

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03/ 06 / 2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ΩΡΕΣ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΤΜΗΜΑ: **ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΤΑΛΟΓΟΥ:**

ΒΑΘΜΟΣ: $\frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{20}$

Ολογράφως:
.....

Υπογραφή:

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 - β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 - γ) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).

ΤΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τα 10 θέματα του Μέρους Α΄.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 2)^2 =$

β) $(\omega + 1) \cdot (\omega - 1) =$

ΘΕΜΑ 2:

Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

α) $\alpha^2 + 2\alpha\beta =$

β) $\alpha^2 - 4 =$

ΘΕΜΑ 3:

Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x(x - 5) = 0$

β) $x^2 + 4x = -3$

ΘΕΜΑ 4:

Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $\frac{11}{2\alpha} - \frac{3}{\alpha} =$

(β) $\frac{2\chi-6}{\chi^3} : \frac{\chi-3}{4\chi} =$

ΘΕΜΑ 5:

Να λύσετε το σύστημα:

$$\chi - \psi = 4$$

$$2\chi + 3\psi = 3$$

ΘΕΜΑ 6:

Να λύσετε την εξίσωση: $2\chi^2 + 7\chi - 15 = 0$

ΘΕΜΑ 7:

Κύλινδρος έχει ύψος διπλάσιο της ακτίνας της βάσης του και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας ίσο με $64\pi\text{cm}^2$. Να βρείτε:

α) την ακτίνα του. (2 μον.)

β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας. (1,5 μον.)

γ) τον όγκο του. (1,5 μον.)

(οι απαντήσεις μπορούν να δοθούν συναρτήσει του π)

ΘΕΜΑ 8:

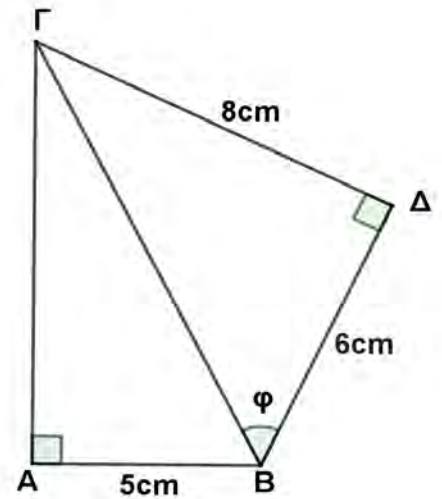
Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Παίρνουμε σημεία Ε και Ζ πάνω στη διαγώνιο ΑΓ έτσι ώστε ΑΕ=ΓΖ. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 9:

Στο διπλανό σχήμα δίνονται ΑΒΓ ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$), με ΑΒ=5cm, ΒΔΓ ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{D} = 90^\circ$) με ΒΔ=6cm και ΓΔ=8cm.

α) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$K = \frac{20\eta\mu\varphi - 10\sigma\upsilon\nu\varphi}{\frac{2}{3} + \varepsilon\varphi\varphi} \quad (4 \text{ μον.})$$



β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας ΑΓΒ. (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας) (1 μον.)

ΘΕΜΑ 10:

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Αν οι διχοτόμοι ΒΔ και ΓΕ τέμνονται στο σημείο Ο, να δείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο ΟΒΓ είναι ισοσκελές. (2 μον.)

β) Τα τρίγωνα ΟΒΕ και ΟΓΔ είναι ίσα. (3 μον.)

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 θέματα του Μέρους Β'.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x+1}{x^2+2x} - \frac{x}{2x-x^2} = \frac{1}{x^2-4}$

ΘΕΜΑ 2:

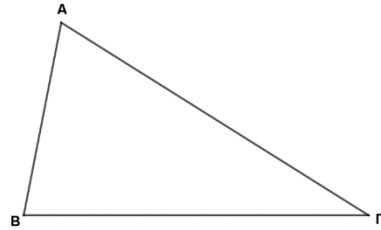
α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{\frac{x^2}{x+1} + 1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{x^2}{x-1} - x - \frac{1}{x-1}} =$$

β) Αν $x = 2^{10} + 2^{-10}$ και $\psi = 2^{10} - 2^{-10}$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $x^2 - \psi^2$.

ΘΕΜΑ 3:

α) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν ΑΔ ύψος και Κ, Λ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ, ΒΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (6 μον.)



β) Να βρείτε για ποιες τιμές του κ οι ευθείες $\varepsilon_1 : \psi = (2\kappa^2 - 1)\chi + 5$ και $\varepsilon_2 : \psi - (3\kappa^2 + 2\kappa)\chi = 8$ είναι παράλληλες. (4 μον.)

ΘΕΜΑ 4:

Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κορυφές Β(-2, 4) και Δ(0, 2).

α) Να βρείτε το μήκος της διαγωνίου ΒΔ. (2 μον.)

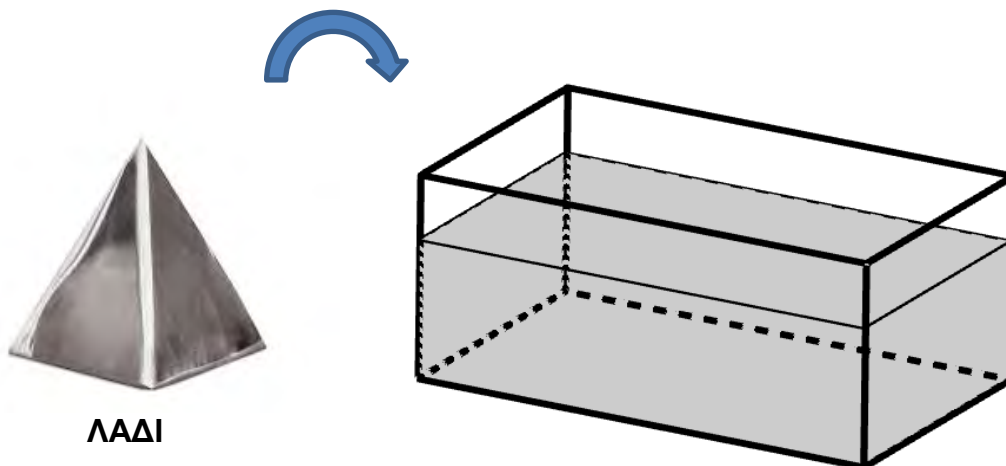
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων του. (2 μον.)

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ είναι $\psi - \chi = 4$. (3 μον.)

δ) Αν η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $3\psi - 2\chi = 6$, να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Α. (3 μον.)

ΘΕΜΑ 5:

Κάποιος αγόρασε λάδι, το οποίο πωλείται σε συσκευασίες κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας. Οι πυραμίδες έχουν εμβαδόν βάσης 144cm^2 και παράπλευρο ύψος 10cm . Ακολουθώς αποθηκεύει όλο το λάδι που αγόρασε σε δοχείο σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου, με μήκος 24cm , πλάτος 5cm και ύψος 20cm . Αν το ύψος του λαδιού στο ορθογώνιο παραλληλεπιπέδο φτάνει στα 16cm , να υπολογίσετε πόσες συσκευασίες λαδιού έχει αγοράσει.



Ο Διευθυντής

.....
Χαράλαμπος Χριστοδούλου

Ονοματεπώνυμο μαθητή/τριας:

.....

Τμήμα: Αριθμός:

Βαθμός:

Υπογρ. Καθηγητή:

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΓΙΟΥ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018 - 2019

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 31.05.2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

Το εξεταστικό δοκίμιο χωρίζεται σε Α΄ και Β΄ μέρος και αποτελείται από 12 σελίδες.

- **Να απαντήσετε όλες τις ασκήσεις στο εξεταστικό δοκίμιο.**
- **Να γράψετε με μπλε μελάνι** (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
- **Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.**
- **Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.**

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

(α) $5\chi + 5\psi =$

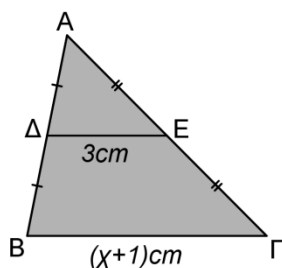
(β) $\omega^2 - 16 =$

2. Να χαρακτηρίσετε με *Σωστό ή Λάθος* τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

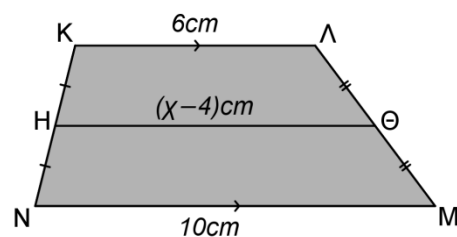
(α) Αν δύο γωνίες ενός τετραπλεύρου είναι ίσες, τότε το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο.	Σωστό / Λάθος
(β) Ένα παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο αν οι διαγώνιοί του είναι ίσες.	Σωστό / Λάθος
(γ) Όλα τα τετράγωνα είναι ρόμβοι.	Σωστό / Λάθος
(δ) Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες μία προς μία.	Σωστό / Λάθος
(ε) Δύο ίσα τρίγωνα έχουν και ίση περίμετρο.	Σωστό / Λάθος

3. Να υπολογίσετε την τιμή του χ σε καθένα από τα πιο κάτω σχήματα.

(α)



(β)



4. Να κάνετε τις πράξεις:

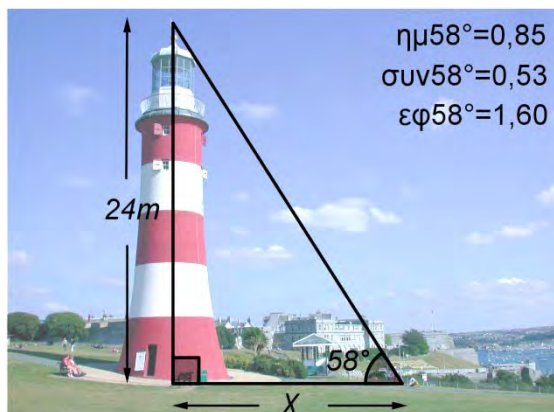
(α) $(\psi - 3)(\psi + 3) =$

(β) $(\chi + 2)^2 =$

5. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned}\chi - \psi &= 4 \\ \chi + 4\psi &= 24\end{aligned}$$

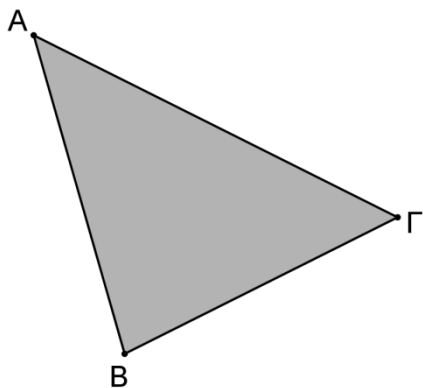
6. Ο εντυπωσιακός φάρος της φωτογραφίας έχει ύψος $24m$. Με βάση τα δεδομένα που σας δίνονται, να υπολογίσετε την απόσταση χ .



7. Ενωδρείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει μήκος $60cm$, πλάτος $30cm$ και χωρητικότητα $86400cm^3$. Να υπολογίσετε το ύψος του ενωδρείου.



8. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ του πιο κάτω σχήματος, να φέρετε τη διχοτόμο της $A\hat{B}\Gamma$ ώστε να τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο Δ . Αν $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp B\Gamma$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΔEB και ΔZB είναι ίσα.



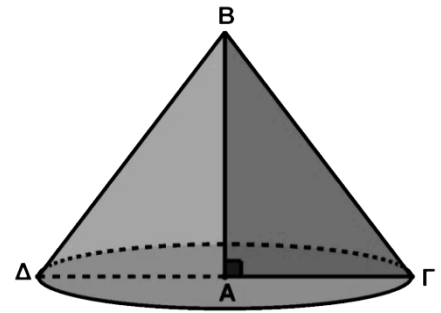
9. Δίνεται η παράσταση $K = \alpha \cdot (2\alpha - 1)^2 - (\alpha - 1)^3 - 2\alpha \cdot (\alpha + 2) \cdot (\alpha - 2) - 7\alpha$.
Να κάνετε τις πράξεις και να παραγοντοποιήσετε το αποτέλεσμα.

10. Δίνεται κώνος με διάμετρο βάσης $\Delta\Gamma$ και ύψος BA , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

(α) Αν $\Delta\Gamma = (4\kappa)cm$ και $BA = \left(2\kappa^2 - \frac{1}{2}\right)cm$, να

δείξετε ότι $B\Gamma = \left(2\kappa^2 + \frac{1}{2}\right)cm$. (Μον.2)

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου, αν $\kappa = \frac{3}{2}$. (Μον.3)



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. (α) Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{\alpha-2}{\alpha^2-3\alpha} : \frac{\alpha^2-4\alpha+4}{\alpha^3-9\alpha}$

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $1 - \frac{1}{\chi+2} - \frac{1}{2-\chi} = \frac{5\chi-6}{\chi^2-4}$

2. (α) Η Πυραμίδα του Λούβρου είναι μια μεγάλη γυάλινη και μεταλλική τετραγωνική πυραμίδα, που βρίσκεται στην αυλή του μουσείου του Λούβρου στο Παρίσι.
Έχει ύψος $22m$ και πλευρά βάσης $36m$.
Η εταιρία που έχει αναλάβει τον μηνιαίο καθαρισμό της εξωτερικής επιφάνειας της πυραμίδας χρεώνει $\text{€}13/m^2$. Να υπολογίσετε το ποσό που δαπανείται ετήσια για τον σκοπό αυτό. (Υπόδειξη: Όπου χρειάζεται, να δώσετε τις απαντήσεις σας με ακρίβεια ακεραίου)



(β) Κύλινδρος έχει ύψος $6m$ και εμβαδόν ολικής επιφάνειας $80\pi m^2$.
Να υπολογίσετε: (i) την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου. (Μον.3)
(ii) τον όγκο του κυλίνδρου. (Μον.2)

3. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-3,2)$, $B(5,1)$ και $\Gamma(1,-5)$.
- (α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μον.4)
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_1: \psi = -3\chi + 2$. (Μον.3)
- (γ) Να εξετάσετε αν η ευθεία $\varepsilon_2: 8\chi - \psi = 7$ είναι κάθετη στην πλευρά AB . (Μον.3)

4. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{2\alpha^2 - 2\alpha}{\alpha^2 - 2\alpha + 1}$, $B = \frac{\alpha^2 - 9}{\alpha^2 - 4\alpha + 3}$, $\Gamma = \frac{\alpha^2 - 6\alpha + 9}{\alpha - 3}$.

(α) Να κάνετε όλες τις δυνατές απλοποιήσεις σε κάθε παράσταση. (Μον.3)

(β) Να δείξετε ότι: $\frac{A-B}{\Gamma} = \frac{1}{\alpha-1}$ (Μον.3)

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{A-B}{\Gamma} = 3\alpha - 5$. (Μον.4)

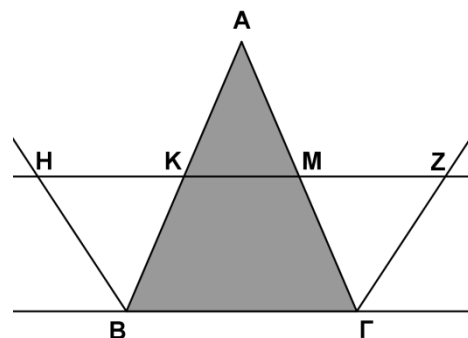
5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), με K μέσο της AB και M μέσο της $A\Gamma$.

Η προέκταση του τμήματος KM τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ στα σημεία H και Z αντίστοιχα, όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

(α) Να αποδείξετε ότι το $KM\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μον.3)

(β) Να δείξετε ότι $BH = \Gamma Z$. (Μον.4)

(γ) Να φέρετε τη διάμεσο AD του τριγώνου $AB\Gamma$ και να αποδείξετε ότι το $AM\Delta K$ είναι ρόμβος. (Μον.3)



Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΕΥΑΓΟΡΑΣ ΚΑΡΑΓΙΩΡΓΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

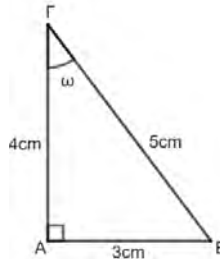
ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω:

(α) $\eta_{\mu\omega} =$

(β) $\sigma_{\nu\eta\omega} =$



2) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x+3)^2 =$

(β) $(a+1)^3 =$

3) Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $2a^2 - 2a =$ (μον.1,5)

(β) $x^2 + 5x + 6 =$ (μον.1,5)

(γ) $x^3 - 4x =$ (μον.2)

4) Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 3x - y &= -11 \end{aligned}$$
5) Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας ενός κύβου είναι 96cm^2 . Να υπολογίσετε:

(α) την ακμή του κύβου

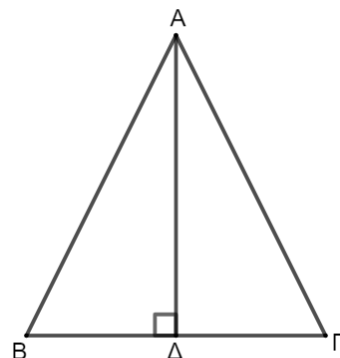
(β) τον όγκο του

6) Να απλοποιήσετε την πιο κάτω παράσταση:

$$\frac{a^2 - 36}{a + 6} \cdot \frac{a(a - 1)}{a^2 - 7a + 6} =$$

- 7) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (1 - \kappa)x + 4$ και $\varepsilon_2: 2x + y = 7$. Να βρείτε την τιμή του κ , ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι κάθετες. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.
- 8) Δύο αδέρφια υπολόγισαν ότι το γινόμενο των ηλικιών τους είναι 48. Αν ο ένας είναι 8 χρόνια μεγαλύτερος από τον άλλο, να βρείτε την ηλικία των δύο αδελφών.
(Να λυθεί με χρήση εξίσωσης.)

- 9) Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και AD το ύψος του. Αν E τυχαίο σημείο του AD , να δείξετε ότι $BE = GE$.



- 10) Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), Δ , E και M είναι τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $AM = ED$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) (α) Αν ισχύει $x + \frac{1}{x} = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $x^2 + \frac{1}{x^2}$.
(Να φαίνονται όλες οι πράξεις.) (μον.4)

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{3}{x} - \frac{x-1}{2-x} = \frac{2}{x^2 - 2x}$ (μον.6)

- 2) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την DE κατά τμήμα $DE = EZ$. Να δείξετε:
(α) $\Gamma\Delta = AZ$
(β) $AB\Delta Z$ ρόμβος

- 3) (α) Να δείξετε ότι η παράσταση $A = \frac{\frac{x^2}{x-1} - \frac{2x}{x-1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2}}$, είναι ίση με $x^2 - x$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $A + \frac{2}{9} = 0$, όπου A η πιο πάνω παράσταση.

- 4) Ένα κατάστημα χειροποίητων κατασκευών, παραγγέλνει το κερί που χρειάζεται για τη δημιουργία αρωματικών κεριών, σε σχήμα πλάκας(ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο) διαστάσεων 25cm,15cm και 12,56cm. Ο πωλητής λιώνει το κερί της πλάκας και το χύνει σε 10 κυλινδρικά δοχεία, ακτίνας 5cm και ύψους 10cm. Να υπολογίσετε το ύψος του κεριού σε κάθε δοχείο, αν αυτό είναι σε όλα τα δοχεία το ίδιο.

- 5) (α) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 4x - 2$ και $\varepsilon_2: 2y - 8x = 5$.

(i) Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών ε_1 και ε_2 , δικαιολογώντας την απάντησή σας με την κατάλληλη συνθήκη. (μον.2)

(ii) Πόσες λύσεις έχει το πιο πάνω σύστημα εξισώσεων; (μον.1)

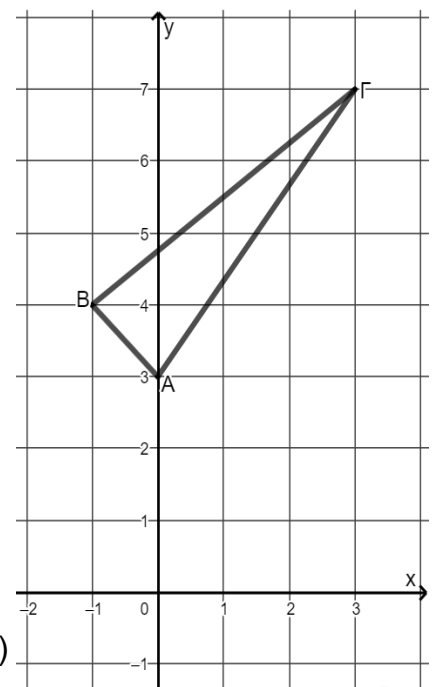
- (β) Με βάση τη διπλανή γραφική παράσταση:

(i) Να δείξετε (με πράξεις) ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. (μον.2)

(ii) Να βρείτε (με πράξεις) τις συντεταγμένες του μέσου Μ της ΑΓ. (μον.2)

(iii) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ του τριγώνου ΑΒΓ. (μον.1,5)

(iv) Να βρείτε (με πράξεις) τις συντεταγμένες του σημείου Δ, έτσι ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο. (μον.1,5)



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ / ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29 / 05 / 2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

ΩΡΑ: 07:45 – 09:45

Βαθμός :

Ολογράφως :

Υπογραφή :

Ονοματεπώνυμο: **Τμήμα:** **Αριθμός:**

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 2. Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
 3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΔΕΚΑ (10) ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100 μονάδες.

- 1.** Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

α) $(x + 5)^2 =$

β) $(x - 3)(x + 3) =$

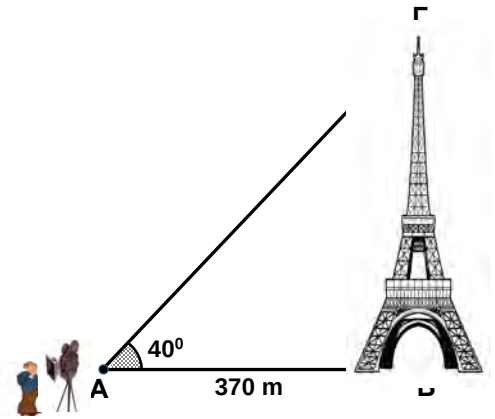
- 2.** Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κύβου με ακμή βάσης $a = 4 \text{ cm}$.

- 3.** Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

α) $a^2 + 3a =$

β) $x^2 - 36 =$

4. Ένας φωτογράφος στέκεται στο σημείο Α σε απόσταση 370 m από το σημείο Β και βγάζει φωτογραφία τον πύργο του Άιφελ. Ο φακός της φωτογραφικής του μηχανής βλέπει τον πύργο υπό γωνία 40° . Να βρείτε κατά προσέγγιση ακεραίου το ύψος ΒΓ του πύργου.



5. Να λύσετε το σύστημα:

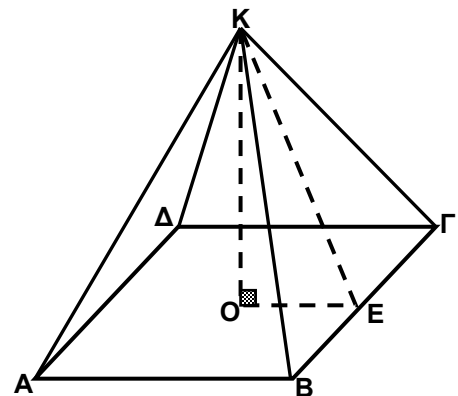
$$\begin{aligned} 2\chi - 3\psi &= 9 \\ \chi + 2\psi &= 1 \end{aligned}$$

6. Να λύσετε την εξίσωση: $2\chi^2 - 5\chi + 3 = 0$

7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης $a = 18 \text{ cm}$ και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $E_{\pi} = 540 \text{ cm}^2$.

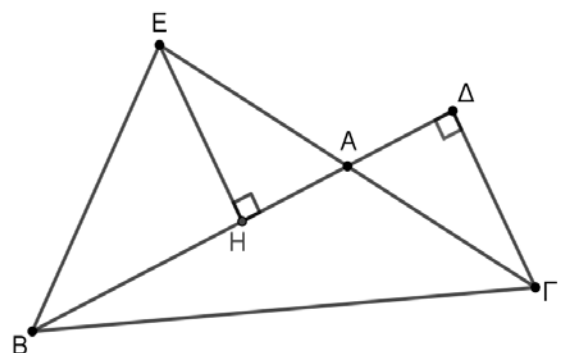
Να υπολογίσετε:

- α) Το παράπλευρο ύψος (h) της πυραμίδας. (μον. 2)
β) Τον όγκο (V) της πυραμίδας. (μον. 3)



8. Στο πιο κάτω σχήμα $\Gamma\Delta$ ύψος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, EH ύψος του τριγώνου $\triangle ABE$ και BA διάμεσος του τριγώνου $\triangle BE\Gamma$.

- α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle A\Gamma\Delta$ και $\triangle AEH$ είναι ίσα. (μον. 3)
β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Delta E\text{H}$ είναι παραλληλόγραμμο. (μον. 2)
(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)



9. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{\chi^2 - 4}{\chi^2 - 3\chi - 10} \cdot \frac{\chi^2 - 4\chi + 4}{3\chi^2 + 15\chi} =$

β) $\frac{2\alpha}{\alpha^2 - 9} - \frac{1}{\alpha + 3} =$

10. Δίνονται τα σημεία A(-2, -3), B(-1, 4) και Δ(3, -8).

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο. (μον. 3)

β) Στη συνέχεια να δείξετε ότι το παραλληλόγραμμο αυτό είναι ρόμβος. (μον. 2)

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2\chi - 1}{\chi^2 - \chi - 12} - \frac{\chi - 5}{4 - \chi} = \frac{6}{\chi + 3}$

2. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha - 2)^3 - 4(\alpha^2 - 5\alpha + 6) = (\alpha - 2)(\alpha - 4)^2$ (μον. 5)

β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα να λύσετε την εξίσωση :

$(\chi - 2)^3 = 4(\chi^2 - 5\chi + 6)$ (μον. 5)

3. Δίνεται το πιο κάτω τρίγωνο ΑΒΓ με συντεταγμένες A(-1,2), B(8, 5) και Γ(κ, κ - 3) όπου

$\kappa > 0, \kappa \in \mathbb{R}$. Αν $\hat{A\Gamma B} = 90^\circ$,

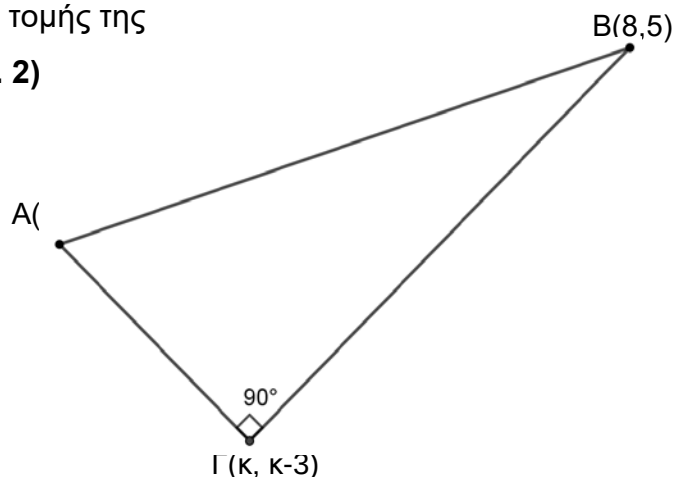
α) να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$, (μον. 3)

β) να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΑΒΓ, (μον. 2)

γ) να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΓΔ του τριγώνου ΑΒΓ, (μον. 3)

δ) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής της

διαμέσου ΑΜ και του ύψους ΓΔ. (μον. 2)



4. Μία κανάτα γεμάτη χυμό γεμίζει 15 ποτήρια σχήματος κώνου με διάμετρο βάσης 12 cm και γενέτειρα 10 cm.
Να βρείτε πόσα **το πολύ** ποτήρια σχήματος κυλίνδρου με ακτίνα βάσης 4 cm και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας ίσο με $80\pi \text{ cm}^2$ μπορούν να γεμίσουν με την ίδια ποσότητα χυμού.



