chi - 2\left(\frac{B}{A}\right)$

2. α) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{\psi}{\psi + 2} - \frac{6}{\psi^2 + 5\psi + 6} + \frac{3}{\psi + 3} \right) \cdot \frac{\psi^2}{2\psi + 12} =$$

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$4(\chi + 2\psi)^2 - (4\psi - 5\chi) \cdot (4\psi + 5\chi) - 3\chi(8\chi + 2\psi) = 5\chi(\chi + 2\psi)$$

3. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ όπου $\hat{A} = 120^\circ$. Φέρνουμε τη διχοτόμο από την κορυφή A που τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο E . Από την κορυφή Δ φέρνουμε κάθετη ΔK πάνω στην AE . Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΔDK και ΔKE είναι ίσα

β) Το τρίγωνο ΔDE είναι ισόπλευρο

γ) $KE = \frac{B\Gamma}{2}$

δ) Το $E\Gamma BA$ είναι ισοσκελές τραπέζιο

4. Στο πιο κάτω ορθογώνιο σύστημα αξόνων, δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$.

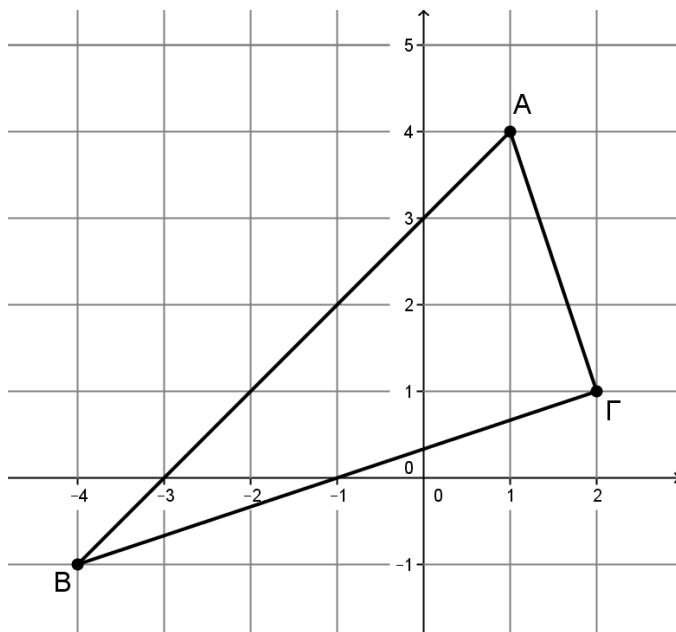
α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου $AB\Gamma$.

β) Να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$.

δ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

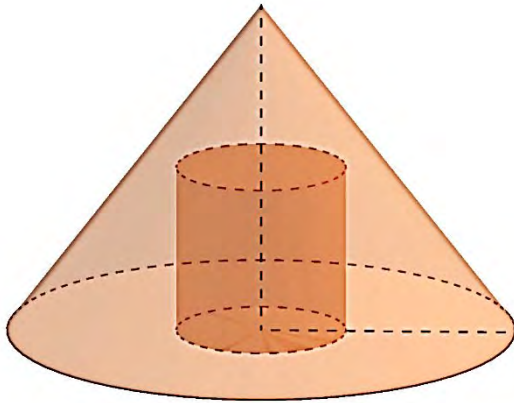
ε) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB .



5. Μια σφηκοπαγίδα είναι ένα στερεό που αποτελείται από ένα κώνο, που εσωτερικά έχει κενό χώρο σε σχήμα κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο κώνος έχει ακτίνα βάσης 20cm και γενέτειρα 25cm, ενώ ο κύλινδρος έχει ακτίνα 8cm και ύψος 10cm.

α) Να βρείτε τον όγκο της σφηκοπαγίδας

β) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου ως προς την κυρτή επιφάνεια του κώνου είναι $\frac{8}{25}$



ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Θέμα 1

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(\chi+3)^2 =$$

$$(\chi+5)(\chi-5) =$$

Θέμα 2

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$\chi^2 + 2\chi\psi =$$

$$\chi^2 - 5\chi + 4 =$$

Θέμα 3

Να λύσετε το σύστημα :

$$\chi + 2\psi = 4$$

$$\chi - \psi = 1$$

Θέμα 4Να χαρακτηρίσετε με **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

ΠΡΟΤΑΣΗ	
Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου τέμνονται κάθετα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Η τομή σφαίρας και ενός επιπέδου που διέρχεται από το κέντρο της είναι πάντα κύκλος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Δύο τρίγωνα τα οποία έχουν δύο πλευρές και μία γωνία αντίστοιχα ίσες είναι ίσα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Το τετράπλευρο του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται είναι ρόμβος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Το τετράπλευρο που έχει μόνο τις πλευρές ίσες είναι τετράγωνο	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Θέμα 5

Να υπολογίσετε την τιμή του α ώστε οι ευθείες να είναι παράλληλες:

$$(\varepsilon_1) : \psi = (2\alpha + 3)\chi - 5$$

$$(\varepsilon_2) : \psi = 5\chi - 1$$

Θέμα 6

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει όγκο 400cm^3 . Αν το ύψος είναι 5 cm και το μήκος 8cm , να υπολογίσετε το εμβαδό ολικής επιφάνειας.

Θέμα 7

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

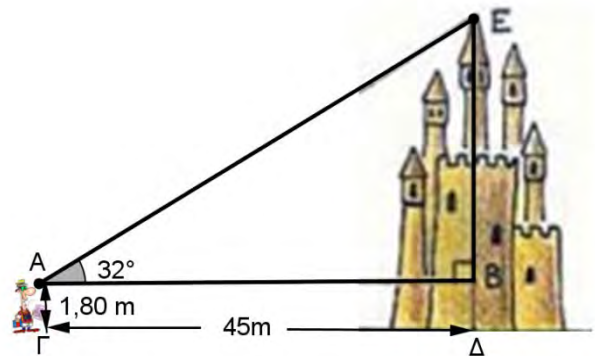
$$K = \left(\frac{\chi^2 - 3\chi - 4}{\chi^2 - 1} + \frac{2\chi + 1}{\chi - 1} \right) + 2017$$

Θέμα 8

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Να φέρετε την διχοτόμο AD της γωνίας $\hat{A}$ και να την προεκτείνετε κατά τμήμα $DE=AD$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι ρόμβος.

Θέμα 9

Ένας τουρίστας με ύψος $AG=1,80\text{m}$ βλέπει την κορυφή του πύργου υπό γωνία 32° και απέχει από αυτόν 45m . Να υπολογίσετε το ύψος ED του πύργου (με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου).
($\eta\mu 32^\circ \cong 0,53$, $\epsilon\phi 32^\circ \cong 0,62$, $\sigma\upsilon\nu 32^\circ \cong 0,85$).

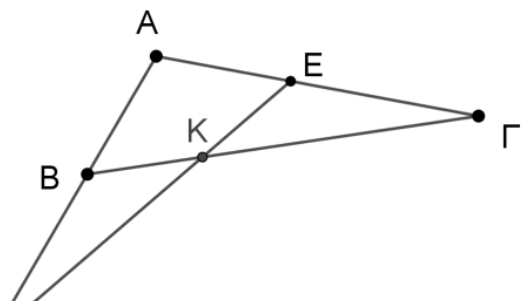


Θέμα 10

Στο διπλανό σχήμα $AD=AG$ και $AE=AB$. Να αποδείξετε:



~ 2 ~



α) ότι τα τρίγωνα ABΓ και AΔΕ είναι ίσα.

β) Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΚ και ΚΕ είναι ίσα.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Θέμα 1

Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{\chi+1}{\chi^2+2\chi} + \frac{\chi-3}{2\chi-\chi^2} = \frac{4}{\chi^2-4}$

Θέμα 2

Δίνεται η παράσταση : $A(\chi)=(2\chi+3)^2-(\chi+2)(\chi-2)-17\chi-11$

(βαθμοί 3+4+3)

α) Να δείξετε ότι $A(\chi)=3\chi^2-5\chi+2$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $A(\chi) = 0$.

γ) Να απλοποιήσετε τη παράσταση : $\frac{A(\chi)-2\chi^2-8}{(\chi^2+\chi)(\chi^2-36)} =$

Θέμα 3

Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A(2, 3) , B (χ , ψ) και Γ(5, 0).

(βαθμοί(3+3+4)

Αν M(2, 2) είναι το μέσο της πλευράς AB του τριγώνου ABΓ:

α) να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου ΓΜ

β) να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Β

γ) να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΒΔ

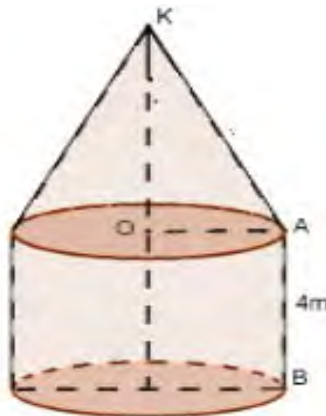
Θέμα 4

Στο διπλανό σχήμα δίνονται: $AB = 4\text{m}$ και $E_{\beta} = 36\pi \text{ m}^2$. Αν το ύψος του κώνου είναι διπλάσιο από το ύψος του κυλίνδρου, να υπολογίσετε :

α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

β) τον όγκο του στερεού .

(Οι απαντήσεις να δοθούν συναρτήσει του π).



Θέμα 5

Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\widehat{A\Gamma B} = 60^\circ$. Προεκτείνουμε τη $\Delta\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma E = \Delta\Gamma$. Αν O είναι το κέντρο του ορθογωνίου, να δείξετε ότι :

α) Το $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Το τρίγωνο $B\Delta E$ είναι ισοσκελές.

γ) $A\Delta = \frac{B\Delta}{2}$

δ) $O\Gamma \parallel \frac{BE}{2}$

ΜΕΡΟΣ Α' : Αποτελείται από 10 Θέματα.

Να λύσετε ΟΛΑ τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με μία (1) μονάδα.

ΘΕΜΑ 1:

Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(x - 4)^2 =$

(β) $(3\omega - 5) \cdot (3\omega + 5) =$

ΘΕΜΑ 2:

Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

(α) $2x - 2y + 4 =$

(β) $\alpha^2 - 36 =$

ΘΕΜΑ 3:

Δίνεται κύβος με ακμή $a=3$ cm. Να βρείτε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού.

ΘΕΜΑ 4:

Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

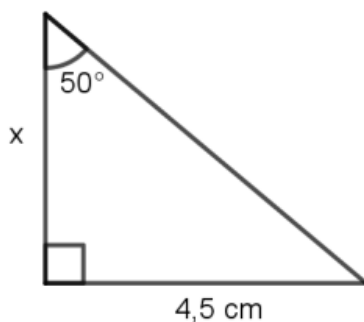
$$3x + 5y = 1$$

$$2x - 5y = 9$$

ΘΕΜΑ 5:

Να υπολογίσετε την τιμή του x στο πιο κάτω σχήμα. Η απάντησή σας να δοθεί **με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου**.

$\eta\mu 50^\circ = 0,76$	$\sigma\upsilon\nu 50^\circ = 0,64$	$\epsilon\varphi 50^\circ = 1,19$
---------------------------	-------------------------------------	-----------------------------------



ΘΕΜΑ 6:

Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$3x^2 - 7x + 2 = 0$$

ΘΕΜΑ 7:

Στο διπλανό ορθοκανονικό σύστημα αξόνων δίνονται οι γραφικές παραστάσεις πέντε ευθειών. Δίνεται ότι:

$$\varepsilon_1 : y = 2x + 4, \quad \varepsilon_2 : y = -2,$$

$$\varepsilon_3 : 2y = 4x + 8, \quad \varepsilon_4 : y = 2x - 2,$$

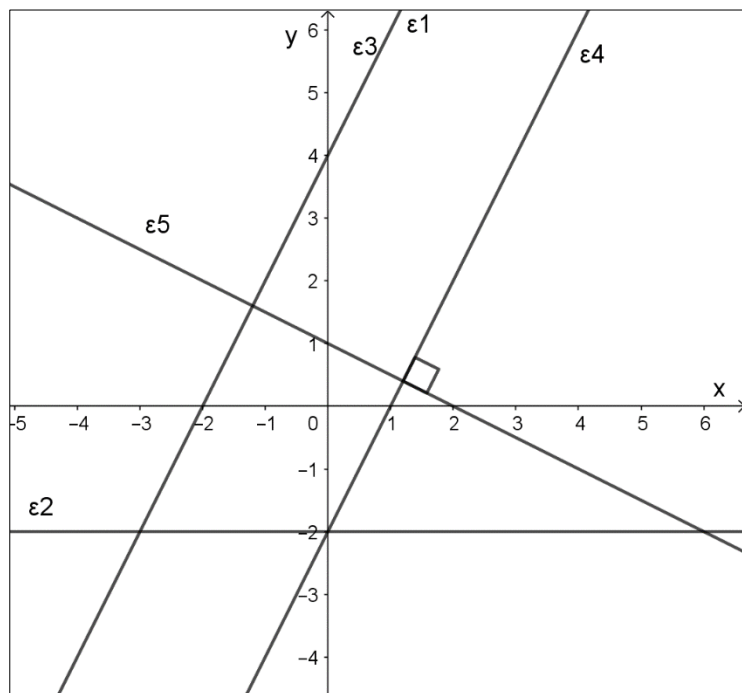
(α) να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών ε_1 και ε_4 .

(β) να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών ε_1 και ε_3 .

(γ) να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών ε_1 και ε_2 .

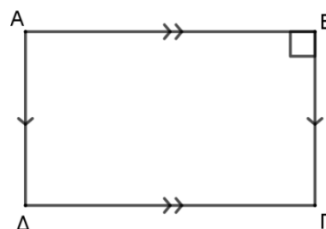
(δ) να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών ε_2 και ε_4 .

(ε) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_5 .

**ΘΕΜΑ 8:**

Δίνεται το πιο κάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με

$$\text{πλευρές } AB = \frac{x^2 + 7x + 10}{x^2 + 5x} \text{ και } B\Gamma = \frac{x^3}{x + 2}$$



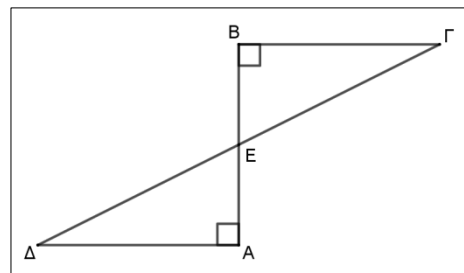
(α) Να χαρακτηρίσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ ως προς το είδος του, αναφέροντας και το κριτήριο.

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραπλεύρου είναι ίσο με x^2 .

ΘΕΜΑ 9:

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι $ΕΓ=ΕΔ$

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $ΑΔΕ$ και $ΒΕΓ$ είναι ίσα.



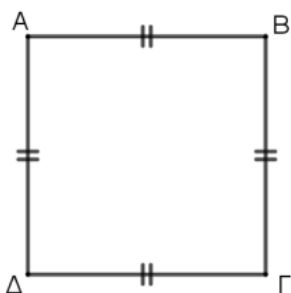
(μον. 0,4)

(β) Αν οι συντεταγμένες των σημείων A και B είναι $A(-8,-1)$ και $B(2,3)$, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου E δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(μον. 0,6)

ΘΕΜΑ 10:

Δίνεται το τετράπλευρο ABΓΔ.



(α) Να χαρακτηρίσετε το τετράπλευρο ABΓΔ ως προς το είδος του, αναφέροντας και το κριτήριο.

(μον. 0,4)

(β) Αν το ABΓΔ έχει περίμετρο 52 cm και εμβαδόν 120 cm^2 και είναι η βάση ορθού πρίσματος με ύψος $u=10 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του πρίσματος.

(μον. 0,6)

ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 5 Θέματα.

Να λύσετε ΟΛΑ τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με δύο (2) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

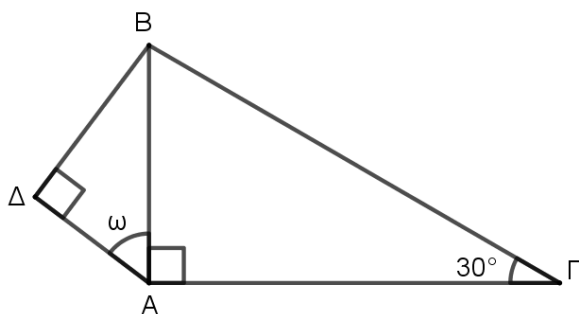
Δίνεται κώνος με γενέτειρα $\lambda=10 \text{ m}$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $60\pi \text{ m}^2$. Αν κύλινδρος έχει το ίδιο ύψος με τον κώνο και διπλάσια ακτίνα βάσης από τον κώνο, να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου. Η απάντησή σας να δοθεί συναρτήσει του π .

ΘΕΜΑ 2:

Να λύσετε την ακόλουθη εξίσωση: $\frac{10x-2}{x^2-2x-15} + \frac{x+1}{5-x} = 3$

ΘΕΜΑ 3:

Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^\circ$ και $\hat{\Gamma}=30^\circ$. Η πλευρά $AB=x^2-2x$ και η πλευρά $B\Gamma=2x^3+4x^2-16x$



(α) Να παραγοντοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεων των AB και BΓ.

(μον. 0,4)

(β) Να υπολογίσετε την τιμή του x και το μήκος της πλευράς AB, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

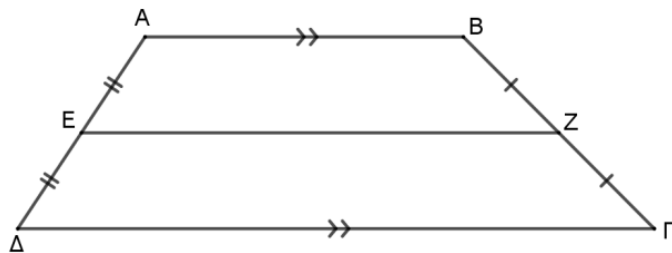
(μον. 1,2)

(γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ω, αν $AB=15$ cm και $B\Delta=8$ cm. Η απάντησή σας να δοθεί με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.

(μον. 0,4)

ΘΕΜΑ 4:

Δίνεται το τραπέζιο ABΓΔ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, και E και Z τα μέσα των πλευρών AD και BΓ αντίστοιχα. Η εξίσωση της πλευράς ΔΓ είναι $-2x+y=-10$, και η εξίσωση της πλευράς BΓ είναι $4x-10y=-28$. Επίσης, δίνεται ότι $A(-6,-6)$ και $E(-4,-10)$.



(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

(μον. 0,6)

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας EZ, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

(μον. 0,6)

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

(μον. 0,4)

(δ) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς (ΑΔ). Η απάντησή σας να δοθεί κατά προσέγγιση ακεραίου.

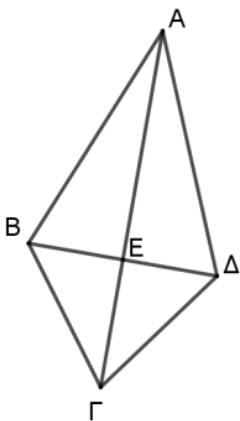
(μον. 0,4)

ΘΕΜΑ 5:

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(x-2)^3 + (x+2)^3 = 2x(x^2+12)$

(μον. 0,6)

(β) (i) Στο πιο κάτω σχήμα ΑΓ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\Gamma\Delta}$, $B\Gamma = (x-2)^3 + (x+2)^3$ και $\Gamma\Delta = 2x^3 + 24x$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ είναι ίσα.



(μον. 1)

(ii) Να αποδείξετε ότι $\Gamma E \perp B\Delta$

(μον. 0,4)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2018

ΤΑΞΗ Γ'

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΒΑΘΜΟΣ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30 ΜΑΪΟΥ 2018

ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

ΥΠΟΓΡΑΦΗ:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 9 δακτυλογραφημένες σελίδες.

- Οδηγίες:**
- α) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα με μολύβι).
 - β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 - γ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 - δ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

**ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-5)^2 =$ (μ.3)

β) $(x+4)(x-4) =$ (μ.2)

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $2a - 6 =$

β) $a^2 - 81 =$

γ) $x^2 + 12x + 11 =$

δ) $4x^2 + 4x + 1 =$

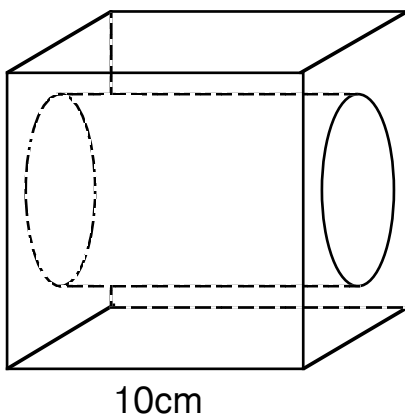
3. α) Δίνονται τα σημεία $A(4,5)$ και $B(16,10)$. Να βρείτε: (μ.3)

i) την απόσταση των σημείων A και B

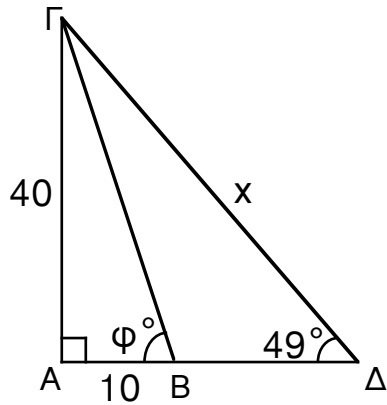
ii) τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB .

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στην ευθεία $y=4x-3$ και περνά από το σημείο $(4,8)$. (μ.2)

4. Στο σχήμα βλέπουμε ένα μεταλλικό εξάρτημα μιας μηχανής. Αποτελείται από ένα κύβο με πλευρά 10cm που έχει στο εσωτερικό του ένα κενό σε σχήμα κυλίνδρου με διάμετρο 6cm . Να υπολογίσετε τον όγκο του εξαρτήματος.



5. Να υπολογίσετε τους άγνωστους x και φ αν $AG=40m$ και $AB=10m$. Να δώσετε τις απαντήσεις σας κατά προσέγγιση ακεραίου.



6. Να λύσετε την εξίσωση: $4x^2+17x-15=0$

7. Δεδομένα

ΓA η απόσταση του Γ από την ευθεία ε

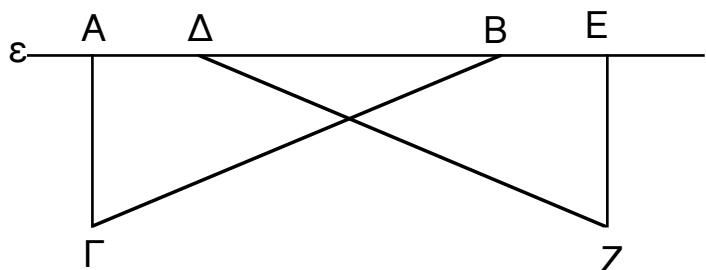
ZE η απόσταση του Z από την ευθεία ε

$$A\Delta = BE, \Gamma B = Z\Delta$$

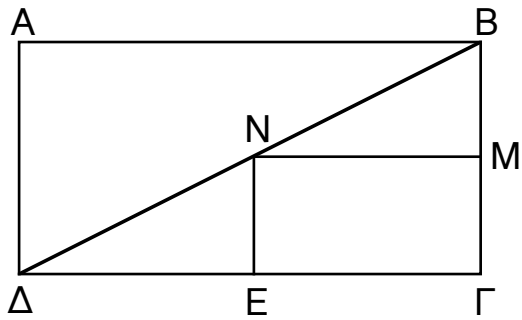
Απόδειξη

Ζητούμενο

$$\triangle A\Gamma B = \triangle \Delta E Z$$



8. Δίνεται το ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Αν το Μ είναι το μέσο του ΒΓ, Ε το μέσο του ΓΔ και Ν το μέσο του ΒΔ, να δείξετε ότι το ΜΝΕΓ είναι ορθογώνιο.