5. α) Να αποδείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι κορυφές ρόμβου. (μον. 4)
- β) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ $\hat{B} = 90^\circ$, $\hat{A} = 30^\circ$ και $A\Gamma = 12 \text{ cm}$. Από το μέσο Δ της AB να φέρετε ευθεία παράλληλη με τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ στο σημείο E . Στη συνέχεια να προεκτείνετε την ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$.
Να αποδείξετε ότι το $B\Gamma Z\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (μον. 4)
- γ) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι ίσο με $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$. (μον. 2)
(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά

Βαθμός:

ΤΑΞΗ : Γ΄

Ολογράφως:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 3/6/2019

Υπογραφή :

ΧΡΟΝΟΣ : 2 Ώρες

Ονοματεπώνυμο : Τμήμα : Αριθμός :

- ΟΔΗΓΙΕΣ :** (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 (β) Να γράψετε με μπλε μελάνι μόνο (τα σχήματα επιτρέπονται με μολύβι).
 (γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $2\alpha + 2\beta =$

(β) $x^2 - 9 =$

2. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(x - 5)^2 =$

(β) $(2x - 5)(2x + 5) =$

3. Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(5, 7)$. Να βρείτε,

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB ,

(β) Τις συντεταγμένες του μέσου M , του ευθύγραμμου τμήματος AB .

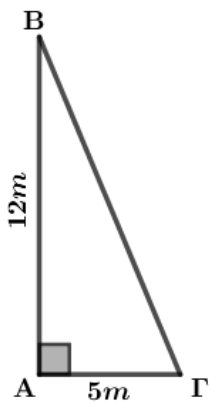
4. Να λύσετε το σύστημα.

$$2x - 5y = -3$$

$$2x + 3y = 5$$

5. Να βρείτε το **εμβαδόν της ολικής επιφάνειας**, τον **όγκο** και το **μήκος της διαγώνιου** ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $2cm$, $3cm$ και $4cm$.

6. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$.



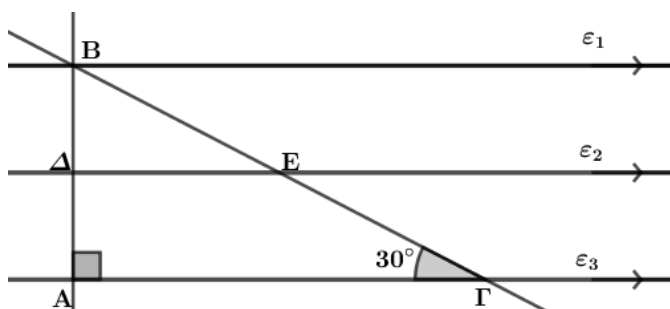
7. Να λύσετε την εξίσωση

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$(x + y)^3 - x(x + y)^2 = xy(2y + x) + y^3$$

9. Στα πιο κάτω σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ και $B\Delta = \Delta A = 3cm$. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, να βρείτε το μήκος του BE. (Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



10. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου παραλληλόγραμμου είναι κορυφές ρόμβου.

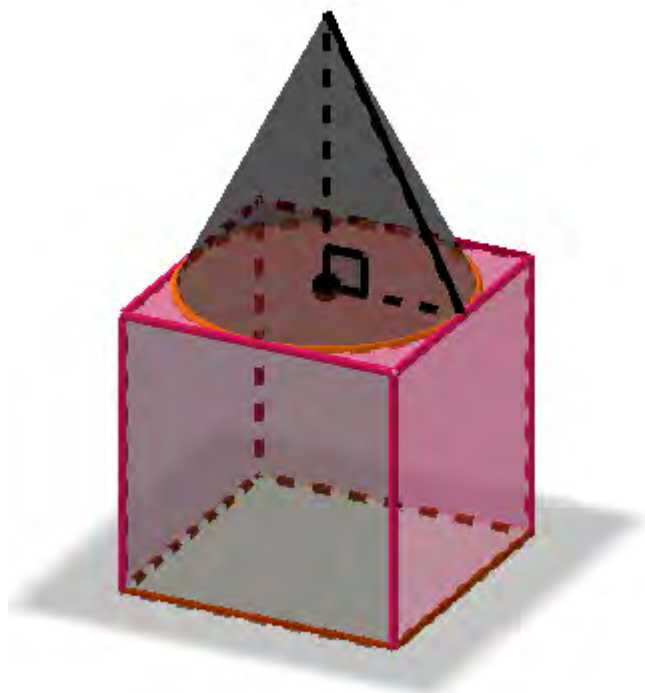
ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση.

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^2 - x - 2} + \frac{x}{2 - x} = \frac{1}{x + 1} - 1$$

2. Η πιο κάτω κατασκευή αποτελείται από ένα κύβο και ένα κώνο. Να βρείτε τον **όγκο** και το **εμβαδόν** της εξωτερικής επιφάνειας της, αν η ακμή της βάσης του κύβου $a = 6cm$ και η γενέτειρα του κώνου $\lambda = 5cm$.



3. (α) Να κάνετε τις πράξεις και όλες τις δυνατές απλοποιήσεις όπου $a \neq 0$, $a \neq 1$ και $a \neq -1$.

$$\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right) \cdot \frac{a^4 - a^3}{a^4 - 1} =$$

(β) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τις παραστάσεις:

(i) $xa^4 - xa =$

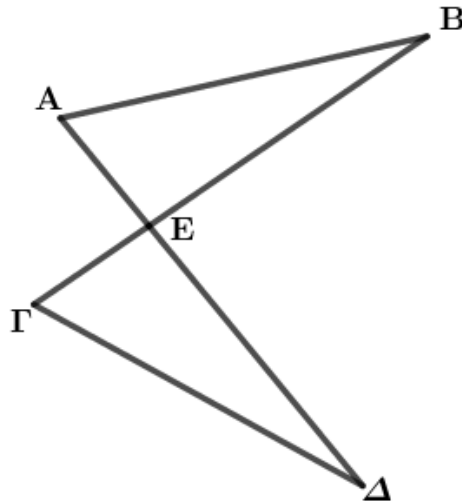
(ii) $(a^2 + b^2 - c^2)^2 - 4a^2 b^2 =$

4. Στο πιο κάτω σχήμα ισχύει ότι $AE = GE$ και $BE = ED$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και GDE είναι ίσα. (3 μονάδες)

(β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις EH και EO του σημείου E από τις πλευρές AB και GD αντίστοιχα είναι ίσες. (3 μονάδες)

(γ) Αν οι προεκτάσεις των AB και GD προς τα A και G αντίστοιχα τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BZD είναι ισοσκελές. (4 μονάδες)



5. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABGD$, με $B(8,4)$, $G(6,0)$ και $D(2,-2)$.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς BG .

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής O των διαγωνίων του.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο B και είναι κάθετη στη BD .

(ε) Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο $ABGD$ είναι ρόμβος.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....
Ιωάννης Χατζηγιάννης

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά

Βαθμός:

ΤΑΞΗ : Γ΄

Ολογράφως:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 3/6/2019

Υπογραφή :

ΧΡΟΝΟΣ : 2 Ώρες

Ονοματεπώνυμο : **Τμήμα :** **Αριθμός :**

- ΟΔΗΓΙΕΣ :** (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 (β) Να γράψετε με μπλε μελάνι μόνο (τα σχήματα επιτρέπονται με μολύβι).
 (γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΝΕΑ (9) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $2\alpha + 2\beta =$

(β) $x^2 - 9 =$

2. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(x - 5)^2 =$

(β) $(2x - 5)(2x + 5) =$

3. Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(5,7)$. Να βρείτε,

(α) Το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB ,

(β) Τις συντεταγμένες του μέσου M , του ευθύγραμμου τμήματος AB .

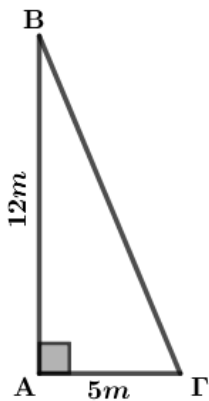
4. Να λύσετε το σύστημα.

$$2x - 5y = -3$$

$$2x + 3y = 5$$

5. Να βρείτε το **εμβαδόν της ολικής επιφάνειας**, τον **όγκο** και το **μήκος της διαγώνιου** ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 2cm , 3cm και 4cm .

6. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\hat{\Gamma}$.



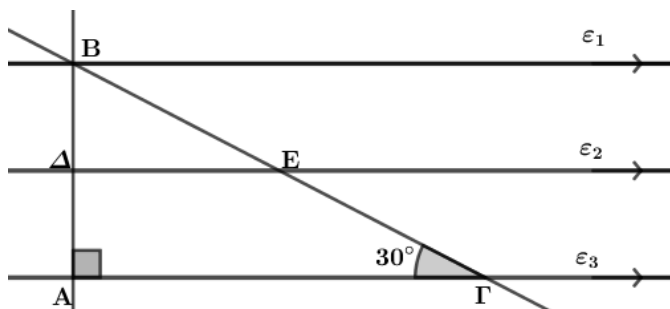
7. Να λύσετε την εξίσωση

$$3x^2 - 5x - 2 = 0$$

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$(x + y)^3 - x(x + y)^2 = xy(2y + x) + y^3$$

9. Στα πιο κάτω σχήμα $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3$ και $B\Delta = \Delta A = 3\text{cm}$. Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, να βρείτε το μήκος του BE. (Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



10. Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών ορθογωνίου παραλληλόγραμμου είναι κορυφές ρόμβου.

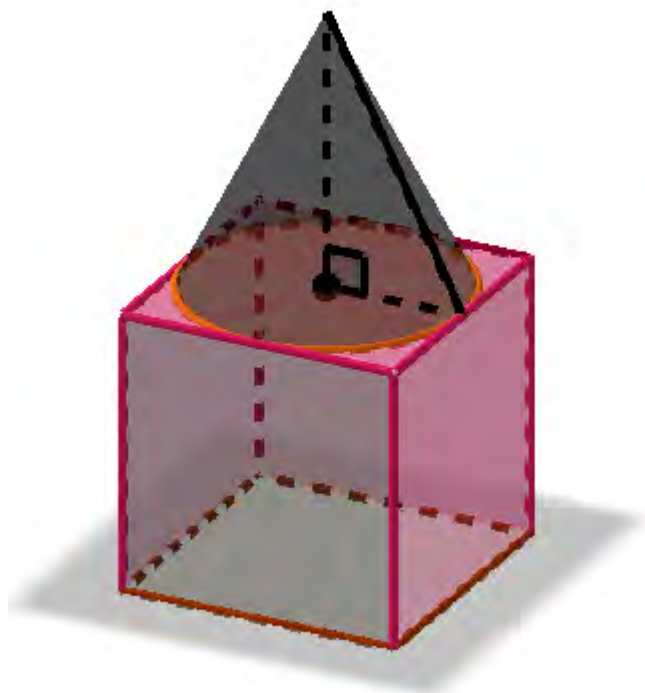
ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση.

$$\frac{x^2 + 4x - 2}{x^2 - x - 2} + \frac{x}{2 - x} = \frac{1}{x + 1} - 1$$

2. Η πιο κάτω κατασκευή αποτελείται από ένα κύβο και ένα κώνο. Να βρείτε τον **όγκο** και το **εμβαδόν** της εξωτερικής επιφάνειας της, αν η ακμή της βάσης του κύβου $a = 6cm$ και η γενέτειρα του κώνου $\lambda = 5cm$.



3. (α) Να κάνετε τις πράξεις και όλες τις δυνατές απλοποιήσεις όπου $a \neq 0, a \neq 1$ και $a \neq -1$.

$$\left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right) \cdot \frac{a^4 - a^3}{a^4 - 1} =$$

(β) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τις παραστάσεις:

(i) $xa^4 - xa =$

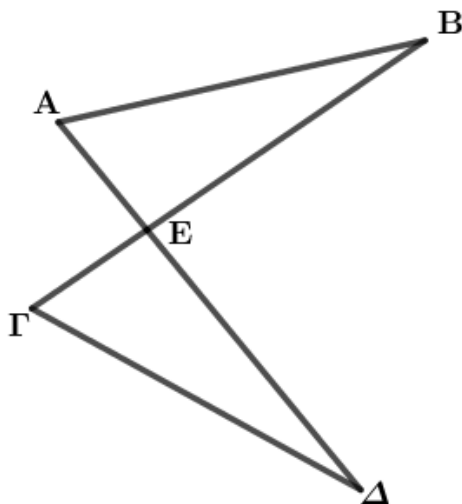
(ii) $(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)^2 - 4\alpha^2 \beta^2 =$

4. Στο πιο κάτω σχήμα ισχύει ότι $AE = GE$ και $BE = ED$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και GDE είναι ίσα. (3 μονάδες)

(β) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις EH και EO του σημείου E από τις πλευρές AB και GD αντίστοιχα είναι ίσες. (3 μονάδες)

(γ) Αν οι προεκτάσεις των AB και GD προς τα A και G αντίστοιχα τέμνονται στο Z , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο BZD είναι ισοσκελές. (4 μονάδες)



5. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABGD$, με $B(8,4)$, $G(6,0)$ και $D(2,-2)$.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς BG .

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής O των διαγωνίων του.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο B και είναι κάθετη στη BD .

(ε) Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο $ABGD$ είναι ρόμβος.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....

Ιωάννης Χατζηγιάνγκου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 5-6-2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

ΩΡΑ: 7:45π.μ. – 9:45π.μ.

ΒΑΘΜΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΣ:

ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ:ΑΡ.:

- Οδηγίες: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι . (Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tirrex) ή ταινίας.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από οκτώ (8) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄ (50 μονάδες)

Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα του μέρους Α΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1 Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $6\alpha + 6\beta =$

β) $x^2 - 25 =$

ΘΕΜΑ 2 Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 4)^2 =$

β) $(2y - 3)(2y + 3) =$

ΘΕΜΑ 3 Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις $2m$, $3m$ και $5m$. Να βρείτε:

α) τον όγκο του.

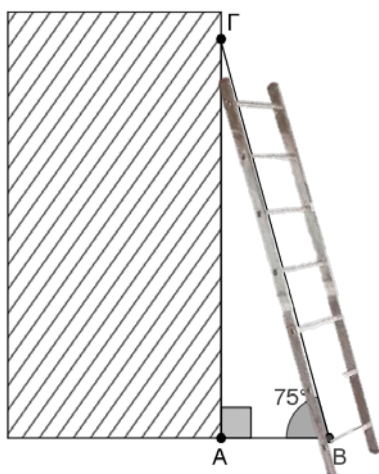
β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας .

ΘΕΜΑ 4 Να λύσετε το σύστημα με τη μέθοδο της αντικατάστασης.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y = 5 \\ 4x - 2y = 6 \end{array} \right\}$$

ΘΕΜΑ 5 Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 + 2x - 1 = 0$

ΘΕΜΑ 6 Μια σκάλα με μήκος 6m είναι ακουμπισμένη σε έναν τοίχο. Για λόγους ασφαλείας, η γωνία στο έδαφος πρέπει να είναι 75° . Να υπολογίσετε την απόσταση AB που πρέπει να τοποθετηθεί η βάση της σκάλας από τη βάση του τοίχου.



φ	$\eta\mu\varphi$	$\sigma\upsilon\nu\varphi$	$\epsilon\varphi\varphi$
15	0,26	0,97	0,27
75	0,97	0,26	3,73

ΘΕΜΑ 7 Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α) Ένα παραλληλόγραμμο που έχει τις διαγώνιές του ίσες είναι ορθογώνιο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) Ορθογώνιο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες είναι τετράγωνο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) Το σύστημα των εξισώσεων $y = 2x - 1$ και $y = -5x + 7$ είναι αδύνατο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) Η διάμεσος ορθογωνίου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε) Ένα τετράπλευρο που έχει δύο πλευρές παράλληλες και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες, είναι πάντοτε ρόμβος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 8 Να κάνετε τις πράξεις: $\left(\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x-2} \right) \div \frac{x+2}{x^2-3x+2} =$

ΘΕΜΑ 9 Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με εμβαδόν βάσης $100m^2$ και ύψος $12 m$. Να υπολογίσετε:

α) Το παράπλευρο ύψος της .

(2μον.)

β) Τον όγκο της.

(1,5μον.)

γ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της.

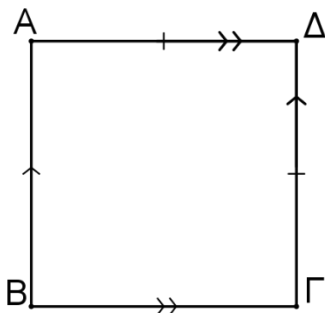
(1,5μον.)

ΘΕΜΑ 10 α) Να χαρακτηρίσετε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ ως προς το είδος του, αναφέροντας και το κριτήριο.

(2 μον.)

β) Αν η διαγώνιος ΑΓ έχει εξίσωση $y = 3κx - 5$ και η διαγώνιος ΒΔ έχει εξίσωση $y = -\frac{1}{9}x + 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου κ.

(3 μον.)



ΜΕΡΟΣ Β΄ (50 μονάδες)

Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα του μέρους Β΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1 Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{7x}{x^2 - x - 12} - \frac{x - 2}{4 - x} = \frac{3}{x + 3}$$

ΘΕΜΑ 2 α) Αν $\alpha \cdot \beta = -2$, να αποδείξετε ότι ισχύει :

$$(2\alpha - 5\beta)^2 - (2\alpha - 3) \cdot (2\alpha + 3) - 25\beta^2 = 49$$

β) Να παραγοντοποιήσετε πλήρως το πολυώνυμο: $(x - 5)(x - 1)^2 + 4y^2(5 - x) =$

ΘΕΜΑ 3 Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το ύψος του ΑΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα ώστε ΒΕ = ΓΖ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΑΖΔ είναι ίσα. (6 μον.)

β) Αν ΔΚ είναι το ύψος του τριγώνου ΕΔΖ, να αποδείξετε ότι ΕΚ=ΚΖ. (4 μον.)

ΘΕΜΑ 4 Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με Α(-3,4), Β(1,6), Γ(4,0) και Δ(0,-2).

α) Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ έχουν μήκος $\sqrt{45}$ μονάδες.

(1,5 μον.)

β) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ έχουν κλίση $\lambda = -2$.

(1,5 μον.)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (3 μον.)

δ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου του ΑΒΓΔ.

(1,5 μον.)

ε) Να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου μ , έτσι ώστε η ευθεία $y = (\mu^2 - 3\mu)x + 11$ να είναι παράλληλη με την πλευρά ΒΓ.

(2,5 μον.)

ΘΕΜΑ 5 Το πιο κάτω στερεό αποτελείται από έναν κύλινδρο και δύο ίσους κώνους ενωμένους στις βάσεις του. Ο όγκος του κυλίνδρου είναι ίσος με $432\pi m^3$ και το ύψος του είναι $12m$. Αν το ύψος του κώνου ισούται με $8m$, να βρείτε :

α) τον όγκο του στερεού.

β) το κόστος για να βάψουμε την εξωτερική επιφάνεια του στερεού , αν στοιχίζει €2 το τετραγωνικό μέτρο.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Τάξη: Γ'

Ημερομηνία: 05/06/2019

Διάρκεια: 2 ώρες

Ωρα: 07:45-09:45π.μ.

Βαθμός:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα: Αριθμός:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- (γ) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. Για τα σχήματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι.
- (δ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από πέντε (5) σελίδες και δύο (2) μέρη.
Να απαντήσετε προσεκτικά σε όλα τα μέρη και όλα τα θέματα.
- (ε) Να γράφετε με σαφήνεια όλα τα βήματα επίλυσης της κάθε άσκησης.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 θέματα.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Θέμα 1:

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(\alpha + 3)^2 =$

(β) $(\chi - 2)(\chi + 2) =$

Θέμα 2:

Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

(α) $3\chi + 3\psi - 3\omega =$

(β) $\chi^2 - 9 =$

Θέμα 3:

Να λύσετε το σύστημα:

$2\chi - 3\psi = 4$

$\chi + 3\psi = 11$

Θέμα 4:

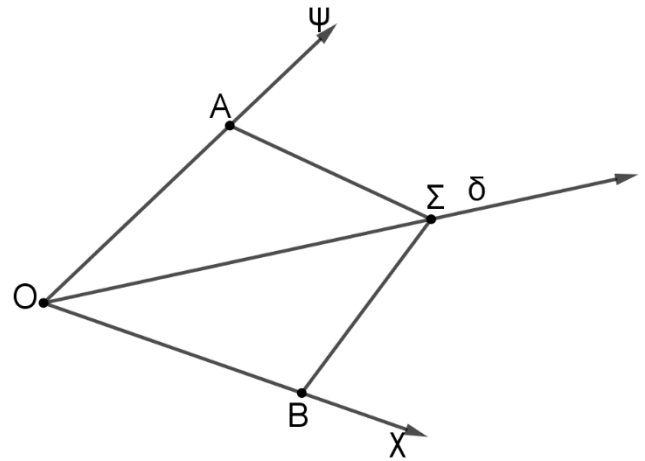
Να λύσετε την εξίσωση:

$$3\chi^2 - 2\chi - 1 = 0$$

Θέμα 5:

Στο διπλανό σχήμα Οδ είναι η διχοτόμος

της γωνίας $\hat{XO\Psi}$. Αν $OA = OB$ και Σ τυχαίο σημείο της διχοτόμου Οδ, να αποδείξετε ότι $SA = SB$.



Θέμα 6:

Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{\omega^3 - 2\omega^2 + \omega}{\omega^3 - \omega} =$$

Θέμα 7:

Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις $\alpha = 3\text{ cm}$, $\beta = 4\text{ cm}$ και $\gamma = 5\text{ cm}$. Να βρείτε:

(α) το εμβαδόν ολικής επιφάνειάς του ($E_{ολ}$),

(β) τον όγκο του (V).

Θέμα 8:

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η Παναγία των Παρισίων (Νοτρ Νταμ). Είναι ο μητροπολιτικός Ρωμαιοκαθολικός ναός της πόλης του Παρισιού και αποτελεί ένα από τα πλέον θαυμαστά αρχιτεκτονικά μνημεία της Πόλης.

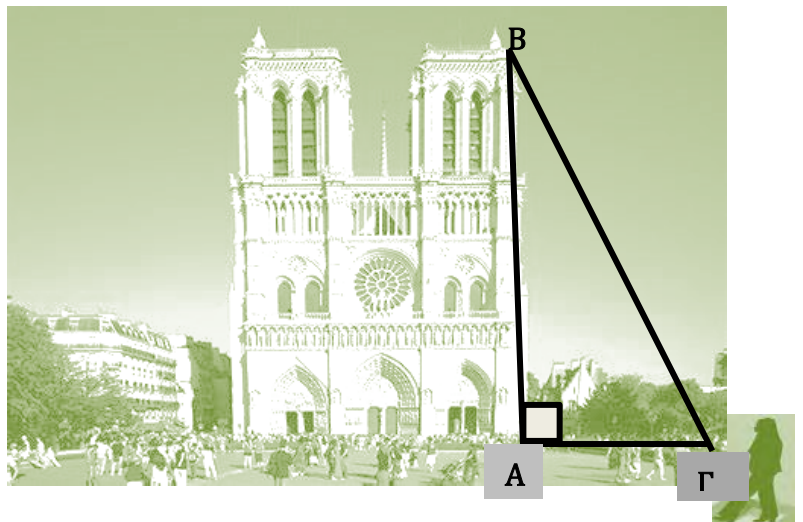
Ένας πεζός βρίσκεται στο σημείο Γ, σε απόσταση $AG = 44,8\text{ m}$ από τον πύργο,

όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να υπολογίσετε το ύψος, AB του

Ναού, αν η γωνία $BAG = 90^\circ$ και η

γωνία $BGA = 57^\circ$. Η απάντηση να δοθεί κατά προσέγγιση ακεραίου.



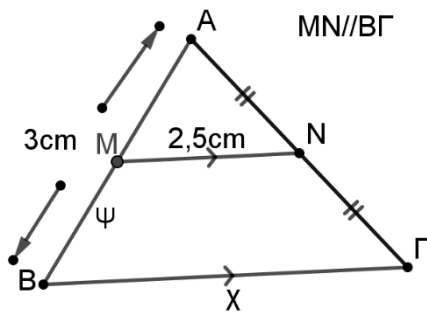
Δίνονται:

$\eta\mu 57^\circ = 0,839$	$\sigma\upsilon\nu 57^\circ = 0,545$	$\epsilon\varphi 57^\circ = 1,54$
$\eta\mu 33^\circ = 0,643$	$\sigma\upsilon\nu 33^\circ = 0,766$	$\epsilon\varphi 33^\circ = 0,839$

Θέμα 9:

- (α) Στο πιο κάτω σχήμα να υπολογίσετε τα χ και ψ .
(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

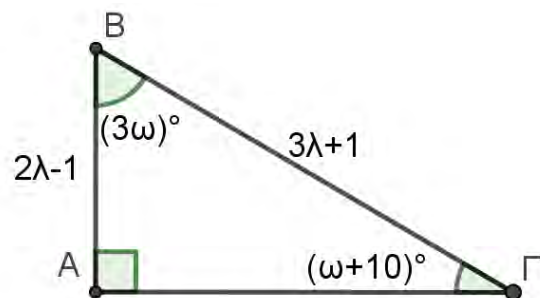
(μον.2)



- (β) Στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ:

(μον.3)

- να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.
- Να υπολογίσετε την τιμή του λ .

**Θέμα 10:**

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου β , έτσι ώστε η ευθεία $\varepsilon_1: \psi = \beta\chi - 8$ να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_2: \beta\chi + 9\psi = 1$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 θέματα.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Θέμα 1:

- (α) Να αποδείξετε ότι το πιο κάτω πολυώνυμο είναι σταθερό.

$$A(\chi) = (\chi - 3)^2 + (3\chi + 1)^2 - 10(\chi - 1)(\chi + 1)$$

- (β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\chi - 10}{\chi^2 - 4} - \frac{\chi}{2 - \chi} = \frac{2}{\chi + 2}$$

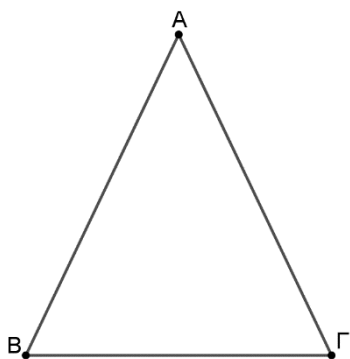
Θέμα 2:

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Αν τα ύψη $B\Delta$ και ΓE τέμνονται στο σημείο Σ , να δείξετε:

- (α) Τα ύψη $B\Delta$ και ΓE είναι ίσα.
- (β) Η $A\Sigma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $BA\Gamma$.

Θέμα 3:

Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), προεκτείνω τις πλευρές AB και $A\Gamma$ προς το A , κατά τμήματα $AE=AB$ και $AZ=A\Gamma$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZB\Gamma$, είναι ορθογώνιο.



Θέμα 4:

Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$.

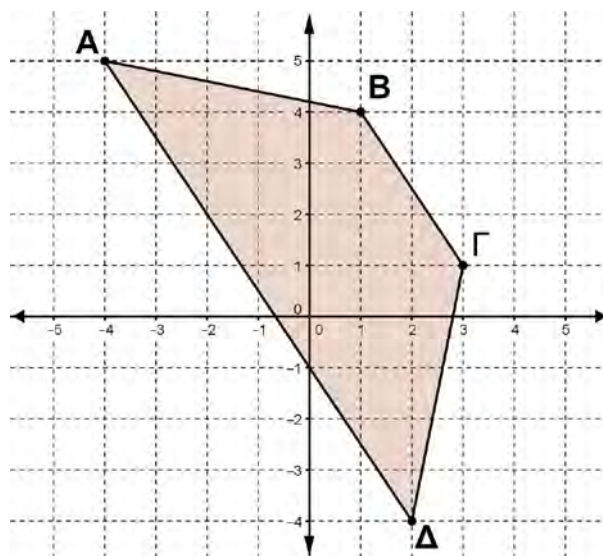
(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του.

(β) Να δείξετε ότι οι πλευρές $B\Gamma$ και $A\Delta$ είναι οι βάσεις του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.