Δεδομένα

Ζητούμενο

Απόδειξη

9. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9} \cdot \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x} : \frac{x^2 - 14x + 49}{2x - 14} =$$

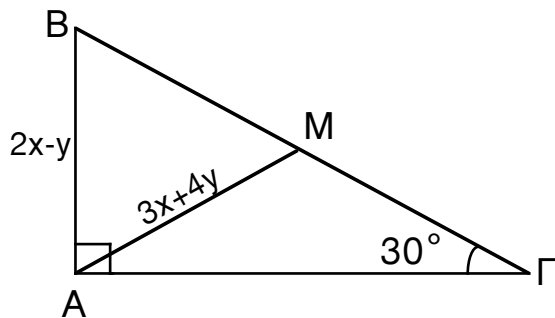
10. Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$\alpha) \frac{-14x^3y^2}{7xy^5} = \quad (\mu.2)$$

$$\beta) \frac{ax - \beta x + 6\beta y - 6ay}{a^3 - \beta^3} = \quad (\mu.3)$$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΑΜ διάμεσος και ΒΓ=22cm. Να σχηματίσετε δύο εξισώσεις με δύο αγνώστους και να λύσετε το σύστημα.



2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 - 16 = 0$

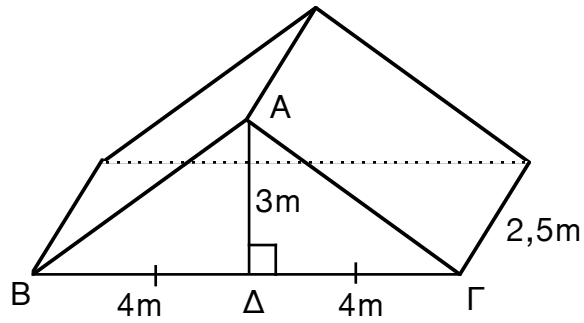
(μ.1) | β) $x^2 - 6x = 7$

(μ.2)

γ) $\frac{2x}{x+1} = \frac{x^2-17}{x^2-2x-3} - \frac{2}{3-x}$

(μ.7)

3. Μια ομάδα από στρατιώτες έστησαν την πιο κάτω σκηνή σε σχήμα τριγωνικού πρίσματος.



α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές από τα δεδομένα που δίνονται στο σχήμα. (μ.2,5)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (μ.1)

γ) Να υπολογίσετε τον όγκο της σκηνής. (μ.2,5)

δ) Η σκηνή είναι φτιαγμένη από αδιάβροχο ύφασμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του υφάσματος που είναι κατασκευασμένη η σκηνή (συμπεριλαμβανομένου και του δαπέδου της σκηνής). (μ.4)

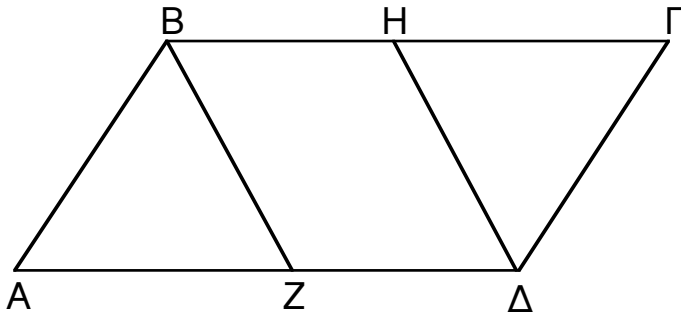
4. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(a-1)^3 - (a+1)^3 + 2(3a^2 + 6) = 10$ (μ.4)

β) Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{a+2}{a+5} - \frac{3a}{a-2} + \frac{3a^2+16a-16}{a^2+3a-10} =$ (μ.6)

5. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Αν BZ είναι η διχοτόμος της γωνίας B και ΔH η διχοτόμος της γωνίας Δ , να αποδείξετε ότι:

α) $AZ = H\Gamma$

β) το τετράπλευρο $BH\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο.



Δεδομένα

Ζητούμενα

Απόδειξη

Η ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΑ: Σιδέρη Αθηνά

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Βέρα Ταχμαζιάν

ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

(1) Να βρείτε τα αναπτύγματα, με χρήση ταυτότητας:

(α) $(x + 3)^2 =$

(β) $(x - 4)(x + 4) =$

(2) Να χαρακτηρίσετε με «Σωστό» ή «Λάθος» τις πιο κάτω προτάσεις:

(α) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αν έχει μόνο τις δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες.	Σωστό/Λάθος
(β) Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν είναι παραλληλόγραμμο και έχει μία ορθή γωνία.	Σωστό/Λάθος
(γ) Ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αν είναι ρόμβος και οι διαγώνιοί του είναι ίσες.	Σωστό/Λάθος
(δ) Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν οι διαγώνιοί του τέμνονται κάθετα.	Σωστό/Λάθος
(ε) Η διάμεσος του τραπέζιου είναι παράλληλη με τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.	Σωστό/Λάθος

1

(3) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned} x - 3\psi &= 6 \\ 2x + 3\psi &= 3 \end{aligned}$$

(4) Η ακμή ενός κύβου είναι $a = 5\text{m}$. Να υπολογίσετε:

(α) την ολική επιφάνεια του κύβου

(β) τον όγκο του κύβου.

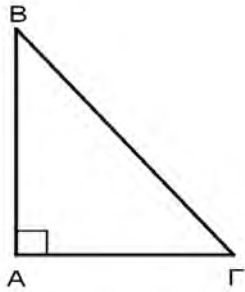
(5) Να λύσετε τις εξισώσεις:

(MON 2/3)

(α) $(x - 1)(x + 3) = 0$

(β) $5x^2 - x - 4 = 0$

- (6) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Αν $AB=4\text{cm}$ και $B\Gamma=5\text{cm}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B .



- (7) Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις πιο κάτω παραστάσεις:

(MON 1/1/1/2)

(α) $x^2 - 81 =$

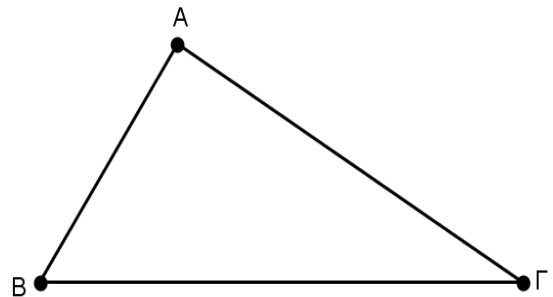
(β) $2x\psi + 4\psi =$

(γ) $x^2 + 2x - 15 =$

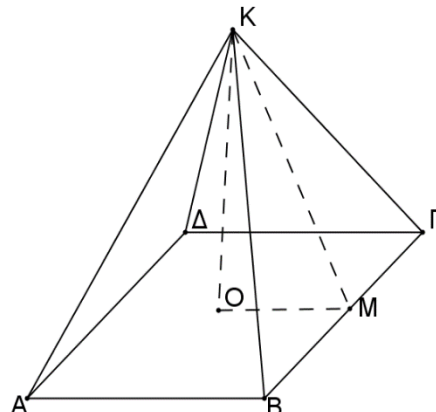
(δ) $2\alpha\chi - \chi\beta + \psi\beta - 2\alpha\psi =$

- (8) Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε τη διχοτόμο AH . Τα Δ, E είναι σημεία των πλευρών $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $A\Delta = AE$. Να δείξετε ότι $\Delta H = EH$.
(Δεδομένα – Ζητούμενα – Σχήμα - Απόδειξη)

Δεδομένα	Ζητούμενα



- (9) Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 144 cm^2 και παράπλευρο ύψος $h = 10\text{ cm}$. Να υπολογίσετε:
(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και (β) τον όγκο της πυραμίδας.



(10) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{\chi+1}{\chi+2} - \frac{\chi^2-\chi}{\chi^2-2\chi-8} \right) : \frac{\chi+2}{\chi-4} =$$

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

(1) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$\frac{7+7x}{x^2-x-12} - \frac{2x-3}{x-4} = \frac{1-3x}{x+3}$$

(2) (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

(MON 6)

$$\chi(2\chi-1)^2 - (\chi-3)(\chi+3) - (\chi+1)^3 = \chi^2(3\chi-8) - 2(\chi-4)$$

(β) Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

(MON 4)

$$3(\psi-2) = 4 - 2(\chi+1)$$

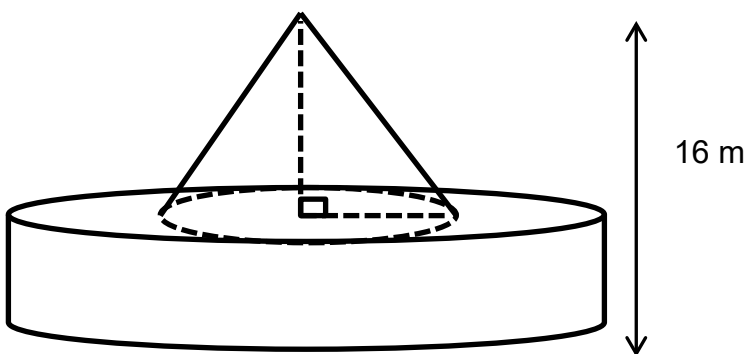
$$\frac{\chi+3}{4} - \frac{\psi-2}{3} = 1$$

(3) Στο πιο κάτω σχήμα, η κατασκευή αποτελείται από έναν κύλινδρο και έναν κώνο.

Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι $65\pi\text{m}^2$ και η γενέτειρα του κώνου είναι $\lambda=13\text{m}$.

Αν το άθροισμα των υψών των δύο στερεών είναι 16m και η διάμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι 30m , να υπολογίσετε τον όγκο της κατασκευής

(Οι απαντήσεις σας μπορούν να δοθούν συναρτήσει του π).



(4) Δίνονται τα σημεία $A(-3, -3)$, $B(4, -6)$, $\Gamma(5, -9)$ και $\Delta(-2, -6)$.

(α) να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο

(β) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$

(γ) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που περνά από το σημείο B και είναι παράλληλη με τη διαγώνιο $A\Gamma$

(δ) να υπολογίσετε την τιμή του κ αν η ευθεία $\varepsilon_2 : \psi = 4(\kappa + 1)\chi - 7$ είναι κάθετη με την ευθεία $\varepsilon_1 : \psi = -\frac{3}{4}\chi - 3$

(MON 3/2/3/2)

(5) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ και AM η διάμεσος του.

Από το σημείο M να φέρετε κάθετη στην AB την οποία τέμνει στο σημείο Δ .

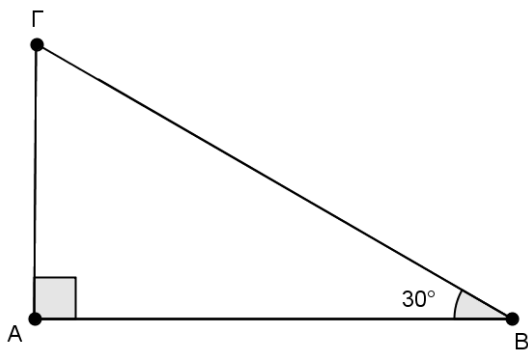
Να προεκτείνετε την $M\Delta$ κατά τμήμα ΔE έτσι ώστε $M\Delta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο AMB είναι ισοσκελές

(MON 4)

(β) το τετράπλευρο $AEM\Gamma$ είναι ρόμβος.

(MON 6)



ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(\chi + 3)^2 =$

(β) $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) =$

2) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων:

(α) $3\psi^2 - 6\psi =$

(β) $\chi^2 - 6\chi + 8 =$

3) Να λύσετε το σύστημα:

$$\kappa - 3\lambda = 7$$

$$2\kappa + 5\lambda = -8$$

4) Να βρείτε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις

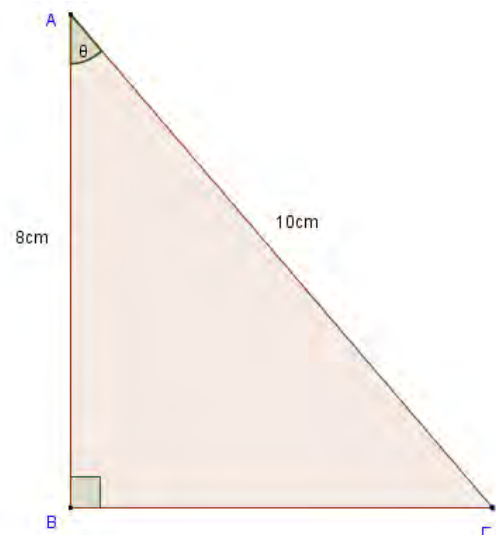
4m, 7m και 3m.

5) Να λύσετε την εξίσωση

$$2\chi^2 + 5\chi - 3 = 0$$

6) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της

γωνίας θ (ημθ, συνθ, εφθ) του τριγώνου ΒΑΓ.

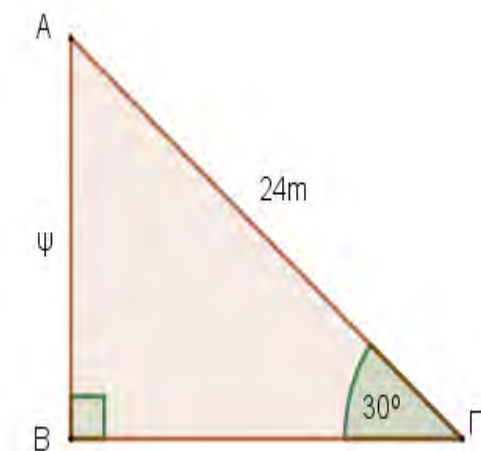


- 7) Στο πιο κάτω σχήμα να βρείτε την απόσταση AB των δύο σπιτιών, καθώς και τις συντεταγμένες του δέντρου που βρίσκεται στο μέσο των δύο σπιτιών.

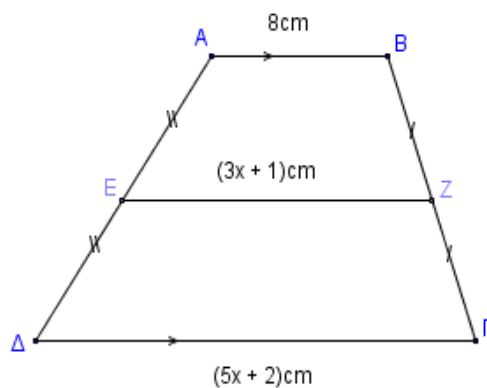


- 8) Να βρείτε τις τιμές των χ και ψ στα πιο κάτω σχήματα:
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

(α)



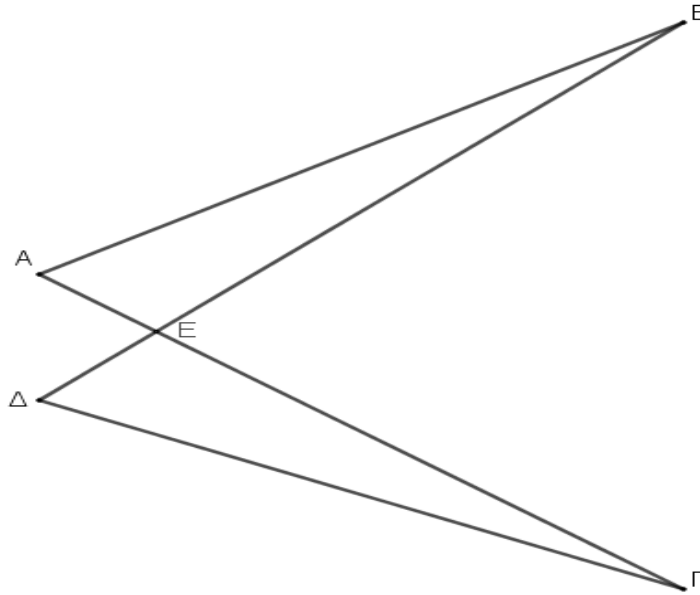
(β)



9) Στο πιο κάτω σχήμα ισχύει ότι $AE = DE$ και $EB = EG$

(α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και GDE είναι ίσα.

(β) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις του σημείου E από τις πλευρές AB και GD είναι ίσες.



10) Να κάνετε τις πράξεις

$$\left(\frac{\chi+1}{2\chi-2} + \frac{6}{2\chi^2-2} - \frac{\chi+3}{2\chi+2} \right) \div \frac{3}{\chi^2-4} = \quad (\text{όπου } \chi \neq -1, \chi \neq 1, \chi \neq -2, \chi \neq 2)$$

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x+1}{x+1} + \frac{1}{x^2-2x} = \frac{2x^3-4x^2+1}{x^3-x^2-2x}$$

2) (α) Αν $A = \left(\frac{\omega}{x} - 1 \right)^2 : \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\omega^2} - \frac{2}{x\omega} \right)$ και $B = \frac{x+\omega}{1+\frac{x}{\omega}}$ να αποδείξετε ότι $A-B^2 = 0$

(β) Αν $\alpha \neq -\beta$, να δείξετε ότι:

$$\frac{\alpha^3 + \beta^3}{\alpha + \beta} - \alpha\beta = (\alpha - \beta)^2$$

3) Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΒΖ διχοτόμος της γωνίας Β (Ζ σημείο της ΔΓ).

Φέρουμε $ΓΟ \perp ΒΖ$ και το προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΑΒ στο Ε.

Να δείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές (3μ)

(β) τα τρίγωνα ΟΖΓ και ΟΕΒ είναι ίσα (4μ)

(γ) το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος (3μ)

4) Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,7), Β(-2,4) και Γ(3,2) .

(α) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ (3μ)

(β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ (4μ)

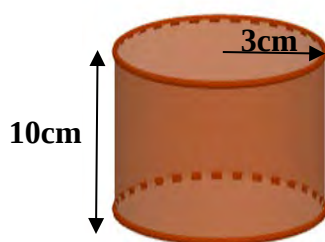
(γ) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες η ευθεία $\kappa\chi + (\kappa^2 - 2)\psi = 5$ είναι παράλληλη με την ΑΒ. (3μ)

5) Στο κυλικείο ενός θεάτρου πωλούνται τρεις κλειστές διαφορετικές συσκευασίες ξηρών καρπών, όπως φαίνεται στα πιο κάτω σχήματα με το αντίστοιχο κόστος.

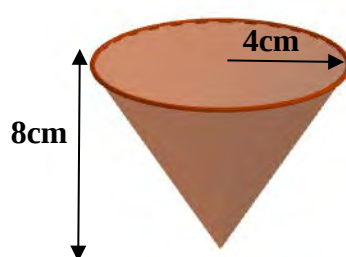
(α) Να εξετάσετε ποια συσκευασία συμφέρει να αγοράσει κάποιος.

(Να δείξετε όλη την εργασία σας) (6μ)

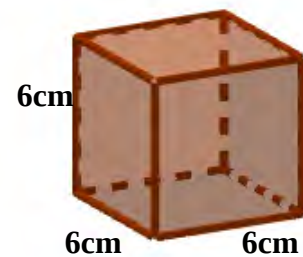
(β) Το εργοστάσιο παρασκευής των συσκευασιών θέλει να αλλάξει το υλικό κατασκευής τους. Ποια συσκευασία συμφέρει στο εργοστάσιο κατασκευής αν το καινούργιο υλικό στοιχίζει 2σεντ ανά cm^2 ; (4μ)



€ 2,50



€ 2,50



€ 2,50

ΜΕΡΟΣ Α': (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(x-3)^2 =$

(β) $(x-5) \cdot (x+5) =$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $8x+8y =$

(β) $x^2 - 6x + 8 =$

3. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κύβου ακμής 7cm.

4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ΑΒ = 3cm και ΒΓ = 5cm.
Να βρείτε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

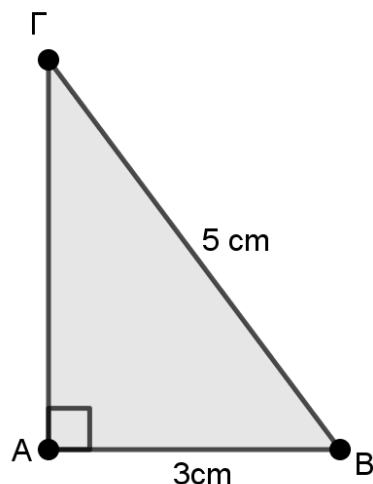
(α) $\eta\mu B =$

(β) $\epsilon\phi\Gamma =$

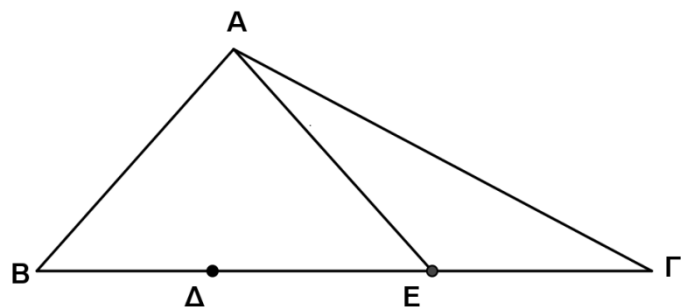
(γ) $\sigma\upsilon\nu B =$

5. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 6 \\ 2x - y = 5 \end{array} \right\}$$



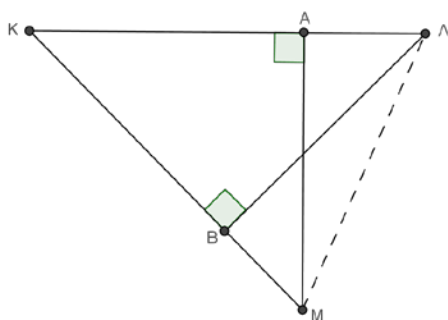
6. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ, Δ τυχαίο σημείο της πλευράς ΒΓ και Ε το μέσο της ΑΔ. Αφού προεκτείνετε την ΑΕ κατά τμήμα ΕΖ, έτσι ώστε ΑΕ = ΕΖ, να δείξετε ότι το ΑΓΖΔ είναι παραλληλόγραμμο.



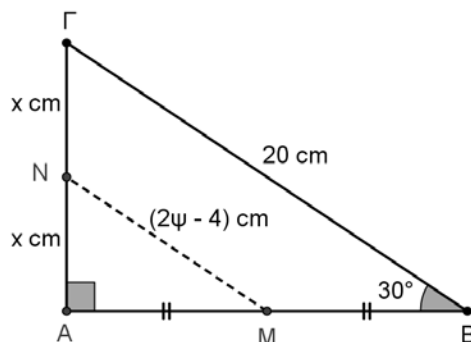
7. Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

$$4(2x-1)^2 - 4(x-3)(x+3) - (2-3x)^2 = (2-x)^2 + 2(x^2 + 16)$$

8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ότι ΚΑ = ΚΒ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΚΛΒ και ΚΜΑ είναι ίσα.