(γ) Να εξετάσετε αν το τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές.

(δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των μέσων E και Z των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα.

(ε) Να αποδείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα EZ είναι παράλληλο προς τις βάσεις του τραpezίου $AB\Gamma\Delta$.



Θέμα 5:

Στο διπλανό σχήμα ο κώνος και ο κύλινδρος έχουν κοινή βάση και η σφαίρα είναι εγγεγραμμένη στον κύλινδρο. Αν ο όγκος του κώνου ισούται με $18\pi \text{ m}^3$ και το ύψος του κώνου είναι ίσο με $u=6\text{m}$ του, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.

(Η σφαίρα είναι το κενό που υπάρχει στο σχήμα.)



ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Εισηγητές/τριες

Σοφία Σαλλούμη

.....

Αβραάμ Νοταρίδης

.....

Διευθυντής

Νίκος Νικολάου

.....

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 31/05/2019

ΤΑΞΗ : Γ΄

ΧΡΟΝΟΣ : 2 ΩΡΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ : α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
γ) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τα 10 θέματα.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x - 6)^2 =$

(β) $(\psi + 4)(\psi - 4) =$

ΘΕΜΑ 2:

Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

(α) $7x + 7\psi =$

(γ) $3(x - 2) - \psi(x - 2) =$

(β) $\alpha^2 - 64 =$

(δ) $x^2 + 7x + 6 =$

ΘΕΜΑ 3:

Ένας κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης 4cm και ύψος 5cm. Να υπολογίσετε:

(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου.

(β) Το όγκο του κυλίνδρου.

(Οι απαντήσεις **σας μπορούν** να δοθούν συναρτήσει του π)

ΘΕΜΑ 4:

Να λύσετε το σύστημα:

$$x + 3\psi = 7$$

$$2x + \psi = 4$$

ΘΕΜΑ 5:

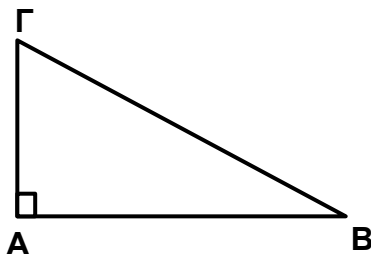
Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε την απάντησή σας στην πιο απλή της μορφή:

$$(\alpha) \frac{5x^2}{3\psi} \cdot \frac{9\psi^3}{10x\omega} =$$

$$(\beta) \frac{3}{x} - \frac{2}{x+5} =$$

ΘΕΜΑ 6:

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με πλευρές ΑΓ= 6cm και ΒΓ= 10cm. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημΓ, συνΓ και εφΒ.

**ΘΕΜΑ 7:**

Να βρείτε τις τιμές του μ και κ έτσι ώστε οι ευθείες $\epsilon_1: (\mu-8)x + \psi = 3\kappa - 4$ και $\epsilon_2: \psi = (3\mu+4)x + 5\kappa$ να ταυτίζονται.

ΘΕΜΑ 8:

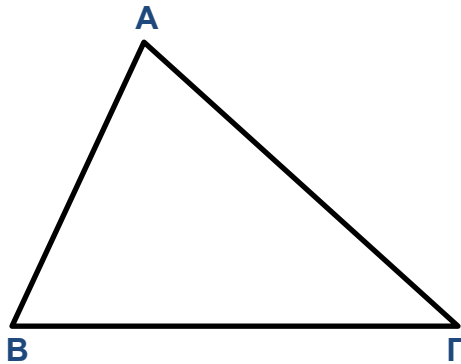
Αν $x = \frac{1}{\psi}$ και $A = (5x - \psi)^2 - (5x - 3)(5x + 3) + 4\psi - (\psi + 2)^2$ να δείξετε ότι $A = -5$

ΘΕΜΑ 9:

Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε την $AZ \perp B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα $BD = AB$ και την πλευρά $A\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma E = A\Gamma$.

Να δείξετε ότι τα σημεία Δ και E **ισαπέχουν** από την ευθεία $B\Gamma$.

(Σχήμα-Δεδομένα-Ζητούμενα)



ΘΕΜΑ 10:

Στο πιο κάτω σχήμα, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και το σημείο O είναι το κέντρο του. Το N είναι το μέσο της AB , $MO \parallel \Gamma\Delta$, $\angle A\Gamma B = 90^\circ$ και $B\Gamma = 7\text{cm}$.

Αν $MO = (x + 3)\text{cm}$ και $\Delta\Gamma = (4x - 2)\text{cm}$ να υπολογίσετε:

(α) Το x .

(μον.2)

(β) Τα μήκη των πλευρών MO , $\Delta\Gamma$.

(μον.1)

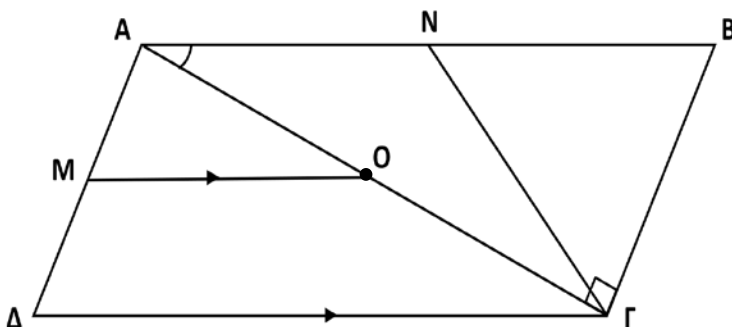
(γ) Το μήκος της πλευράς ΓN .

(μον.1)

(δ) Το μέτρο της γωνίας $\angle A\Gamma B$.

(μον.1)

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τα 5 θέματα του Μέρους Β΄
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{2x}{x-1} - \frac{3}{x^2-3x+2} = 4 + \frac{x+1}{2-x}$

ΘΕΜΑ 2:

(α) Δίνονται $A = \frac{x^4 + 8x}{2x^4 - 4x^3 + 8x^2}$ και $B = \frac{2x^2 - 8}{3x^2 - 6x}$

(i) Να απλοποιήσετε τις πιο πάνω παραστάσεις και στη συνέχεια να δείξετε ότι:

$$A : B = \frac{3}{4} \quad (\text{μον.5})$$

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $3x^2 - x + 1 = 4(A : B)$ (μον.2)

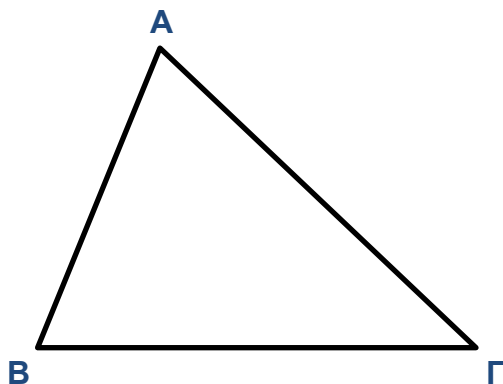
(β) Αν $\kappa - \lambda = \alpha$ και $\kappa\lambda = \beta(\alpha + \frac{\beta}{2})$ να δείξετε ότι : $\kappa^2 + \lambda^2 = (\alpha + \beta)^2$ (μον.3)

ΘΕΜΑ 3:

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνιάς B και M το μέσο της $B\Delta$. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E .

Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο Z να **αποδείξετε** ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι ρόμβος.

(Σχήμα-Δεδομένα-Ζητούμενα)



ΘΕΜΑ 4:

Ένα εργοστάσιο φτιάχνει σοκολάτες, σε σχήμα κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας και σε σχήμα σφαίρας. Η πυραμίδα έχει παράπλευρο ύψος 5cm και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 60cm^2 , ενώ η σφαίρα έχει μήκος ακτίνας ίσο με το **μισό** του μήκους της πλευράς της βάσης της πυραμίδας.

(α) Να δείξετε ότι η πλευρά της βάσης της τετραγωνικής πυραμίδας είναι μήκους 6cm. (μον.2)

(β) Να βρείτε ποιό από τα δύο σχήματα χρειάζεται την μεγαλύτερη ποσότητα σοκολάτας για να κατασκευαστεί **με δεδομένο** ότι οι σοκολάτες είναι συμπαγής (δεν είναι κούφιες). (μον.3)

(γ) Τα σοκολατάκια τοποθετούνται σε δύο διαφορετικά είδη κουτιών ως εξής:
Σε κάθε κουτί **σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου** τοποθετούνται **τα** σοκολατάκια σχήματος πυραμίδας σε δύο σειρές των 5 τεμαχίων η κάθε σειρά.
Σε κάθε κουτί **σχήματος κύβου** τοποθετούνται 8 σοκολατάκια σχήματος σφαίρας.
(Και στις δύο συσκευασίες τα σοκολατάκια εφαρμόζουν πλήρως σε όλες τις διαστάσεις των κουτιών).

Να βρείτε σε ποιο από τα δύο κουτιά **υπάρχει περισσότερος** κενός χώρος (δηλαδή ο χώρος που δεν καταλαμβάνεται από τις σοκολάτες).
(μον.5)

ΘΕΜΑ 5:

Δίνεται **το** τετράπλευρο ABΓΔ με κορυφές A(-2,1), B(1,4), Γ(5,4) και Δ(-2,-3).
Να αποδείξετε ότι :

(α) Το τετράπλευρο ABΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (μον.4)

(β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΚΛ του τραπεζίου. (μον.3)

(γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΕ του τραπεζίου. (μον.3)

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Παπαχρίστου Τομάζος

ΜΕΡΟΣ Α Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

α) $(8 + \kappa)(8 - \kappa) =$

β) $(x + 6)^2 =$

2. Να βρείτε τη λύση του πιο κάτω συστήματος:

$$5x + y = -1$$

$$3x + 2y = 5$$

Λύση Συστήματος:

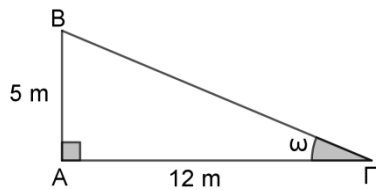
3. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $3w - 3z + wy - zy =$

β) $x^2(x - 5) - 49(x - 5) =$

4. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .



5. Να υπολογίσετε την τιμή των x , y και z στα πιο κάτω σχήματα:

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)

α)	β)
-----------	-----------

6. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$7x^2 - 4x - 3 = 0$$

7. Δίνεται κώνος με ύψος 15 cm και εμβαδόν βάσης $64\pi\text{ cm}^2$.

Να υπολογίσετε:

- α) τον όγκο του κώνου και
- β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κώνου.

8. Δίνονται οι ευθείες:

$$\varepsilon_1: y = (\kappa^2 - 6\kappa)x + 5 \text{ και}$$

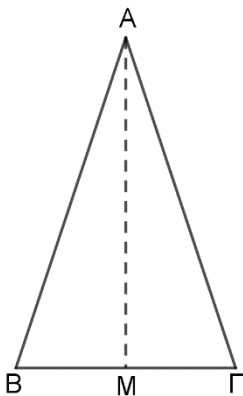
$$\varepsilon_2: 18x + 2y = 20$$

Να υπολογίσετε την τιμή του κ , έτσι ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι παράλληλες.

9. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) και η AM είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) οι γωνίες της βάσης του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι ίσες,
- β) η AM είναι και διχοτόμος και ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$.

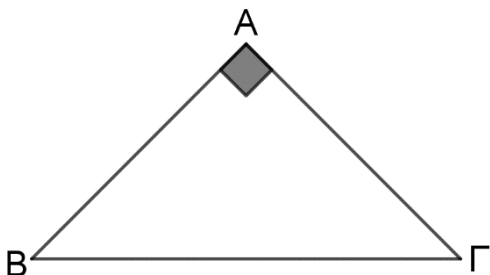


10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$, $\hat{A} = 90^\circ$).

- α) Να φέρετε τη διάμεσο AM και να την προεκτείνετε κατά τμήμα $MD = AM$.

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma\Delta B$ είναι τετράγωνο.

- β) Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA , να πάρετε σημεία Z και H , αντίστοιχα, έτσι ώστε $AZ = AH$. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AMH και AMZ είναι ίσα.



ΜΕΡΟΣ Β

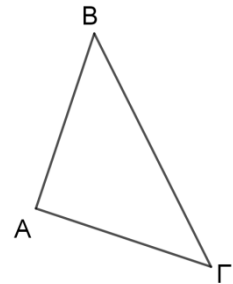
Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2}{x^2 - 5x + 6} - \frac{x}{x - 2} = \frac{2}{x - 3}$$

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με συντεταγμένες κορυφών $A(-3, 4)$, $B(-1, 10)$ και $\Gamma(3, 2)$.

- α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
γ) Να βρείτε το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB .
δ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους AD .



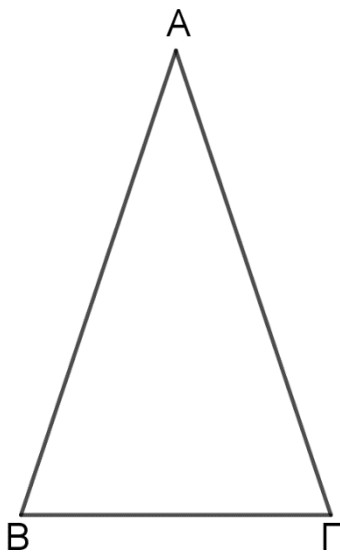
3. α) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:
 $(2x + 1)^3 + (x - 2)(x + 2) - 2x(2x - 1)^2 - 16x^2 = 5x^2 + 4x - 3$

β) Να δείξετε ότι:

$$\frac{\left(\frac{x^2}{x-3} - \frac{3x}{x+3}\right) \cdot \frac{9-x^2}{9x^2}}{\frac{x^2+9}{9x}} = -1$$

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$. Το σημείο K είναι το μέσο της AB , το Λ το μέσο της $A\Gamma$ και το M το μέσο της $B\Gamma$.

- α) Αν KP και $\Lambda\Sigma$ είναι οι αποστάσεις των σημείων K και Λ από την πλευρά $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $KP = \Lambda\Sigma$.
β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Lambda\Lambda M K$ είναι ρόμβος.



5. Ο διευθυντής ενός εργοστασίου αρωμάτων αποφάσισε να μεταφέρει το περιεχόμενο από μερικά μπουκάλια αρώματος σχήματος κύβου σε μερικά μπουκαλάκια σχήματος τετραγωνικής πυραμίδας, για να τα δώσει στους πελάτες του για διαφημιστικούς σκοπούς. Το κάθε μπουκάλι σχήματος κύβου έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας 486 cm^2 και το κάθε μπουκάλι σχήματος πυραμίδας έχει ύψος 4 cm και παράπλευρο ύψος 5 cm .

Να υπολογίσετε πόσα **το πολύ** μπουκαλάκια σχήματος πυραμίδας θα γεμίσουν από το περιεχόμενο **δέκα** μπουκαλιών σχήματος κύβου.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 5/6/2019

ΧΡΟΝΟΣ : 2 ώρες

ΩΡΑ: 7:45 –9:45

ΒΑΘΜΟΣ:

ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:.....

ΥΠΟΓΡΑΦΗ:.....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: **ΤΜΗΜΑ:** **ΑΡ.:**

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΟ (2) ΜΕΡΗ ΚΑΙ ΟΚΤΩ (8) ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(\chi + 3)^2 =$

(β) $(\chi - 5) \cdot (\chi + 5) =$

ΑΣΚΗΣΗ 2: Να λύσετε την εξίσωση: $(\chi - 7) \cdot (\chi + 2) = 0$

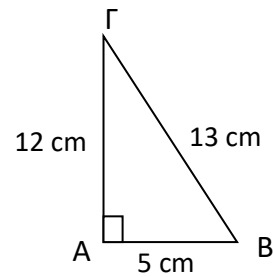
ΑΣΚΗΣΗ 3: Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $\psi^2 + \psi =$

(β) $\chi^2 - 9\psi^2 =$

ΑΣΚΗΣΗ 4:

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με υποτείνουσα $B\Gamma = 13 \text{ cm}$ και κάθετες πλευρές $AB = 5 \text{ cm}$, $A\Gamma = 12 \text{ cm}$.
Να υπολογίσετε :



ε

(α) $\eta\mu \Gamma =$

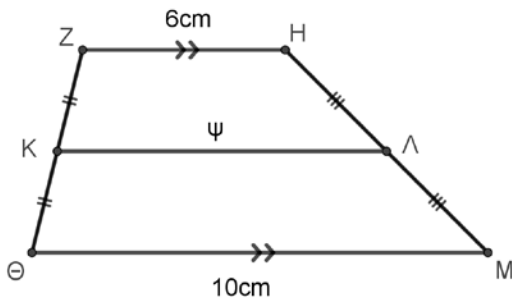
(β) $\epsilon\phi B =$

ΑΣΚΗΣΗ 5: Να λύσετε το σύστημα:

$$3\chi - 2\psi = 13$$

$$5\chi + 2\psi = 27$$

ΑΣΚΗΣΗ 6: Δίνεται τραπέζιο $ZHM\Theta$. Αν $K\Lambda$ διάμεσος του τραpezίου να βρείτε την τιμή του ψ .
(Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας)



ΑΣΚΗΣΗ 7: Κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης 5 cm και ύψος 8 cm . Να υπολογίσετε συναρτήσει του π :

(α) Το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας.

(β) Τον όγκο του κυλίνδρου.

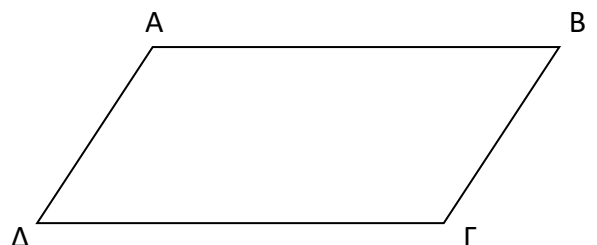
ΑΣΚΗΣΗ 8: Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και E μέσο της πλευράς AB . Προεκτείνουμε τη DE κατά τμήμα $EZ = DE$. Να δείξετε ότι:

(α) $BZ = A\Delta$ και

(Μον.3)

(β) Το $AZB\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μον.2)



ΑΣΚΗΣΗ 9: Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{6\chi}{\chi^2 - 9} + \frac{2\chi}{\chi + 3} \right) : \frac{2\chi^2}{\chi^2 + 6\chi + 9} =$$

ΑΣΚΗΣΗ 10: Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(2\chi + 1)^2 + (\chi - 1)^3 - \chi(\chi - 2)(\chi + 2) = \chi(\chi + 11)$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΑΣΚΗΣΗ 1: Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2\chi}{\chi - 1} - \frac{\chi + 1}{2 - \chi} = \frac{3}{\chi^2 - 3\chi + 2} + 4$$

ΑΣΚΗΣΗ 2: Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) να προεκτείνετε την πλευρά ΒΑ κατά τμήμα ΑΕ και την πλευρά ΓΑ κατά τμήμα ΑΔ, έτσι ώστε ΑΕ = ΑΔ. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

(α) ΒΔ = ΓΕ

(β) Το τρίγωνο ΔΜΕ είναι ισοσκελές.

(Σχήμα – δεδομένα – ζητούμενα)

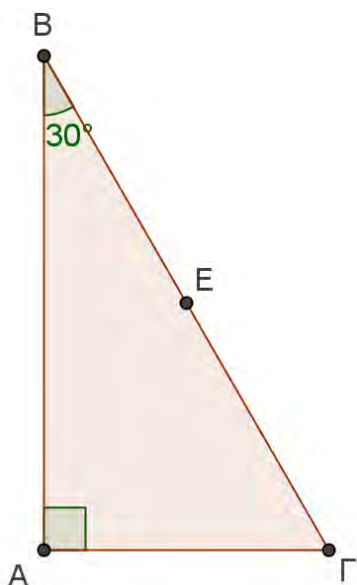
ΑΣΚΗΣΗ 3: Στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), $\hat{B} = 30^\circ$ και Ε μέσο της ΒΓ.

Από το Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΓ που τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Προεκτείνουμε την ευθεία ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ=ΕΔ. Να αποδείξετε ότι:

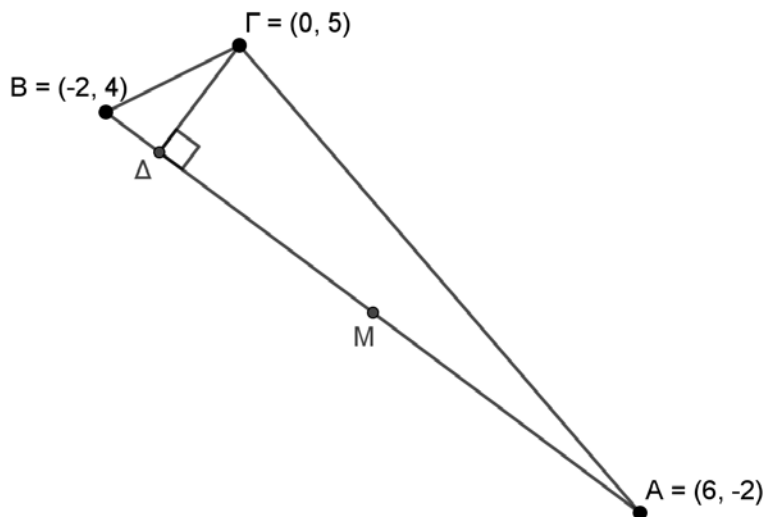
(α) Το τρίγωνο ΑΒΕ είναι ισοσκελές. (Μον.4)

(β) Το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος. (Μον.4)

(γ) Αν $ZA = 2\chi^2 - 5$ και $AE = \chi + 1$ να βρείτε την τιμή του χ . (Μον.2)

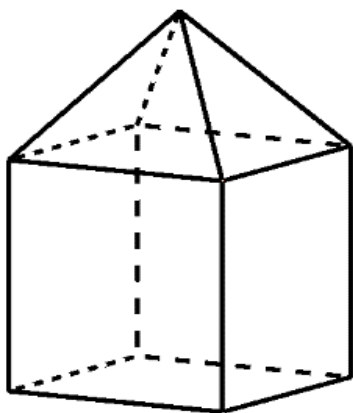


- ΑΣΚΗΣΗ 4:** Δίνεται το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $A(6,-2)$, $B(-2,4)$, $\Gamma(0,5)$, M μέσο της AB και $\Gamma\Delta \perp AB$.
- (α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB .
- (β) Να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων AB .
- (γ) Να βρείτε τις κλίσεις των ευθειών AB και ΓM .
- (δ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$.
- (ε) Αν η ευθεία $\epsilon: \psi = (\kappa - \kappa^2) \chi - 12$ είναι παράλληλη με την ΓM , να βρείτε τις τιμές του κ .



ΑΣΚΗΣΗ 5: Το πιο κάτω στερεό είναι δεξαμενή νερού που αποτελείται από έναν κύβο με όγκο 216 m^3 και από μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα με ύψος ίσο με τα $\frac{2}{3}$ της ακμής του κύβου.

- (α) Να βρείτε τον όγκο της δεξαμενής. (Μον.4)
- (β) Να βρείτε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της δεξαμενής. (Μον.3)
- (γ) Η δεξαμενή θα αντικατασταθεί από μια άλλη σχήματος κώνου που έχει εμβαδόν βάσης $16\pi \text{ m}^2$. Να βρείτε το ύψος που πρέπει να έχει ο κώνος, έτσι ώστε να έχει τον ίδιο όγκο με την αρχική δεξαμενή. (Μον.3)
- (Μπορεί η απάντηση να δοθεί συναρτήσει του π)



Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΣΤΑΥΡΟΥ ΓΙΑΝΝΗΣ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΒΑΘΜΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΣ:

ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ' Γυμνασίου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 27/05/2019

ΩΡΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 10: 15 – 12: 15

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΑΡ.: ΤΜΗΜΑ:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (i) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- (ii) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, η οποία φέρει σφραγίδα Δημοσίου Σχολείου Μέσης Εκπαίδευσης.
- (iii) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από ΔΕΚΑ (10) δακτυλογραφημένες σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Το μέρος αυτό αποτελείται από δέκα (10) ασκήσεις. Να λύσετε και τις δέκα (10). Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

α) $(x-4)^2 =$

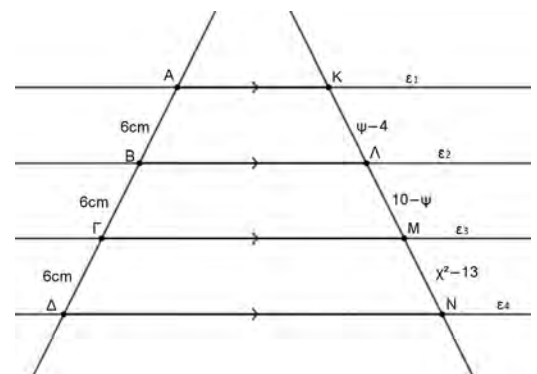
β) $(3x+1)(3x-1) =$

2. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πιο κάτω πολυώνυμα:

α) $2x+6\psi =$

β) $\alpha x + \alpha \psi + 5x + 5\psi =$

3. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$, και ε_4 ώστε $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_3 \parallel \varepsilon_4$. Αν $AB = BG = \Gamma\Delta = 6 \text{ cm}$, να βρείτε τις τιμές των x και ψ , δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



4. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$2\chi + 3\psi = 7$$

$$3\chi - 5\psi = 1$$

5. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$5\chi^2 - 3\chi - 2 = 0$$

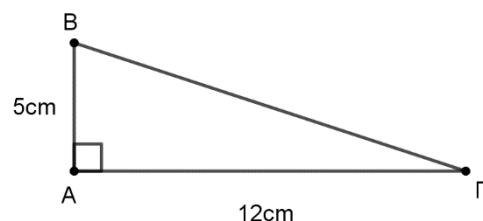
6. Να υπολογίσετε την τιμή του κ , ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: \psi = (2\kappa - 5)\chi - 18$ και

$$\varepsilon_2: 7\psi - \chi = 13 \quad \text{να είναι κάθετες.}$$

7. Κύλινδρος έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $90\pi \text{ cm}^2$ και ύψος 9 cm . Να βρείτε τον όγκο του.

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Οι κάθετες πλευρές AB και $A\Gamma$ είναι ίσες με 5 cm και 12 cm αντίστοιχα. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$K = 13 \cdot (\sin B + \eta\mu\Gamma) + 5 \cdot \varepsilon\phi B$$



9. Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσο AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το B κατά τμήμα $BZ = B\Gamma$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma H = B\Gamma$. Προεκτείνουμε επίσης τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME = AM$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

10. Να κάνετε τις πράξεις: $\left(\frac{3\chi^2}{\chi^2 - 6\chi + 9} + \frac{\chi^2}{\chi - 3} \right) \div \left(\frac{2\chi^2}{\chi^2 - 9} \right) =$

ΜΕΡΟΣ Β': Το μέρος αυτό αποτελείται από πέντε (5) ασκήσεις. Να λύσετε και τις πέντε (5).

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Μια πισίνα σε σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου έχει μήκος 10 m , πλάτος 6 m και βάθος 3 m .
- α) Να βρείτε την χωρητικότητα της πισίνας σε m^3 .
- β) Αν η εσωτερική επιφάνεια της πισίνας (τοιχώματα και πυθμένας), θα επιστρωθεί με πλακάκια, η αγορά και η τοποθέτηση των οποίων στοιχίζει συνολικά $\text{€ } 30$ το τετραγωνικό μέτρο, να βρείτε το κόστος της επίστρωσης της πισίνας με πλακάκια.

2. α) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$\frac{\chi-7}{\chi^2-5\chi+4} - \frac{1}{4-\chi} = \frac{\chi-3}{\chi^2-\chi}$$

- β) Να αποδείξετε ότι ισχύει η πιο κάτω ταυτότητα:

$$(2\chi+1)^3 - (3+\chi)(\chi-3) - 2\chi^2(4\chi+5) - 1 = (\chi+3)^2$$

3. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90^\circ$ και η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$. Από το σημείο Δ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα ΔE τέτοιο ώστε $\Delta E \perp B\Gamma$

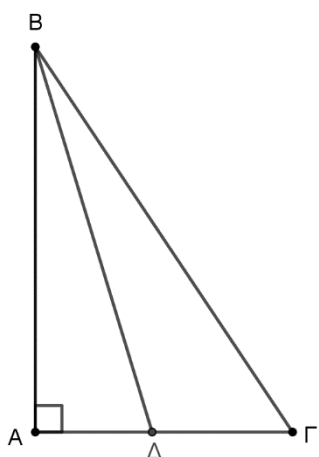
α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $EB\Delta$ είναι ίσα.

β) Αν η προέκταση του ΔE τέμνει την προέκταση της πλευράς BA στο Z , να δείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και $E\Delta\Gamma$ είναι ίσα

ii) το τρίγωνο $BZ\Gamma$ είναι ισοσκελές ($B\Gamma = BZ$).

Να δικαιολογήσετε κάθε απάντησή σας.



4. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(7,-1)$, $B(0,2)$, $\Gamma(-1,5)$ και $\Delta(6,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

β) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $A\Gamma$.

γ) Να βρείτε το σημείο τομής των διαγωνίων του.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.

ε) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Δ και είναι παράλληλη με τη διαγώνιο $A\Gamma$ του τετραπλεύρου.

5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, M το μέσο της AB και Λ το μέσο της $B\Gamma$.

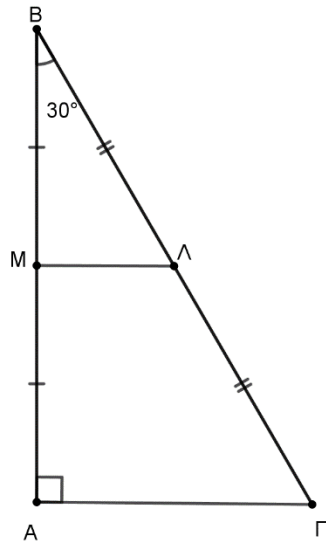
α) Αν $BL = (\chi^2 - 3) \text{ cm}$ και $\Lambda\Gamma = (3\chi + 1) \text{ cm}$, να βρείτε την τιμή του χ .

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $M\Lambda\Gamma A$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο.

γ) Αν η $\Theta\Lambda$ είναι η διάμεσος του τραπέζιου $M\Lambda\Gamma A$, να υπολογίσετε το μήκος της.

δ) Να προεκτείνετε το ευθύγραμμο τμήμα $M\Lambda$ κατά τμήμα ΛK , έτσι ώστε $\Lambda K = \Lambda\Gamma$ και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Lambda K\Gamma A$ είναι ρόμβος.

Να δικαιολογήσετε κάθε απάντησή σας.



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ : Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 29/05/2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ΩΡΕΣ

ΩΡΑ: 07.45π.μ.– 09.45π.μ.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:ΑΡ. :

ΤΜΗΜΑ :

ΒΑΘΜΟΣ :ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ : α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

γ) Να γράψετε μόνο με **μπλε ή μαύρο** μελάνι

(στα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι) .

δ) **ΤΟ ΓΡΑΠΤΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΟΧΤΩ (8) ΣΕΛΙΔΕΣ**

ΜΕΡΟΣ Α΄ (50 μονάδες)

Να απαντήσετε και στα 10 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1: Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $2x - 2a =$

β) $k^2 - 25 =$

ΘΕΜΑ 2: Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

α) $(a + 7)^2 =$

β) $(b - 8)(b + 8) =$

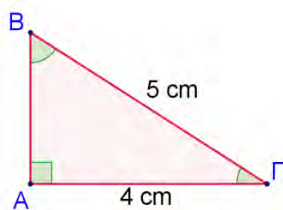
ΘΕΜΑ 3: Να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των σημείων A(1,0) και B(1,4) .

ΘΕΜΑ 4: Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 4m , 10m και 3m .

ΘΕΜΑ 5: Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3\chi - 4\psi = 4 \\ \chi + 2\psi = 8 \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 6: Να βρείτε το ημίτονο και συνημίτονο της γωνίας Γ .



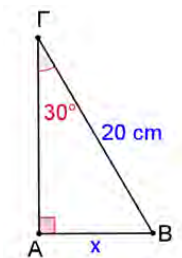
ΘΕΜΑ 7: Να υπολογίσετε την παράσταση:

$$\left(\frac{1}{x+2} - \frac{x}{x^2-3x-10} \right) \cdot \frac{x^2-25}{5x+25} =$$

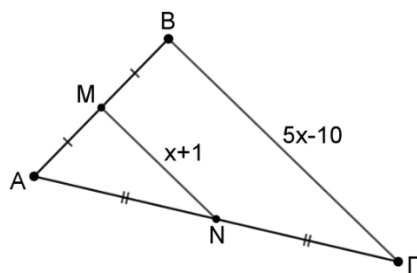
ΘΕΜΑ 8: Στα πιο κάτω τρίγωνα να υπολογίσετε το χ .

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας αναφέροντας τα σχετικά θεωρήματα.

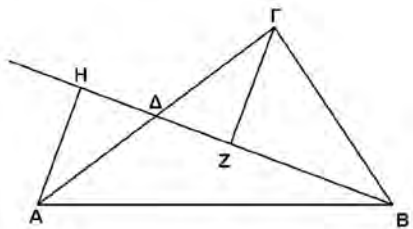
α)



β)



ΘΕΜΑ 9: Στο πιο κάτω σχήμα η $B\Delta$ είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$. Αν ΓZ είναι το ύψος του τριγώνου $B\Gamma\Delta$ και AH κάθετη στην ευθεία HB , να αποδείξετε ότι $AH = \Gamma Z$.



ΘΕΜΑ 10: Δίνονται ευθείες $\varepsilon_1: \psi = (3\beta^2 - 4\beta - 8)\chi + 7$ και $\varepsilon_2: \psi - \chi = 4$

Να υπολογίσετε το β ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι κάθετες.

ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να απαντήσετε και στα 5 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1: α) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή.

$$A = \frac{\chi^2\psi^2 - \psi^4}{\chi^3 - \psi^3} \cdot \frac{\chi\psi^2 + \psi^3}{\chi^2 + \chi\psi + \psi^2}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3}{x+3} - \frac{7x}{x^2-x-12} = \frac{x-2}{x-4}$$

ΘΕΜΑ 2: α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(2\chi+3)^3 - 36(\chi+1)^2 - 8\chi^3 = (5\chi-3)(5\chi+3) - 18\chi - 25\chi^2$$

β) Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις πιο κάτω παραστάσεις:

i) $\chi^2 - 6\chi + 9 - (\beta + \omega)^2 =$

ii) $\kappa\omega + \kappa + \omega^2 + 3\omega + 2 =$

- ΘΕΜΑ 3:** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και BZ η διχοτόμος της γωνίας B (Z σημείο της $\Delta\Gamma$). Φέρουμε ΓO κάθετη στη BZ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την AB στο E . Να αποδείξετε ότι:
- α) το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές (μον.3)
 - β) τα τρίγωνα $OZ\Gamma$ και OEB είναι ίσα (μον.3)
 - γ) το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ είναι ρόμβος (μον.4)

ΘΕΜΑ 4: Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφές $A(1,-1)$, $B(-1,1)$, $\Gamma(4,2)$.

Να υπολογίσετε:

- α) τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς AB
- β) την κλίση της διαμέσου ΓM
- γ) την εξίσωση της διαμέσου ΓM
- δ) την εξίσωση του ύψους $A\Delta$

ΘΕΜΑ 5: Η πιο κάτω κατασκευή αποτελείται από κύβο ακμής 18 dm και μια πυραμίδα με βάση μια έδρα του κύβου. Αν το ύψος της πυραμίδας είναι 12 dm ,

α) να υπολογίσετε:

i) τον όγκο της κατασκευής

(μον.4)

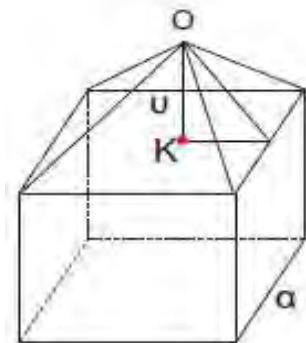
ii) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της κατασκευής

(μον.4)

β) Η κατασκευή αυτή για να μην απορροφά υγρασία, θα στεγανοποιηθεί ολόκληρη η εξωτερική της επιφάνεια με υλικό που κοστίζει €0,5 ανά dm^2 .

Αν η τοποθέτηση του υλικού κοστίζει €0,25 ανά dm^2 , να υπολογίσετε το συνολικό κόστος της στεγανοποίησης.

(μον.2)



Ο Διευθυντής

.....

Σάββας Αλεξάνδρου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΤΑΞΗ: Γ'****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 31/05/2019****ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ΩΡΕΣ**

Βαθμός:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
2. Να γράφετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 θέματα του Μέρους Α'.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(\alpha) (x+1)^2 =$$

$$(\beta) (x+3)(x-3) =$$

ΘΕΜΑ 2:

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha) 3x - 6y =$$

$$(\beta) x^2 - 36 =$$

ΘΕΜΑ 3:

Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 3cm, 5cm και 10cm.

ΘΕΜΑ 4:

Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα εξισώσεων:

$$x + 2y = 5$$

$$2x - 3y - 3 = 0$$

ΘΕΜΑ 5:

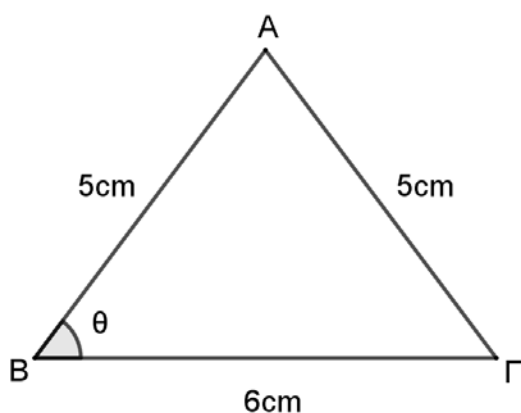
Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} : \frac{2x^2 - 8}{2x - 6} =$

ΘΕΜΑ 6:

Να λύσετε την εξίσωση: $x + \frac{1}{x} - \frac{10}{3} = 0$

ΘΕΜΑ 7:

Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .

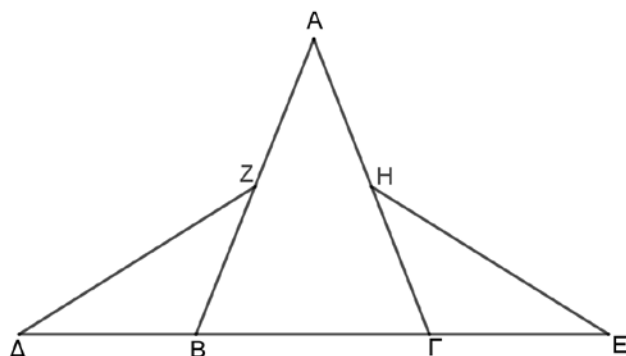
**ΘΕΜΑ 8:**

Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$x(3x - 7) + (x - 1)^3 = x(x + 2)(x - 2) - 1$$

ΘΕΜΑ 9:

Στο πιο κάτω σχήμα $AB = AG$. Αν Z, Η είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG αντίστοιχα και $BD = GE$, να αποδείξετε ότι $DZ = HE$.



ΘΕΜΑ 10:

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 που περνά από το σημείο $A(4, -1)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_1 : x - 2y = -4$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 θέματα του Μέρους Β'.

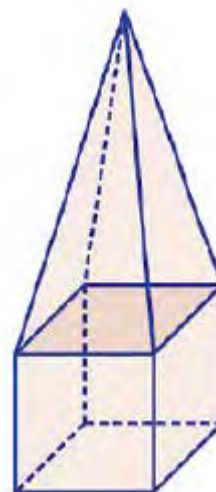
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

Το πιο κάτω στερεό αποτελείται από ένα κύβο με εμβαδόν βάσης 100cm^2 και μια πυραμίδα με παράπλευρο ύψος 13cm .

(α) Να υπολογίσετε την ολική επιφάνεια του στερεού που δημιουργείται.

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται.

**ΘΕΜΑ 2:**

(α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x}{x-4} + \frac{5}{2-x} = \frac{8}{x^2 - 6x + 8}$$

(β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:

$$(3x - 6)(x^2 - 1) - (5x - 10)(x - 1)^2 =$$

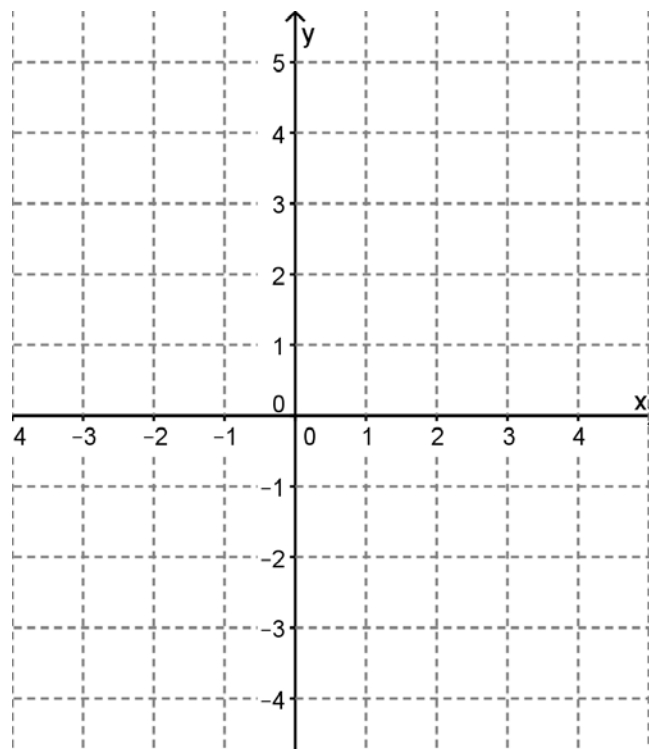
ΘΕΜΑ 3:

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε τη ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΔBAZ είναι ρόμβος.

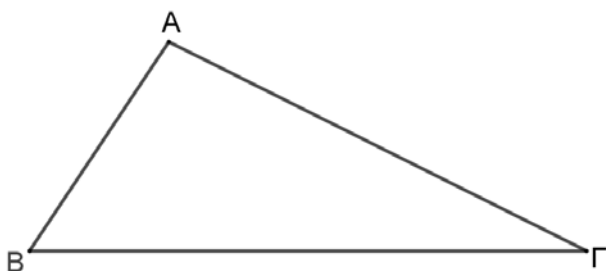
ΘΕΜΑ 4:

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές: $A(-1, 2)$, $B(3, 1)$ και $\Gamma(0, -2)$.

- (α) Να τοποθετήσετε τα σημεία A , B και Γ στο πιο κάτω ορθογώνιο σύστημα αξόνων. (μον. 1)
(β) Να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$. (μον. 2)
(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB . (μον. 2)
(δ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$. (μον. 5)

**ΘΕΜΑ 5:**

Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε το ύψος AH . Αν Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB , $B\Gamma$, και $A\Gamma$ αντίστοιχα να δείξετε ότι το τετράπλευρο $H\Delta ZE$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



Η Διευθύντρια

Ελένη Σταύρου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΤΑΞΗ: Γ'
ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες (07:45-09:45)
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29 / 05 / 2019

ΒΑΘΜΟΣ

Αριθμητικώς:

Ολογράφως:

Υπογραφή Καθηγ.:

Ονοματεπώνυμο μαθητή/τριας: Τμήμα: Αρ.:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει σφραγίδα.
2. Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
3. ΔΕΝ επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **9 (εννέα)** δακτυλογραφημένες σελίδες

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις **δέκα (10)** ασκήσεις του **ΜΕΡΟΥΣ Α΄**.Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **πέντε (5) μονάδες**.**1)** Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(\alpha) (\psi + 2)^2 =$$

$$(\beta) (4 + 3\chi) \cdot (4 - 3\chi) =$$

2) Να λύσετε το σύστημα:

$$\chi + 2\psi = -3$$

$$-2\chi + 3\psi = -8$$

3) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $3\alpha^2 + 9\alpha =$ (μονάδα 1)

(β) $\chi^2 - 64 =$ (μονάδα 1)

(γ) $4(\chi + 1) - \alpha(\chi + 1) =$ (μονάδα 1)

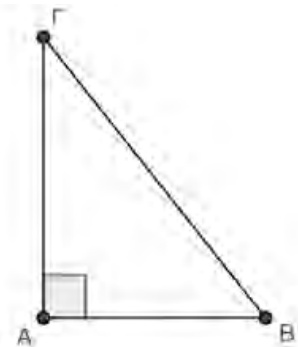
(δ) $\psi^2 - 9\psi + 20 =$ (μονάδες 2)

4) Να λύσετε την εξίσωση:

$$3\chi^2 + 8\chi - 3 = 0$$

5) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Αν $\varepsilon\phi B = \frac{12}{9}$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = 24 \cdot \varepsilon\phi\Gamma - 15 \cdot \eta\mu\Gamma + 30 \cdot \sigma\upsilon\nu B$$



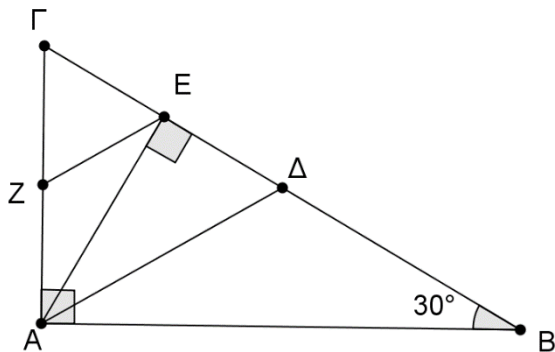
6) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{\chi^2 - 2\chi + 1}{\chi^2 + 2\chi - 3} : \frac{\chi^2 - 1}{2\chi^2 + 6\chi} =$$

7) Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Προεκτείνουμε το ύψος ΑΔ προς το Δ και παίρνουμε πάνω στην προέκταση σημείο Η. Αν Ε και Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΗΕ = ΗΖ.

- 8) Να υπολογίσετε τις τιμές του κ , ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: \psi = \frac{\kappa+3}{2}\chi + 5$ και $\varepsilon_2: \psi - \kappa\chi = 2$ να είναι κάθετες.

- 9) Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$), $\hat{B} = 30^\circ$ και $A\Gamma = 4\text{cm}$. Αν $AE \perp B\Gamma$ και Z, Δ είναι τα μέσα των πλευρών $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να υπολογίσετε τα $ZE, B\Gamma, A\Delta, \Gamma E$. (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας).



- 10)** Κώνος έχει περίμετρο βάσης 24πcm και όγκο 240π cm³ . Να υπολογίσετε :
(α) το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας
(β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

(μονάδες 3)
(μονάδες 2)

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις **5 (πέντε)** ασκήσεις του **ΜΕΡΟΥΣ Β΄**.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **10 (δέκα) μονάδες**.

1) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{4\chi+4}{\chi^2+2\chi-15} + \frac{2}{3-\chi} = \frac{\chi+4}{\chi^2+5\chi}$

2) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, $B\Delta$ διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}B\Gamma$ και M μέσο της $B\Delta$. Από το Δ φέρνουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

(α) $EM=MZ$

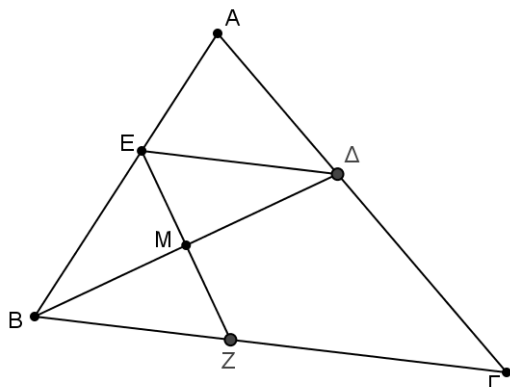
(μονάδες 4)

(β) το τρίγωνο EBZ είναι ισοσκελές

(μονάδες 3)

(γ) το ΔEBZ είναι ρόμβος.

(μονάδες 3)



3) (α) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\chi+2}{\chi-2} - \frac{\chi-2}{\chi+2}$ και $B = \frac{4}{1 - \frac{2}{\chi}}$ με $\chi \neq 0, \chi \neq -2, \chi \neq 2$.

Να δείξετε ότι $\frac{B}{A} = \frac{\chi+2}{2}$. (μονάδες 7)

(β) Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης A είναι ανεξάρτητη του χ .

$$A = (\chi - 2)^2 - 5(\chi - 1) \cdot (\chi + 1) + (2\chi + 1)^2$$
(μονάδες 3)

4) Το πιο κάτω στερεό αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και μία τετραγωνική πυραμίδα (όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα) . Το ύψος της πυραμίδας ισούται με 4cm .

Αν ο όγκος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ισούται με 648cm^3 , το ύψος του παραλληλεπιπέδου ισούται με το πλάτος του και το μήκος του είναι τριπλάσιο από το πλάτος του, να υπολογίσετε:

(α) τις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου

(μονάδες 2)

(β) το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας

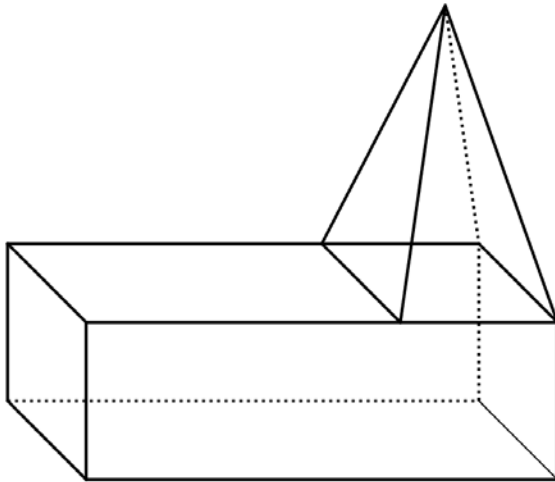
(μονάδες 2)

(γ) τον όγκο του στερεού

(μονάδες 2)

(δ) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

(μονάδες 4)



5) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-3,2)$, $B(1,4)$ και $\Gamma(-5,6)$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(μονάδες 2,5)

(β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(μονάδες 2,5)

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $B\Gamma$.

(μονάδες 2)

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο M και είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon : 3\psi - 9\chi = 10$

(μονάδες 3)

Οι Εισηγήτριες

Άντρη Χριστοδούλου Β.Δ.

Στέλλα Αλεξάνδρου

Μελίνα Παρέλλη

Ο Διευθυντής

Κώστας Κωνσταντίνου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ΄ Γυμνασίου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: Δευτέρα, 27 Μαΐου 2019

ΒΑΘΜΟΣ

Αριθμητικώς:

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

Ολογράφως:

Υπογραφή Καθηγητή/τριας:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΟΣ:

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι
(μόνο τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
3. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η πορεία της εργασίας σας.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από έντεκα (11) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα εξισώσεων.

$$3\chi + \psi = 5$$

$$\chi - \psi = 11$$

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(Μονάδες: 2 / 2 / 1)

α) $(\chi + 8)^2 =$

β) $(3\chi + 2)(3\chi - 2) =$

γ) $(\chi - 2)^3 =$

3. Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις πιο κάτω παραστάσεις:

(Μονάδες: 1 / 1 / 1 / 2)

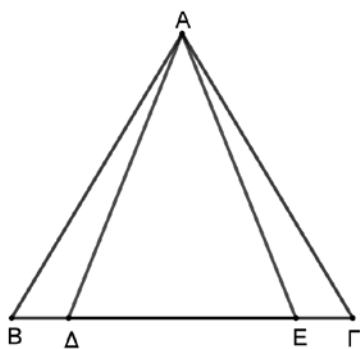
α) $8\chi - 8\psi =$

β) $\chi^3 - 27 =$

γ) $\chi(\chi + 2) + 1 =$

δ) $4\chi - 12 + \chi\psi - 3\psi =$

4. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ). Αν ΒΔ = ΕΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.



5. Να κάνετε τις πράξεις και όλες τις δυνατές απλοποιήσεις.

$$\frac{\chi^2 - 16}{\chi^2 + 4\chi} : \frac{\chi^2 - 8\chi + 16}{\chi^2 - 7\chi + 12} =$$

6. Η πλευρά ρόμβου είναι ίση με 7 cm και σχηματίζει γωνία 28° με μία από τις διαγώνιους του. Να υπολογίσετε το μήκος κάθε διαγώνιου του, κατά προσέγγιση εκατοστού.

7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης 48 cm και εμβαδό παράπλευρης επιφάνειας 240 cm². Να υπολογίσετε:

(Μονάδες: 3 / 1 / 1)

α) το ύψος της πυραμίδας

β) το εμβαδό της ολικής της επιφάνειας

γ) τον όγκο της πυραμίδας.

8. Να υπολογίσετε τις τιμές του κ , ώστε η ευθεία $\varepsilon_1 : \psi = (3\kappa^2 - 5\kappa)\chi - 4$ να είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_2 : \chi - 2\psi + 26 = 0$.
9. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\angle \Gamma = 30^\circ$. Να προεκτείνετε την πλευρά ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι:

(Μονάδες: 2 / 1 / 2)

α) το τετράπλευρο ΑΒΕΓ είναι παραλληλόγραμμο

β) το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές

γ) $A\Delta = \frac{B\Delta}{2}$.



10. Μια πισίνα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει μήκος 16 m και πλάτος 4 m. Για να γεμίσει πλήρως η πισίνα, αδειάζουμε σε αυτήν 24 ντεπόζιτα γεμάτα με νερό. Αν όλα τα ντεπόζιτα έχουν σχήμα κύβου ακμής 2 m, να υπολογίσετε το βάθος της πισίνας.

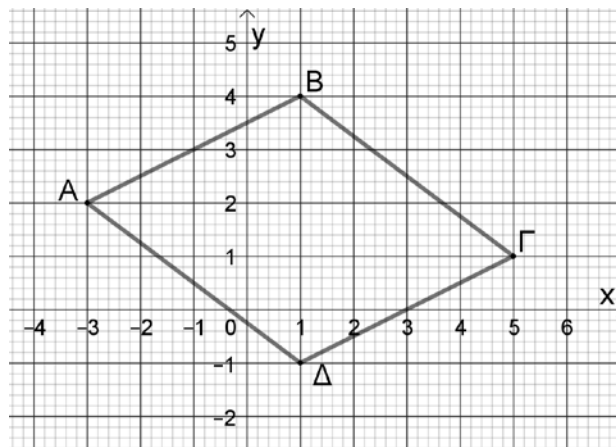
ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{6\chi}{\chi^2 - 25} + \frac{3}{5 - \chi} = \frac{2\chi + 1}{\chi^2 + 5\chi}$
2. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AG$), τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.
Στις προεκτάσεις του ΔΕ από το Δ και Ε παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, έτσι ώστε $\Delta H = EZ$ με $HZ > BG$. Να αποδείξετε ότι:
- α) $HB = ZG$ (6 μονάδες)
- β) το ΗΖΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (4 μονάδες)
3. α) Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι, σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις. Σε κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί και σε κάθε λάθος απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Ο πρώτος παίκτης απάντησε σωστά σε 7 ερωτήσεις και συγκέντρωσε 47 βαθμούς και ο δεύτερος απάντησε σωστά σε 4 ερωτήσεις και συγκέντρωσε 14 βαθμούς. Να βρείτε πόσους βαθμούς παίρνει ο παίκτης για κάθε σωστή απάντηση και πόσοι του αφαιρούνται σε κάθε λανθασμένη απάντηση.
(Να λύσετε το πρόβλημα με τη βοήθεια συστήματος εξισώσεων)
- β) Αν οι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου έχουν μήκη χ cm, $(\chi + 1)$ cm και $(\chi + 3)$ cm , να υπολογίσετε το μήκος χ .