9. Να υπολογίσετε τα χ και ψ στο πιο κάτω σχήμα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



10. Να κάνετε τις πράξεις και όλες τις δυνατές απλοποιήσεις:

(α) $\frac{3x^2 - 3}{x^3 + x^2 - 2x} \cdot \frac{x^2 + 2x}{3} =$

(Μονάδες 3)

(β) $\frac{\frac{x^2 - 16}{x^2 + 3x - 4}}{\frac{x^2 - 4x}{x^2}} =$

(Μονάδες 2)

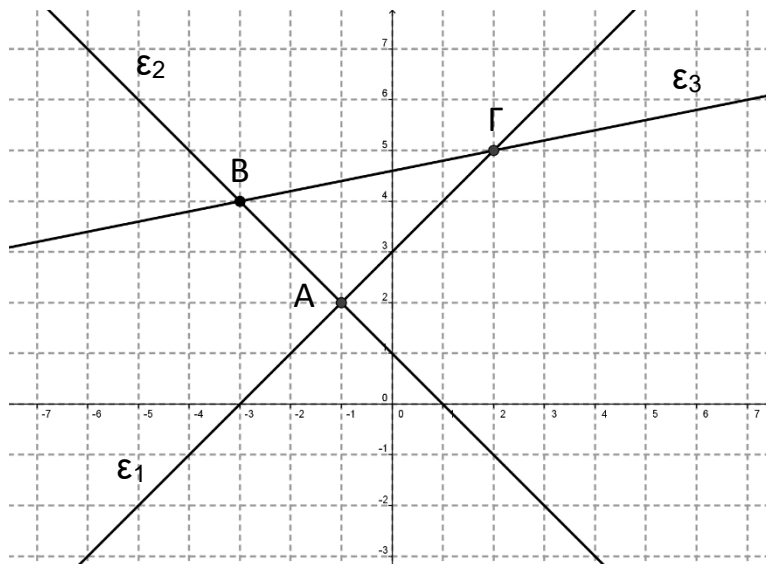
ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $3x^2 - 2x - 1 = 0$ (Μονάδες 3)

(β) $\frac{5x}{x^2 - x - 12} + \frac{2}{4 - x} = \frac{2x}{x^2 + 3x}$ (Μονάδες 7)

2. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις τριών ευθειών (ε_1) , (ε_2) και (ε_3) .



(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής A, B και Γ των ευθειών (ε_1) , (ε_2) και (ε_3) .

(Μονάδες 1,5)

(β) Να βρείτε την κλίση της ευθείας (ε_2) .

(Μονάδες 1,5)

(γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε_1) είναι η $y = x + 3$.

(Μονάδες 1,5)

(δ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 2,5)

(ε) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο M του AB και είναι παράλληλη με την BΓ.

(Μονάδες 3)

3. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = x - \frac{x}{x+1} \text{ και } B = (x+1) : \left(x + \frac{1}{x+2} \right) \text{ με } x \neq -1 \text{ και } x \neq -2.$$

(α) Να δείξετε ότι $A - B = x - 2$.

(Μονάδες 7)

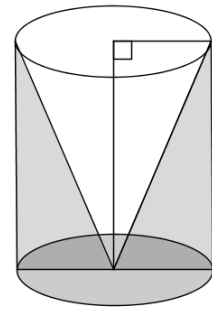
(β) Να βρείτε το ανάπτυγμα $(A - B)^3$.

(Μονάδες 3)

4. Στο διπλανό σχήμα, η περίμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι $12\pi \text{ m}$ και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι $60\pi \text{ m}^2$.

Να υπολογίσετε:

- (α) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου. (Μονάδες 4)
(β) Τον όγκο της σκιασμένης περιοχής του στερεού. (Μονάδες 3)
(γ) Πόσα λίτρα μπογιάς θα χρειαστούμε για να βάψουμε τη διπλανή κατασκευή αν με κάθε λίτρο μπογιάς μπορούμε να βάψουμε $6,28 \text{ m}^2$; (Μονάδες 3)



5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΔEZ ($\hat{A} = 90^\circ$), με $\hat{Z} = 30^\circ$ το M είναι μέσο της EZ και το H είναι μέσο της EM . Στην προέκταση της ΔH παίρνουμε τμήμα $H\Theta$ τέτοιο ώστε $H\Theta = \Delta H$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Theta M$ είναι ρόμβος.

ΜΕΡΟΣ Α'

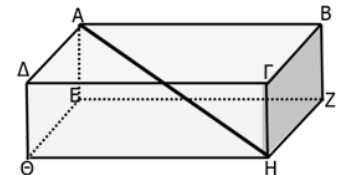
Να λύσετε **και τις 10** ασκήσεις του Μέρους Α'. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **5 μονάδες**.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 4)^2 =$

(β) $(\omega - 3)(\omega + 3) =$

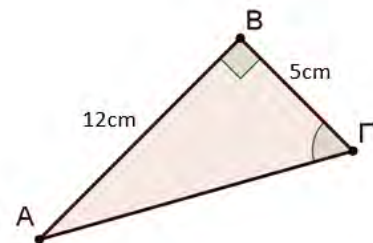
2. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις 2m , 3m και 4m. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



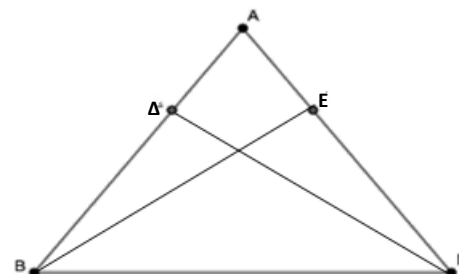
3. Να λύσετε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x - y = 9 \end{cases}$$

4. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ.



Δεδομένα	Ζητούμενα
$\square$ $\triangle AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο $AB = A\Gamma$ $AD = AE$	$\Gamma\Delta = BE$



6. Να λύσετε την εξίσωση: $4\chi^2 + 7\chi - 2 = 0$

7. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $3\chi^2 + 6\chi =$

(β) $9\omega^2 - 4 =$

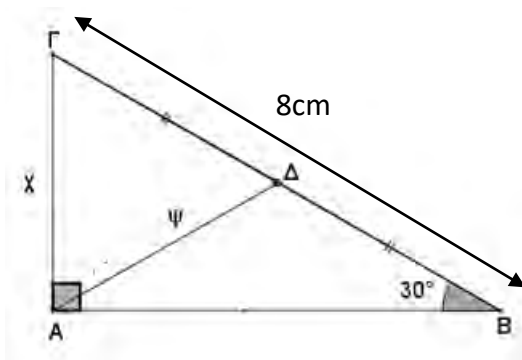
(γ) $\alpha^2 - 7\alpha - 8 =$

(δ) $3\chi^2 + \alpha\chi + 2\alpha + 6\chi =$

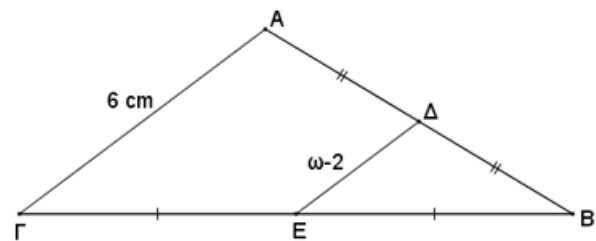
8. Να υπολογίσετε τις τιμές των χ , ψ , ω στις πιο κάτω περιπτώσεις.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(α)



(β)



9. Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1 : \psi = \frac{\kappa-3}{2}\chi + 1$ και $\varepsilon_2 : \psi - \kappa\chi = 7$ να είναι κάθετες.

10. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{\frac{\chi^2 - 8\chi + 12}{36 - \chi^2}}{\frac{4\chi - 8}{\chi^2 + 5\chi - 6}} =$$

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε **και τις 5** ασκήσεις του Μέρους Β' . Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **10 μονάδες**.

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\chi-8}{\chi} - \frac{\chi}{2-\chi} = \frac{4}{\chi^2-2\chi}$

(β) Να κάνετε τις πράξεις και όλες τις δυνατές απλοποιήσεις:

$$\left(\frac{1}{\chi-3} - \frac{4}{\chi^2-9}\right) \cdot \frac{\chi^2-6\chi+9}{\chi^2-\chi} =$$

2. (α) Σε μια συνοικία ζουν οικογένειες με 2 παιδιά και οικογένειες με 3 παιδιά . Οι οικογένειες με 2 παιδιά είναι πενταπλάσιες από τις οικογένειες με 3 παιδιά. Να βρείτε πόσες οικογένειες με 2 παιδιά και πόσες οικογένειες με 3 παιδιά ζουν στη συνοικία, αν όλα τα παιδιά είναι 52.
(Να χρησιμοποιήσετε σύστημα εξισώσεων).

(β) Δίνεται η παράσταση: $K = (2\chi+1)^3 + (\chi-2)(\chi+2) - 2\chi(2\chi+1)^2 + 2$
Να αποδείξετε ότι $K = 5\chi^2 + 4\chi - 1$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-3,2) , Β(1,4) και Γ(-5,6) .

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο. (μον. 2,5)

(β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές. (μον. 2,5)

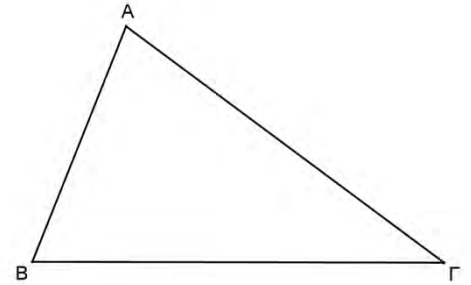
(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΒΓ. (μον. 2)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο Μ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon : 2\psi = 4\chi + 6$ (μον. 3)

4. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEZB είναι παραλληλόγραμμο.

(μον. 3)



(β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $B\Delta Z$ και $ZE\Gamma$ είναι ίσα.

(μον. 3)

(γ) Αν $\Delta\Theta$ και EH είναι οι αποστάσεις των σημείων Δ και E αντίστοιχα από τη βάση $B\Gamma$ του τριγώνου, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta EH\Theta$ είναι ορθογώνιο.

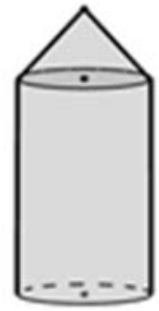
(μον. 4)

5. Η διπλανή κέρινη κατασκευή αποτελείται από έναν κύλινδρο και έναν κώνο.

Το ύψος του κυλίνδρου είναι 20cm και η περίμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι $8\pi\text{cm}$. Το ύψος του κώνου είναι 3cm .

(α) Όλη η εξωτερική επιφάνεια της κατασκευής θα καλυφθεί με αυτοκόλλητο που πωλείται σε ρολό που καθένα έχει εμβαδόν 125cm^2 .

Να υπολογίσετε το κόστος της επικάλυψης, αν η κάθε συσκευασία στοιχίζει €4.



(β) Αν λιώσουμε την κέρινη κατασκευή, για να φτιάξουμε

διακοσμητικά κεριά σχήματος κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας με πλευρά βάσης 12cm και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 240cm^2 , πόσα τέτοια κεριά θα μπορέσουμε να φτιάξουμε;



ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το ανάπτυγμα:

$$(x - 5)^2 =$$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

i. $2\alpha + 2\beta =$

ii. $x^2 - 16 =$

3. Από τα στοιχεία που δίνονται, να εξετάσετε κατά πόσο τα τρίγωνα είναι ίσα.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

4. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 9y = -5 \\ -2x + 6y = 2 \end{array} \right\}$$

5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν κυρτής επιφάνειας κυλίνδρου, με ακτίνα $R = 3\text{cm}$ και $u = 10\text{cm}$.

6. Να λύσετε την εξίσωση $5x^2 + 3x - 2 = 0$.

7. Να απλοποιήσετε την πιο κάτω παράσταση, αν $x \neq 0$ και $x \neq 4$.

$$A = \frac{x^2 - 4x}{x} \cdot \frac{x}{2x - 8}$$

8. Να υπολογίσετε τα x, ω, λ, y σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

i.

ii.

9. i. Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο $(x - 2)$ είναι παράγοντας του $x^3 - 8$.
ii. Αν $x + y = 2$ και $x \cdot y = 3$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $x^3 + y^3$.
iii.

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(\hat{A} = 90^\circ)$.

- i. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\frac{\eta\mu\Gamma}{\varepsilon\phi\Gamma} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$

- ii. Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$, του πιο πάνω σχήματος, αν

$$A\Gamma = (x^4 - 18x^2 + 81)\text{cm} \quad \text{και} \quad AB = (x + 3)(x^3 - 3x^2 - 9x + 27)\text{cm}$$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. i. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2}{x-3} + \frac{x}{2x-4} = \frac{2}{x^2-5x+6}$

ii) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\alpha^2}{\alpha-2}$, $B = \frac{25\alpha}{2\alpha-\alpha^2}$ και $\Gamma = \frac{\alpha^2+2\alpha-35}{(\alpha-2)(\alpha+7)^2}$

Να αποδείξετε ότι $(A + B) \div \Gamma = \alpha^2 + 12\alpha + 35$

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου της πλευράς ΑΒ με τη χρήση τύπου.

ii. Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β.

iii. Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου ΑΒΓ.

iv. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = (2\alpha - 8)x + 6$ είναι παράλληλη με την πλευρά ΒΓ, τότε να βρείτε την τιμή του α .

3. Η διπλανή ξύλινη κατασκευή αποτελείται από έναν κύβο και μία τετραγωνική πυραμίδα με ακμή βάσης $\alpha = 6\text{m}$.

Το ύψος της πυραμίδας είναι ίσο με τα $\frac{2}{3}$ της ακμής του κύβου.

i. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.

ii. Η κατασκευή θα βαφτεί σε όλη της την επιφάνεια, εκτός από το δάπεδο, με μπογιά.

Αν η μπογιά στοιχίζει €5 το τετραγωνικό μέτρο (m^2), να υπολογίσετε πόσα θα στοιχίσει το βάψιμο της ξύλινης κατασκευής.

4. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, με $AB = \Gamma\Delta = 8m$, $\widehat{AB\Delta} = \widehat{B\Delta\Gamma} = 30^\circ$, $\widehat{A\Gamma\Delta} = 60^\circ$ και M σημείο τομής των διαγωνίων του. (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)
- Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος.
 - Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $A\Gamma$.
 - Από το σημείο B φέρουμε κάθετη BE στην πλευρά $B\Gamma$. Το σημείο E είναι το σημείο τομής, της καθέτου BE με την προέκταση της διαγωνίου ΓA .
Να αποδείξετε ότι:
α) A μέσο της ΓE .
β) τα τρίγωνα EAB και EAD είναι ίσα.
5. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$), προεκτείνουμε την πλευρά BA προς το A και παίρνουμε τμήμα $AD = A\Gamma$. Επίσης, προεκτείνουμε την πλευρά ΓA προς το A και παίρνουμε τμήμα $AE = AB$. (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)
- Να αποδείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα ΔEB και ΓEB είναι ίσα και
 - $\Delta M = \Gamma M$, αν M σημείο τομής της ΔE και ΓB .

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ'

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να βρείτε τα αναπτύγματα χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες.

α) $(x - 3)^2 =$

β) $(x - 5) \cdot (x + 5) =$

- 2) Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 5m , πλάτος 8m και ύψος 4m. Να υπολογίσετε τον όγκο του.

- 3) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $3x^2 + 6x =$ (μον. 1)

β) $x^2 - 16 =$ (μον. 1)

γ) $x^2 - 2x - 3 =$ (μον. 1)

δ) $3\alpha + 3\psi - \chi\alpha - \chi\psi =$ (μον. 2)

- 4) Να λύσετε το σύστημα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών.

$$5x - 2\psi = 8$$

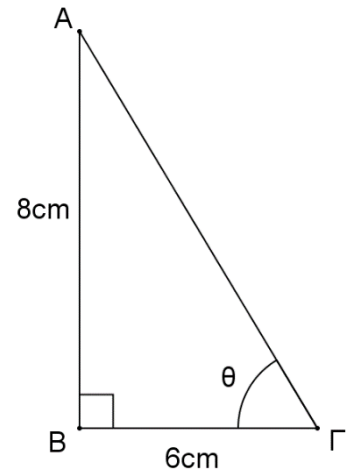
$$2x + 3\psi = 7$$

- 5) Δίνονται τα σημεία $A(3, -1)$ και $B(5, 3)$. Αν το σημείο M είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB, να βρείτε:

α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB.

β) Τις συντεταγμένες του σημείου M.

- 6) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\widehat{B} = 90^\circ$) με $B\Gamma = 6\text{cm}$ και $AB = 8\text{cm}$.
Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ (ημθ, συνθ και εφθ).



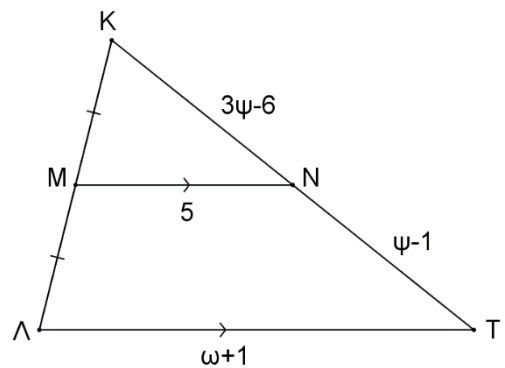
- 7) Να λύσετε την εξίσωση:

$$5x^2 - 4x - 1 = 0$$

- 8) Να κάνετε τις πράξεις (η απάντηση να δοθεί στην πιο απλή μορφή):

$$\frac{2x}{x^2 - 25} - \frac{1}{x - 5} - \frac{3}{x^2 + 5x} =$$

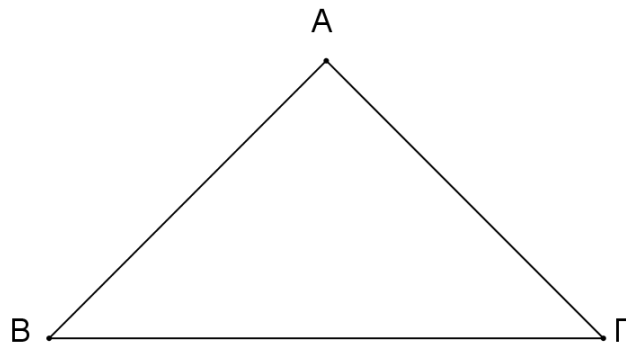
- 9) Να υπολογίσετε τις τιμές των ψ και ω στο πιο κάτω σχήμα. Να δικαιολογήσετε όλες σας τις απαντήσεις.



10) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στην προέκταση της AB προς το A σημειώστε τμήμα AD και στην προέκταση της $A\Gamma$ προς το A σημειώστε τμήμα AE έτσι ώστε $AE=AD$. Αν M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να δείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $\triangle BDM$ και $\triangle GEM$ είναι ίσα. (μον. 4)

β) Το τρίγωνο $\triangle EM\Delta$ είναι ισοσκελές. (μον. 1)



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Να λύσετε την εξίσωση.

$$\frac{3}{x^2 - 3x + 2} + 4 = \frac{2x}{x - 1} - \frac{x + 1}{2 - x}$$

2) Δίνονται οι πιο κάτω παραστάσεις:

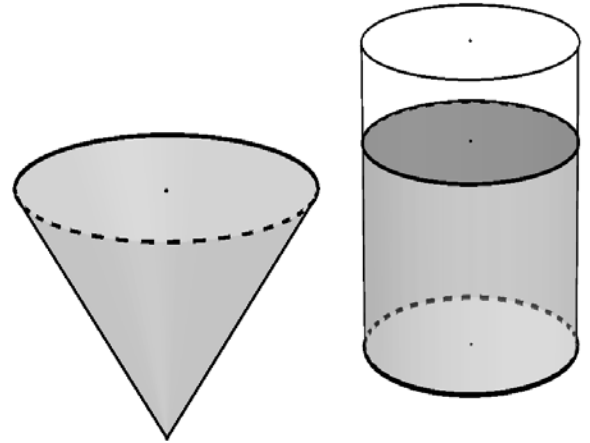
$$\Pi = \frac{\alpha^2 - 2\alpha + 1}{\alpha^3 - \alpha^2} : \frac{\alpha^2 + \alpha - 2}{\alpha^2 + 2\alpha} \quad \text{και} \quad T = 1 - \frac{2}{\alpha} \quad \text{με} \quad \alpha \neq -2, \quad \alpha \neq 0, \quad \alpha \neq 1$$

α) Να γράψετε την παράσταση Π στην πιο απλή της μορφή. (μον. 5,5)

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{T}{\Pi} = \alpha - 2$ (μον. 2,5)

γ) Να βρείτε το ανάπτυγμα $\left(\frac{T}{\Pi}\right)^3$ (μον. 2)

- 3) Ένα ντεπόζιτο έχει σχήμα κώνου με εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $E_k = 156\pi \text{ m}^2$ και γενέτειρα $\lambda = 13\text{m}$. Το ντεπόζιτο ήταν γεμάτο με νερό. Για σκοπούς συντήρησης το νερό αφαιρέθηκε από τον κώνο και μεταφέρθηκε σε ένα άλλο ντεπόζιτο σχήματος κυλίνδρου. Το ύψος του νερού μέσα στον κύλινδρο είναι 15m. Να υπολογίσετε την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου.



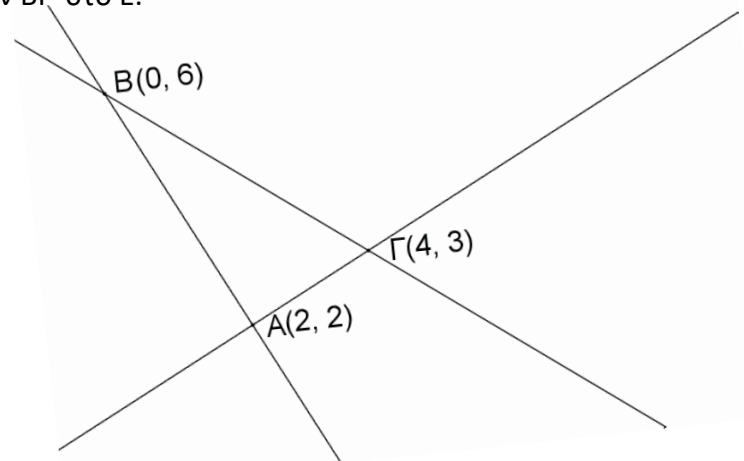
- 4) Στο σχήμα δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με κορυφές $A(2, 2)$, $B(0, 6)$ και $\Gamma(4, 3)$. Η ευθεία $B\Gamma$ έχει εξίσωση $B\Gamma: 3x + 4y = 24$. Στην προέκταση της $A\Gamma$ να σημειώσετε το σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Gamma = \Gamma\Delta$ και από το Δ να φέρετε ευθεία ε_1 παράλληλη προς την AB . Η ευθεία ε_1 τέμνει την $B\Gamma$ στο E .

α) Να δείξετε ότι $AB \perp A\Gamma$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .

γ) Αν το Δ έχει συντεταγμένες $(6, 4)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του E .

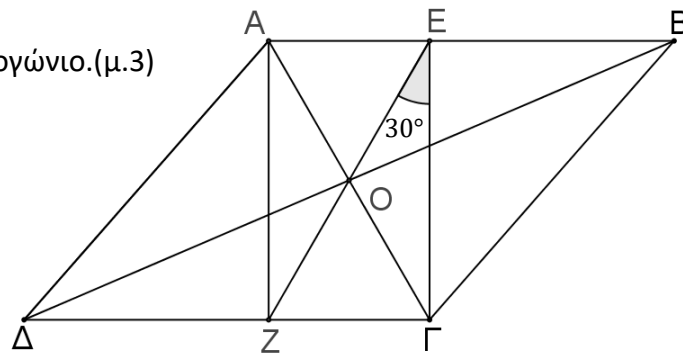


5) Στο σχήμα δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με κέντρο O . Από το A έχουμε φέρει την τμήμα AZ τέτοιο ώστε $AZ \perp \Delta\Gamma$ ενώ η ZE περνά από το O .

α) Να δείξετε ότι $OZ = OE$ (μ.4)

β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma E$ είναι ορθογώνιο. (μ.3)

γ) Αν $\widehat{Z\Gamma E} = 30^\circ$ να δείξετε ότι το τρίγωνο $ZO\Gamma$ είναι ισόπλευρο. (μ.3)



ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ΄

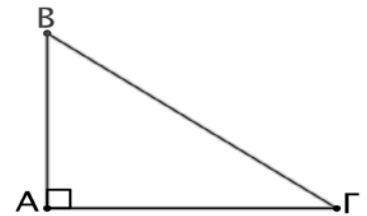
ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

α) $(x + 3)^2 =$

β) $(x + 4)(x - 4) =$

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), δίνεται ότι $\sin B = \frac{5}{13}$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu B$ και $\epsilon\phi B$



3. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις $\alpha = 7\text{ m}$, $\beta = 6\text{ m}$ και $\gamma = 10\text{ m}$. Να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και

β) τον όγκο του ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου.

4. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$5x - 6y = 28$$

$$2x + 3y = -5$$

5. Να λύσετε την εξίσωση: $4x^2 + 3x - 1 = 0$

6. Να αναλύσετε τα πιο κάτω πολυώνυμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

α) $7xy + 7x\omega =$

β) $x^2 - 25 =$

γ) $x^2 - x - 12 =$

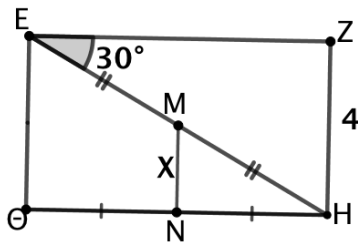
δ) $x^3 + 6y - 2x^2 - 3xy =$

7. Δίνεται ΕΖΗΘ ορθογώνιο. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία που δίνονται στο σχήμα να υπολογίσετε:

α) την τιμή της διαγωνίου ΕΗ.

β) την τιμή του χ .

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

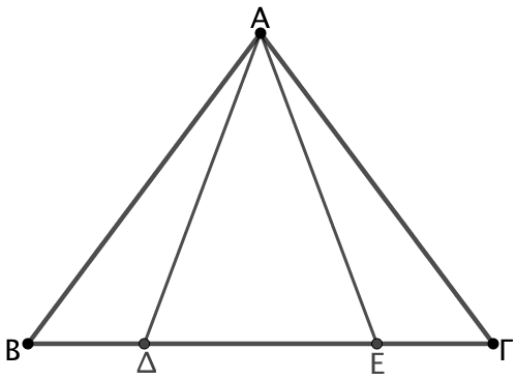


8. Να κάνετε τις πράξεις: $\left(\frac{x^3 - x}{x^2 - 4} \cdot \frac{x+3}{x} \right) : \left(\frac{1}{3+x} + \frac{2-2x}{x^2-9} \right) =$

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και ΒΔ = ΓΕ, να δείξετε ότι:

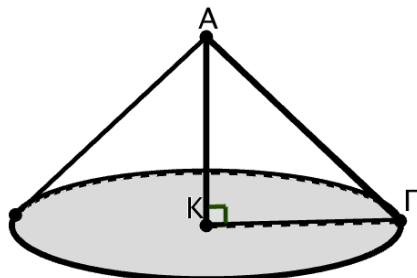
α) ΑΔ = ΑΕ

β) Τα μέσα Κ και Λ των πλευρών ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, ισαπέχουν από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.



10. Δίνεται κώνος με γενέτειρα $\lambda = 30\sqrt{2}m$ και $\hat{K\hat{A}\hat{\Gamma}} = 45^\circ$.

α) Να υπολογίσετε την ακτίνα (R) και το ύψος (v) του κώνου.



β) Αν $R = 30m$ και $v = 30m$ να υπολογίσετε:

i) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου.

ii) Τον όγκο του κώνου.

γ) Αν ο συγκεκριμένος κώνος περιέχει μέσα κρασί και θέλουμε να αδειάσουμε το περιεχόμενό του σε κυλινδρικά δοχεία με διάμετρο $10m$ και ύψος $6m$, να βρείτε πόσα κυλινδρικά δοχεία θα χρειαστούμε.

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{5x^2}{x-2} + \frac{4x}{3-x} = \frac{x^2(4x-13)}{x^2-5x+6}$

2α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\alpha(\alpha - 3\beta)^2 + \beta(\beta - 3\alpha)^2 = (\alpha + \beta)^3$

β) Αν για τους αριθμούς x και y ισχύει η σχέση: $x^4 - 2y^2 = x^2(y^2 - 2)$, να δείξετε ότι:
είτε $x = y$ είτε $x = -y$.

3. Το στερεό του πιο κάτω σχήματος, αποτελείται από ορθό τετραγωνικό πρίσμα με ακμή βάσης $16cm$ και κανονική τετραγωνική πυραμίδα με παράπλευρο ύψος $17cm$. Το ύψος του πρίσματος είναι διπλάσιο από το ύψος της πυραμίδας. Να υπολογίσετε:

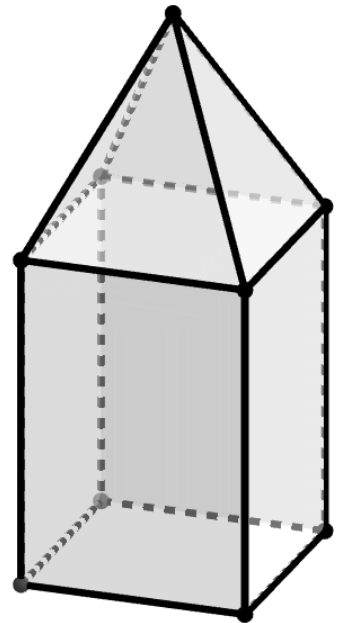
α i) Πόσες κορυφές και πόσες ακμές έχει το στερεό.

Κορυφές: _____, Ακμές: _____

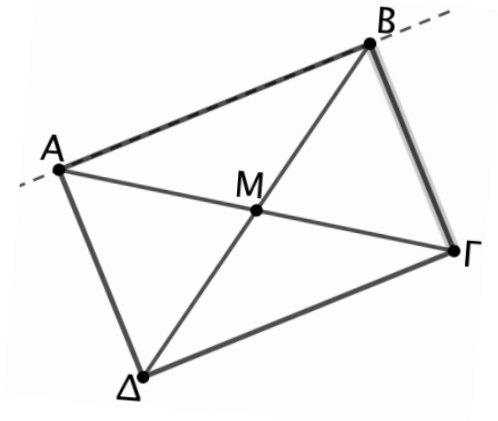
ii) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

iii) Τον όγκο του στερεού.

β) Θέλουμε να βάψουμε την εξωτερική επιφάνεια του στερεού με μπογιά. Αν το κάθε κουτί μπογιάς στοιχίζει €14 και είναι αρκετό για να βάψουμε $500 cm^2$, να υπολογίσετε το κόστος βαφής του στερεού.



4. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ με συντεταγμένες κορυφής $\Gamma(16,12)$ και σημείου τομής των διαγωνίων $M(8,13)$. Η πλευρά AB βρίσκεται πάνω στην ευθεία $x - 2y = -28$.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής A .
 - Την εξίσωση της ευθείας που βρίσκεται η πλευρά $\Gamma\Delta$.
 - Την εξίσωση της ευθείας που βρίσκεται η πλευρά $B\Gamma$.
 - Το μήκος της διαγωνίου $B\Delta$.
 - Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\kappa^2 - 7)x + 5$ και $\varepsilon_2: 2y + x = 1$. Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι κάθετες, να υπολογίσετε τις τιμές του κ .



5. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$) και AM διχοτόμος. Στην προέκταση της διαμέσου $M\Delta$ του τριγώνου $AM\Gamma$, παίρνουμε σημείο E έτσι ώστε $M\Delta = \Delta E$.
- Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AM\Gamma E$ είναι τετράγωνο.
 - Αν H το μέσο του AB , να δείξετε ότι $AHMD$ είναι ρόμβος.

Τάξη: Γ ' Γυμνασίου

Μάθημα: Μαθηματικά

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(a + 2)^2 =$

(β) $(x - 3) \cdot (x + 3) =$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις

(α) $5x + 5\psi =$

(β) $16 - x^2 =$

3. Να υπολογίσετε τον όγκο κύβου ακμής $a=3\text{cm}$.

4. Το συγκρότημα που φαίνεται στην εικόνα βρίσκεται στην Λεμεσό. Είναι το ψηλότερο κτίριο στην Κύπρο. Όταν οι ακτίνες του ήλιου πέφτουν υπό γωνία 60° , όπως φαίνεται στο σχήμα, η σκιά του (AB) έχει μήκος 100m. Να βρείτε το ύψος (ΑΓ) του κτιρίου αυτού.
 (Δίνονται $\eta\mu 60^\circ = 0,866$ $\sigma\upsilon\nu 60^\circ = 0,5$ και $\epsilon\phi 60^\circ = 1,732$)



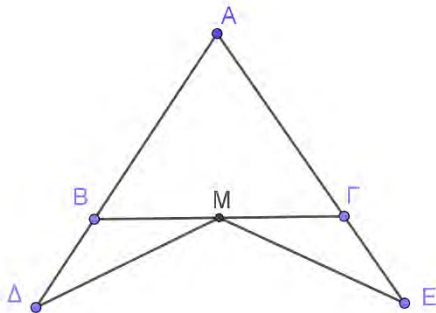
5. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

i. Σε κάθε παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές είναι ίσες	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
ii. Οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι ίσες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
iii. Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν έχει τρεις γωνίες ορθές.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
iv. Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
v. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο οι διαγώνιοι του διχοτομούν τις γωνίες του.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

6. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: \psi = 7\chi + 6$ και $\varepsilon_2: \psi = (2\mu + 3)\chi - 9$ είναι παράλληλες, να βρείτε την τιμή του μ .

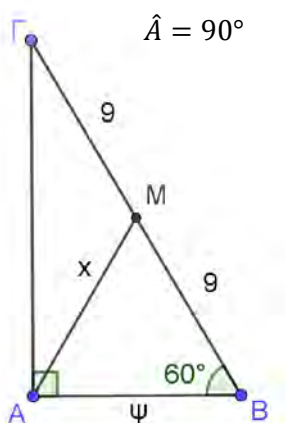
7. Να λύσετε την εξίσωση: $3\chi^2 - 7\chi + 2 = 0$.

8. Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με AB=ΑΓ. Το Μ είναι μέσο του ΒΓ. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB προς το Β και ΑΓ προς το Γ, παίρνω ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΓΕ αντίστοιχα, τέτοια ώστε ΒΔ=ΓΕ. Να δείξετε ότι ΜΔ=ΜΕ.



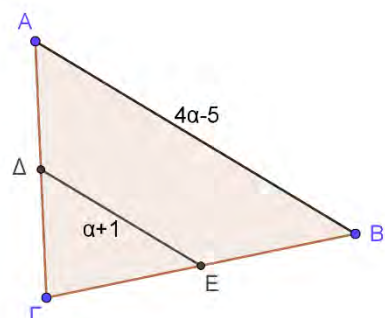
9. Στα πιο κάτω σχήματα να βρείτε τα χ , ψ και α . Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

(α) ABΓ ορθογώνιο



(β) Δ μέσο του ΑΓ

Ε μέσο του ΒΓ



10. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{4}{x-3} - \frac{1}{x+3}\right) \div \frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 9} =$$

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β' .
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x-7}{x^2-5x+4} - \frac{1}{4-x} = \frac{x-3}{x^2-x}$$

(β) Αν $\alpha + \beta = -5$ και $\alpha \cdot \beta = 6$ να αποδείξετε ότι:

i. $\alpha^2 + \beta^2 = 13$

ii. $(2\alpha + 1)^2 + (2\beta + 1)^2 + 10(\alpha + \beta) = -16$

2. (α) Να λύσετε το σύστημα:

$$\frac{2x}{5} - \frac{\psi}{3} = \frac{8}{3}$$

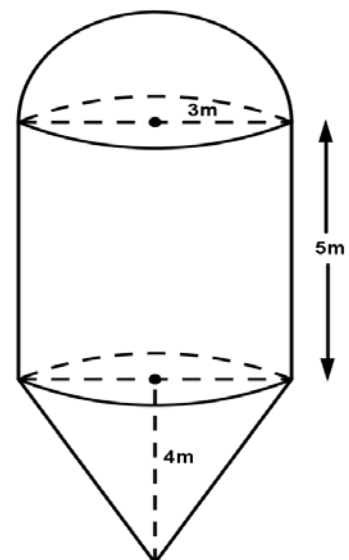
$$x = 2(\psi + 1)$$

(β) Τα ημερομίσθια 10 οικοδόμων και 3 εργατών είναι €295. Αν κάθε οικοδόμος παίρνει για 3 ημέρες όσα παίρνει κάθε εργάτης για 5 μέρες, να βρείτε το ημερομίσθιο του καθενός.

3. Η διπλανή κατασκευή έχει για οροφή ημισφαίριο ακτίνας 3m και στο κάτω μέρος του κυλίνδρου ύψους 5m έχει προσκολληθεί κώνος ύψους 4m.

(α) Να βρείτε τον όγκο της κατασκευής.

(β) Η κατασκευή θα βαφτεί σε όλη της την επιφάνεια με ειδική μεταλλική μπογιά. Αν το βάψιμο κάθε τετραγωνικού μέτρου θα στοιχίσει €3, να βρείτε το συνολικό κόστος. ($\pi \cong 3,14$)



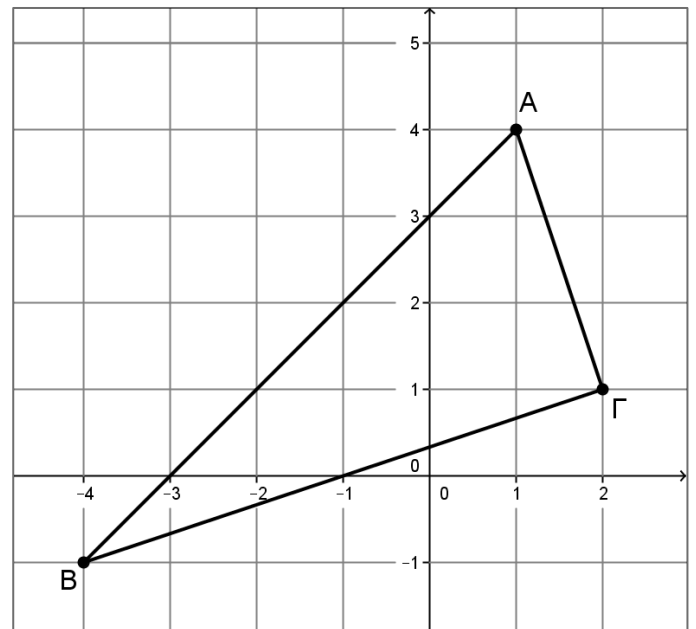
4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,4)$, $B(-4,-1)$ και $\Gamma(2,1)$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία Γ του τριγώνου είναι ορθή. (μονάδες 3)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$. (μονάδες 3)

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $B\Gamma$ του τριγώνου. (μονάδα 1)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου. (μονάδες 3)



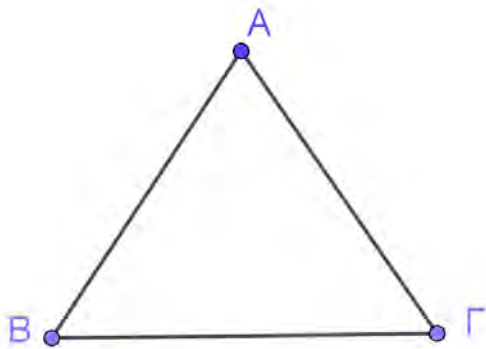
5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και τα ύψη του $B\Delta$ και ΓE . Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $\Gamma E B$ είναι ίσα. (μονάδες 3)

β) $A\Delta = AE$ (μονάδες 2)

γ) $EM = \Delta M$, όπου M το μέσο της $B\Gamma$. (μονάδες 2)

δ) το τετράπλευρο $E\Gamma Z B$ είναι ορθογώνιο, όπου το σημείο Z βρίσκεται στην προέκταση της EM , έτσι ώστε $EM = MZ$. (μονάδες 3)



ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τα 10 θέματα του Μέρους Α΄.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1: Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 10m, πλάτος 8m και ύψος 5m.

Να βρείτε:

- α) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του
- β) τον όγκο του .

ΘΕΜΑ 2: Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(\omega - 9) \cdot (\omega + 9) =$

(β) $(\psi - 5)^2 =$

ΘΕΜΑ 3: Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $2\chi^2 - 4\chi =$

(β) $\alpha\chi - \alpha\psi + 2\chi - 2\psi =$

(γ) $\chi^2 - 16 =$

(δ) $\chi^2 + 5\chi + 6 =$

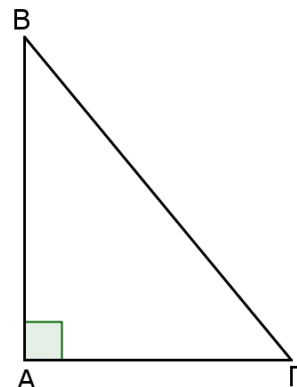
ΘΕΜΑ 4: Να λύσετε το σύστημα:

$$2\chi - 3\psi = 5$$

$$\chi + \psi = 15$$

ΘΕΜΑ 5: Σε ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle A\hat{B}\Gamma$ ($A=90^\circ$) το $\eta\mu B = \frac{6}{10}$. Να βρείτε

$\sigma\upsilon\nu B$, $\epsilon\phi B$ και $\eta\mu\Gamma$.

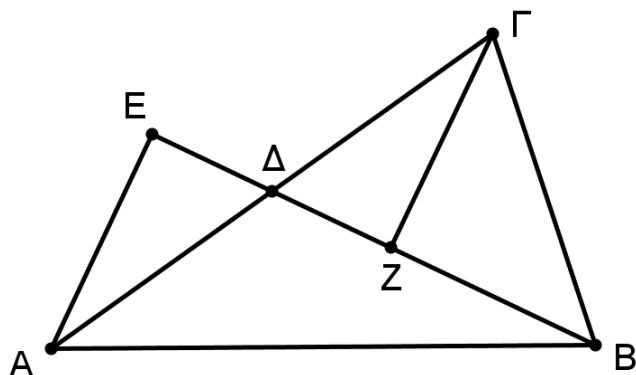


ΘΕΜΑ 6: Στο παρακάτω σχήμα η ΒΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Αν ΓΖ ύψος του τριγώνου ΔΓΒ και ΑΕ ύψος του τριγώνου ΑΒΔ, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A} \hat{\Delta} E = \hat{\Gamma} \hat{\Delta} Z$

β) το ΕΓΖΑ είναι παραλληλόγραμμο

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



ΘΕΜΑ 7: Να χαρακτηρίσετε τις πιο κάτω προτάσεις με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ βάζοντας σε κύκλο τον κατάλληλο χαρακτηρισμό:

(α)	Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο εάν οι διαγώνιοι του διχοτομούνται.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(β)	Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο εάν έχει δύο ορθές γωνίες.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(γ)	Ένα παραλληλόγραμμο του οποίου οι διαγώνιοι είναι κάθετες, είναι ρόμβος.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(δ)	Για να αποδείξω ότι ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο, αρκεί να αποδείξω ότι είναι ορθογώνιο και ρόμβος.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(ε)	Ένα τετράπλευρο του οποίου η μία διαγώνιος διχοτομεί μία γωνία του, είναι ρόμβος.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 8: Να αποδείξετε την ταυτότητα:

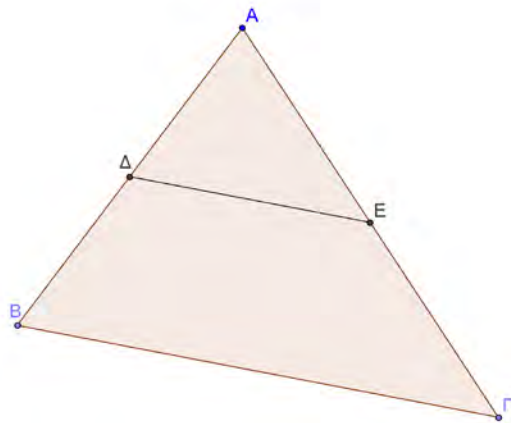
$$\left(\frac{3}{\psi} + \psi\right)^2 - 12\psi^2 - \left(\frac{3}{\psi} - \psi\right)^2 = -12(\psi - 1) \cdot (\psi + 1)$$

ΘΕΜΑ 9: Να λύσετε το πιο κάτω πρόβλημα με **σύστημα εξισώσεων**:

Ο Γιώργος και η Έλενα έχουν συνολικά €180. Η Έλενα έχει €40 λιγότερα από τα τριπλάσια χρήματα του Γιώργου. Να βρείτε πόσα χρήματα έχει ο καθένας.

ΘΕΜΑ 10: Στο πιο κάτω τρίγωνο $\Delta E \parallel B\Gamma$ και Δ μέσο της AB . Αν $AD = 4\text{ cm}$, $AB = \chi^2 - 5\chi - 6$,

$AE = \psi + 1$ και $E\Gamma = 3\psi - 7$, να βρείτε τις τιμές των χ και ψ (να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τα 5 θέματα του Μέρους Β΄.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

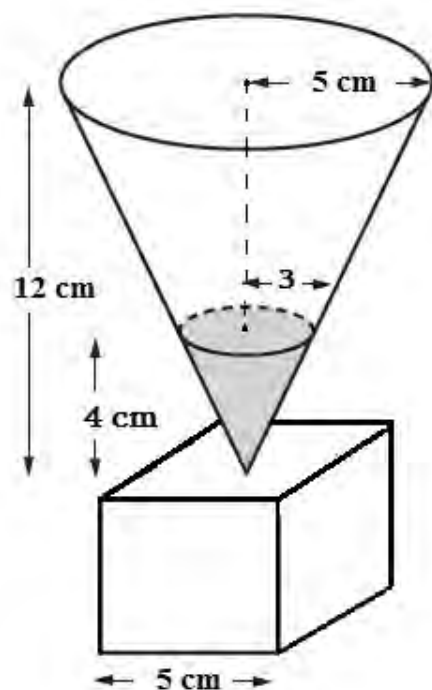
ΘΕΜΑ 1: Να λύσετε την κλασματική εξίσωση:

$$\frac{\chi - 1}{\chi} - \frac{2}{\chi + 1} = \frac{\chi + 3}{\chi^2 + \chi}$$

ΘΕΜΑ 2: Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα δοχείο-κύπελλο νερού.