4. Στο σχήμα δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΓΔ
είναι παραλληλόγραμμο. (4 μονάδες)



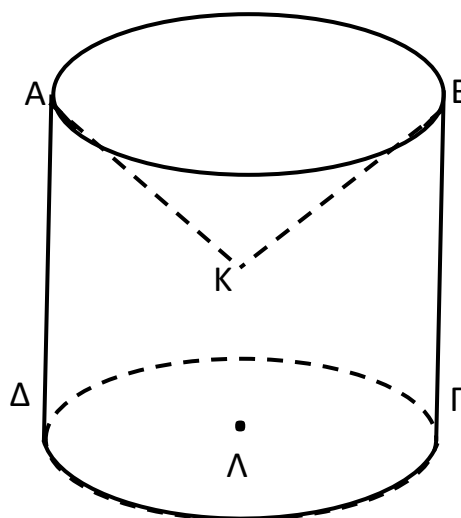
β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΔ του παραλληλογράμμου. (2 μονάδες)

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΒΖ του παραλληλογράμμου (Ζ σημείο της ΑΔ).
(4 μονάδες)

5. Το πιο κάτω στερεό αποτελείται από ένα κύλινδρο από τον οποίο αφαιρέσαμε κώνο με βάση την πάνω βάση του κυλίνδρου και ύψος ίσο με το μισό ύψος του κυλίνδρου. Ο κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης ίση με 8 m και ύψος ΑΔ = 12 m. Να υπολογίσετε:

α) τον όγκο του στερεού (4 μονάδες)

β) το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού.
(6 μονάδες)



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ΄

Βαθμός:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 5/6/2019

Ολογράφως:.....

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

Υπογραφή:

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα:Αριθμός:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής
2. Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι)
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού
4. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 14 σελίδες

ΜΕΡΟΣ Α΄:**Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις****Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

-
1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(α) \quad (\chi + 3)^2 = \quad \quad \quad (\text{μον.3})$$

$$(β) \quad (\chi - 5\psi) \cdot (\chi + 5\psi) = \quad \quad \quad (\text{μον.2})$$

-
2. Να λύσετε το σύστημα:

$$\chi + 3\psi = -2$$

$$4\chi - 6\psi = 28$$

-
3. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα:

$$(α) \quad 4\chi\psi - 12\chi^2 = \quad \quad \quad (\text{μον.1})$$

$$(β) \quad 25\chi^2 - 9\psi^2 = \quad \quad \quad (\text{μον.1})$$

$$(γ) \quad \chi^3 - 8 = \quad \quad \quad (\text{μον.1})$$

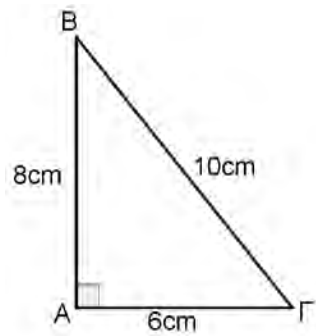
$$(δ) \quad \chi^2 - 2\chi + \kappa\chi - 2\kappa = \quad \quad \quad (\text{μον.2})$$

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με πλευρές $AB = 8\text{cm}$, $A\Gamma = 6\text{cm}$ και $B\Gamma = 10\text{cm}$.
Να υπολογίσετε:

(μον.4)

(α) την τιμή της παράστασης K :

$$K = 10\eta\mu\Gamma + 20\sigma\upsilon\nu\Gamma - 12\varepsilon\phi\Gamma$$



(β) το μέτρο της γωνίας Γ σε μοίρες
(η απάντηση να δοθεί κατά προσέγγιση ακεραίου)

(μον.1)

-
5. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $2\chi(\chi - 1) = \chi^2 - 7\chi$

(μον.2)

(β) $3\chi^2 - 2\chi - 5 = 0$

(μον.3)

-
6. Δίνονται οι ευθείες (ϵ_1) : $6\chi + 2\psi = 7$ και (ϵ_2) : $\psi = (2\kappa - 3)\chi + 9$. Να βρείτε:

(α) την εξίσωση της ευθείας (ϵ_3) που περνά από το σημείο $A(2, -1)$ και είναι
παράλληλη με την ευθεία (ϵ_1) : $6\chi + 2\psi = 7$.

(μον.3)

(β) την τιμή του κ , ώστε οι ευθείες (ϵ_1) : $6\chi + 2\psi = 7$ και (ϵ_2) : $\psi = (2\kappa - 3)\chi + 9$ να είναι
κάθετες.

(μον.2)

-
7. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), να προεκτείνετε τις πλευρές AB και $A\Gamma$ προς το μέρος των B και Γ και να πάρετε αντίστοιχα τμήματα $B\Delta$ και ΓE τέτοια ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να προεκτείνετε την πλευρά $B\Gamma$ και προς τα δύο μέρη και να σχηματίσετε ευθεία (ϵ) . Αν ΔZ και $E\eta$ είναι οι αποστάσεις των σημείων Δ και E αντίστοιχα από την ευθεία (ϵ) , να αποδείξετε ότι $\Delta Z = E\eta$.

-
8. Πισίνα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει βάση με διαστάσεις 18m και 10m. Το ύψος της είναι 2,5m. Η επένδυση των τοιχωμάτων της πισίνας κατασκευάστηκε με μονωτικό υλικό που στοιχίζει €12/m², ενώ η επένδυση του πυθμένα κατασκευάστηκε με μονωτικό υλικό που στοιχίζει €15/m². Να υπολογίσετε:

(α) το κόστος των υλικών για τη μόνωση της πισίνας

(μον.4)

(β) αν γεμίσουμε την πισίνα με νερό, πόσα λίτρα νερού θα χρειαστούμε.

(μον.1)

-
9. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), το σημείο Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$ και το σημείο E το μέσο της $A\Gamma$. Να προεκτείνετε τη ΔE κατά τμήμα $E\eta = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\eta\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.

10. Δίνεται η παράσταση $A = (\chi - 2)^3 - \chi^2(\chi - 10) - 11(2\chi - 3) - 10\chi$

(α) να αποδείξετε ότι: $A = (2\chi - 5)^2$ (μον.2)

(β) αν $B = \chi^2 - 3\chi$ και $\Gamma = (\chi^2 + 2\chi) \cdot (\chi^2 - \chi - 6)$, να παραγοντοποιήσετε πλήρως την πιο κάτω παράσταση :

$$A \cdot B - \Gamma =$$

(μον.3)

ΜΕΡΟΣ Β΄:

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις

Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{\chi - 4}{\chi^2 - 5\chi + 6} - \frac{1}{3 - \chi} = \frac{\chi - 1}{\chi^2 - 2\chi}$$

2. (α) Κύλινδρος έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $E_K = 80\pi \text{ cm}^2$ και ισχύει η σχέση $2v - 5R = 0$.
Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου. (μον.4)

(β) αν το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας κώνου ισούται με το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου και η ακτίνα της βάσης του κώνου είναι διπλάσια από την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου, να υπολογίσετε τον όγκο του κώνου. (μον.4)

(γ) Ο κύλινδρος και ο κώνος είναι δοχεία γεμάτα με νερό. Αν αδειάσω το νερό των δύο δοχείων σε ένα τρίτο δοχείο σχήματος κύβου ακμής 10cm, να βρείτε μέχρι ποιο ύψος θα φθάσει το νερό. (μον.2)

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$), $\hat{\Gamma} = 30^\circ$, Μ το μέσο της ΒΓ και Ε το μέσο της ΑΓ. Να προεκτείνετε τη ΜΕ προς το μέρος του Ε κατά τμήμα ΕΗ=ΜΕ. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τετράπλευρο ΗΑΒΜ είναι ρόμβος

(β) το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισόπλευρο

4. Οι συντεταγμένες των κορυφών τριγώνου ΑΒΓ είναι: Α(-2,-3), Β(4,-3) και Γ(8,7).

(α) Να βρείτε:

(i) την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ

(μον.3)

(ii) την εξίσωση του ύψους ΒΔ

(μον.3)

(β) αν οι εξισώσεις των ΑΓ και ΒΔ είναι: ΑΓ: $\psi - \chi = -1$ και ΒΔ: $\psi = -\chi + 1$, να βρείτε:

(i) τις συντεταγμένες του σημείου Δ

(μον.2)

(ii) το μήκος του ύψους ΒΔ

(μον.2)

5. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \left(1 - \frac{2\psi}{\chi}\right) \div \left(1 - \frac{4\psi}{\chi} + \frac{4\psi^2}{\chi^2}\right)$ και $B = \frac{1 + \frac{\chi}{2\psi}}{1 - \frac{\chi^2}{4\psi^2}}$

(α) να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A και B (μον.6)

(β) να αποδείξετε ότι: $A + B = 1$ (μον.1)

(γ) να αποδείξετε ότι η παράσταση $\frac{A+B}{A \cdot B} \div \frac{\chi^2 - 4\chi\psi + 4\psi^2}{\chi\psi}$ είναι σταθερή. (μον.3)

Ο Διευθυντής

Γιώργος Γαβριήλ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΕΠΩΝΥΜΟ :					ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ
ΟΝΟΜΑ :					Βαθμός από εκατό
ΤΜΗΜΑ :		ΑΡΙΘΜΟΣ :			αριθμητικά: _____/100
					ολογράφως: _____ εκατοστά
					Βαθμός από είκοσι
ΜΑΘΗΜΑ :	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ				αριθμητικά: _____/20
ΤΑΞΗ :	Γ'				ολογράφως: _____ εικοστά
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ :	29/05/2019				Υπογραφή Καθηγητή
ΩΡΑ :	07:45 – 09:45				_____

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Η διάρκεια της εξέτασης είναι δύο ώρες.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.
- Να γράφετε μόνο με στυλό (πέννα) χρώματος μπλε και όχι με μολύβι **(μπορείτε να κάνετε με μολύβι τα σχήματα και τις γραφικές παραστάσεις)**.
- Να απαντήσετε όλα τα θέματα πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
- Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

Το εξεταστικό δοκίμιο έχει έκταση **11** σελίδων (συμπεριλαμβανομένης και αυτής της σελίδας) και αποτελείται από **δύο** μέρη, **(Α και Β)** στα οποία αντιστοιχούν συνολικά **100** μονάδες.

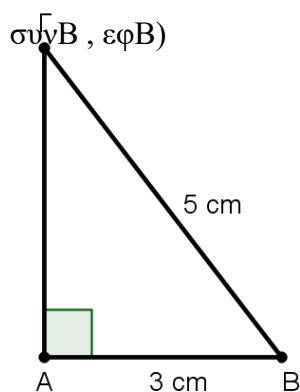
ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε **και τα 10** θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

(1) Να βρείτε τα αναπτύγματα των πιο κάτω, **χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες**.

(α) $(x-3)^2$

(β) $(2x+5)(2x-5)$

(2) (α) Από το πιο κάτω σχήμα να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας B. (ημB ,



(β) Να συμπληρώσετε κατάλληλα τα κενά με ένα από τα σύμβολα $>$, $=$, $<$.

(i) $\eta\mu 53^\circ$ $\eta\mu 54^\circ$

(ii) $\epsilon\phi 36^\circ$ $\sigma\upsilon\nu 44^\circ$

[μον. (α)3 – (β)2]

(3) Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τα πιο κάτω πολυώνυμα.

(α) $5x-10\psi$

(β) x^2-36

(γ) $x^2-7x+10$

(δ) $x^2+4x+4-\psi^2$

(4) Στο διπλανό σχήμα το ABΓ είναι τυχαίο τρίγωνο και η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας B.

Αν $\Delta E \perp AB$ και $\Delta H \perp B\Gamma$ να αποδείξετε ότι $\Delta E = \Delta H$.

(5) (α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

(β) Να απλοποιήσετε το κλάσμα:

$$\frac{x^3 - 4x}{3x + 6}$$

(6) Κώνος έχει ακτίνα βάσης ίση με 5 cm και το ύψος του είναι ίσο με 12 cm.

Να βρείτε το **εμβαδόν της ολικής επιφάνειας** και τον **όγκο** του (συναρτήσει του π).

(7) Το σημείο A έχει συντεταγμένες $(-4, -5)$.

Το σημείο B είναι το σημείο τομής των ευθειών με εξισώσεις $5x + 3y = 7$ και $x - 2y = 4$.

Να βρείτε το **μήκος** του ευθύγραμμου τμήματος AB.

(8) (α) Οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = kx + 5$ και $\varepsilon_2 : 4x - 2y = 6$ είναι παράλληλες. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου k .

(β) Αν $k = 2$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_3 η οποία περνά από το σημείο A $(k, 1 - k)$ και είναι

κάθετη στην ευθεία $\varepsilon_4 : 2x + 3y = 11$.

(9) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Gamma} = 30^\circ$). Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΓ

και ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\Delta E = \frac{B\Gamma}{4}$, **δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.**

σας.

(10) Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε το αποτέλεσμα **στην πιο απλή μορφή.**

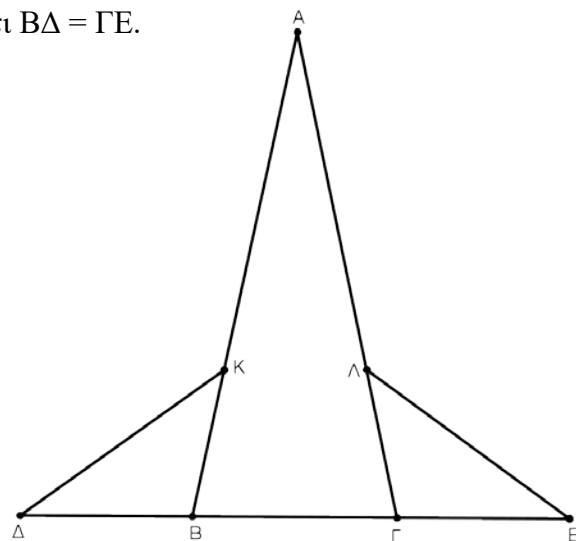
$$\left(\frac{x}{x-5} - \frac{2x+4}{x^2-25} \right) : \left(\frac{x+5}{3} + \frac{3}{x-5} \right)$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τα 5 θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- (1) Στο σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές ($AB = AG$). Τα σημεία Κ και Λ είναι τέτοια ώστε $AK = AL$.

Τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι προεκτάσεις της ΒΓ και ισχύει ότι $BΔ = ΓΕ$.

- (α) Να αποδείξετε ότι $ΔΚ = ΕΛ$.



- (β) Αν τα σημεία Μ και Ν είναι τα μέσα των ΔΚ και ΕΛ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $AM = AN$.

- (2) Δίνεται ένα **ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο** και ένας **κύβος**. Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις

$(\chi + 1)m$, $(\chi - 1)m$ και $(\chi + 9)m$ και ο κύβος έχει ακμή ίση με $(\chi + 2)m$.

- (α) Να αποδείξετε ότι η αλγεβρική παράσταση που δίνει τη διαφορά των όγκων των δύο στερεών

στην **πιο απλή μορφή** είναι:

$$V_{\text{ορθ.παρ/δου}} - V_{\text{κύβου}} = 3\chi^2 - 13\chi - 17$$

- (β) Αν η διαφορά των όγκων τους είναι ίση με 13 m^3 , να βρείτε το **εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του κύβου**.

- (3) (α) Σε ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$) το Δ είναι το μέσο της ΒΓ και το Ε το μέσο της ΑΓ.

Προεκτείνουμε το ΔΕ κατά τμήμα $EΖ = ΔΕ$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ορθογώνιο.

- (β) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση.

$$\frac{3\chi}{\chi - 4} + \frac{2}{2 - \chi} = \frac{2\chi^2 - 4\chi + 8}{\chi^2 - 6\chi + 8}$$

(4) Δίνεται **παραλληλόγραμμο** $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(-2,0)$, $B(4,6)$ και $\Gamma(8,2)$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $\Gamma\Delta$, **δικαιολογώντας την απάντησή σας**.

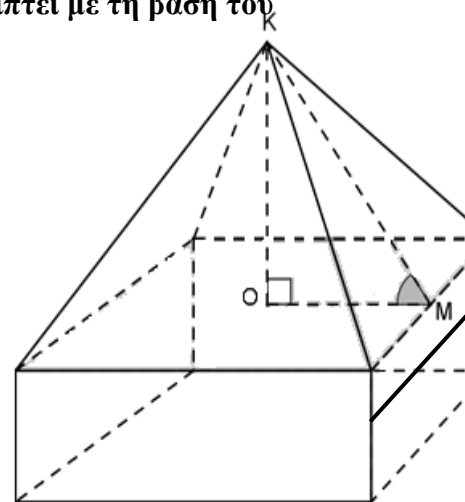
(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K στο οποίο τέμνονται οι διαγώνιοι του.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ .

(δ) Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι και ορθογώνιο, **δικαιολογώντας την απάντησή σας**.

(5) Μία μικρή επιχείρηση κατασκευάζει κεριά σε σχήμα όπως αυτό που φαίνεται πιο κάτω. Το πάνω μέρος του κεριού είναι κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Το κάτω μέρος είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο του οποίου ο όγκος είναι 72 cm^3 και το ύψος 2 cm . **Η βάση της πυραμίδας συμπίπτει με τη βάση του παραλληλεπιπέδου**. Επίσης η γωνία $\hat{KMO}$ είναι ίση με 60° .

(α) Να βρείτε τις άλλες δύο διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου.



60°

(β) Να βρείτε τον όγκο της πυραμίδας(με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων).

(γ) Πόσα **το πολύ** τέτοια κεριά μπορεί να κατασκευάσει η επιχείρηση αυτή με 10 λίτρα λιωμένου κεριού;

(1 λίτρο = 1000 cm^3)

[μον.

(α)3 , (β)4 , (γ)3]

H

Διευθύντρια

Αθηνά

Κλεάνθους

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά

ΤΑΞΗ : Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 5 / 6 / 2019

ΧΡΟΝΟΣ : 2 Ώρες

Βαθμός.....

Ολογράφως.....

Υπογραφή :

Ονοματεπώνυμο :Τμήμα : Αριθμός :

ΟΔΗΓΙΕΣ :

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- β) Να γράψετε με μπλε πένα (τα σχήματα επιτρέπονται με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να βρείτε τα αναπτόγματα:

α) $(x + 5)^2 =$

β) $(\alpha - 2)(\alpha + 2) =$

2) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $8x + 8\psi - 8\omega =$

β) $\alpha^2 - 9 =$

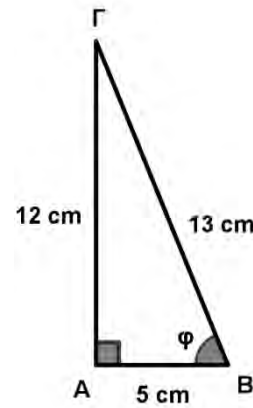
3) Το διπλανό κουτί για γλυκά έχει σχήμα ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 20 cm , 10 cm και 7 cm. Να υπολογίσετε τον όγκο του.



- 4) Στο ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ η $AB = 5 \text{ cm}$, η $A\Gamma = 12 \text{ cm}$ και η $B\Gamma = 13 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\widehat{\varphi}$.

α) $\eta\mu\varphi =$

β) $\sigma\upsilon\nu\varphi =$



- 5) Να λύσετε τις εξισώσεις.

α) $x(x - 5) = 0$

β) $x^2 + 7x + 12 = 0$

- 6) Αν οι ευθείες $\varepsilon_1 : \psi = (\kappa - 2)x + 6$ και $\varepsilon_2 : \psi = 3x - 4$ είναι παράλληλες, να υπολογίσετε την τιμή του κ .

- 7) Το άθροισμα των βαθμών των διαγωνισμάτων της Άννας στη Χημεία και στη Φυσική ήταν 30, στο πρώτο τετράμηνο. Στο δεύτερο τετράμηνο, ο βαθμός του διαγωνίσματός της στη Χημεία μειώθηκε κατά 3 μονάδες και ο βαθμός του διαγωνίσματός της στη Φυσική αυξήθηκε κατά 1 μονάδα, με αποτέλεσμα οι δύο βαθμοί να γίνουν ίσοι. Να βρείτε τους βαθμούς που είχε η Άννα σε καθένα από τα δύο μαθήματα το πρώτο τετράμηνο; (Το πρόβλημα να λυθεί με σύστημα εξισώσεων.)

8) Αν $A = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) : \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)$ και $B = \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) \cdot \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2}\right)$, $\alpha \neq 0, \beta \neq 0, \alpha \neq \beta, \alpha \neq -\beta$,

να δείξετε ότι $A + B = 1$.

- 9) Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, η ΔZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{\Delta}$ και Z το σημείο τομής της με την

πλευρά AB του παραλληλογράμμου. Φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα AK κάθετο στη διχοτόμο ΔZ και το προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την πλευρά $\Gamma\Delta$ στο σημείο E . Να δείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΔDE είναι ισοσκελές και (μον. 2)

β) το τετράπλευρο $AZED$ είναι ρόμβος. (μον. 3)

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

10) Αν $\alpha + \beta = -\frac{1}{3}$ και $\alpha \cdot \beta = -\frac{7}{3}$ να δείξετε ότι $(3\alpha + 1)^2 + 9(\alpha + \beta) + (3\beta + 1)^2 = 40$.

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Αν $A = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 9} \cdot \frac{x^4 + 3x^3}{x^2 - 3x}$ και $B = \frac{x-1}{x^2+x} + \frac{4}{x^2-1}$

α) Να δείξετε ότι (Mov.6)

$$A = x^2 \quad \text{και} \quad B = \frac{x+1}{x(x-1)}$$

β) Να λύσετε την εξίσωση (Mov.4)

$$\frac{8}{x^3 - x^2} = B - \frac{4}{A}$$

2) Σε ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, B(-4,1) και Γ(1,2), η πλευρά ΑΓ βρίσκεται πάνω στην ευθεία $3\psi = -2x + 8$.

Να βρείτε:

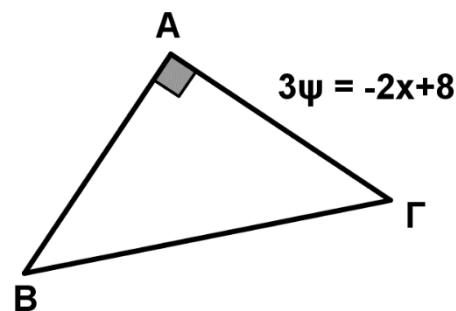
α) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ, (Mov.2)

β) τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΒΓ, (Mov.2)

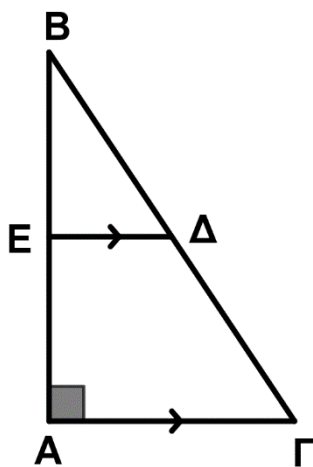
γ) την εξίσωση της ευθείας ΑΒ, (Mov.3)

δ) την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με την ΑΓ και περνά από το σημείο Β. (Mov.3)

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

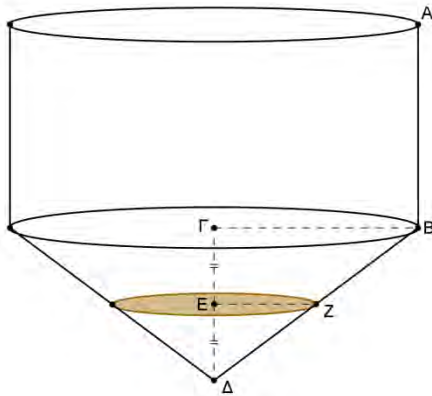


- 3) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$. Το σημείο Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$, $ED \parallel A\Gamma$ (E σημείο στην πλευρά AB) και $\hat{E\Delta\Gamma} = 120^\circ$.
- α) Αν τα μήκη των πλευρών $A\Gamma$ και $B\Gamma$ δίνονται από τις αλγεβρικές παραστάσεις $A\Gamma = x \text{ cm}$ και $B\Gamma = (2x^2 + x - 6) \text{ cm}$, να βρείτε την τιμή της μεταβλητής x . (Μον.4)
- β) Να προεκτείνετε τις πλευρές $A\Gamma$ και $B\Gamma$ προς το σημείο Γ κατά τμήματα $\Gamma Z = A\Gamma$ και $\Gamma H = \frac{B\Gamma}{2}$ αντίστοιχα και να δείξετε ότι:
- i) το $\Delta\Gamma$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο και (Μον.3)
- ii) το τετράπλευρο $\Delta\Delta ZH$ είναι ορθογώνιο. (Μον.3)
- (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)



- 4) Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$. Από το σημείο M να φέρετε κάθετα ευθύγραμμα τμήματα ME και MZ στις πλευρές AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Στη συνέχεια να προεκτείνετε τα ευθύγραμμα τμήματα ME και MZ κατά τμήματα $ME = EH$ και $MZ = Z\Theta$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
- α) $ME = MZ$ και (Μον. 5)
- β) το τρίγωνο $HA\Theta$ είναι ισοσκελές. (Μον. 5)
- (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

- 5) Το πιο κάτω σχήμα δείχνει μια κλειστή μεταλλική κατασκευή η οποία χρησιμοποιείται για την αποθήκευση λαδιού. Το ύψος του κυλίνδρου είναι διπλάσιο από την ακτίνα της βάσης του. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $256\pi \text{ m}^2$. Μέσα στην δεξαμενή υπάρχουν $16\pi \text{ m}^3$ λάδι. Αν το ύψος της στάθμης του λαδιού είναι το μισό του ύψους του κώνου,
- α) να βρείτε το ύψος του κυλίνδρου, (Μον.3)
- β) να δείξετε ότι το ύψος του κώνου είναι 6 m, (Μον.4)
- γ) να βρείτε πόσα κυβικά μέτρα λάδι πρέπει να προσθέσουμε για να γεμίσει η κατασκευή. (Μον.3)
- (Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)



Η Διευθύντρια

Μαρία Θεοφάνους

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ'

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 27/05/2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 Ώρες

Ονοματεπώνυμο:..... Τμήμα:..... Αρ. Κατ.

Βαθμός:

Ολογρ.:

Υπογραφή:

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 9 σελίδες.
 β) Το εξεταστικό δοκίμιο βαθμολογείται με 100 μονάδες.
 γ) Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (για τα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι).
 δ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 ε) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 στ) Να παρουσιάσετε τα στάδια επίλυσης και να δικαιολογήσετε όλες σας τις απαντήσεις.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-3)^2 =$

β) $(x-2)(x+2) =$

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

α) $2x - 2y =$

β) $x^2 + 3x + 2 =$

3. Δίνεται κύβος με ακμή 6cm. Να βρείτε:

α) τον όγκο και

β) την ολική επιφάνειά του.

4. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\eta\mu B = \frac{3}{5}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ.

5. Να λύσετε την εξίσωση $3x^2 - 5x - 2 = 0$

6. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$$

7. Να απλοποιήσετε την παράσταση $A = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{x^2 - 5x + 6}$

8. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{x+1}{x^2-9} + \frac{1}{x^2+3x} = -\frac{3}{x^2-3x}$

9. Αν $\alpha + \beta = 3$ και $\alpha \cdot \beta = 4$ να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \beta^3 = -9$

10. Ορθό τριγωνικό πρίσμα και κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχουν την ίδια παράπλευρη επιφάνεια. Αν οι διαστάσεις της βάσης του τριγωνικού πρίσματος είναι 3cm, x cm, (x+1) cm με ύψος 4x cm και η πυραμίδα έχει ακμή βάσης 8cm και παράπλευρο ύψος 3x cm, να υπολογίσετε την τιμή του x.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Αν $A(2, -1)$, $B(2, -4)$ και $\Gamma(4, 0)$ είναι κορυφές του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

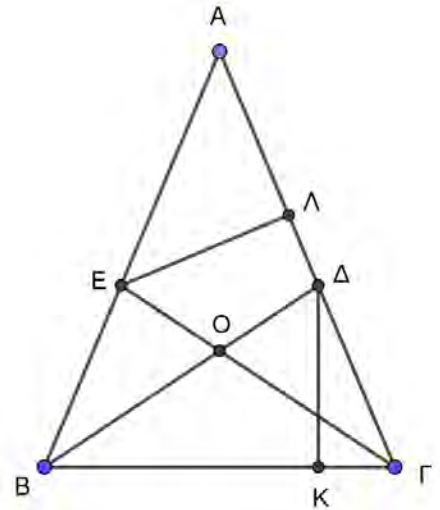
α) Να βρείτε το μήκος τους ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ.