Το δοχείο αποτελείται από έναν ανοιχτό κώνο και έναν κύβο στον οποίο είναι στερεωμένος ο κώνος. Ο κώνος έχει ακτίνα 5 cm και ύψος 12 cm και ο κύβος έχει ακμή 5 cm .

(α) Να υπολογίσετε την ολική εξωτερική επιφάνεια του δοχείου.
(μον. 6)



(β) Στο δοχείο υπάρχει νερό που φτάνει σε ύψος τα 4 cm . Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού που χρειάζεται για να γεμίσει πλήρως το δοχείο.

(μον. 4)

ΘΕΜΑ 3: Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) με ύψος AD και E μέσο της AB . Φέρουμε την DE και την προεκτείνουμε κατά τμήμα $EZ=DE$. Να δείξετε ότι:

(α) το τετράπλευρο $AZD\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

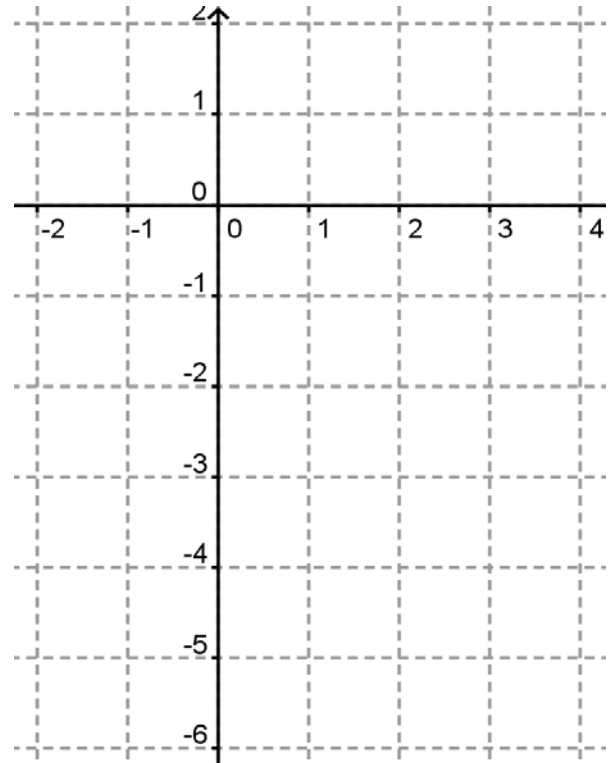
(β) το τετράπλευρο $AZB\Delta$ είναι ορθογώνιο.

ΘΕΜΑ 4: Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2, -5)$, $B(-1, -4)$, $\Gamma(1, -3)$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΓD του τριγώνου.



ΘΕΜΑ 5: (α) Αν $A = \frac{2x}{x^2+1}$ και $B = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ να αποδείξετε ότι : $A^2 + B^2 = 1$

(β) Στηριζόμενοι στο ερώτημα (α) να αποδείξετε ότι οι αριθμοί 1 , $\frac{200}{10001}$ και $\frac{9999}{10001}$ αποτελούν μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 Θέματα.
Κάθε Θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1: Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(\beta + 3)^2 =$

(β) $(4x - 7)(4x + 7) =$

ΘΕΜΑ 2: Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα εξισώσεων:

$$3x - y = -11$$

$$4x + 3y = 7$$

ΘΕΜΑ 3: Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

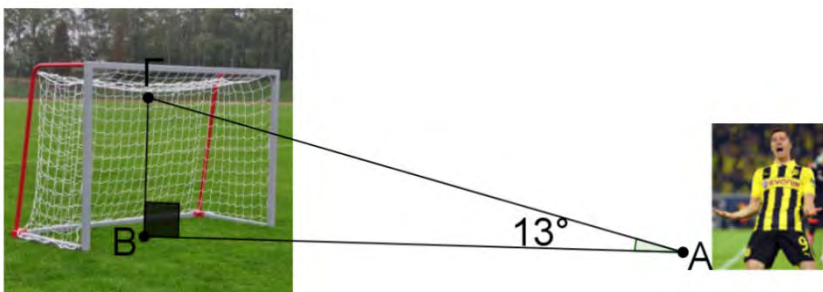
(α) $4x^2y - 16xy =$

(β) $9\omega^2 - 4x^2 =$

(γ) $x^2 - 9x + 18 =$

(δ) $2ax - x\beta + y\beta - 2ay =$

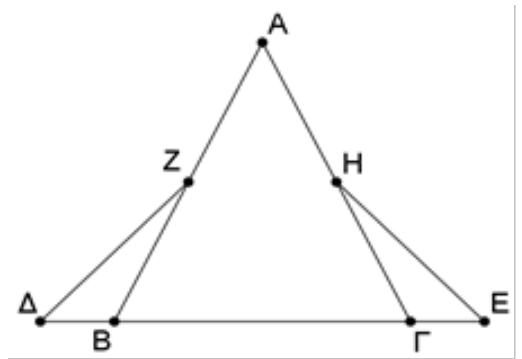
ΘΕΜΑ 4: Ο Λεβαντόφσκι καλείται να εκτελέσει ένα πέναλτι για την ομάδα του, Μπάγιερν Μονάχου. Βρίσκεται στο σημείο Α, το οποίο απέχει από το τέρμα απόσταση $AB = 11\text{m}$. Εκτελεί το πέναλτι με γωνία 13° και πετυχαίνει γκολ. Να βρείτε το ύψος ΒΓ στο οποίο έφθασε η μπάλα. (Η απάντησή σας να δοθεί με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου.)



ΘΕΜΑ 5: Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 + 3x - 9 = 0$

ΘΕΜΑ 6: Στο διπλανό σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με $B\Delta$ και ΓE ίσες προεκτάσεις της $B\Gamma$ και Z, H είναι τα μέσα των AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔBZ και $E\Gamma H$ είναι ίσα.

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)



ΘΕΜΑ 7: Να γίνουν οι πράξεις: ($x \neq -2, x \neq -1, x \neq 0$)

$$\left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) : \frac{4x+12}{x^3 + 3x^2 + 2x} =$$

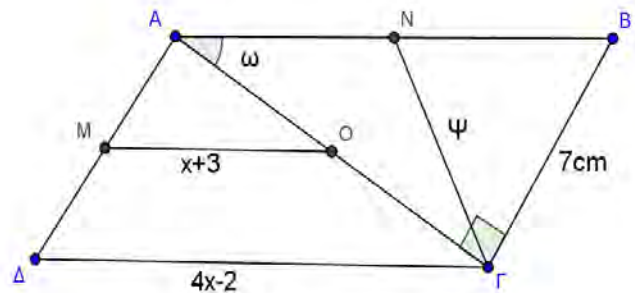
ΘΕΜΑ 8: Δίνονται δύο ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Το πρώτο έχει πλάτος $(x - 6)$ cm, μήκος $(x + 6)$ cm και ύψος 2 cm. Το δεύτερο έχει πλάτος 1 cm, μήκος $(x - 6)^2$ cm και ύψος $(x + 2)$ cm. Να αποδείξετε ότι ο συνολικός όγκος των δύο ορθογώνιων παραλληλεπιπέδων είναι ίσος με $V_{\text{ολ}} = x(x - 2)(x - 6)$.

ΘΕΜΑ 9: Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Τα σημεία M και O είναι τα μέσα των πλευρών AD και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν $\hat{A\Gamma B} = 90^\circ$, N μέσο της AB και $B\Gamma = 7$ cm να υπολογίσετε:

(α) Τις τιμές των x, ψ . (μ. 4)

(β) Τη γωνία ω . (μ. 1)

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.)

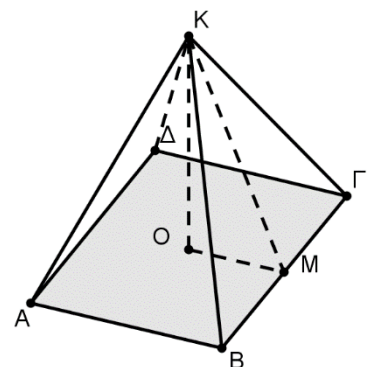


ΘΕΜΑ 10: Μια βιομηχανία συσκευάζει παγωτά σε χάρτινα κουτιά που έχουν σχήμα κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας. Η βάση της πυραμίδας έχει ακμή ίση με 6 cm και παράπλευρο ύψος $KM = 5$ cm.

Να υπολογίσετε:

(α) Την επιφάνεια του χαρτιού που χρειάζεται για την κατασκευή 1000 τέτοιων κουτιών. (μ. 3)

(β) Πόσα λίτρα παγωτό χρειάζεται για να γεμίσουν τα 1000 κουτιά. (1 λίτρο = 1000 cm^3) (μ. 2)



ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τα 5 Θέματα.

Κάθε Θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1: Κυλινδρική κανάτα ακτίνας 6cm περιέχει ποσότητα γρανίτας, τόση, ώστε να γεμίζει πλήρως 30 ποτήρια σχήματος κώνου, ακτίνας 3cm και ύψους 6cm.

Να βρείτε το αρχικό ύψος της γρανίτας στην κυλινδρική κανάτα.



ΘΕΜΑ 2: (α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2x-1}{x^2-x-12} - \frac{5-x}{x-4} = \frac{6}{x+3}$

(β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $2(2a+1)^3 - (a+2)(4a-1)^2 = 27a$

ΘΕΜΑ 3: Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε μέσο της ΑΔ.

Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΕΔ.

(α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΕΓΖ είναι ισοσκελές.

(μον. 4)

(β) Να δείξετε ότι το ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.

(μον. 3)

(γ) Αν προεκτείνουμε την ΓΔ κατά τμήμα ΔΗ = ΓΔ, να δείξετε ότι το ΕΓΖΗ είναι ρόμβος.

(μον. 3)

ΘΕΜΑ 4: (α) Αν a, β είναι αντίστροφοι αριθμοί, δηλαδή ισχύει $a \cdot \beta = 1$, να δείξετε ότι:

$$\frac{\frac{a^2}{\beta} - \frac{\beta^2}{a}}{\frac{\beta}{a} - \frac{a}{\beta}} \cdot \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} \right) + 1 = (a + \beta)^2$$

(β) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(i) $a^2 + 3a - 4 - xa + x =$

(ii) $4a^2 - 4a + 1 - 9b^4 =$

ΘΕΜΑ 5: Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με κορυφές $A(2,5)$, $B(0,2)$ και $\Gamma(3,0)$.

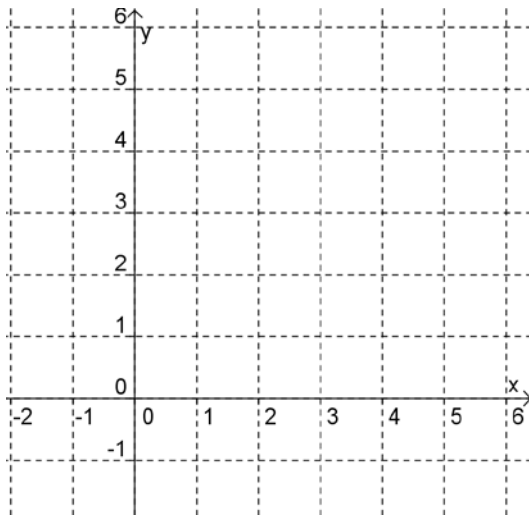
(α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $A\Gamma$.

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου BM .

(ε) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι τετράγωνο.



ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 1 μονάδα.

- 1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x+1)^2 =$

(β) $(x+2) \cdot (x-2) =$

- 2) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

(α) $5\alpha + 5\beta =$

(β) $x^2 - 9 =$

- 3) Κύβος έχει ακμή βάσης 5 cm. Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του

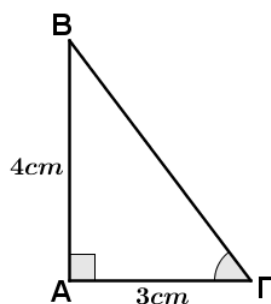
(β) τον όγκο του.

- 4) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned}x + y &= 10 \\ 2x - y &= 11\end{aligned}$$

- 5) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 + 11x + 5 = 0$

- 6) Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$ στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο.

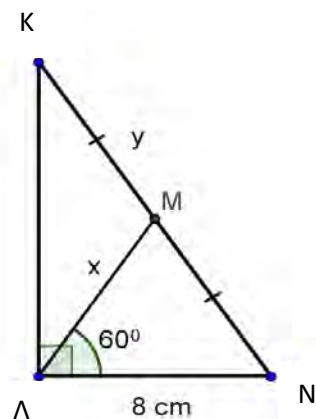
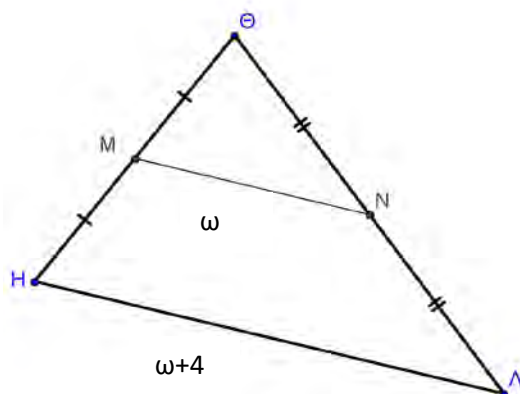


(α) $\eta\mu\Gamma =$

(β) $\sigma\upsilon\nu\Gamma =$

(γ) $\epsilon\phi\Gamma =$

7) Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα χ , y και ω .



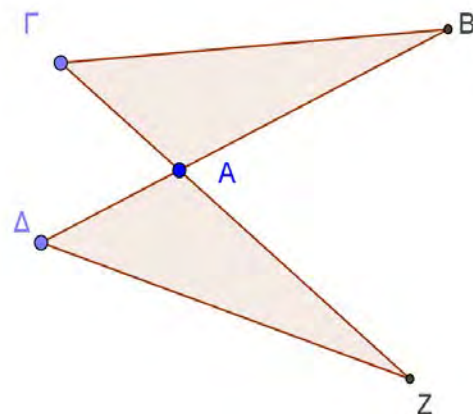
8) Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(10, 9)$. Να βρείτε:

(α) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB

(β) τις συντεταγμένες του μέσου M του AB .

9) Στο διπλανό σχήμα $AG = AD$ και $AB = AZ$.

Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AGB και ADZ είναι ίσα.



10) Να βρείτε την τιμή του α ώστε οι ευθείες $\epsilon_1: \psi = 5\chi - 2$ και $\epsilon_2: \psi = (2\alpha - 1)\chi - 6$ να είναι παράλληλες.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 2 μονάδες.

1) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4x}{x^2 - x} = \frac{4}{x^2 - 1} - \frac{x}{x + 1}$$

2) Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε την απάντηση στην πιο απλή μορφή:

(α) $\frac{x}{10a} \cdot \frac{2a^3}{x^2} =$

(β) $\frac{x}{x-2} + \frac{4-x}{2-x} =$

(γ) $\left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) \div \frac{\alpha+\beta}{\alpha^2\beta^2} =$

3) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

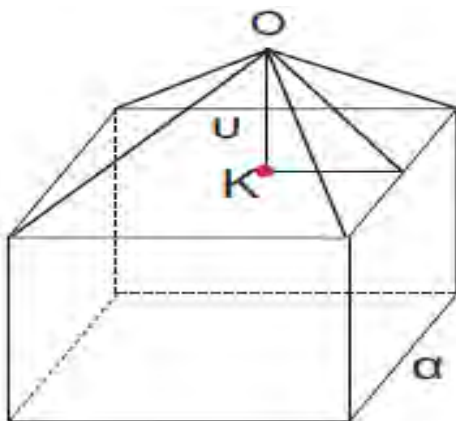
$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha(\alpha - 3\beta)^2 + \beta(\beta - 3\alpha)^2$$

4) Κύλινδρος έχει εμβαδόν κυρτής $E_k = 64\pi \text{ m}^2$. Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι διπλάσιο από την ακτίνα βάσης του να βρείτε:

(α) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του ($E_{ολ}$)

(β) τον όγκο το (V).

5) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας κύβος με όγκο 1000 m^3 και μια πυραμίδα με βάση μια έδρα του κύβου και ύψος 12 m. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού.



ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες. (Σύνολο μονάδων 50)

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 5)^2 =$

(β) $(\alpha - 2)(\alpha + 2) =$

2. Κύβος έχει ακμή $\alpha = 3\text{cm}$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης του επιφάνειας.

3. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

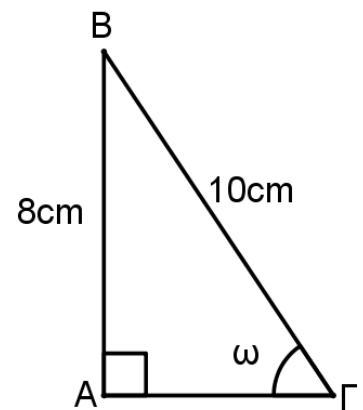
(α) $7x - 7y =$

(β) $x^2 - 16 =$

4. Να χαρακτηρίσετε με **ΣΩΣΤΟ (Σ)** ή **ΛΑΘΟΣ (Λ)** τις πιο κάτω προτάσεις:

(α) Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια.	
(β) Όλοι οι ρόμβοι είναι τετράγωνα.	
(γ) Όλα τα τετράγωνα είναι ορθογώνια και ρόμβοι.	
(δ) Όλα τα παραλληλόγραμμα είναι ρόμβοι.	
(ε) Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν έχει τις διαγώνιες του κάθετες.	

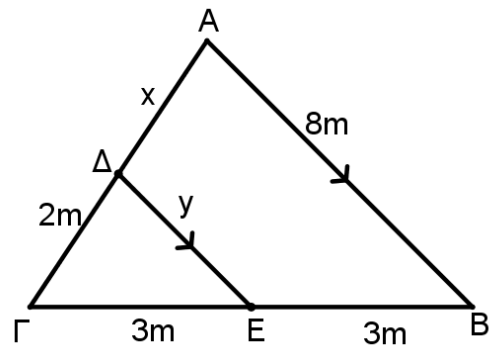
5. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), $B\Gamma = 10\text{cm}$ και $BA = 8\text{cm}$. Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας ω .



6. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$$

7. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - 5x + 3 = 0$

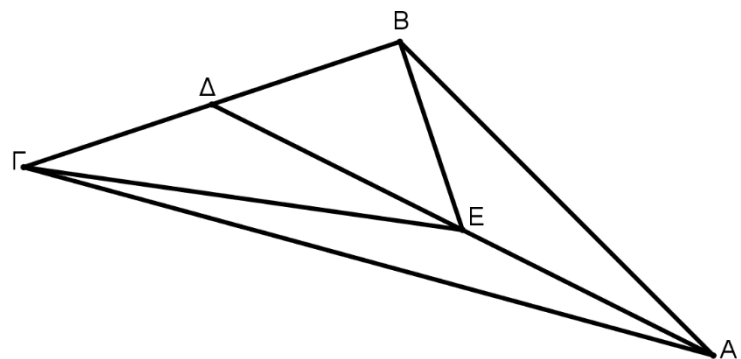
8. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την τιμή του x και y χρησιμοποιώντας το κατάλληλο θεώρημα.



9. Να κάνετε τις πράξεις γράφοντας το αποτέλεσμα στην πιο απλή μορφή.
(Να φαίνονται οι περιορισμοί).

$$\left(\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+2} \right) \cdot \frac{3x-6}{x^2-1} =$$

10. Στο διπλανό σχήμα $AE = E\Delta$ και $BE = B\Delta = \Delta\Gamma$.
Να αποδείξετε ότι $AB = E\Gamma$.



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε(5) ασκήσεις του Μέρους Β'.

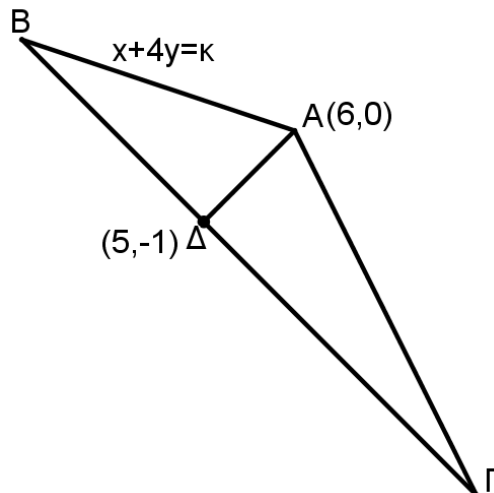
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες. (Σύνολο μονάδων 50)

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2}{x-3} - \frac{x-4}{x^2-9} = \frac{x+1}{x^2+3x}$

2. Στο τρίγωνο ABΓ το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι το ύψος του. Αν $A(6,0)$ και $\Delta(5,-1)$ και η εξίσωση της πλευράς AB: $x+4y=\kappa$. Να βρείτε:

(α) την τιμή του κ

(μον.3)



(β) την κλίση της ΑΔ

(μον.3)

(γ) την εξίσωση της ΒΓ

(μον.4)

3. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1}{\alpha - 1}$ και $B = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha - 1}$, $\alpha \neq -1, \alpha \neq 1$.

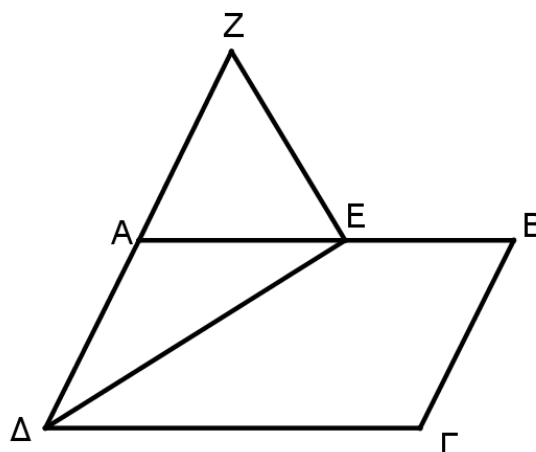
Να αποδείξετε ότι: $A \div B = (\alpha + 1)^3$

4. Στο διπλανό σχήμα, το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Το ευθύγραμμο τμήμα AZ είναι προέκταση του ευθύγραμμου τμήματος AD έτσι ώστε $AD = AZ$.

Η πλευρά ZE είναι κάθετη στην πλευρά ΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $AE = BG$

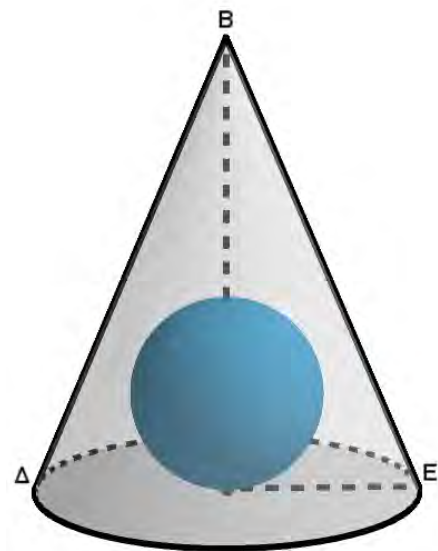


(β) Η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑΔΓ.

5. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα διακοσμητικό αντικείμενο. Το διακοσμητικό αποτελείται από ένα γυάλινο κώνο με ακτίνα βάσης ρ όπου στο εσωτερικό του υπάρχει μια γυάλινη φωτισμένη υδρόγειος σφαίρα ακτίνας R . Το ύψος του κώνου είναι τετραπλάσιο από την ακτίνα της σφαίρας.

(α) Να αποδείξετε ότι η διάφορα των όγκων του κώνου και της σφαίρας δίνεται από την σχέση:

$$\frac{4}{3}\pi R(\rho + R)(\rho - R) \quad (\text{μον.4})$$



(β) Αν η ακτίνα της βάσης του κώνου είναι 5 cm και η επιφάνεια της σφαίρας είναι $36\pi\text{ cm}^2$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφανείας του κώνου. (μον.6)

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΣΤΑΥΡΟΥ ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2017-2018	ΒΑΘΜΟΣ
	Αριθμητικώς:
	Ολογράφως:
	Υπογραφή:
ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2018	
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 04 /06 /2018
ΤΑΞΗ: Γ΄	ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες /120 λεπτά
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.	

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Οι απαντήσεις δίνονται μόνο με **μπλε μελάνι**. (Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.)
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού (υγρού ή ταινίας/Tipp Ex).
3. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από έντεκα (11) σελίδες.

Μέρος Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε το σύστημα:

$$3x + y = 5$$

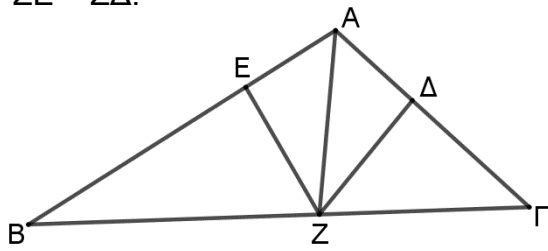
$$x + y = -1$$

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 5)^2 =$

β) $(y + 8)(y - 8) =$

3. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$, AZ διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$ και $AE = A\Delta$. Να δείξετε ότι $ZE = Z\Delta$.

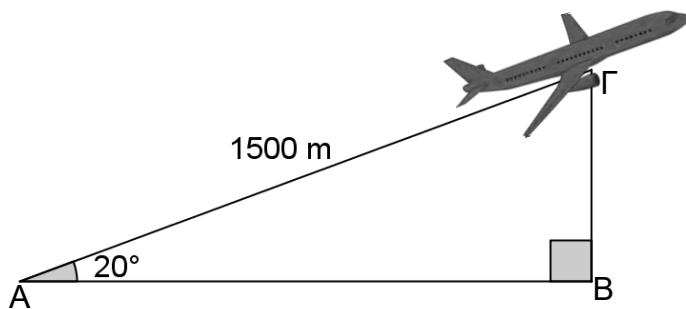


4. Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

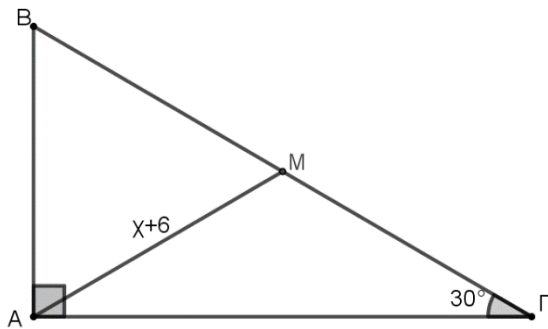
α) $4x^2 + 12x =$

β) $9 - x^2 =$

5. Ένα αεροπλάνο ανεβαίνει υπό γωνία 20° ως προς την οριζόντια διεύθυνση. Να υπολογίσετε σε ποιο ύψος θα έχει φτάσει, όταν θα έχει διανύσει μήκος 1500 m.
($\varepsilon\phi 20^\circ \cong 0,36$, $\eta\mu 20^\circ \cong 0,34$, $\sigma\upsilon\nu 20^\circ \cong 0,94$)



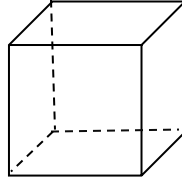
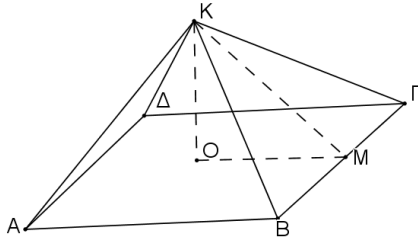
6. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) . Αν $B\Gamma = 16$ cm , AM διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και $AM = (\chi + 6)$ cm, να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AB και την τιμή του χ . (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.)



7. Να κάνετε τις πράξεις:

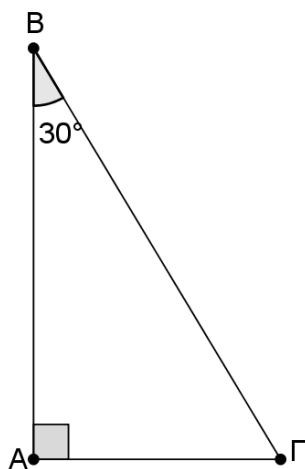
$$\left(\frac{\chi + 1}{\chi^2 - 16} + \frac{2}{\chi - 4} \right) : \frac{\chi + 3}{\chi^2 - 7\chi + 12} =$$

8. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα, με εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 80 cm^2 και πλευρά βάσης 8 cm , έχει όγκο ίσο με τον όγκο ενός κύβου. Να υπολογίσετε την ακμή του κύβου.



9. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (2\kappa^2 + \kappa)x + 7$ και $\varepsilon_2 : y - 21x = 6$ είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τις τιμές του κ .

10. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Το σημείο Δ είναι το μέσο της AB και το E είναι το μέσο της $B\Gamma$. Να φέρετε το $E\Delta$ και να το προεκτείνετε προς το Δ κατά τμήμα $\Delta Z = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZE\Gamma A$ είναι ρόμβος.



Μέρος Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

(7 μονάδες)

$$\frac{x-7}{x^2-5x+4} - \frac{1}{4-x} = \frac{x-3}{x^2-x}$$

β) Να παραγοντοποιήσετε την πιο κάτω παράσταση:

(3 μονάδες)

$$(\alpha+1)(\alpha-2)^2 - 4(\alpha+1) =$$

2. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

(4 μονάδες)

$$(2x+1)^2 + (x-1)^3 - x(x+11) = x(x-2)(x+2)$$

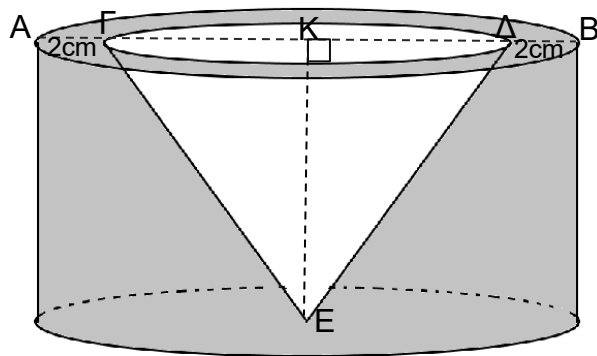
β) Δίνονται οι παραστάσεις $K = \frac{\frac{\alpha^2}{\beta} - \frac{\beta^2}{\alpha}}{\frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}}$ και $\Lambda = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$. (6 μονάδες)

i) Να κάνετε τις πράξεις έτσι ώστε οι παραστάσεις K και Λ να γραφούν στην πιο απλή τους μορφή.

ii) Να δείξετε ότι $K \cdot \Lambda + 1 = \frac{(\alpha + \beta)^2}{\alpha\beta}$

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Να προεκτείνετε την $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma\Delta$ και προς το B κατά τμήμα BE , έτσι ώστε $\Gamma\Delta = BE$. Να αποδείξετε ότι
- α) Το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές .
 - β) Οι αποστάσεις του μέσου M της πλευράς $B\Gamma$ από τις πλευρές AD και AE είναι ίσες.

4. Η πιο κάτω ξύλινη κατασκευή αποτελείται από ένα κύλινδρο, από τον οποίο αφαιρέθηκε ένας κώνος. Η διάμετρος AB της βάσης του κυλίνδρου είναι 16 cm και το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με το ύψος του κώνου. Τα σημεία Γ και Δ είναι σημεία της AB , έτσι ώστε $A\Gamma = B\Delta = 2\text{ cm}$. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι ίσο με $60\pi\text{ cm}^2$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που απομένει μετά την αφαίρεση του κώνου. (Να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π .)



5. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές τα σημεία Α(-2, 1), Β(4, 4), Γ(6, 0) και Δ(0, -3).

α) Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ.

β) Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών ΑΒ και ΓΔ.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

δ) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων του ΑΒΓΔ είναι $K\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

ε) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Κ και είναι κάθετη στη ΔΓ.

Η Διευθύντρια

Ελένη Χαπελή

5. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές τα σημεία Α(-2, 1), Β(4, 4), Γ(6, 0) και Δ(0, -3).

α) Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ.

β) Να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών ΑΒ και ΓΔ.

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

δ) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου τομής Κ των διαγωνίων του ΑΒΓΔ είναι $K\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

ε) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Κ και είναι κάθετη στη ΔΓ.

Οι Εισηγήτριες

**Μαίρη Αντωνιάδου
Αθηνά Σιδέρη
Φανή Ιωάννου
Μαργαρίτα Χατζηιωάννου**

Η Διευθύντρια

Ελένη Χαπελή

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1

Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(x - 3)^2 =$

(β) $(x + \omega)(x - \omega) =$

ΘΕΜΑ 2

Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πιο κάτω πολυώνυμα:

(α) $4x + 4\psi - 4\omega =$

(β) $9\alpha^2 - 16\beta^2 =$

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σημεία A(6,8) και B(3,4). Να βρείτε:

(α) Την απόσταση του ευθύγραμμου τμήματος AB.

(β) Τις συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος AB.

ΘΕΜΑ 4

Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών.

$$3x - \psi = 12$$

$$2x + 3\psi = 19$$

ΘΕΜΑ 5

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x(x + 1)(x - 2) = 0$

(β) $x^2 - 3x + 2 = 0$

ΘΕΜΑ 6

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{x\psi^2}{x^2 + 3x - 18} \cdot \frac{4x + 24}{x\psi} =$$

ΘΕΜΑ 7

Να συμπληρώσετε **Σωστό** ή **Λάθος** στις πιο κάτω προτάσεις.

(α) Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο αν έχει τις διαγωνίους του κάθετες.

(β) Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος αν είναι παραλληλόγραμμο και η μια διαγώνιος του διχοτομεί μια γωνιά του.

- (γ) Ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αν οι διαγώνιοι του διχοτομούνται και έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.
- (δ) Ένα τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο αν οι διαγώνιοι του είναι άνισες.
- (ε) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.

ΘΕΜΑ 8

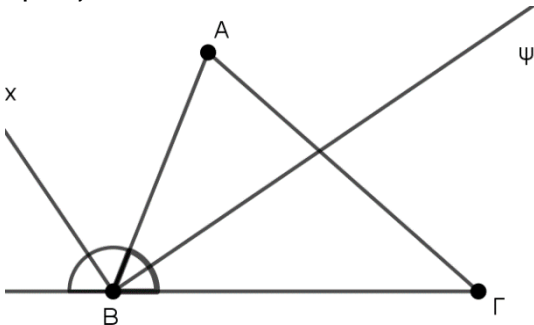
Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $B\Gamma = 12\text{cm}$.

- (α) Να βρείτε τις τιμές των χ , ψ και ω στο διπλανό σχήμα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας. (μον. 3)

- (β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο AHB είναι ισόπλευρο. (μον. 2)

ΘΕΜΑ 9

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Φέρουμε την εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας B . Αν AH η απόσταση του σημείου A από την εσωτερική διχοτόμο της γωνίας B και $A\Theta$ η απόσταση του σημείου A από την εξωτερική διχοτόμο της γωνίας B , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHB\Theta$ είναι ορθογώνιο.



ΘΕΜΑ 10

Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 12cm και ύψος 8cm . Να βρείτε:

- (α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της. (μον. 3)
- (β) Τον όγκο της. (μον. 2)

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\frac{2(\chi+2)}{\chi^2-9} + \frac{1}{3-\chi} = \frac{2}{\chi^2-3\chi}$ (μον. 6)

(β) $3\chi^2 - 8\chi + 5 = 0$ (μον. 4)

ΘΕΜΑ 2

(α) Να κάνετε τις πράξεις:

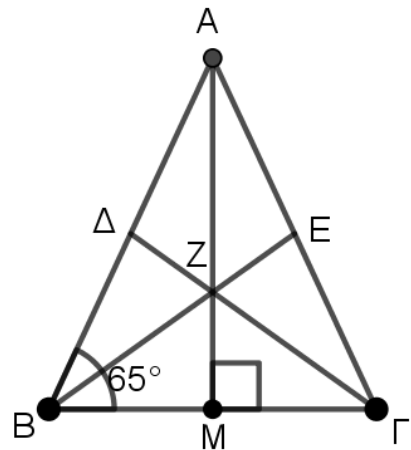
$$\frac{3\chi^2 - 3}{\chi^2 + \chi - 2} : \left(\frac{3}{\chi^2 - 4} + \frac{1}{\chi + 2} \right) =$$

(β) Αν $2\chi + \varphi = -5$, να δείξετε ότι η αριθμητική τιμή της παράστασης
 $A = (2\chi - \varphi)^2 + 7\varphi\chi - \chi(2 - \varphi) + 2\chi$ είναι 25.

ΘΕΜΑ 3

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), ΓΔ και ΒΕ οι διάμεσοι των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, $\widehat{B} = 65^\circ$ και ΑΜ το ύψος του τριγώνου.

(α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες $\widehat{Z\Delta A}$ και $\widehat{Z\hat{E}A}$ είναι ίσες, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.
(μον. 5)



(β) Αν ΑΒ=10cm να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΜ, με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου.
(μ. 3)

$\eta\mu 65^\circ = 0,906$	$\sigma\upsilon\nu 65^\circ = 0,423$	$\epsilon\varphi 65^\circ = 2,145$
----------------------------	--------------------------------------	------------------------------------

(γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
(μον. 2)

ΘΕΜΑ 4

A. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας :

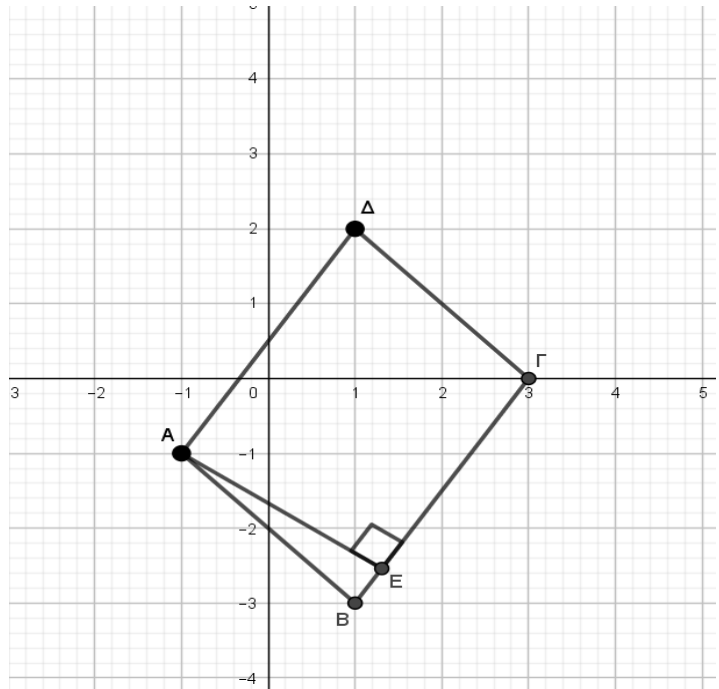
(α) που περνά από τα σημεία $(6, -1)$ και $(3, 2)$

(μον. 1,5)

(β) που περνά από το σημείο $(3, -6)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $3x - y = 5$ (μον. 1,5)

B. Στο πιο κάτω σχήμα το ABΓΔ είναι τετράπλευρο με $AD \parallel BG$. Η πλευρά του AD έχει εξίσωση $\psi = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ και η πλευρά του BG έχει εξίσωση $3x - (\mu - 5)\psi = 9$.

(i) Να βρείτε την τιμή του μ . (μον. 2)



(ii) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ABΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(μον. 3)

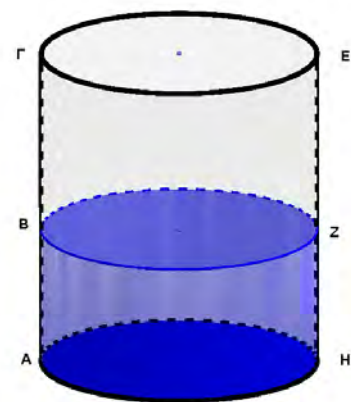
(iii) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους του παραλληλογράμμου AE.

(μον. 2)

ΘΕΜΑ 5

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κυλινδρική δεξαμενή ανοικτή στο πάνω μέρος με εμβαδόν επιφάνειας $30\pi \text{ m}^2$ και ύψος $AG=3,5 \text{ m}$.

α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κυλίνδρου είναι $R=3 \text{ m}$.



β) Το νερό που υπάρχει στη δεξαμενή φτάνει σε ύψος $AB=1,5 \text{ m}$. Αν τοποθετήσουμε στη δεξαμενή 9 σιδερένιους κώνους ακτίνας 1 m και ύψους 3 m , να υπολογίσετε το ύψος στο οποίο θα ανέβει η στάθμη του νερού.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τα 10 θέματα του Μέρους Α΄.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 4)^2 =$

(β) $(\psi + 3) \cdot (\psi - 3) =$

ΘΕΜΑ 2:

Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

(α) $4\alpha + 4\beta =$

(β) $\chi^2 - 25 =$

ΘΕΜΑ 3:

Να υπολογίσετε τον όγκο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 2m, 4m και 5m.

ΘΕΜΑ 4:

Να λύσετε το σύστημα:

$$3x + 5\psi = -1$$

$$2x - 5\psi = -9$$

ΘΕΜΑ 5:

Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 6x - 16 = 0$

ΘΕΜΑ 6:

Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε την απάντηση στην πιο απλή της μορφή:

(α) $\frac{2x}{3\psi} \cdot \frac{\psi^2}{10x\omega} =$

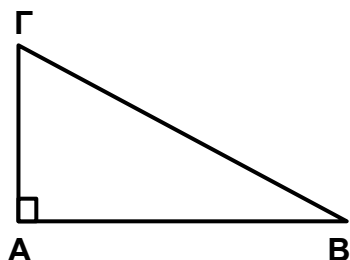
(β) $\frac{2}{x-2} - \frac{3}{x+2} =$

ΘΕΜΑ 7:

Να υπολογίσετε την τιμή του α ώστε η ευθεία $\varepsilon_1: \psi = (\alpha+1)x + 8$ να είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_2: \psi = -3x + 4$.

ΘΕΜΑ 8:

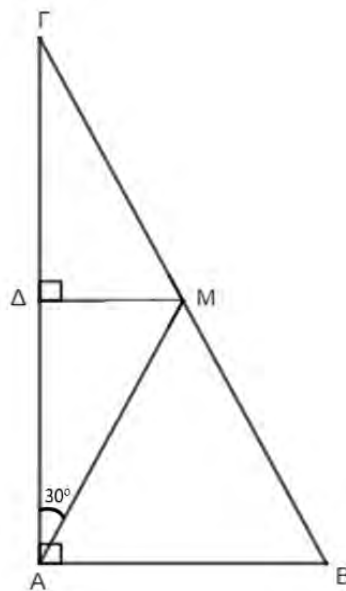
Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) με πλευρές ΑΓ=5cm και ΑΒ=12cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς συνΓ, εφΓ και ημΒ.

**ΘΕΜΑ 9:**

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) με ΒΓ= 8cm. Η ΑΜ είναι η διάμεσος του τριγώνου και $MD \perp AG$. Αν η γωνιά $\hat{\Delta AM}$ είναι ίση με 30° , τότε:

α) Να δείξετε ότι ΑΒ=4cm

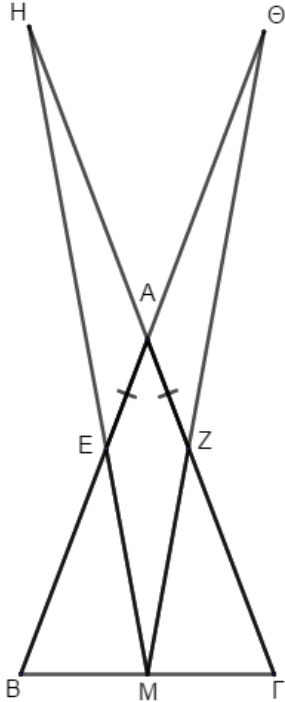
β) Να βρείτε το μήκος της ΜΔ



ΘΕΜΑ 10:**(MON: 2 / 2 / 1)**

Το τρίγωνο ΑΒΓ του πιο κάτω σχήματος είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ. Αν ΑΕ=ΑΖ και Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΒΕΜ και ΓΖΜ είναι ίσα.
- β) Τα τρίγωνα ΑΗΕ και ΑΘΖ είναι ίσα.
- γ) Το τρίγωνο ΗΘΜ είναι ισοσκελές.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τα 5 θέματα του Μέρους Β΄.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x+2}{x-3} - \frac{x+3}{x-1} + 1 = \frac{8}{x^2 - 4x + 3}$

ΘΕΜΑ 2:**(MON: 6 / 4)**

Τα σημεία Α(0,-3), Β(4,-1) και Γ(2,3) είναι κορυφές τριγώνου ΑΒΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι :

(i) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(ii) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και να προσδιορίσετε ποια είναι η ορθή γωνία.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ.

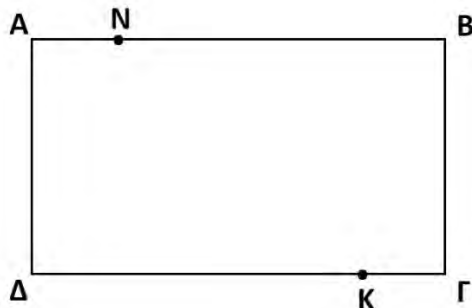
ΘΕΜΑ 3:**(MON: 7 / 3)**

Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ν και Κ των ΑΒ και ΔΓ αντίστοιχα τέτοια ώστε ΑΝ=ΚΓ.

α) Να αποδείξετε :

- i) Τα τρίγωνα ΑΝΔ και ΒΓΚ είναι ίσα.
- ii) Το τετράπλευρο ΝΒΚΔ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Αν Ε,Ζ είναι τα μέσα των ΝΔ και ΚΔ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΝΚΖΕ είναι τραπέζιο.

**ΘΕΜΑ 4:**

α) Να δείξετε ότι :

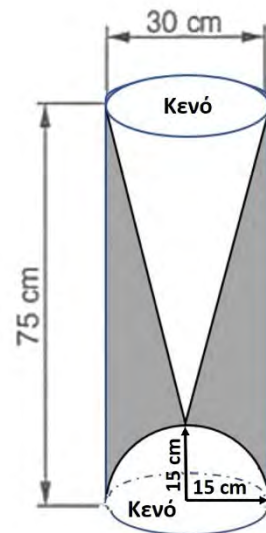
$$\frac{\frac{x^2}{\psi} - \frac{\psi^2}{x}}{\frac{x^2\psi - x\psi^2}{x^2\psi^2}} + x\psi = (x + \psi)^2$$

β) Αν $x - \psi = 2$ να δείξετε ότι : $(x^2 + 1)(\psi^2 + 1) - (x\psi + 1)^2 = 4$

ΘΕΜΑ 5:

Από ένα μεταλλικό κυλινδρικό κομμάτι αφαιρέθηκε με τη βοήθεια ενός ειδικού εργαλείου (τόρνος), ένας κώνος και ένα ημισφαίριο, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που απέμεινε.



ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 4)^2 =$

β) $(3\psi - 2)(3\psi + 2) =$

ΘΕΜΑ 2

Να λύσετε το σύστημα:

$$7x + 4\psi = 2$$

$$3x - 4\psi = 18$$

ΘΕΜΑ 3

Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδό της ολικής επιφάνειας κύβου με ακμή $a = 4 \text{ cm}$.

ΘΕΜΑ 4

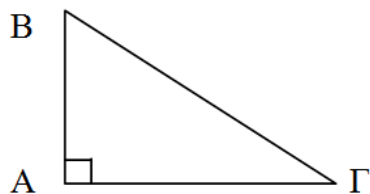
Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $5x - 10x\psi =$

β) $\psi^2 - 100 =$

ΘΕΜΑ 5

Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $\hat{A} = 90^\circ$, $A\Gamma = 12 \text{ cm}$ και $AB = 5 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\sin \hat{B}$, $\eta\mu \hat{B}$ και $\epsilon\varphi \hat{\Gamma}$.



ΘΕΜΑ 6

Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν όλες τις γωνίες τους αντίστοιχα ίσες.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
Οι ευθείες $\psi = 2\chi + 4$ και $3\chi + 6\psi = 2$ είναι μεταξύ τους κάθετες.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
Ένα ισοσκελές αμβλυγώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι ίσο με ένα ισόπλευρο τρίγωνο.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
Αν ένα τραπέζιο έχει τις διαγώνιες του ίσες τότε είναι και ισοσκελές.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 7

Να λυθούν οι εξισώσεις:

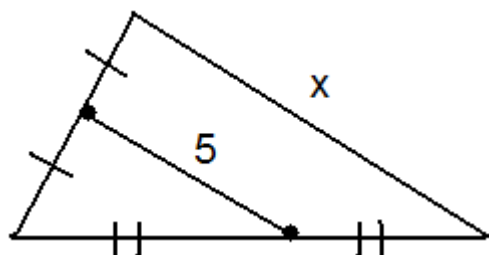
α) $\chi(\chi - 3)(2\chi + 1) = 0$

β) $\chi^2 - \chi = 6$

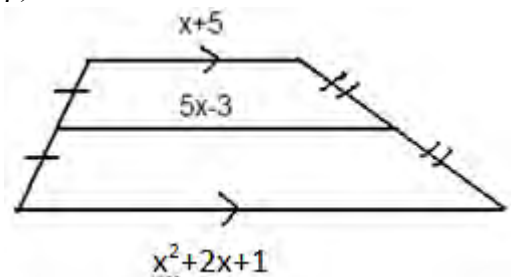
ΘΕΜΑ 8

Να βρείτε τις τιμές του χ στα πιο κάτω:

α)

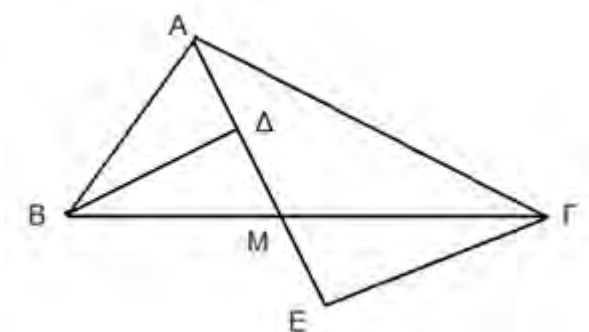


β)



ΘΕΜΑ 9

Στο πιο κάτω σχήμα ΑΜ είναι διάμεσος του τυχαίου τριγώνου ΑΒΓ. Αν ΒΔ και ΓΕ κάθετες στην ΑΕ να αποδείξετε ότι ΒΔ=ΓΕ.



ΘΕΜΑ 10

Αν $\alpha^3\beta - \alpha^2 - \alpha\beta^3 + \beta^2 = 0$ και $\alpha \neq \beta$ να δείξετε ότι οι άνισοι αριθμοί α και β είναι αντίθετοι ή αντίστροφοι.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3\chi^2}{\chi - 4} - \frac{2\chi}{2 - \chi} = \frac{2\chi^3 - 5\chi^2 - 2\chi}{\chi^2 - 6\chi + 8}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) στο οποίο η $\Gamma\Delta$ είναι διπλάσια της AB και η ΔB είναι κάθετη στην $B\Gamma$.

α) Αν το σημείο E είναι το μέσον της $\Gamma\Delta$ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABE\Delta$ είναι ρόμβος.

β) Αν $B\hat{\Delta}\Gamma = 30^\circ$ να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

ΘΕΜΑ 3

α) Αν $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ να δείξετε ότι $(\alpha + 2\beta)^2 + (2\alpha - \beta)^2 = 5$

β) Αν $\chi + \psi = 4$ και $\chi\psi = 3$ να αποδείξετε ότι $\chi^2 + \psi^2 = 10$. Ακολούθως να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παρακάτω παραστάσεων.

i) $\chi^3 + \psi^3 =$

ii) $\sqrt{\frac{(\chi+\psi)^2 + 3\chi\psi}{10(\chi^2 + \psi^2)}} =$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(7,-1)$, $B(0,2)$, $\Gamma(-1,5)$ και $\Delta(6,2)$

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

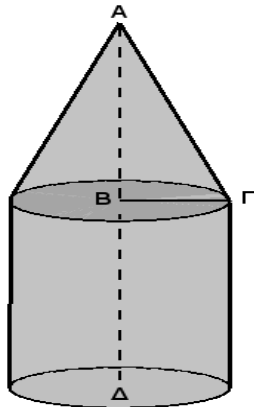
β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου O του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το σημείο Δ και είναι κάθετη με την διαγώνιο $A\Gamma$.

δ) Να υπολογίσετε την τιμή του μ αν η ευθεία $\psi = (\mu + 1)\chi + 4$ είναι παράλληλη με την ευθεία ε .

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται το πιο κάτω στερεό. Αν $ΑΔ=20\text{cm}$, $ΑΓ=8\sqrt{3}\text{cm}$ και $\widehat{ΒΓΑ} = 60^\circ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού, συναρτήσει του π .



ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε **ΟΛΕΣ** τις ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 5)^2 =$

(β) $(x - 7)(x + 7) =$

2. Δίνεται κύβος με όγκο $V = 125 \text{ m}^3$. Να υπολογίσετε:

(α) Την ακμή του κύβου.

(β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κύβου.

3. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $7\alpha\chi + 7\alpha\psi =$

(β) $\chi^2 + 9\chi + 14 =$

(γ) $9\chi^2 - 16 =$

(δ) $\chi^3 - \chi^2 - 9\chi + 9 =$

4. Να λύσετε την εξίσωση: $3\chi^2 + 2\chi - 1 = 0$.

5. Αν $3\beta + \alpha = 4$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = (\alpha - 3\beta)^2 + 12\alpha\beta$.

6. Να δείξετε ότι η παράσταση: $K = \frac{3\chi^2 + 6\chi + 12}{6\chi - 12} \div \frac{\chi^3 - 8}{\chi^2 - 4\chi + 4}$ είναι ανεξάρτητη του χ ($\chi \neq 2$).

7. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται τα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων $B\Gamma = 10 \text{ m}$ και $A\Delta = 3 \text{ m}$ καθώς και τα μέτρα των γωνιών $A = 90^\circ$ και $\Gamma = 30^\circ$.

Να υπολογίσετε:

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB .

(β) Το μέτρο της γωνίας ω (Η απάντησή σας να δοθεί κατά προσέγγιση ακεραίου).



	ημ	συν	εφ
30°	0,5	0,866	0,577
60°	0,866	0,5	1,732
59°	0,857	0,515	1,666
31°	0,515	0,857	0,6

Αν το σύστημα
$$\begin{cases} \psi = (2\alpha - 5\beta)\chi - 15 \\ 3\chi + \psi = 3\beta - 4\alpha \end{cases}$$
 έχει άπειρες λύσεις, να βρείτε τις τιμές των μεταβλητών α και β , ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

8. Να βρείτε τις τιμές του κ ($\kappa \in \mathbb{R}$), ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \kappa(\kappa - 1)^2 x + 5$ και $\varepsilon_2: y = (\kappa - 1)^3 x - 3$ να είναι παράλληλες.
9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$), όπου Δ το μέσο της AG και Z το μέσο της $B\Gamma$. Φέρουμε το $Z\Delta$ και το προεκτείνουμε κατά τμήματα $\Delta H = \Delta Z$.
Να δείξετε ότι:
(α) Το $AH Z B$ είναι παραλληλόγραμμο.
(β) Το $AH \Gamma Z$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε ΟΛΕΣ τις ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

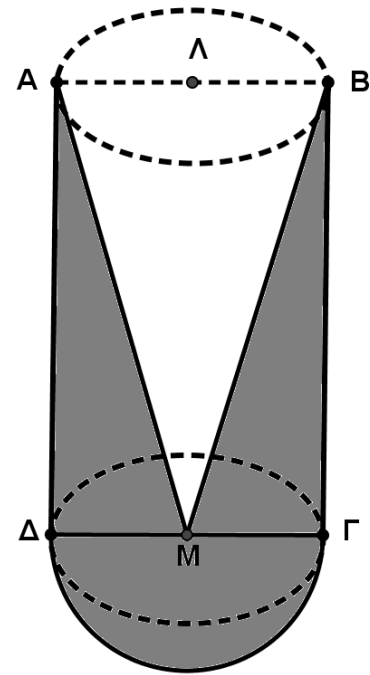
1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3\chi}{\chi^2 - 5\chi} + \frac{5}{10 - 2\chi} = \frac{\chi}{\chi^2 - 2\chi - 15}$$

2. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις πλευρές AG και $B\Gamma$ παίρνουμε τμήματα $\Gamma\Delta$ και ΓE αντίστοιχα, έτσι ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$.
(α) Αν Z τυχαίο σημείο της διχοτόμου ΓH , να δείξετε ότι $Z\Delta = ZE$.
(β) Αν ΔK και $E\Lambda$ είναι οι αποστάσεις των σημείων Δ και E από τις πλευρές $B\Gamma$ και AG αντίστοιχα, να δείξετε ότι $\Delta K = E\Lambda$.



3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται συμπαγής κύλινδρος με ακτίνα βάσης $ΜΓ=R$ και ύψος $ΛΜ=υ$. Από τον κύλινδρο αφαιρείται κώνος με ακτίνα βάσης $ΛΒ=R$ και ύψος $ΛΜ=υ$. Στη συνέχεια στην κάτω βάση του κυλίνδρου προστίθεται συμπαγές ημισφαίριο με ακτίνα $ΜΓ=R$.



- (α) Αν το στερεό που δημιουργείται έχει όγκο $V=66\pi \text{ m}^3$ και $υ = \frac{8}{3}R$, να αποδείξετε ότι $R=3 \text{ m}$ και $υ=8 \text{ m}$.
- (β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας του στερέου που δημιουργείται.

(Η απάντησή σας να δοθεί συναρτήσει του π)

4. Σε παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ προεκτείνουμε την $ΔΑ$ κατά τμήμα $ΑΗ=ΑΔ$. Φέρουμε την διχοτόμο της γωνίας $Δ$ η οποία τέμνει την $ΑΒ$ στο $Ζ$.
- (α) Να δείξετε ότι το $ΔΖΗ$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $ΗΖΔ = 90^\circ$.
- (β) Αν η προέκταση της $ΗΖ$ τέμνει τη $ΔΓ$ στο $Μ$, να δείξετε ότι το $ΔΗΜ$ είναι ισοσκελές τρίγωνο.

5. Δίνεται τετράπλευρο με κορυφές $A(-5,2)$, $B(-1,4)$, $\Gamma(5,2)$ και $\Delta(-7,-4)$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των μέσων E και Z των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι η EZ είναι παράλληλη με τις βάσεις του τραπέζιου.

(γ) Φέρουμε ευθεία BK κάθετη στην $\Gamma\Delta$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $\Delta\Gamma$ και να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου K είναι $(1,0)$.

(δ) Αν το τετράπλευρο $BK\Gamma\Lambda$ είναι τετράγωνο, να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου Λ είναι $(3,6)$.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα του Μέρους Α΄.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x-5)(x+5) =$

(β) $(\alpha-3)^2 =$

2) Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα εξισώσεων με τη μέθοδο αντίθετων συντελεστών:

$$3x + 2y = 8$$

$$x - y = 1$$

3)

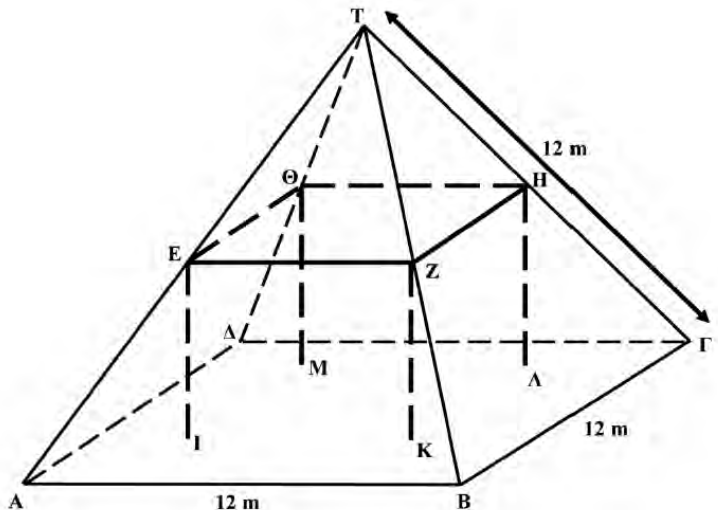
PISA 2000

Στη φωτογραφία βλέπετε μια αγροτική κατοικία που έχει σκεπή σε σχήμα πυραμίδας.



ΑΓΡΟΚΤΗΜΑ

Το παρακάτω σχήμα αναπαριστά τη σκεπή της αγροτικής κατοικίας. Στο σχήμα, αναγράφονται οι πραγματικές διαστάσεις της σκεπής. Η βάση ΑΒΓΔ της σκεπής είναι τετράγωνο.



Τα δοκάρια που υποστηρίζουν τη σκεπή αντιστοιχούν στις ακμές του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ΕΖΗΘΙΚΛΜ. Το Ε είναι το μέσον της ακμής ΑΤ της Πυραμίδας, το Ζ είναι το μέσον της ακμής ΒΤ, το Η είναι το μέσον της ακμής ΓΤ και το Θ είναι το μέσον της ακμής ΔΤ. Όλες οι ακμές της πυραμίδας έχουν μήκος 12m.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της βάσης ΑΒΓΔ της σκεπής.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος της ΕΖ, μιας από τις οριζόντιες ακμές του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.

4) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πιο κάτω πολυώνυμα:

(α) $2x^2 - 4x =$

(β) $x^2 - 49 =$

(γ) $x^2 - 12x + 36 =$

(δ) $ax - 3a - xy + 3y =$

5) Ένα κουτί σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει διαστάσεις 3m, 4m και 6m .

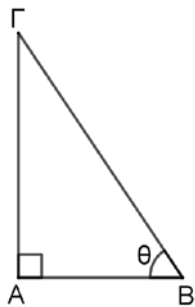
Να υπολογίσετε: (α) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας,

(β) τον όγκο του.

6) Να λύσετε την εξίσωση:

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

7) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται $AG = 12\text{cm}$ και $BG = 13\text{cm}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημθ, συνθ και εφθ.



8) Να βρείτε την τιμή του a ώστε οι ευθείες $\epsilon_1 : 2x + 4y = 5$ και $\epsilon_2 : y = (2a - 8)x - 9$ να είναι κάθετες.

9) Να αποδείξετε ότι ισχύει η πιο κάτω ταυτότητα:

$$(2x - 3)^2 + (x - 2)^3 + x = x(x - 1)^2 + 1$$

10) Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$. Να πάρετε σημεία E και Z πάνω στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $AE = AZ$. Αν M τυχαίο σημείο της διχοτόμου AD , να αποδείξετε ότι $ME = MZ$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα του Μέρους Β'.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

- 1) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

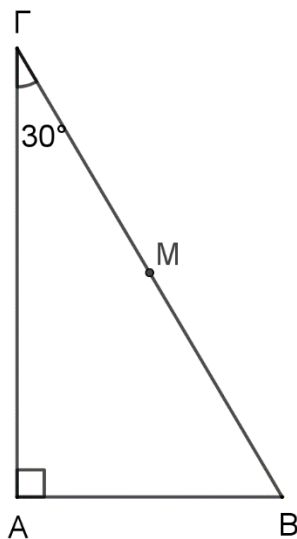
$$\frac{4x}{x-2} + \frac{2x}{3-x} = \frac{x^2 - 2x - 8}{x^2 - 5x + 6}$$

- 2) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $(\hat{A} = 90^\circ)$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Έστω M το μέσο της $B\Gamma$ και Δ το μέσο της BM . Προεκτείνουμε την $A\Delta$ κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$.

(α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AMEB$ είναι παραλληλόγραμμο. (μ.5)

(β) Αν $AB = 6\text{cm}$ να βρείτε την AM και την ΔB . (μ.2)

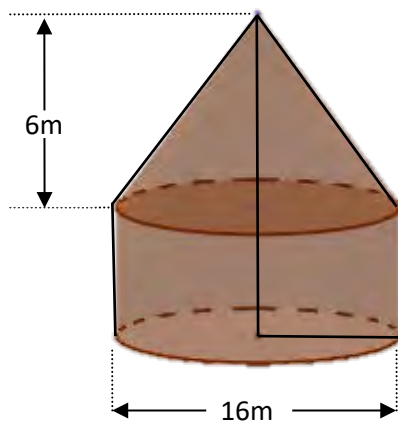
(γ) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AMEB$ είναι ρόμβος. (μ.3)



- 3) Μια εταιρεία σχεδίασε μια κλειστή μεταλλική κατασκευή, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Η κατασκευή αποτελείται από ένα κύλινδρο και ένα κώνο. Η βάση της κατασκευής έχει διάμετρο 16m και το ύψος του κώνου είναι 6m . Ο συνολικός όγκος της κατασκευής είναι $384\pi \text{ m}^3$.

(α) Να δείξετε ότι το ύψος του κυλίνδρου είναι 4m .

(β) Όλη η επιφάνεια της κατασκευής βάφεται με ειδική αντιοξειδωτική μπογιά, η οποία κοστίζει 1 σεντ ανά τετραγωνικό μέτρο. Να υπολογίσετε πόσο θα κοστίσει το βάψιμο της κατασκευής.



4) Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(-1,0)$, $B(2,3)$, $\Gamma(4,1)$ και $\Delta(1,-2)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της διαγώνιου $A\Gamma$.

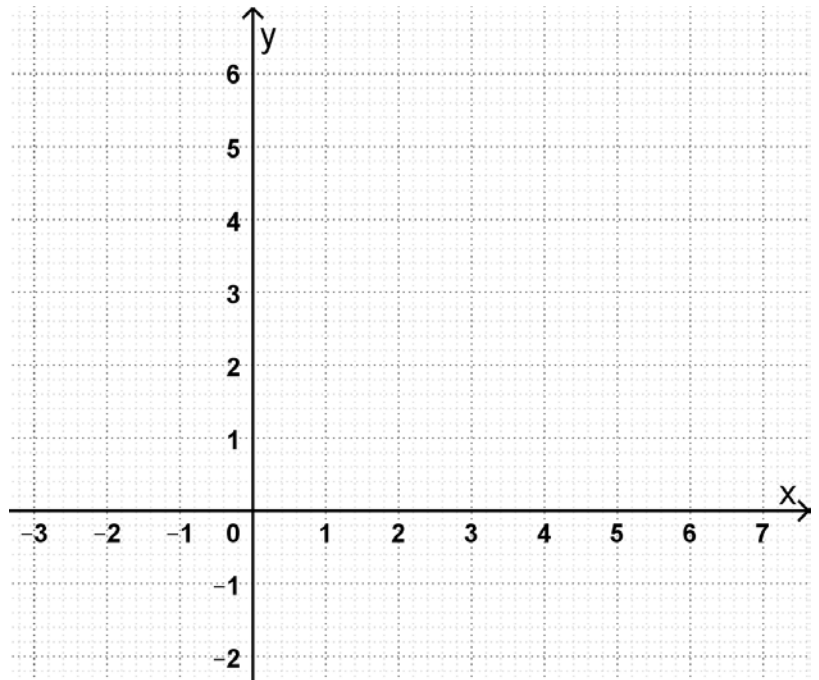
(μ.2)

(β) Να βρείτε την εξίσωση και το μήκος της πλευράς AB .

(μ.4)

(γ) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(μ.4)



5) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Τα σημεία Δ και E βρίσκονται πάνω στη πλευρά $B\Gamma$ τέτοια ώστε $B\Delta=\Gamma E$. Από τα σημεία Δ και E φέρουμε κάθετες ΔZ και HE στις πλευρές $A\Gamma$ και AB αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι ΔZ και HE είναι ίσα.

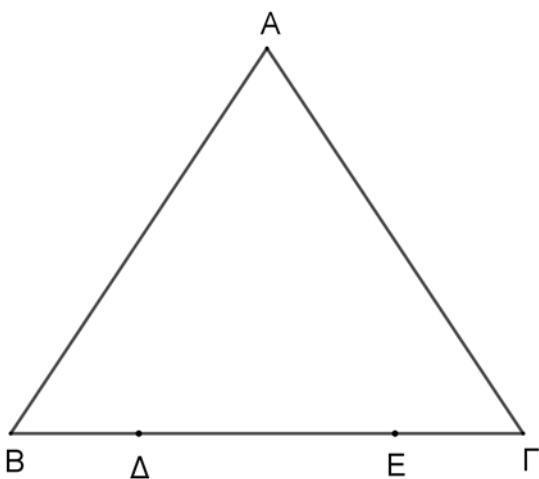
(μ.4)

(β) Αν N το σημείο τομής των ΔZ και HE να δείξετε ότι το τρίγωνο ΔNE είναι ισοσκελές.

(μ.2)

(γ) Να δείξετε ότι η AN διχοτομεί την $\hat{A}$.

(μ.4)



ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1) Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

(α) $(x-5) \cdot (x+5) =$

(β) $(x-3)^2 =$

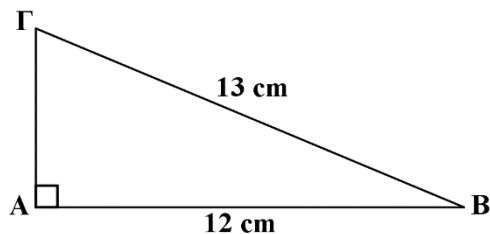
2) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παρακάτω παραστάσεις:

(α) $x^2 - 5x =$

(β) $\alpha^2 - 36 =$

3) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με μήκος 8 cm, πλάτος 9 cm και ύψος 5 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου.

4) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$). Αν ΑΒ=12 cm και ΒΓ=13 cm να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνιάς Γ.



5) Να λύσετε το παρακάτω σύστημα:

$$3x - 2y = -12$$

$$2x + 3y = 5$$

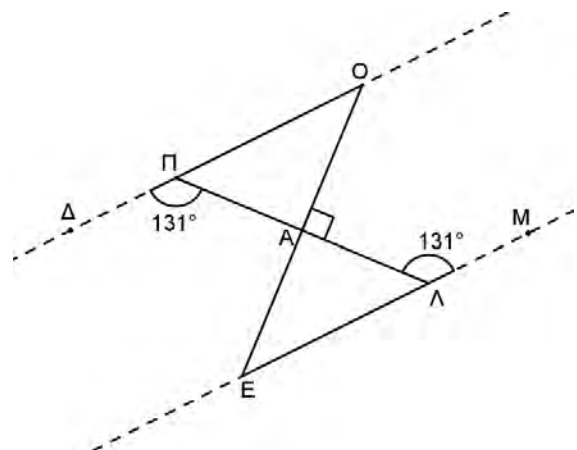
6) Να λύσετε την εξίσωση:

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

7) Στο διπλανό σχήμα δίνονται $\hat{\Delta\Gamma\Lambda} = \hat{M\Lambda A} = 131^\circ$, $\Pi\Lambda \perp OE$ και Α μέσο του ΟΕ.

(α) Να αποδείξετε ότι $\hat{\Delta\Gamma\Lambda} = \hat{M\Lambda A}$.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΠΟΛΕ είναι παραλληλόγραμμο.

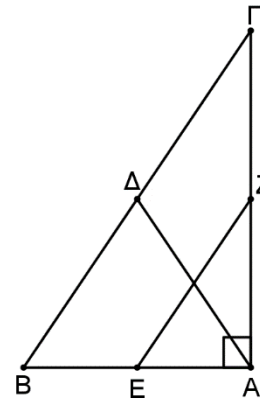


8) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A}=90^\circ$, E, Z, Δ τα μέσα των πλευρών $AB, A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα και $A\Delta=4$ cm.

(α) Να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων $B\Gamma$ και EZ . (Mov.1)

(β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔZAE είναι ορθογώνιο. (Mov.2)

(γ) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΔEB και $\Delta Z\Gamma$ είναι ίσα. (Mov.2)



9) Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α)
$$\frac{x-6}{x^2+2x} - \frac{x+1}{x^2+x-2} =$$

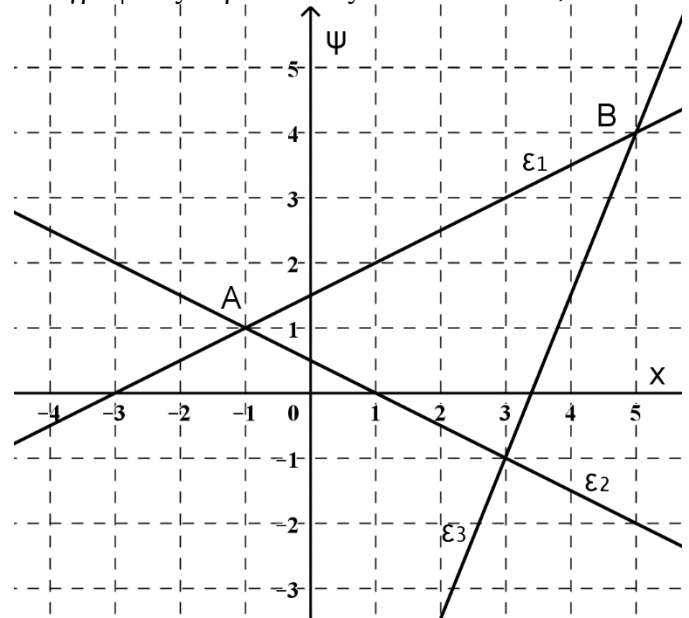
(β)
$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-9} : \frac{2x^3-8x}{x^2+6x+9} =$$

10) Στο πιο κάτω ορθογώνιο σύστημα αξόνων δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 . Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α) Να βρείτε τη λύση του γραμμικού συστήματος των ευθειών ϵ_2 και ϵ_3 . (Mov.1)

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος AB . (Mov.2)

(γ) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή του β ώστε η ευθεία $\epsilon_4: \psi = 4(3-\beta)x - 5$ να είναι κάθετη με την ϵ_2 . (Mov.2)



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1) Να λύσετε την εξίσωση:

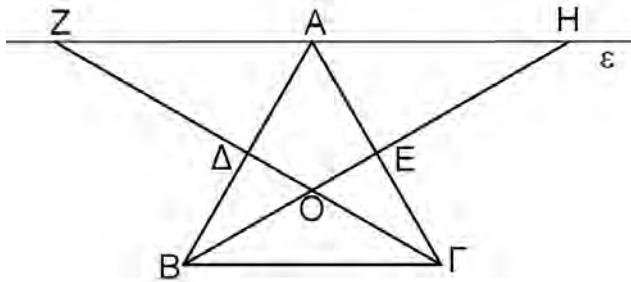
$$\frac{4x-16}{x^2-8x+15} + \frac{2}{3-x} = \frac{x+4}{x^2-5x}$$

2) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Αν από την κορυφή Α διέρχεται ευθεία ε παράλληλη προς τη ΒΓ και Η, Ζ είναι τα αντίστοιχα σημεία τομής των προεκτάσεων των ΒΕ και ΓΔ με την ευθεία ε, να δείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΒΕΓ και ΑΕΗ είναι ίσα. (Μον.4)

(β) Το τρίγωνο ΖΟΗ είναι ισοσκελές, όπου Ο το σημείο τομής των ΒΗ και ΖΓ. (Μον.4)

(γ) Το τετράπλευρο ΑΗΓΒ είναι ρόμβος. (Μον.2)



3) (α) Να δείξετε ότι: $\left(1 - \frac{6x}{x^2-9} + \frac{3}{x-3}\right) \cdot (x+3) = x$

(β) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

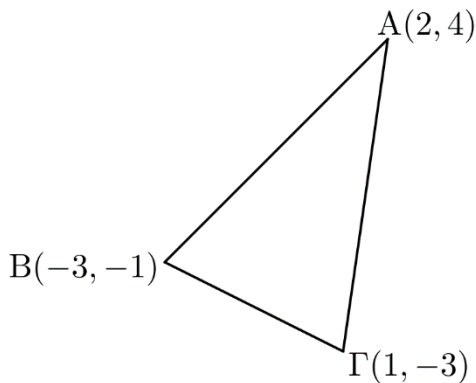
ι) $x^2(x-2) + 36(2-x) =$

ιι) $x^2 - x^2 + 8x - 16 =$

- 4) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(2, 4)$, $B(-3, -1)$ και $\Gamma(1, -3)$.

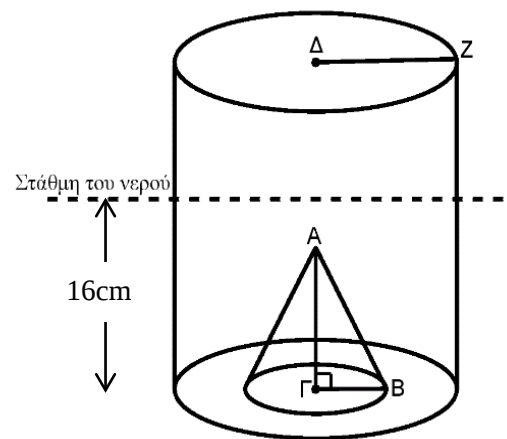
Να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα:

- (α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μον.4)
- (β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου. (Μον.4)
- (γ) Αν η ευθεία $\varepsilon_1: \psi = (\alpha^2 - 9)x + 3$ είναι παράλληλη με την $A\Gamma$, να υπολογίσετε τις τιμές του α . (Μον.2)



- 5) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύλινδρος με ύψος 24 cm, ακτίνα βάσης ΔZ και όγκο $9600\pi \text{ cm}^3$. Ένας κώνος με διάμετρο βάσης 18 cm και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $135\pi \text{ cm}^2$ τοποθετείται μέσα στο κύλινδρο πάνω στη βάση του. Βάζουμε νερό μέσα στον κύλινδρο του οποίου το ύψος της στάθμης φτάνει στα 16 cm από τη βάση του. Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

- (α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου. (Μον.4)
- (β) Να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου. (Μον.4)
- (γ) Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού μέσα στον κύλινδρο. (Μον.2)



ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x - 4)^2 =$

(β) $(x - 5)(x + 5) =$

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $x^2 + 6x =$

(β) $\psi^2 - 64 =$

(γ) $x^2 + 7x + 12 =$

(δ) $3\alpha\kappa - \alpha\chi + 3\beta\kappa - \beta\chi =$

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$2x + 3\psi = 5$$

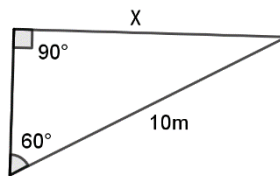
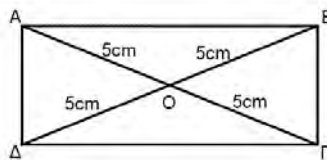
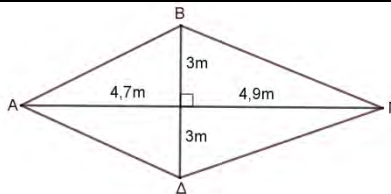
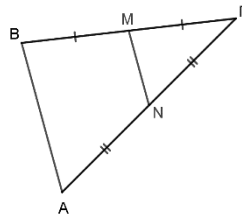
$$5x - 2\psi = -16$$

4. Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 - 7x + 4 = 0$

5. Δίνονται τα σημεία A (5 , -4) και B (-3 , 2). Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB και την απόσταση των σημείων A και B.

6. Να βάλετε σε κύκλο το σωστό χαρακτηρισμό για τις πιο κάτω προτάσεις.

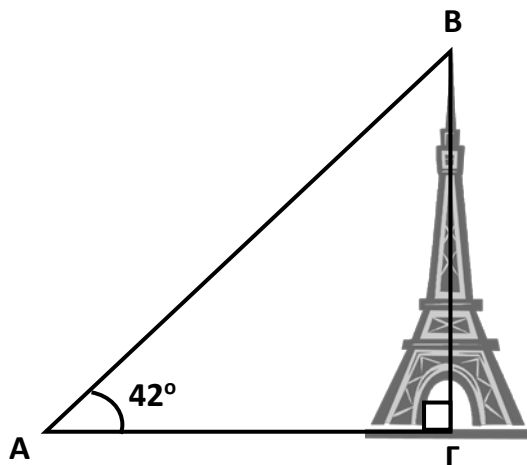
α) Αν δύο απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι ίσες τότε το σχήμα είναι πάντα παραλληλόγραμμο.	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
β) Η πλευρά AB στο διπλανό σχήμα είναι: $AB = 2 MN$	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
γ) Το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ρόμβος.	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
δ) Το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ορθογώνιο.	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ
ε) Η πλευρά χ στο διπλανό τρίγωνο είναι: $\chi = 5m$	ΟΡΘΟ / ΛΑΘΟΣ



7. Κώνος έχει ακτίνα βάσης $R=5m$ και γενέτειρα $\lambda=13m$. Να βρείτε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας και τον όγκο του κώνου.

(Οι απαντήσεις σας μπορεί να δοθούν συναρτήσει του π)

8. Στο πιο κάτω σχήμα ένας τουρίστας στο Παρίσι βρίσκεται στο σημείο A και βλέπει τον Πύργο του Άιφελ μέχρι την κορυφή υπό γωνία 42° . Αν η απόσταση ΑΓ είναι 360m , να υπολογίσετε το ύψος ΒΓ του Πύργου του Άιφελ.



Γωνία	ημ	συν	εφ
42°	0,67	0,74	0,90
48°	0,74	0,67	1,11

9. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) φέρουμε το ύψος AD . Προεκτείνουμε το ύψος AD προς το Δ και παίρνουμε πάνω στην προέκταση σημείο H .
Αν E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, **να αποδείξετε ότι $HE = HZ$.**

10. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο

$$\varphi(x) = x(2x - 3)^2 - 4(x - 1)^3 - (4 + 3x)(3x - 4) + 3x(3x + 1) \text{ είναι σταθερό.}$$

ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τα 5 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

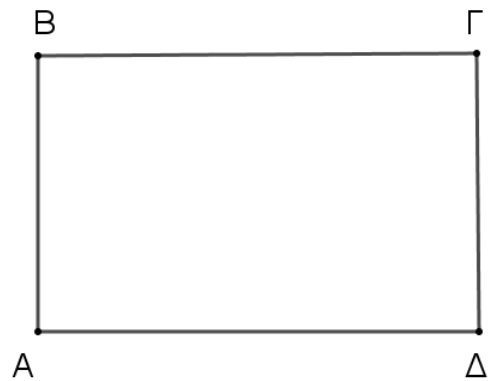
$$\frac{2}{x-3} + \frac{x+1}{2x-4} = \frac{2}{x^2 - 5x + 6}$$

2. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Να φέρετε τις διαγωνίους $A\Gamma$ και $B\Delta$ και να ονομάσετε K το σημείο τομής τους.

α) Αν BZ και ΔH είναι οι αποστάσεις των B και Δ από την $A\Gamma$, να δείξετε ότι:

(i) τα τρίγωνα BZK και ΔHK είναι ίσα. (μον.4)

(ii) το τετράπλευρο $BH\Delta Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (μον.3)



β) Αν $\widehat{BAZ} = 60^\circ$ και $AZ = 6\text{cm}$, να βρείτε το μήκος AB και ΓZ και $B\Delta$. (μον.3)

3. Δίνονται:

$$A = \left(\frac{x}{1-\psi} - \frac{\psi}{x} \right) : \frac{1}{x+1}$$

και

$$B = \left(3x + \frac{1}{x} \right)^2 - (13 - x) - \left(3x - \frac{1}{x} \right)^2$$

α) Αν $x^2 + \psi^2 = 1$, να δείξετε ότι $A = \frac{x+1}{x}$ (μον.3)

β) Να δείξετε ότι $B = x - 1$ (μον.3)

γ) Να δείξετε ότι $\frac{\frac{x+1}{B} - A}{A+B+2} = \frac{1}{x^2 - 1}$ (μον.4)

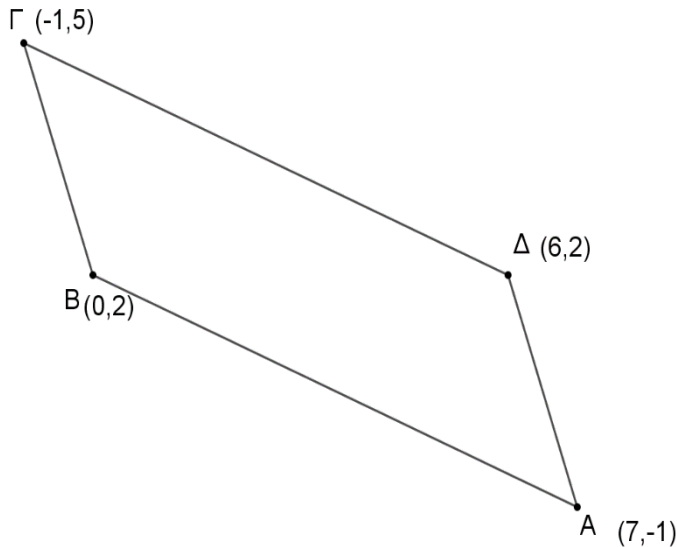
4. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές $A(7, -1)$, $B(0, 2)$, $\Gamma(-1, 5)$ και $\Delta(6, 2)$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (μον.4)

(β) Αν Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Ο. (μον.2)

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που περνά από το σημείο Ο και είναι κάθετη στη διαγώνιο ΑΓ. (μον.2)

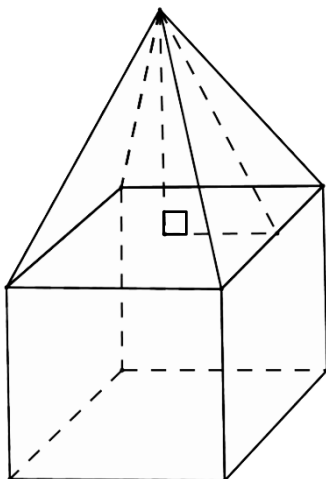
(δ) Να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε η ευθεία $\varepsilon_1: \psi = (2\kappa + 5)\chi - 1$ να είναι παράλληλη με την ΑΔ. (μον.2)



5. Ένας παραγωγός γεμίζει πλήρως και αποθηκεύει το κρασί του σε δοχείο σχήματος όπως φαίνεται πιο κάτω. (κύβος και πυραμίδα).

Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας είναι 6000cm^2 και το παράπλευρο ύψος $h=50\text{cm}$. Μετά την πάροδο κάποιου χρονικού διαστήματος ο παραγωγός αδειάζει το κρασί σε κυλινδρικά δοχεία. Τα κυλινδρικά δοχεία έχουν ακτίνα βάσης 5cm και ύψος 16cm .

Πόσα τέτοια δοχεία θα γεμίσουν **πλήρως**;



Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τάξη: Γ'

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε και τα 10 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Θέμα 1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x - 8)^2 =$

β) $(a + 7) \cdot (a - 7) =$

Θέμα 2. Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τα πολυώνυμα:

α) $\alpha\chi - \alpha\psi - \alpha\omega =$

β) $\chi^2 + 7\chi + 12 =$

Θέμα 3. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 6 cm, 4 cm και 5 cm. Να υπολογίσετε:

α) τον όγκο του.

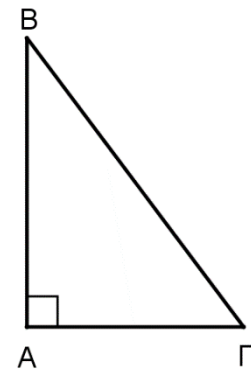
β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

Θέμα 4. Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{aligned} 2\chi + 3\psi &= 5 \\ 3\chi - 2\psi &= 1 \end{aligned}$$

Θέμα 5. Να λύσετε την εξίσωση: $3\chi^2 - 8\chi + 4 = 0$

Θέμα 6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), η $\varepsilon\phi B = \frac{5}{12}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημB και συνB.



Θέμα 7. Να κάνετε τις πράξεις : $\frac{\chi^2-16}{2\chi^2+6\chi} \cdot \frac{\chi^2+5\chi+6}{\chi^2-2\chi-8} \div \frac{\chi^2+6\chi+8}{8\chi^3+4\chi^2} =$

Θέμα 8. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : \psi = (\mu^2 - 6)\chi + 3$ και $\varepsilon_2 : \psi + 5\mu\chi = -4$ είναι παράλληλες.

α) Να βρείτε τις τιμές του μ .

β) Αν $\mu > 0$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(3, -2)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία ε_2 .

Θέμα 9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K, Λ είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το B και προς το Γ κατά τμήματα BZ και ΓH αντίστοιχα, έτσι ώστε $BZ = \Gamma H$. Να αποδείξετε ότι το $K\Lambda HZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Σχήμα – Δεδομένα – Ζητούμενα).

Θέμα 10. Δίνεται κώνος ακτίνας 4 cm. Η γενέτειρα του σχηματίζει με το ύψος του γωνία 30° .

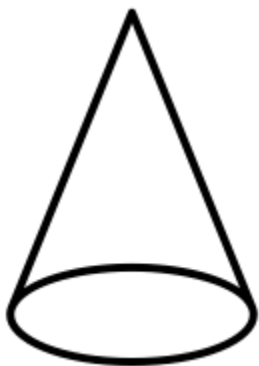
Να υπολογίσετε:

α) τη γενέτειρα του. (να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας) (μον.2)

β) το ύψος του. (μον.1)

γ) τον όγκο του. (μον.2)

(Οι απαντήσεις σας μπορούν να δοθούν συναρτήσει του π)



ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τα 5 θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Θέμα 1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{7+7\chi}{\chi^2-\chi-12} + \frac{2\chi-3}{4-\chi} = \frac{1-3\chi}{\chi+3}$$

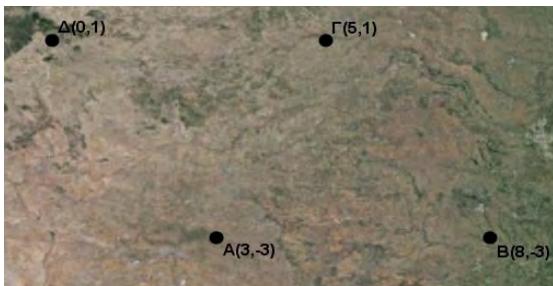
Θέμα 2. α) Να λύσετε το πιο κάτω πρόβλημα με σύστημα.

Στο ενυδρείο του κύριου Αχιλλέα υπάρχουν δύο ειδών ψάρια , τα ψάρια << άγγελοι >> και τα ψάρια << κλόουν >>. Πώλησε συνολικά 40 ψάρια και εισέπραξε €150 . Κάθε ψάρι << άγγελος >> στοιχίζει €3 και κάθε ψάρι << κλόουν >> €5. Να βρείτε πόσα ψάρια πώλησε από το κάθε είδος .



β) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $AB = \chi^2 - \psi^2$ και $\chi\psi$, $A\Gamma = 2\chi\psi$ και $B\Gamma = \chi^2 + \psi^2$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την $B\Gamma$.

Θέμα 3. Στον πιο κάτω χάρτη, φαίνονται οι συντεταγμένες τεσσάρων σπιτιών ενός χωριού, $A(3, -3)$, $B(8, -3)$, $\Gamma(5, 1)$ και $\Delta(0, 1)$.



α) Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των σπιτιών A και B.

β) Στο μέσο της απόστασης των σπιτιών B και Δ υπάρχει ένα συντριβάνι . Να βρείτε τις συντεταγμένες του.

γ) Να αποδείξετε ότι τα τέσσερα σπίτια είναι κορυφές ρόμβου.

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου κ , η ευθεία $\epsilon_1 : (\kappa^2 - 1)\psi + 4\chi = 7$ είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ.

Θέμα 4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Το Ε είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και το Δ είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ. Προεκτείνουμε το ΔΕ κατά τμήμα $EZ = DE$.

α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

(μον.4)

β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι ορθογώνιο.

(μον.4)

γ) Αν το Θ είναι το μέσο της ΑΕ , να δείξετε ότι $\Theta\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$.

(μον.2)

Θέμα 5. Σ' ένα εργοστάσιο θα λιώσουν 3 σφαίρες από σίδηρο για να φτιάξουν κυλίνδρους. Κάθε σφαίρα έχει ολική επιφάνεια $144 \pi \text{ m}^2$. Κάθε κύλινδρος έχει ύψος 6 m και ακτίνα ίση με τα $\frac{2}{3}$ της ακτίνας της σφαίρας.

α) Να υπολογίσετε πόσους κυλίνδρους θα φτιάξουν. (μον.7)

β) Οι πιο πάνω κύλινδροι θα ντυθούν με πλαστικό . Αν το πλαστικό στοιχίζει €10 το τετραγωνικό μέτρο, να βρείτε πόσα χρήματα θα πληρώσει το εργοστάσιο. (μον.3)

(Οι σφαίρες και οι κυλίνδροι είναι συμπαγείς.)