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

γ) Αν $\Delta(4, 3)$, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι παράλληλη με τη διαγώνιο ΑΓ.

δ) Αν η ευθεία $\varepsilon_2 : y = (k + 2)x + 5$ είναι κάθετη στην ε_1 , να βρείτε την τιμή του k.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Οι διχοτόμοι $B\Delta$ και ΓE τέμνονται στο O , $ΕΛ \perp A\Gamma$ και $\Delta K \perp B\Gamma$. Να δείξετε ότι:
- α) Τα τρίγωνα $B\Delta\Gamma$ και $B\Gamma E$ είναι ίσα.



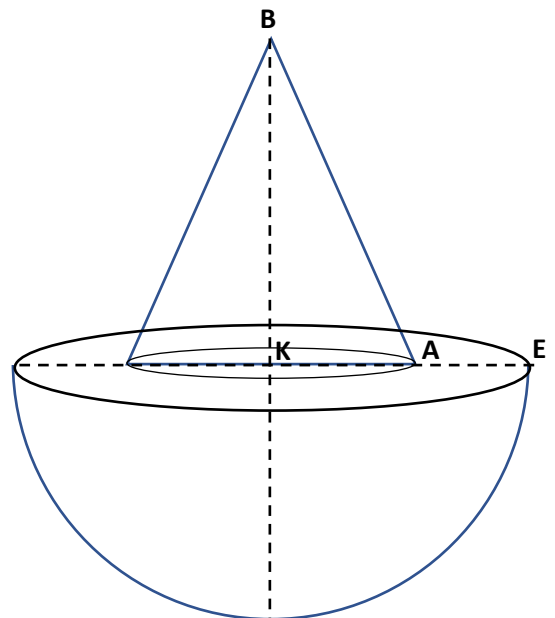
- β) Τα τρίγωνα $B\Delta K$ και $\Gamma E\Lambda$ είναι ίσα.
3. Να δείξετε ότι:

$$\left(\frac{3x}{3x+y} - \frac{9x^2}{9x^2+6xy+y^2} \right) : \left(\frac{3x}{9x^2-y^2} + \frac{1}{y-3x} \right) + \frac{18x^2}{y+3x} = 3x$$

4. Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε μια συμπαγή κατασκευή που αποτελείται από έναν κώνο και ένα ημισφαίριο. Η γενέτειρα του κώνου ισούται με 8cm και σχηματίζει με τη βάση του κώνου γωνία 60° και $KE=6cm$. Να βρείτε:

- α) τον όγκο και
β) την ολική επιφάνεια του στερεού.

(Οι απαντήσεις μπορεί να δοθούν συναρτήσει του π)



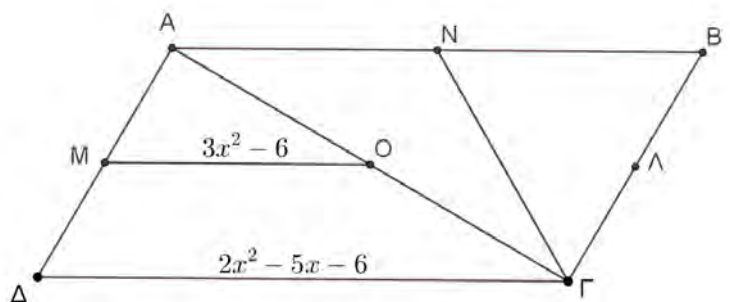
5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, με O το σημείο τομής των διαγώνων του. Αν $MO \parallel \Gamma\Delta$, N μέσο της AB και $\widehat{A\Gamma B} = 90^\circ$ με $B\Gamma = 6cm$, να υπολογίσετε:

- α) (i) την τιμή του x

(ii) το μήκος της ΓN

(iii) τη γωνία $BA\Gamma$

- β) Να φέρετε το ύψος AE του τριγώνου $A\Delta\Gamma$. Αν το σημείο Λ είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $M\Lambda\Gamma E$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΡΧΑΓΓΕΛΟΥ

ΛΑΚΑΤΑΜΕΙΑΣ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ: 2018-2019



Βαθμός

Ολογράφως

Υπογραφή

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Χρόνος: 2 ΩΡΕΣ Ονοματεπώνυμο: _____	Τάξη: Γ Ημερομηνία: 31.05.2019 Τμήμα: _____ Αριθμός: _____
---	---

ΟΔΗΓΙΕΣ: (α) Να ελέγξετε ότι το γραπτό αποτελείται από δέκα (10) σελίδες.

(β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

(γ) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).

(δ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Μέρος Α΄:

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε τον όγκο κύβου με ακμή 4 m.

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 6)^2 =$

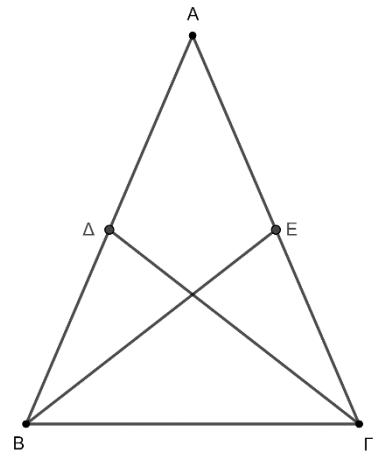
β) $(x + 2)(x - 2) =$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + 2x =$

β) $x^2 + 5x + 6 =$

4. Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι που φέρουμε από τις κορυφές των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.

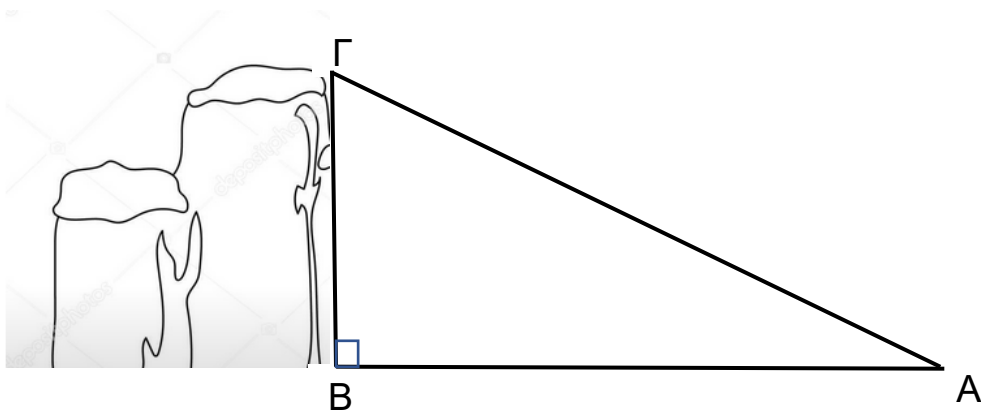


5. Να λύσετε το σύστημα:

$$x - 2y = 7$$

$$2x + y = 4$$

6. Τα σημεία A και B βρίσκονται πάνω στην ίδια οριζόντια επιφάνεια εδάφους. Μια ομάδα παιδιών βρίσκεται στο σημείο A, που απέχει 85 m από τη βάση ενός κατακόρυφου βράχου, B και παρατηρεί την κορυφή του βράχου, Γ, που υψώνεται 50 m πάνω από τη βάση του. Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας A.



7. Να χαρακτηρίσετε με Σωστό ή Λάθος τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

α) Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = x + 2$ και $\varepsilon_2: 2y = 2x + 6$ είναι παράλληλες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
β) Η απόσταση ανάμεσα στα σημεία A(-6, 2) και B(-3, 2) είναι 3 μονάδες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
γ) Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 2x - 3$ και $\varepsilon_2: y = \frac{1}{2}x - 3$ τέμνονται.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
δ) Οι συντεταγμένες του κέντρου O ενός παραλληλογράμμου με κορυφές A(2, 5), B(5, 1), Γ(2, -3) και Δ(-1, 1) είναι O(2, -1).	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
ε) Το σύστημα $\begin{cases} y = x - 3 \\ y + 3 = x \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

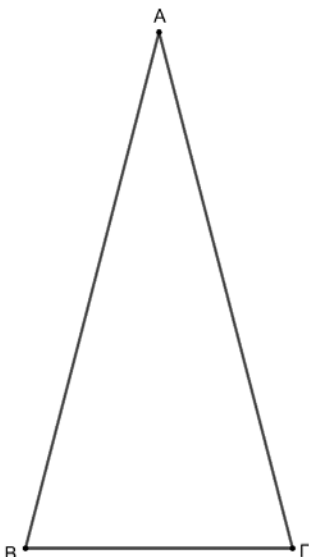
8. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(x - 2)^3 - x(x + 3)^2 + 17x = 4(2 - 3x)(x - 1)$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x - 2)^3 - x(x + 3)^2 + 17x = 0$$

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB = AΓ) και AB = 2BΓ. Δ και Ε είναι τα μέσα των AB και AΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε το ΔΕ κατά τμήμα EZ = ΔΕ. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο BΔΖΓ είναι ρόμβος.



10. Σε ένα κατάστημα αναμνηστικών δώρων στην Αίγυπτο, πωλούνται μινιατούρες σε σχήμα κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας. Η κάθε μινιατούρα έχει εμβαδόν βάσης 144 cm^2 και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 240 cm^2 .
Να υπολογίσετε τον όγκο μιας πυραμίδας – μινιατούρας.



Μέρος Β΄:

**Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $x^2(x^2 - 1) - 16(x^2 - 1) =$

ii) $(a^2 - 7)^2 - (a^2 - 1)^2 =$

- β) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x}{x-1} - \frac{x+1}{2-x} = 4 + \frac{3}{x^2 - 3x + 2}$$

2. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{1 - \frac{2}{y}}{\frac{y}{y-2}} : \frac{y^2 - 4y + 4}{4y - y^2} =$

β) $\left(\frac{6x}{x^2 - 9} + \frac{2x}{x+3} \right) \cdot \frac{x^2 + 6x + 9}{2x^3 + 6x^2} =$

3. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές A(3, 3), B(6, -4) και Γ(10, 0).

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. (3 μονάδες)

- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου, Μ, του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ. (2 μονάδες)

- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε, που περνά από το Μ και είναι κάθετη στη ΒΓ.

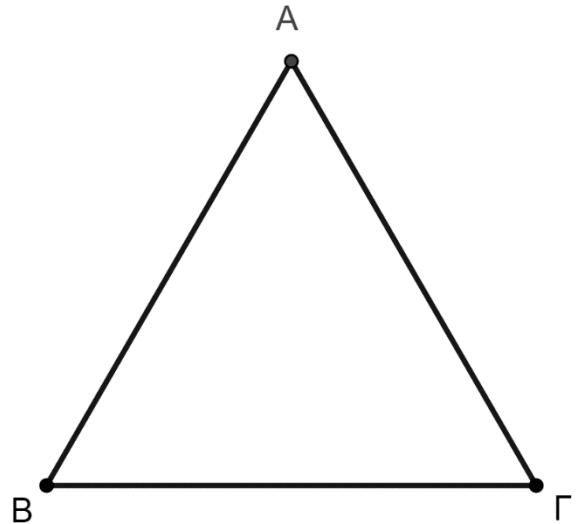
(3 μονάδες)

δ) Να δώσετε τις συντεταγμένες του δεύτερου σημείου τομής της ευθείας ε με το τρίγωνο $AB\Gamma$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (2 μονάδες)

4. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του $\Gamma\Delta$ και BE , τα οποία τέμνονται στο Z .

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta Z = ZE$.

β) Αν H μέσο του BZ και Θ μέσο του ΓZ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Theta H$ είναι ορθογώνιο.

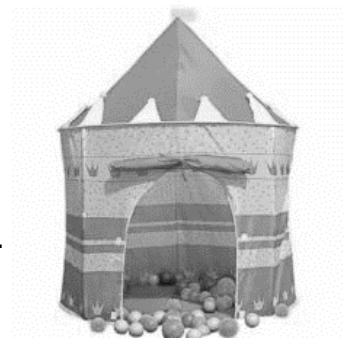


5. Η παιδική σκηνή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα αποτελείται από έναν κύλινδρο και έναν κώνο με την ίδια βάση. Είναι φτιαγμένη από συνθετικό ύφασμα που καλύπτει και το πάτωμα της σκηνής. Η περίμετρος της βάσης είναι 112π cm, το ύψος της σκηνής είναι 120 cm και η γενέτειρα του κώνου είναι 65 cm.

α) Να υπολογίσετε τον όγκο της σκηνής. (5 μονάδες)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της σκηνής, όταν η είσοδός της είναι κλειστή. (3 μονάδες)

γ) Το συνθετικό ύφασμα που καλύπτει τη σκηνή κοστίζει €8,50 ανά m^2 . Να υπολογίσετε το κόστος του υφάσματος για την κατασκευή μίας τέτοιας σκηνής. (2 μονάδες)



Η Διευθύντρια

Στέλλα Ταμάμη

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 5 / 6 / 2019

ΤΑΞΗ: Γ'

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

ΒΑΘΜΟΣ: $\frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{20}$

Αριθμητικά:

Ολογράφως:

Υπ. Καθηγητή/τριας:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ: Αρ.:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- ❖ Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 10 σελίδες.
- ❖ Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι.
- ❖ Για τα σχήματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι.
- ❖ Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- ❖ Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- ❖ Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τον πίνακα των τριγωνομετρικών αριθμών που βρίσκεται στη σελίδα 11.
- ❖ Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη σελίδα 12 για πρόχειρες πράξεις.
- ❖ Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης εργασίας, δεν θα βαθμολογούνται πλήρως.

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτόγματα με τη χρήση ταυτοτήτων:

(α) $(5\chi + 2\psi)^2 =$

(β) $(\chi - \psi^2)(\chi + \psi^2) =$

2. Να λύσετε το σύστημα:

$$2\chi + 3\psi = -1$$

$$\chi + \psi = -2$$

3. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2\chi^2 + 5\chi - 3 = 0$$

4. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $6\alpha - 18\beta =$ (β.1)

(β) $\chi^2 - 100 =$ (β.1)

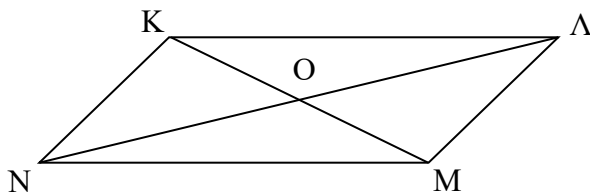
(γ) $\alpha^2 + 5\alpha + 6 =$ (β.1)

(δ) $\alpha^2\chi - \alpha^2\psi + \beta^2\psi - \beta^2\chi =$ (β.2)

5. Δίνεται τετράπλευρο ΚΛΜΝ με $NO = OL$ και $K\hat{L}N = L\hat{N}M$. Να δείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ΚΛΟ και ΜΝΟ είναι ίσα.

(β) Το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.



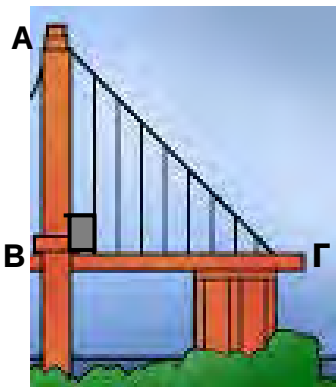
6. Δίνεται κύλινδρος με όγκο $200\pi \text{ cm}^3$ και κύβος με εμβαδόν ολικής επιφάνειας 384 cm^2 . Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με την ακμή της βάσης του κύβου, να βρείτε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.

(Μπορείτε να δώσετε την απάντησή σας συναρτήσει του π).

7. Για να στηριχτεί η δοκός (ΑΒ) μιας γέφυρας, τοποθετήθηκε στήριγμα σε απόσταση (ΒΓ) από τη βάση της, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν ισχύει $\text{syn}\hat{\Gamma} = \frac{5}{13}$:

(α) Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\hat{\Gamma}$ και $\epsilon\phi\hat{A}$. (β. 4)

(β) Να βρείτε κατά προσέγγιση ακεραίου το μέτρο της γωνίας $\hat{\Gamma}$. (β. 1)



8. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: \psi = (\omega^2 - 2\omega)\chi + 4$ και $\epsilon_2: 3\omega\chi + 2\psi = 8$.

Αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες, να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου ω .

9. (α) Δίνεται το πολυώνυμο $f(x) = x^3$.

Να αποδείξετε ότι $f(x+2) = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.

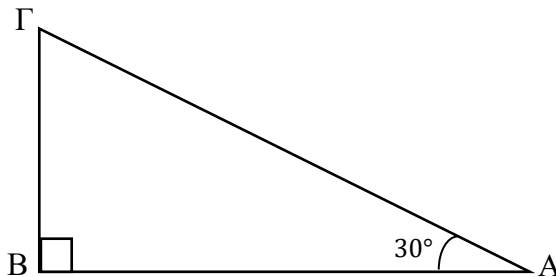
(β) Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με διαγωνίους $A\Gamma = f(x+2) - f(x)$ και $B\Delta = 6x(x+2) + 8$, είναι ορθογώνιο.

10. Στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$) δίνεται $\hat{A} = 30^\circ$, $A\Gamma = 12\text{cm}$ και $B\Delta$ η διάμεσος του τριγώνου. Αν E και Z τα μέσα των $\Delta\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα:

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο.

(β) Να βρείτε το μήκος του EZ .

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)



ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x-7}{x^2-5x+4} - \frac{1}{4-x} = \frac{x-3}{x^2-x}$ (β. 6)

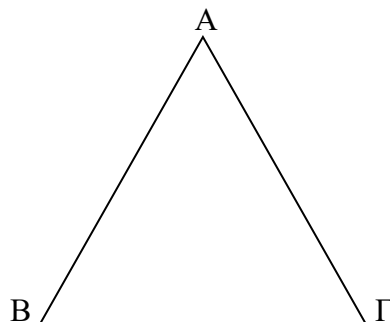
(β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση: (β. 4)

$$\left(\frac{x}{\psi} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{x^2 - \psi^2}\right) \div \left(1 - \frac{x}{x + \psi}\right) \text{ είναι σταθερή.}$$

2. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στις προεκτάσεις των $A\Gamma$ και ΓB παίρνω αντίστοιχα τμήματα $\Gamma\Delta = BE$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $B\Gamma\Delta$ είναι ίσα.

(β) Αν ΔZ και EH είναι οι αποστάσεις των σημείων Δ και E από τις πλευρές $B\Gamma$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EH = \Delta Z$.



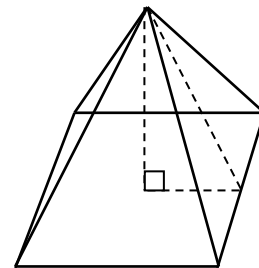
3. (α) Αν οι αριθμοί α και β έχουν άθροισμα 3 και διαφορά 5, όπου $\alpha > \beta$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης :

$$K = \alpha^3 - \beta^3 + \alpha^2\beta - \alpha\beta^2$$

- (β) Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με πλευρά βάσης

$$(\chi + 3\psi) \text{ cm} \text{ και ύψος } \left(\frac{3\chi - \psi}{2} \right) \text{ cm}.$$

Αν ισχύει $\chi^2 + \psi^2 = 40$, να αποδείξετε ότι το απόστημα της πυραμίδας είναι ίσο με 10cm.



4. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές $A(-4, 1)$, $B(-6, 5)$, $\Gamma(-2, 7)$ και μήκος πλευράς $(\text{ΑΓ}) = \sqrt{40}$ μονάδες.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ του ΑΓ.

(β. 2)

(β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της διαμέσου ΒΜ είναι $\chi + 3\psi = 9$.

(β. 2,5)

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

(β. 2,5)

(δ) Να αποδείξετε ότι $\text{ΑΓ} \perp \text{ΒΜ}$.

(β. 1,5)

(ε) Να βρείτε το συν $\hat{\Gamma}$.

(β. 1,5)

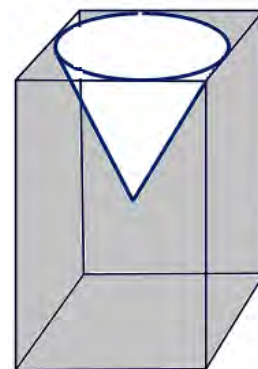
5. Ένα εργοστάσιο θέλει να κατασκευάσει 100 ίδιες πήλινες γλάστρες. Η κάθε γλάστρα αποτελείται από ένα τετραγωνικό πρίσμα από το οποίο αφαιρέθηκε ένας κώνος, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Το εμβαδόν της βάσης του πρίσματος είναι 144 cm^2 , ο όγκος του κώνου είναι $96\pi \text{ cm}^3$ και το άθροισμα των υψών των δύο στερεών είναι 20cm.

(α) Να αποδείξετε ότι η ακτίνα του κώνου είναι 6cm.

(β. 1,5)

- (β) Η κάθε γλάστρα πρέπει να μπογιατιστεί (βαφτεί) ολόκληρη με ειδικό υλικό, το οποίο πωλείται σε συσκευασία αξίας €15 η κάθε μια. Κάθε συσκευασία καλύπτει επιφάνεια 3000 cm^2 . Να βρείτε το συνολικό κόστος μπογιατίσματος των 100 γλαστρών.

(β. 8,5)



Η Διευθύντρια

Αφροδίτη Μαληγκίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ/ ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Βαθμολογία:

Ημερομηνία: 5/6/2019

Ολογράφως:

Τάξη: Γ΄ Διάρκεια: 2 ώρες

Υπ. Καθηγητή:

Ονοματεπώνυμο:

Τμήμα: Αριθμός:

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ: (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
(β) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα με μολύβι).
(γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δέκα (10) σελίδες

ΟΔΗΓΙΑ: Να δικαιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας σε όλα τα θέματα.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1

Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(4 - \omega)^2 =$

(β) $(\omega + 6)(\omega - 6) =$

ΘΕΜΑ 2

Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα

$$\left. \begin{array}{l} 7x - 3y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{array} \right\}$$

ΘΕΜΑ 3

Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

(α) $2x^2\omega - 3x\omega$ (μον.1,5)

(β) $49 - x^2$ (μον.1,5)

(γ) $x^2 - 3x - 10$ (μον.3)

ΘΕΜΑ 4

Να βρείτε το **εμβαδόν** και τον **όγκο** του κύβου που έχει ακμή $a=5\text{cm}$.

ΘΕΜΑ 5

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$(\chi - 2)(2\chi + 3) = 0 \quad (\text{μον.2})$$

$$2\chi^2 + \chi - 3 = 0 \quad (\text{μον.3})$$

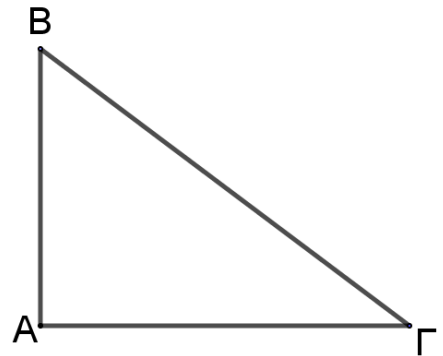
ΘΕΜΑ 6

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από το σημείο $A(-2,4)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_1: 2\psi - 4\chi = 6$

ΘΕΜΑ 7

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($A=90^\circ$). Αν $\eta\mu B = \frac{4}{5}$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 5\sigma\upsilon\nu B - 8\varepsilon\varphi\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\Gamma$$



ΘΕΜΑ 8

Να αποδείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι σταθερή:

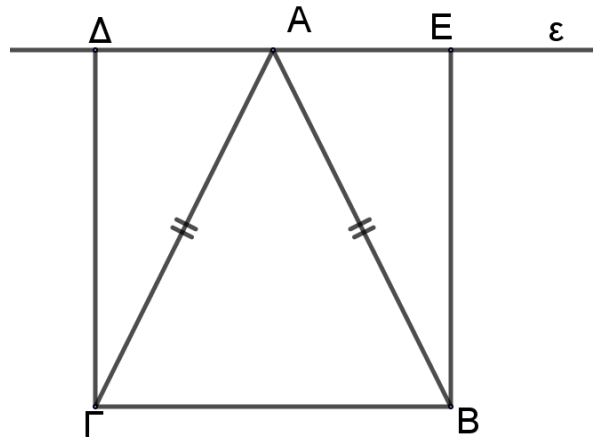
$$A = \frac{\frac{2x^4 + 2x^3}{x^4 - x^2}}{\frac{4x^3 + 4x^2 + 4x}{x^3 - 1}}$$

ΘΕΜΑ 9

Στο διπλανό σχήμα το $\triangle AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο και η ευθεία ϵ είναι παράλληλη στην $B\Gamma$.

Αν $\Gamma\Delta$ και BE είναι κάθετες στην ευθεία ϵ να δείξετε ότι :

(α) $\Gamma\Delta = BE$

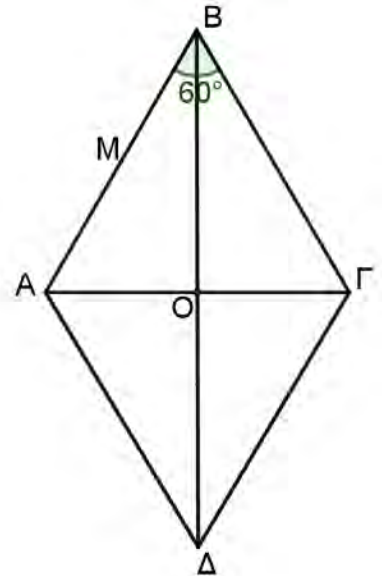


(β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle A\Delta B$ και $\triangle A\epsilon\Gamma$ είναι ίσα.

ΘΕΜΑ 10

Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\hat{B} = 60^\circ$ και M το μέσο της πλευράς AB . Από το M φέρνουμε παράλληλη προς την $A\Gamma$ η οποία τέμνει την $B\Gamma$ στο E .

(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $MO\Gamma E$ είναι ρόμβος. (μον.4)



(β) Αν η πλευρά του ρόμβου $AB\Gamma\Delta$ είναι 8cm να βρείτε το μήκος της διαγωνίου OE του ρόμβου $MO\Gamma E$.

(μον.1)

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1

Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x}{2-x} = \frac{12}{x^2-4} + 1$$

ΘΕΜΑ 2

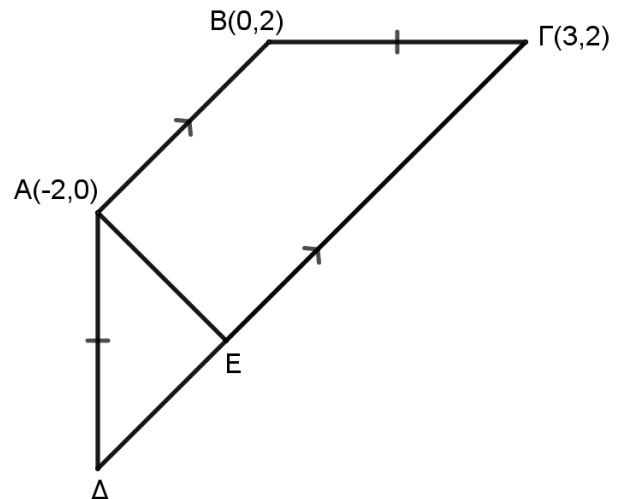
Το διπλανό τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο και το ΑΕ είναι το ύψος του. Να βρείτε :

(α) Τις συντεταγμένες του μέσου της ΒΓ.

(β) Την εξίσωση της ευθείας ΓΔ .

(γ) Την εξίσωση της ευθείας ΑΕ .

(δ) Το μήκος της διαγωνίου ΒΔ.

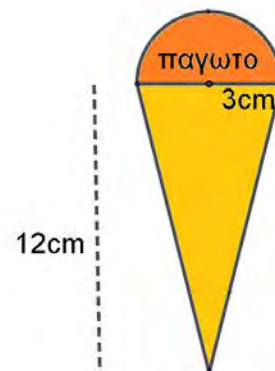
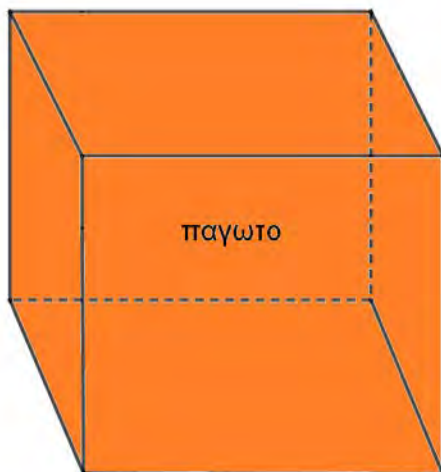


ΘΕΜΑ 3

Ο κύριος Νίκος αγοράζει παγωτό σε δοχεία σχήματος ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του δοχείου είναι 1350cm^2 , το ύψος του είναι 15cm και το μήκος του είναι διπλάσιο από το πλάτος του. Με αυτό το παγωτό γεμίζει χωνάκια σχήματος κώνου (όπως φαίνεται πιο κάτω). Το κάθε χωνάκι έχει ύψος 12cm και ακτίνα 3cm .

(α) Να βρείτε πόσα το **πολύ** χωνάκια μπορεί να γεμίσει ο κύριος Νίκος με ένα τέτοιο δοχείο παγωτού. (μον.7)

(β) Το κάθε δοχείο παγωτού στοιχίζει 35 ευρώ και το κάθε χωνάκι 5σεντ. Αν πωλεί το χωνάκι με το παγωτό 1,50 ευρώ, πόσα θα κερδίσει; (μον.3)



ΘΕΜΑ 4

(α) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

(μον.6)

$$K = \frac{(\chi + 1)^3 - (\chi - 1)(\chi + 1) - \chi(\chi^2 + 2\chi) + 1}{\chi^2 + \chi - \psi\chi - \psi}$$

(β) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ το άθροισμα των δύο καθέτων πλευρών είναι 10 και το τετράγωνο της υποτεινουσας είναι 64. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.

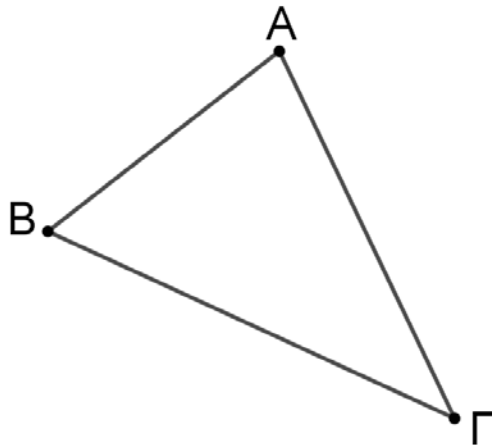
(μον.4)

ΘΕΜΑ 5

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $AB < AG$. Να προεκτείνετε τη διάμεσο ΑΜ κατά τμήμα $MD = MA$. Από το Α να φέρετε παράλληλη προς τη ΒΓ η οποία τέμνει την προέκταση της ΔΓ στο σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι:

(α) το τετράπλευρο ΑΒΔΓ
είναι παραλληλόγραμμο (μον.3)

(β) $BM = \frac{AE}{2}$. (μον.3)



(γ) τα σημεία Β και Ε ισαπέχουν από την ΑΓ (μον.4)

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του ΜΕΡΟΥΣ Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x+5)^2 =$

(β) $(x-6)(x+6) =$

2. Να λύσετε το σύστημα εξισώσεων:

$$2x + 3\psi = 1$$

$$-x + 5\psi = -7$$

3. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - 5x + 3 = 0$

4. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $\omega^2 - 8\omega =$

(μον. 1)

(β) $x^2 - 9 =$

(μον. 1,5)

(γ) $x^2 - 6x + 5 =$

(μον. 1)

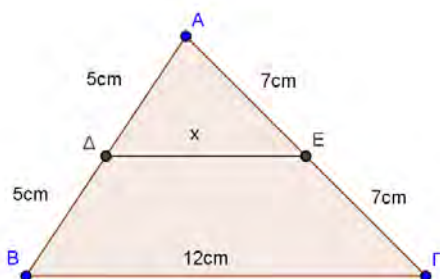
(δ) $(5\alpha - \beta) \cdot (\gamma + 3) - 2\gamma \cdot (5\alpha - \beta) =$

(μον. 1,5)

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των x , y και ω στα πιο κάτω σχήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

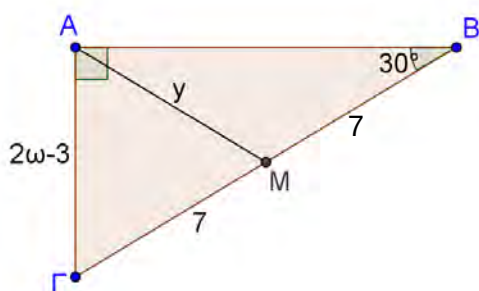
(α)

(μον. 1,5)

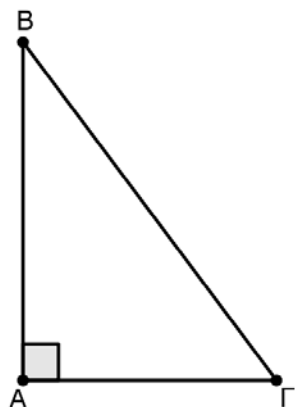


(β)

(μον. 3,5)



6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90^\circ$) φέρουμε τη διάμεσο AD . Από το σημείο D φέρουμε $\perp$ (E σημείο της $A\Gamma$) και $\perp$ (Z σημείο της AB). Να δείξετε ότι το $AEDZ$ είναι ορθογώνιο. Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

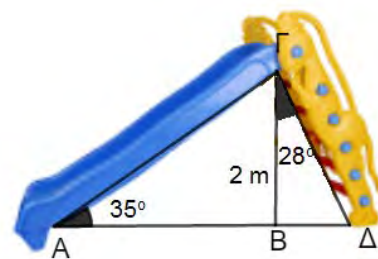


7. Σε μια παιδική χαρά υπάρχει μια «τσουλήθρα» για την οποία δίνονται: $\perp B \perp \perp \perp$, $m = 2$ m, $\hat{A} = 35^\circ$ και $\hat{B} = 28^\circ$.

Να υπολογίσετε:

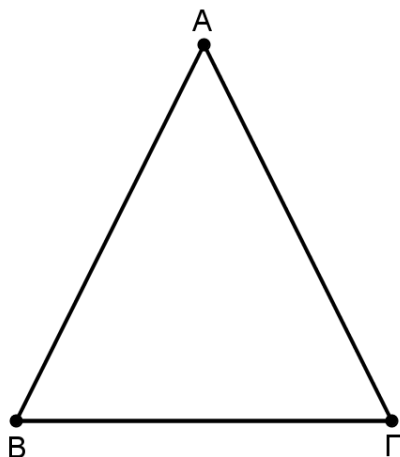
- (α) το μήκος ΓD της σκάλας που ανεβάζει στην «τσουλήθρα»
 (β) το μήκος $A\Gamma$ της «τσουλήθρας»

Οι απαντήσεις να δοθούν κατά προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου.



	35°	28°
ημ	0,574	0,469
συν	0,819	0,883
εφ	0,7	0,532

8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$) και M το μέσο της $B\Gamma$. Πάνω στις ίσες πλευρές παίρνουμε τμήματα AE και AZ , τέτοια ώστε $AE=AZ$. Να δείξετε ότι $ME=MZ$.



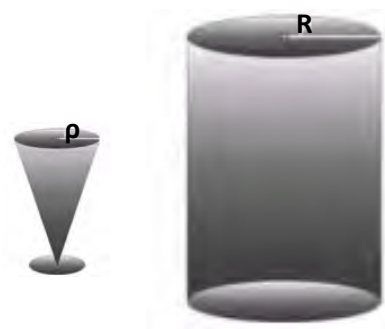
9. (α) Αν $x \neq -1$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης: (μον. 3)

$$A = (2x - \frac{1}{x})^2 + (3x - \frac{1}{x})(x + \frac{1}{x}) - \frac{1}{x^2}$$

(β) Να κάνετε τις πράξεις: (μον. 2)

$$\frac{x^3}{x^3 - 1} : \frac{3}{x^3 + x^2 + x} =$$

10. Κυλινδρικό δοχείο (ακτίνας R) με εμβαδόν βάσης $64\pi \text{ cm}^2$ και ύψος 30 cm, είναι γεμάτο με κρασί. Με το κρασί αυτό θέλουμε να γεμίσουμε ποτήρια σε σχήμα κώνου (ακτίνας ρ), με διάμετρο 12 cm και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $60\pi \text{ cm}^2$. Να βρείτε πόσα το πολύ ποτήρια θα γεμίσουν πλήρως.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του ΜΕΡΟΥΣ Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\frac{1}{x} = 12 \frac{1}{x^2}$ (μον. 3)

(β) $\frac{7}{x^2 - 1} - \frac{2 - x}{x^2 + x} = \frac{2}{x^2 - x}$ (μον. 7)

2. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε μέσο της ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ=ΕΔ. Να δείξετε ότι:

(α) $BE = EF$ (μον. 3)

(β) το τρίγωνο ΕΓΖ είναι ισοσκελές (μον. 3)

(γ) το ΕΒΓΖ είναι παραλληλόγραμμο (μον. 4)

Να κάνετε το σχήμα και να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

3. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\frac{1}{x-3} + \frac{1}{2-x}}{\frac{x+1}{x^2-5x+6}}$ και $B = \frac{x+2}{x-2} - \frac{5x+6}{x^2-4}$.

$(x \neq -1, x \neq -2, x \neq 2, x \neq 3)$

(α) Να αποδείξετε ότι: $A = \frac{1}{x+1}$ και $B = \frac{x+1}{x+2}$ (μον. 7)

(β) Να βρείτε το ανάπτυγμα της παράστασης $\left(\frac{1}{AB}\right)^3$ (μον. 3)

4. Στο πιο κάτω ορθογώνιο σύστημα αξόνων δίνονται τα σημεία A, B, Γ και Δ, τα οποία αντιστοιχούν σε τέσσερα χωριά της επαρχίας Λευκωσίας.

(α) Να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων A, B, Γ και Δ. (μον. 1)

(β) Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των χωριών A και Γ. (μον. 2)

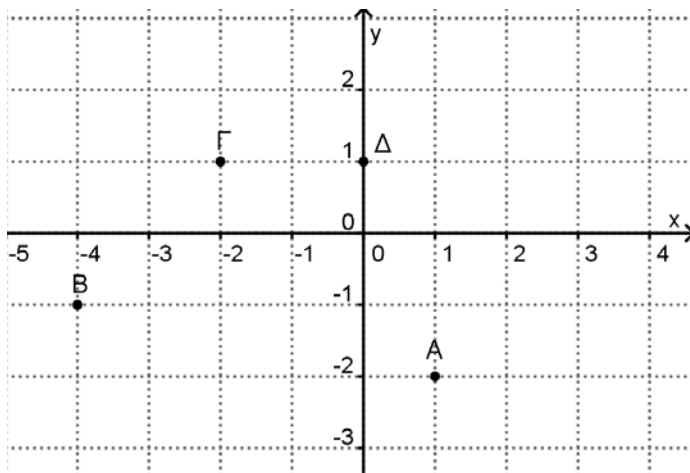
(γ) Στο μέσο M της απόστασης των χωριών A και B θα χτιστεί βενζινάδικο.

Να βρείτε τις συντεταγμένες του. (μον. 2)

(δ) Να δείξετε ότι τα χωριά A, B και Γ αποτελούν κορυφές ορθογωνίου τριγώνου. (μον. 3)

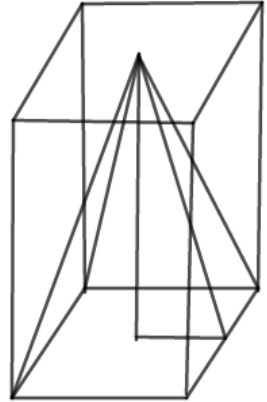
(ε) Να βρείτε την εξίσωση ευθείας ε_1 που είναι κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα AB

και περνά από το σημείο M. (μον. 2)



5. Στο σχήμα δίνεται ένα ορθό τετραγωνικό πρίσμα, από το οποίο αφαιρείται μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Το πρίσμα και η πυραμίδα έχουν το ίδιο ύψος και την ίδια βάση. Αν η περίμετρος της βάσης του σχήματος ισούται με 120 cm και το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του πρίσματος είναι ίσο με 960 cm^2 , να βρείτε:

- | | |
|---|----------|
| (α) το μήκος της πλευράς της βάσης του σχήματος | (μον. 1) |
| (β) το ύψος του πρίσματος | (μον. 2) |
| (γ) το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας | (μον. 3) |
| (δ) τον όγκο του σχήματος | (μον. 4) |



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **5 μονάδες**.

1. Να κυκλώσετε το «σωστό» ή το «λάθος» στις πιο κάτω περιπτώσεις:

$(-3x)(3x-5) = -9x^2 + 15x$	σωστό/λάθος
$(x+3)(x+2) = x^2 + 6$	σωστό/λάθος
$(a+2)(a^2+4a+4) = a^3 - 8$	σωστό/λάθος
$(2x-1)(2x+1) = 4x^2 - 1$	σωστό/λάθος

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(5x-2)^2 =$

β) $(7x+4)(7x-4) =$

-
3. Να αναλύσετε **πλήρως** σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $5x^2y - 15xy^2 =$

β) $\alpha^2\beta - 4\beta - \alpha^4 + 4\alpha^2 =$

γ) $36\omega^2 - 25\kappa^2 =$

δ) $x^2 - 5x - 14 =$

4. Να λύσετε το σύστημα:
- $$\begin{aligned} 3x - y &= 7 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

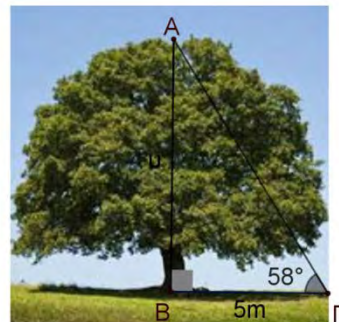
5. Στο διπλανό σχήμα $\hat{\Gamma} = 58^\circ$ και $B\Gamma = 5\text{m}$.
Να υπολογίσετε το **ύψος του δέντρου**.

Δίνονται:

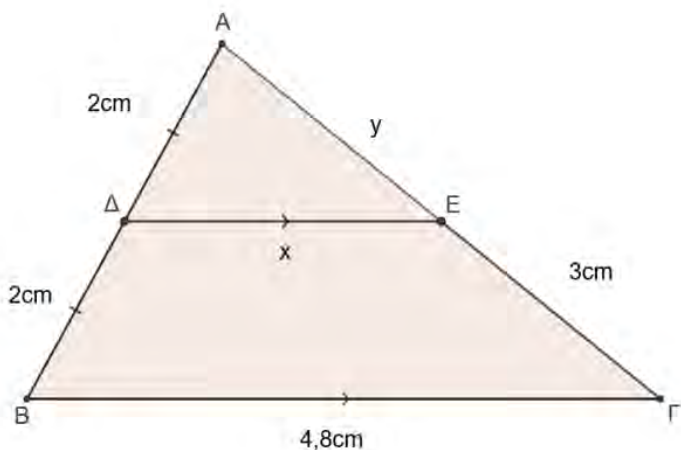
$$\eta\mu 58^\circ \cong 0,848$$

$$\sigma\upsilon\nu 58^\circ \cong 0,530$$

$$\epsilon\phi 58^\circ \cong 1,600$$



Να υπολογίσετε τις τιμές του x και y στο πιο κάτω σχήμα δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



6. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$5x^2 + 3x - 2 = 0$$

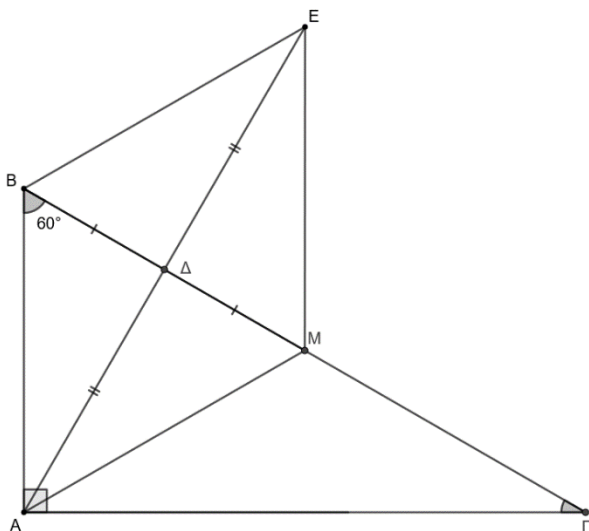
7. Δίνεται ο πιο κάτω κώνος με **διάμετρο** βάσης $\delta=12cm$ και $\omega=30^\circ$.
 Να υπολογίσετε :
 α) Το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.
 β) Τον όγκο του.

(Οι απαντήσεις να δοθούν συναρτήσει του π)

8. Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{x^2-9x+20}{x^3-16x} : \frac{x^2-10x+25}{x^2+4x} =$

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(\hat{A} = 90^\circ)$ και $\hat{B} = 60^\circ$. Έστω **M** το μέσο της $B\Gamma$ και **Δ** το μέσο της BM . Προεκτείνουμε την AD κατά τμήμα $\Delta E = AD$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ABEM$ είναι **ρόμβος**.

(Στις απαντήσεις σας να υπάρχει πλήρης αιτιολόγηση)



ΜΕΡΟΣ Β΄ : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **10 μονάδες**.

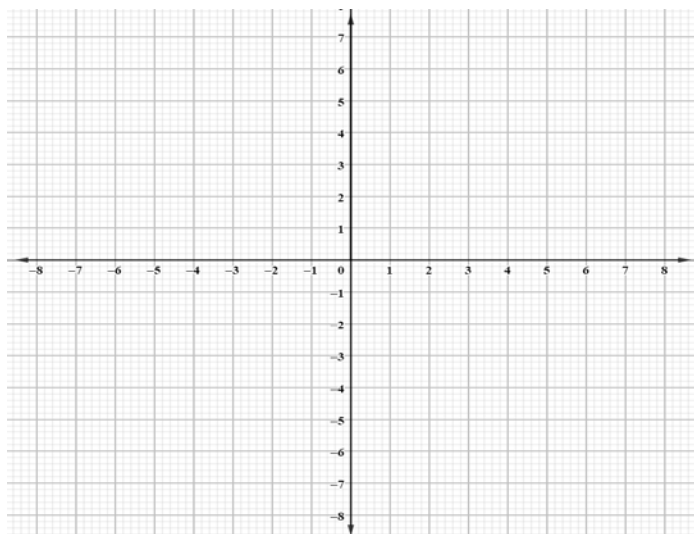
1. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x - 3} + \frac{x + 2}{1 - x} = \frac{x + 1}{x + 3}$$

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(−4,2) , Β(4,6) και Γ(6,2).

(Οι απαντήσεις να δοθούν χρησιμοποιώντας τους ανάλογους τύπους και όχι από το σχήμα)

- α) Να βρείτε τις **κλίσεις** των ευθειών ΑΒ και ΒΓ και να δείξετε ότι $\hat{B} = 90^\circ$.
(μον.2,5)
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΓ. (μον.2,5)
- γ) Αν Δ σημείο τέτοιο ώστε ΑΒΓΔ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, να αποδείξετε ότι οι **συντεταγμένες** του **σημείου Δ** είναι (−2 , -2). (μον.2,5)
- δ) Να δείξετε ότι οι **διαγώνιοι** του ορθογωνίου είναι **ίσες**. (μον.2,5)

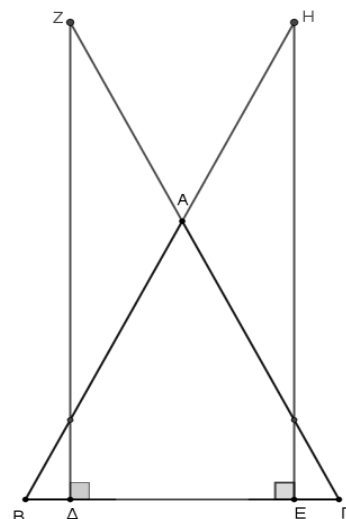


3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Παίρνουμε σημεία Δ και E στην πλευρά $B\Gamma$ έτσι ώστε $B\Delta=GE$. Αν επιπλέον $Z\Delta=HE$ και $Z\Delta$ και HE είναι κάθετες στη $B\Gamma$, να δείξετε ότι :

α) $\hat{B}\hat{E}H = \hat{\Gamma}\hat{\Delta}Z$

β) $AH=AZ$.

(Στις απαντήσεις σας να υπάρχει πλήρης αιτιολόγηση)



4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < AG$) και η AD διχοτόμος του. Από το σημείο B φέρουμε **κάθετη στην AD** στο σημείο E και η προέκταση της **τέμνει την AG στο Z** .

α) Να γίνει σχήμα. (μον.4)

β) Να δείξετε ότι:

i. Το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές.

(μον. 3)

ii. Τα τρίγωνα $AB\Delta$, ADZ είναι ίσα.

(μον. 3)

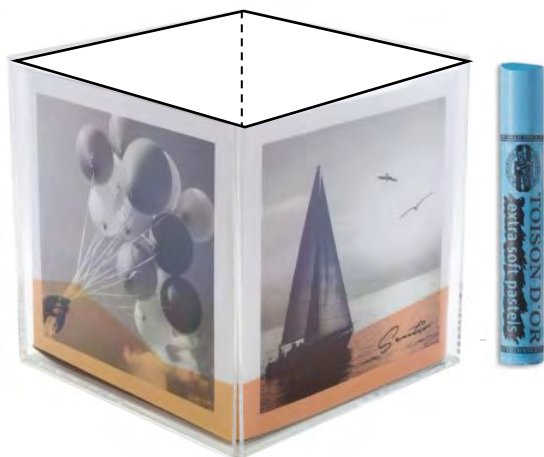
(Στις απαντήσεις σας να υπάρχει πλήρης αιτιολόγηση)

5. **Ανοιχτό κουτί** σε σχήμα **κύβου** περιέχει **25 ίσα** χρωματιστά παστέλ τοποθετημένα σε **5 σειρές των 5 παστέλ ανά σειρά**. Τα παστέλ έχουν **κυλινδρικό σχήμα** με **διάμετρο $\delta=16mm$** και **εφάπτονται μεταξύ τους** αλλά και με τα **τοιχώματα του κουτιού**. Να βρείτε:

α) Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του κουτιού. (μον.4)

β) Τον όγκο του κουτιού. (μον.2)

γ) Τον όγκο του κενού χώρου που δημιουργείται στο εσωτερικό του κύβου ανάμεσα στα τοιχώματα του και τα παστέλ. (μον.4)



ΠΑΣΤΕΛ

ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΔΡ ΚΩΣΤΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

Βαθμολογία:

Ημερομηνία: **05/ 06/ 2019**

Ολογράφως:

Τάξη: **Γ΄**

Υπογραφή Καθηγητή:

Διάρκεια: **2 ώρες**

Ονοματεπώνυμο:

Τμήμα: Αριθμός:

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ :

1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
2. Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
4. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η απαραίτητη εργασία.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 10 σελίδες.

Μέρος Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες από τις 100.

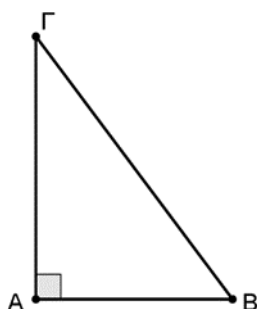
1. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 + 3x =$

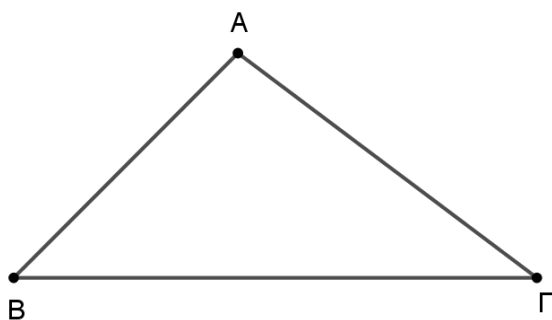
β) $x^2 - 16 =$

2. Δίνονται τα σημεία A(2, 6) και B(-1, 2). Να βρείτε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB.

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με AB=6 cm και ΑΓ=8 cm. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ.



4. Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει βάση με διαστάσεις 12 m και 10 m και το ύψος του είναι ίσο με 3 m. Να υπολογίσετε:
- α) το εμβαδό της ολικής επιφάνειάς του και
- β) τον όγκο του.
5. Δίνεται το τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Να φέρετε το ύψος ΑΔ και να το προεκτείνεται προς το Δ κατά τμήμα ΔΕ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΕΔΓ είναι ίσα.

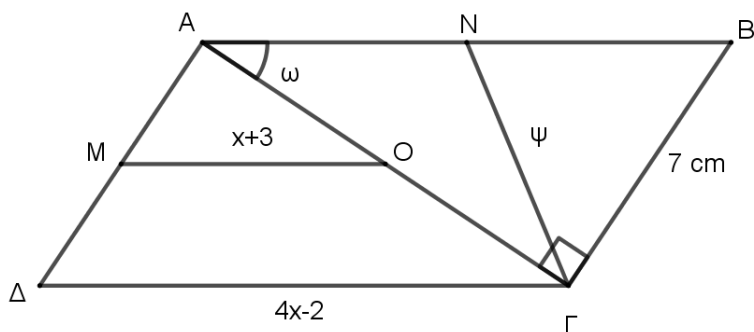


6. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - 7x = -5$

7. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{\frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha\beta} - 2}{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}} =$$

8. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και τα σημεία Μ, Ν και Ο είναι τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΔ, ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν $B\Gamma = 7 \text{ cm}$, να υπολογίσετε τις τιμές των αγνώστων x , y και ω . Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



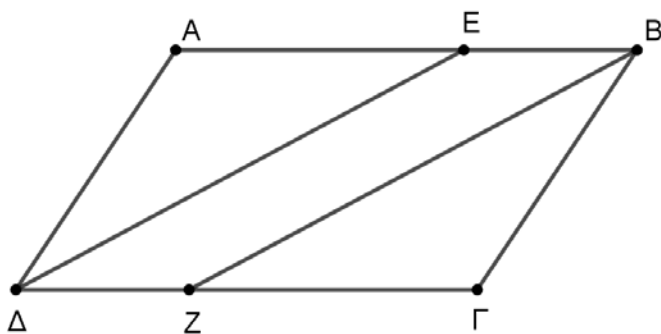
9. Αν $\alpha + \beta = 3$ να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 + (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2$$

10. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ε και η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την πλευρά ΓΔ στο σημείο Ζ. Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα.

β) Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες από τις 100.

1. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα : (Mov. 6)

$$(x-1)^3 + (x^3-1)(x^3+1) - x(x-2)^2 - x(x-1) + 1 = x^6 - 1$$

β) Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση: (Mov. 4)

$$(x-1)^3 + (x^3-1)(x^3+1) - x(x-2)^2 - x(x-1) + 1 =$$

2. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x+8}{x^2-4x-21} - \frac{1}{x+3} = \frac{x}{2x+6}$

β) Να λύσετε το παρακάτω πρόβλημα με τη χρήση εξίσωσης:

Η ηλικία ενός πατέρα είναι σήμερα 35 χρονών και η ηλικία του γιου του είναι 2 χρονών. Να υπολογίσετε μετά από πόσα χρόνια, η ηλικία του πατέρα θα είναι 3 χρόνια μεγαλύτερη από το τετράγωνο της ηλικίας του γιού του.

3. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, η πλευρά AB έχει εξίσωση $3x - 2y = 12$ και η πλευρά $A\Delta$ έχει εξίσωση $x - 4y = 4$. Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K(3,2)$.

α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(2,4)$. (Μον. 4)

β) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$. (Μον. 3)

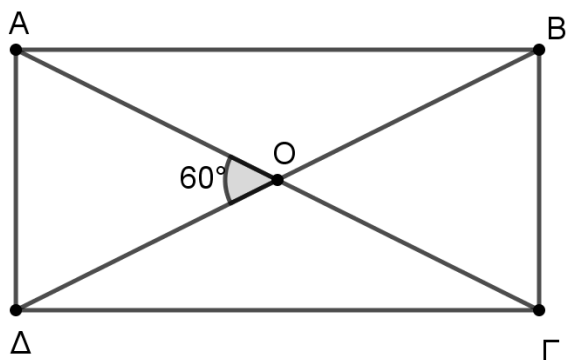
γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΓE . (Μον. 3)

4. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο το σημείο O . Οι διαγώνιοί του σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε ΔM κάθετο στην $A\Gamma$ και από το Γ φέρουμε ΓN κάθετο στη $B\Delta$.

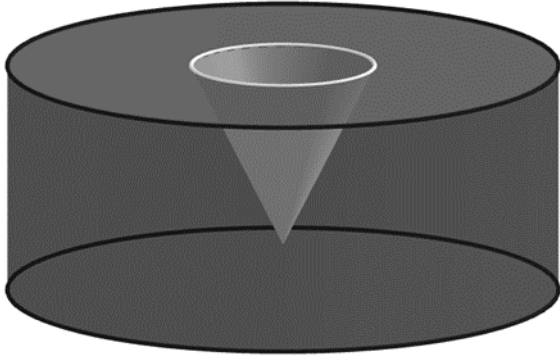
Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο M είναι μέσο του AO και το σημείο N είναι το μέσο του OB ,

β) το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



5. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ένας κύλινδρος με ακτίνα R και ύψος $u=14\text{ cm}$ από τον οποίο αφαιρείται ένας κώνος με ακτίνα ρ και γενέτειρα $\lambda=13\text{ cm}$. Αν η διαφορά των ακτινών των δυο στερεών είναι 10 cm και η διαφορά των κυρτών επιφανειών τους είναι $355\pi\text{ cm}^2$, να βρείτε τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται.



Οι εισηγητές
Καραβία Αικατερίνη (ΒΔ)
Γεωργιάδου Ελένη
Στεργίδου Αγγέλα
Κοκόλης Σπύρος

Ο Διευθυντής

Σαμάρας Παρασκευάς

ΠΡΟΧΕΙΡΟ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2019

ΩΡΑ: 7:45π.μ. – 9:45π.μ.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

Βαθμός:

Ολογράφως:

Υπογρ. καθηγητή/τριας:

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα: Αρ.....

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε να αναπτύγματα:

α) $(x + 2)(x - 2) =$ (β.2)

β) $(3\alpha + 1)^2 =$ (β.3)

2. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{aligned} x - 3\psi &= 7 \\ 4x + \psi &= 15 \end{aligned}$$

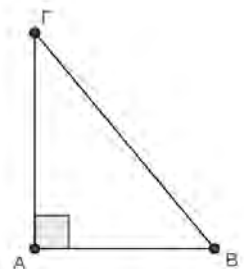
3. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

α) $3x\psi + 12x^2 =$ (β.1)

β) $x^2 - 25\psi^2 =$ (β.2)

γ) $x^2 + 2x - 15 =$ (β.2)

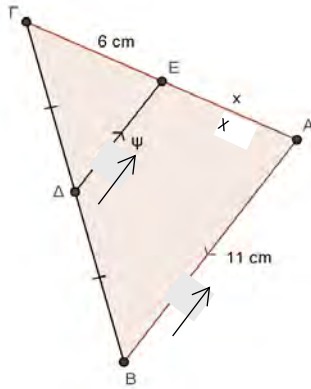
4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) δίνεται το $\eta\mu\Gamma = \frac{6}{10}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Β.



5. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - 5x = 3$

6. Να υπολογίσετε το x και το ψ στα πιο κάτω σχήματα. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

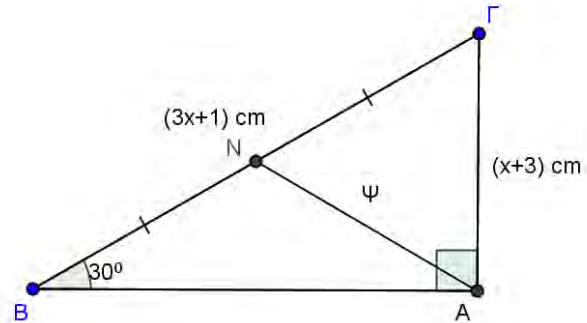
α)



(β.2)

β)

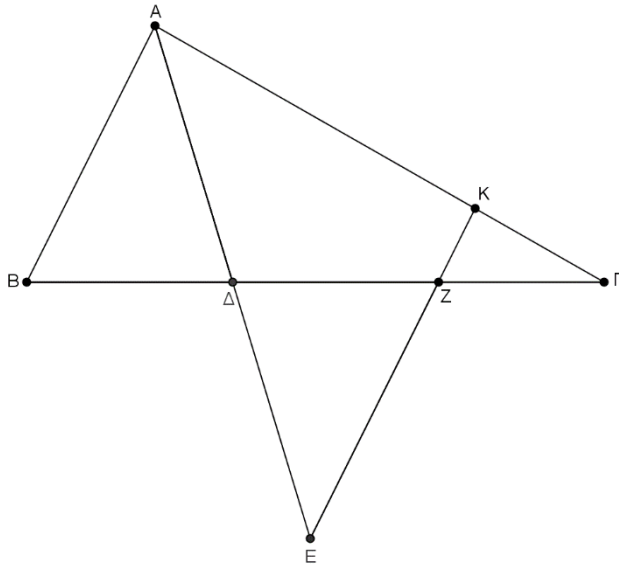
(β.3)



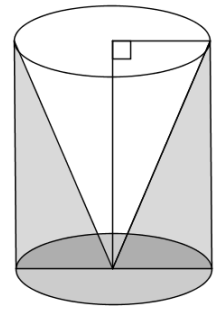
7. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και AD διχοτόμος του. Προεκτείνουμε την AD κατά τμήμα $DE = AD$. Αν το Δ είναι το μέσο της BZ και η ευθεία EZ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο K να δείξετε ότι:

α) $\triangle ABD \cong \triangle EZD$ (β.3)

β) $\triangle AKE$ ισοσκελές τρίγωνο (β.2)



8. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένας κύλινδρος που από μέσα του αφαιρέθηκε ένας κώνος. Αν η περίμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι 10π cm και η γενέτειρα του κώνου $l = 13$ cm, να βρείτε:



- α) Το εμβαδόν της επιφάνειας του σκιασμένου στερεού. (β.3)
 β) Τον όγκο του σκιασμένου στερεού. (β.2)
 (Οι απαντήσεις να δοθούν συναρτήσει του π.)

9. Δίνεται η παράσταση $A(x) = (2x - 1)^3 - 2x(2x - 1)(2x + 1) + (2x + 3)^2$

- (α) Να δείξετε ότι $A(x) = -8x^2 + 20x + 8$
 (β) Να λύσετε την εξίσωση $A(x) = 8$

10. Να υπολογίσετε τις τιμές του μ , ώστε η ευθεία $\varepsilon_1: x - 2y = 7$ να είναι κάθετη στην

ευθεία $\varepsilon_2: y = \left(\frac{\mu^2 - 5\mu}{2} \right)x + 9$.

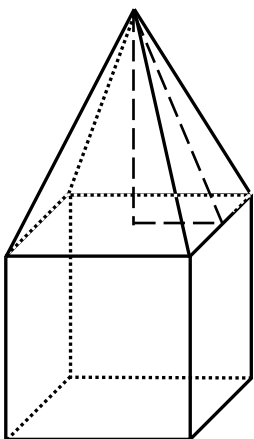
ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{7\psi}{\psi^2 - \psi - 12} - \frac{\psi - 2}{4 - \psi} = \frac{3}{\psi + 3}$$

2. Η πιο κάτω κατασκευή αποτελείται από έναν κύβο και μια τετραγωνική πυραμίδα. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας είναι 240 m^2 και το παράπλευρο ύψος της είναι 10 m. Να υπολογίσετε:

- α) Τον όγκο της κατασκευής. (β.7)
 β) Το κόστος της εξωτερικής επένδυσης της κατασκευής (εκτός του δαπέδου) αν χρησιμοποιηθεί υλικό που πωλείται προς €10 το τετραγωνικό μέτρο. (β.3)

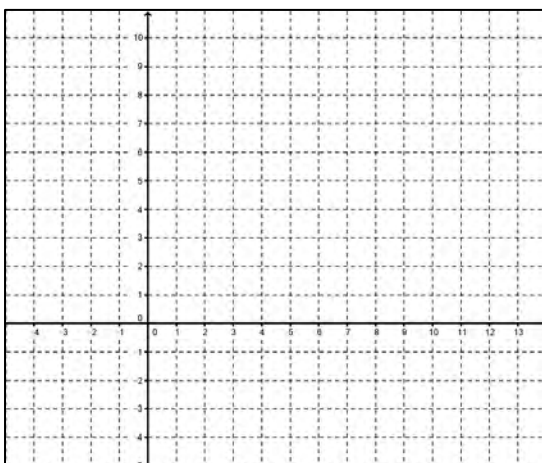


3. α) Να κάνετε τις πράξεις: $\left(\frac{4x-5}{x^2-5x+6} - \frac{3}{2x-6} \right) : \frac{5x-4}{x^2-4x+4} =$

- β) Σε μία εκδήλωση του Γυμνασίου Έγκωμης πήγαν 152 άτομα, άνδρες και γυναίκες. Στο διάλειμμα έφυγαν 15 άνδρες και ήρθαν 20 γυναίκες και τότε ο αριθμός των γυναικών έγινε κατά 16 μεγαλύτερος από το διπλάσιο αριθμό των ανδρών. Πόσοι άνδρες και πόσες γυναίκες πήγαν αρχικά στην εκδήλωση; (Να το λύσετε με σύστημα)

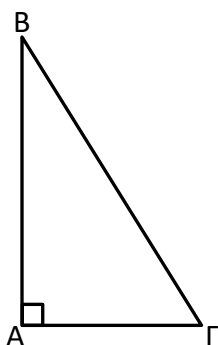
4. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές $A(2,5)$, $B(6,9)$, $\Gamma(12,10)$ και $\Delta(1,-1)$.

- α) Να δείξετε ότι το ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (β.4)
 β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου του τραpezίου. (β.3)
 γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΕ του τραpezίου. (β.3)



5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ και το σημείο Ε το μέσο της ΒΓ. Να προεκτείνετε το ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ, τέτοιο ώστε $ΕΔ = ΔΖ$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΖ είναι παραλληλόγραμμο. (β.4)
 β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΕΒΖ είναι ρόμβος. (β.3)
 γ) Από το σημείο Ε φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την ΑΒ, η οποία τέμνει την πλευρά ΑΓ στο σημείο Η. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΔΕΗ είναι ορθογώνιο. (β.3)



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019	ΒΑΘΜΟΣ:
	ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ.:
	ΥΠΟΓΡΑΦΗ:
ΤΑΞΗ: Γ'	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 05/06/2019
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	ΣΥΝΟΛΙΚΟΣ ΧΡΟΝΟΣ: 2 ΩΡΕΣ
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:	ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.:

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Να γράφετε με μπλε μελάνι. (Τα σχήματα με μολύβι).
 2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 4. Να λύσετε τις ασκήσεις ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΦΥΛΛΑΔΙΟ.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΝΕΑ (9) ΣΕΛΙΔΕΣ.

----- ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ -----

ΜΕΡΟΣ Α' : (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(x - 2)^2 =$

(β) $(y - 4)(y + 4) =$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $5x + 5y =$

(β) $a^2 - 4 =$

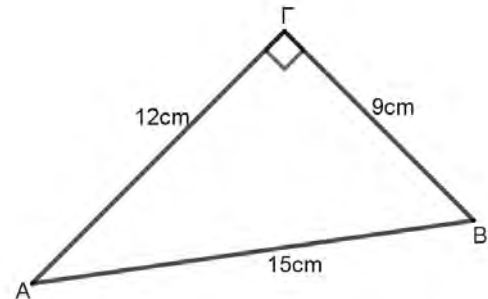
3. Να υπολογίσετε τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις 2cm, 5cm και 6cm.

4. Να λύσετε το σύστημα:

$$3x + y = 10$$

$$2x - y = 5$$

5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $AB = 15\text{cm}$, $B\Gamma = 9\text{cm}$ και $A\Gamma = 12\text{cm}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\widehat{\sin A}$ και $\widehat{\cos B}$.

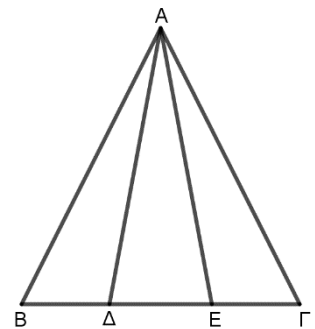


6. Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 - 5x + 2 = 0$

7. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

Αν $B\Delta = \Gamma E$, να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα.

(Δεδομένα – Ζητούμενα – Απόδειξη)



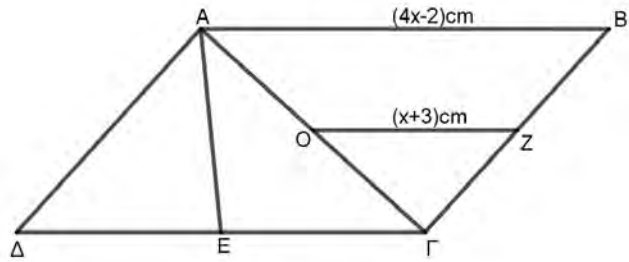
8. Να κάνετε τις πράξεις:

$$(3x - y)^2 - (3x + 2)(3x - 2) - (y + 1)^3 + y^2(y + 2) =$$

9. Να δείξετε ότι: $\left(\frac{\alpha}{\beta} - 2 + \frac{\beta}{\alpha}\right) \div \left(\frac{\alpha}{\alpha\beta + \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \alpha\beta}\right) = \alpha - \beta$

10. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο και O το κέντρο του. Αν Z το μέσο της $B\Gamma$, E το μέσο της $\Gamma\Delta$ και η γωνία $\widehat{\Delta\hat{A}\Gamma} = 90^\circ$, να υπολογίσετε:

- (α) το μήκος του AB ,
(β) το μήκος του AE .



ΜΕΡΟΣ Β': (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{8}{x^2 + 2x - 3} + \frac{2x+1}{x-1} = \frac{x+1}{x+3}$

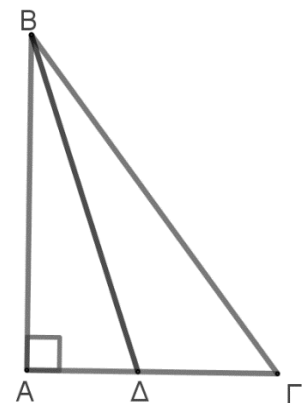
2. Δίνεται το τρίγωνο με κορυφές $A(4,3)$, $B(9,4)$ και $\Gamma(5,-2)$.

- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $B\Gamma$.
(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $M(7,1)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $y = -3x + 5$.
(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.
(δ) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

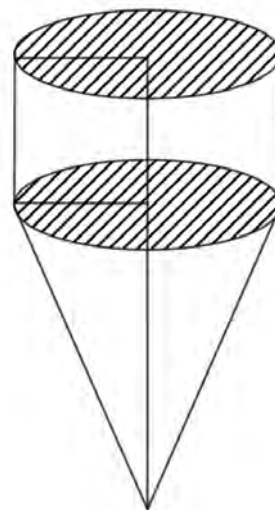
3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $\widehat{A} = 90^\circ$ και BD διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Από το σημείο Δ φέρουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΔE κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$.

- (α) Να αποδείξετε ότι $AB = BE$.
(β) Αν οι προεκτάσεις των $E\Delta$ και BA τέμνονται στο H , να αποδείξετε ότι:
(i) $E\Gamma = AH$
(ii) Η ευθεία BD είναι μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος ΓH .

(Σχήμα – Δεδομένα – Ζητούμενα – Απόδειξη)



4. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται μια κλειστή μεταλλική κατασκευή αποθήκευσης σιτηρών που αποτελείται από έναν κύλινδρο και έναν κώνο. Τα δύο αυτά στερεά έχουν την ίδια ακτίνα. Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι ίσο με $65\pi \text{ m}^2$ και η γενέτειρά του είναι ίση με 13 m . Το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με 6 m .



(α) Να υπολογίσετε τον όγκο της διπλανής μεταλλικής κατασκευής.

(β) Πόσα λίτρα μπογιάς θα χρειαστούμε για να βάψουμε τη διπλανή κατασκευή αν με κάθε λίτρο μπογιάς μπορούμε να βάψουμε $6,28 \text{ m}^2$;

(Δεδομένα – Ζητούμενα – Απόδειξη)

5. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με γωνία $\widehat{AB\Delta} = 30^\circ$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Από το O φέρουμε παράλληλη προς την $A\Delta$, η οποία τέμνει την AB στο σημείο Z . Στη συνέχεια προεκτείνουμε την OZ κατά τμήμα $ZH = OZ$. Να δείξετε ότι :



(α) Το τετράπλευρο $AHBO$ είναι ρόμβος,

(β) $ZH = \frac{B\Delta}{4}$

(Σχήμα – Δεδομένα – Ζητούμενα – Απόδειξη)

Ο Διευθύνων

Φάνης Σεργίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 31 / 05 / 2019

ΧΡΟΝΟΣ: 2 Ώρες

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΤΜΗΜΑ:

ΑΡ. ...

Βαθμός:/100

Ολογράφως:

Υπογραφή:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

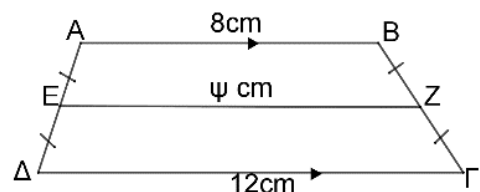
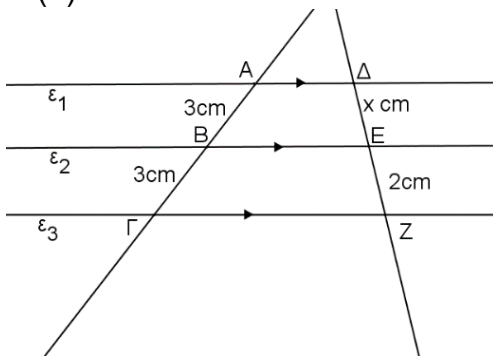
- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- β) Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπονται με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας (tippex).

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΠΤΑ (7) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Δίνεται κύβος ακμής $a = 4\text{cm}$. Να υπολογίσετε τον όγκο του:
2. Να υπολογίσετε τις τιμές των x , ψ σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις:
(α) (β)



3. Να βρείτε τα αναπτύγματα:
(α) $(\alpha + 2)^2 =$
(β) $(x - 3) \cdot (x + 3) =$
4. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:
(α) $3x - 6\psi =$
(β) $25x^2 - 9 =$

5. Να λύσετε το σύστημα:

$$3x - \psi = 8$$

$$2x + \psi = 2$$

6. Στο πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

(α) $\eta\mu B =$

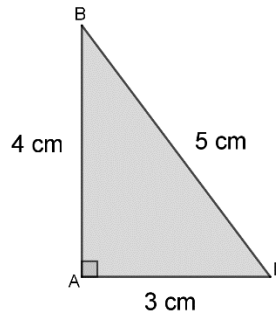
(Mov.2)

(β) $\sigma\upsilon\nu B =$

(Mov.2)

(γ) $\epsilon\phi\Gamma =$

(Mov.1)



7. Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 7x + 12 = 0$

8. Τρίγωνο ABΓ έχει κορυφές A(-5,3) , B(-2,-1) και Γ(2,2).

(α) Να δείξετε ότι $\widehat{B} = 90^\circ$

(β) Να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB=ΑΓ). Φέρω το ύψος ΑΔ. Από τυχαίο σημείο Ε του ύψους ΑΔ φέρνω κάθετες ΕΗ και ΕΘ πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

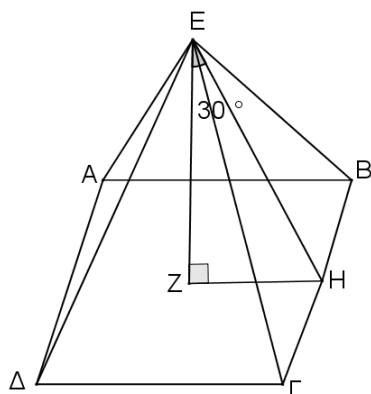
□ □
Να δείξετε ότι $E\Delta H = E\Delta \Theta$ (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

10. Δίνεται η πιο κάτω τετραγωνική πυραμίδα με παράπλευρο ύψος $h=6\text{cm}$. Αν το παράπλευρο ύψος σχηματίζει με το ύψος γωνία 30° .

Να υπολογίσετε:

(α) τον όγκο και

(β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.



ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. (α) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{3x^2 - 12x}{x^2 - 16}$

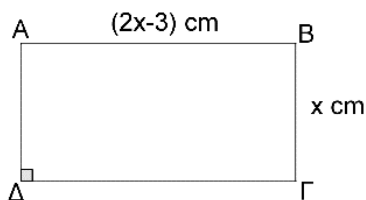
i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x **δεν** ορίζεται η πιο πάνω παράσταση. (Μον.2)

ii. Να απλοποιηθεί η παράσταση A . (Μον.3)

(β) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση : $\frac{7}{x^2 - 1} - \frac{2}{x^2 - x} = \frac{2 - x}{x^2 + x}$ (Μον.5)

2. (α) Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x) = (x - 3)^2 + (3x + 1)^2 - 10(x + 1) \cdot (x - 1)$ είναι σταθερό:

(β) Αν $P(x) = 20 \text{ cm}^2$ είναι το εμβαδόν του πιο κάτω ορθογωνίου, να βρείτε τις διαστάσεις του.



3. (α) Μια παρέα 26 ατόμων θα πάνε εκδρομή και θα μεταφερθούν με 8 οχήματα – αυτοκίνητα και μοτοσυκλέτες. Με κάθε αυτοκίνητο μεταφέρονται 4 άτομα, ενώ με κάθε μοτοσυκλέτα 2. Να βρείτε πόσα αυτοκίνητα και πόσες μοτοσυκλέτες θα χρησιμοποιηθούν: (Να λυθεί με σύστημα).

(β) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων το πολυώνυμο:

$$x^2 + \psi^2 - x + \psi - 2\psi x =$$

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma = 16 \text{ cm}$ και $B\Gamma = 6 \text{ cm}$. Αν Δ , E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα να :

(α) βρείτε την περίμετρο του τριγώνου ΔEZ

(β) αποδείξετε ότι το $\Delta E\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

5. Ένα βανάκι γυμναστικής αποτελείται από ένα κύλινδρο ο οποίος έχει στην κάθε του βάση ένα κώνο, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Ο κύλινδρος έχει ακτίνα 3cm και ύψος 20cm ενώ ο κώνος έχει ύψος 8cm. Αν η ακτίνα του κώνου είναι διπλάσια από την ακτίνα του κυλίνδρου, να υπολογίσετε:

(α) Τον όγκο που έχει το **βανάκι**

(β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας που έχει το **βανάκι**



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	ΤΑΞΗ: Γ	Βαθμός:
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29 / 05 / 2019	ΧΡΟΝΟΣ: 2 ΩΡΕΣ	Υπ. Καθηγ.:
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:		
ΤΜΗΜΑ:		ΑΡ.:

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΠΤΑ (7) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα :

α) $(x+8)^2 =$

β) $(3\alpha-5)(3\alpha+5) =$

2. Κύβος έχει ακμή $a=5\text{cm}$. Να βρείτε :

α) Το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

β) Τον όγκο του κύβου.

3. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα :

α) $5x^2 + 10x =$

β) $\psi^2 - 49 =$

γ) $2\alpha z - \alpha\omega + 2\beta z - \beta\omega =$

δ) $x^2 - 4x - 5 =$

4. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα :

$$3x + 2y = 5$$

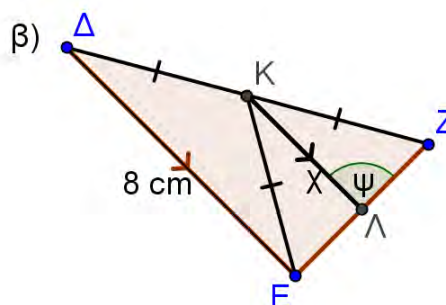
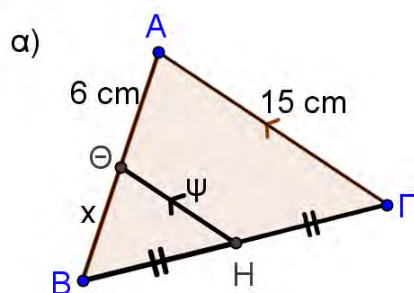
$$2x - y = 8$$

5. Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 - 4x + 1 = 0$

6. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, παίρνουμε στις ίσες πλευρές του AB και $A\Gamma$ ίσα τμήματα AD και AE αντίστοιχα. Αν Z είναι το μέσο της $B\Gamma$ να δείξετε ότι $ZD=ZE$.

7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(3, 7)$ και είναι κάθετη με την ευθεία $8x+24y=11$.

8. Να υπολογίσετε τα χ και ψ . (Να δικαιολογήσετε όλες τις απαντήσεις σας)



9. Αν $\alpha = \beta + 4$ να δείξετε ότι : $(\alpha^2 - 3)(\beta^2 + 1) - (\alpha\beta + 1)^2 + 4(\beta^2 + 1) = 16$

10. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \left(1 + \frac{\chi}{\psi}\right) : \left(1 - \frac{\chi^2}{\psi^2}\right)$ και $B = \left(1 - \frac{\psi}{\chi}\right) : \left(1 - \frac{2\psi}{\chi} + \frac{\psi^2}{\chi^2}\right)$,

με $\chi \neq 0$ και $\psi \neq 0$. Να δείξετε ότι: $A + B = 1$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{1}{\chi+1} - \frac{2}{1-\chi^2} = \frac{3}{\chi^2-3\chi+2}$$

2. Στη Μαθηματική Ολυμπιάδα στο κάθε μαθητή υποβάλλονται 25 ασκήσεις και για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί, ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Ένας μαθητής έλυσε όλες τις ασκήσεις και είχε 17 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 60 βαθμούς, ενώ ένας άλλος μαθητής που επίσης έλυσε όλες τις ασκήσεις είχε 22 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 85 βαθμούς. Πόσους βαθμούς παίρνει ένας μαθητής για κάθε σωστή απάντηση και πόσοι του αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;
(Να λυθεί το πρόβλημα με σύστημα)

3. Κύλινδρος με ακτίνα βάσης 4cm και ύψος 12cm είναι γεμάτος με νερό. Κώνος με εμβαδόν βάσης $36\pi\text{ cm}^2$ και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $60\pi\text{ cm}^2$ είναι άδειος. Γεμίζουμε πλήρως τον κώνο με νερό από τον κύλινδρο. Να βρείτε το ύψος του νερού που απομένει στον κύλινδρο.
4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Παίρνουμε σημεία Z και H πάνω στις AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AZ=AH$.
- α) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις $Z\Theta$ και HE των σημείων Z και H , από την πλευρά $B\Gamma$ είναι ίσες.
- β) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ZHE\Theta$ είναι ορθογώνιο.
5. Από το πιο κάτω σχήμα να βρείτε:
- α) τις εξισώσεις των ευθειών: i) ε_1 ii) ε_2 iii) ε_3
- β) τις συντεταγμένες του μέσου M του $B\Delta$
- γ) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$.



Διευθυντής

Δρ. Σιμάκης Συμεού

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 05/ 06 / 2019 ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες	ΒΑΘΜΟΣ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΣ: ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ: ΥΠΟΓΡΑΦΗ:
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΑΡ.: ΤΜΗΜΑ:	
Οδηγίες: • Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δέκα (10) σελίδες. • Να απαντηθούν και τα 2 μέρη, Α και Β του εξεταστικού δοκιμίου. • Το εξεταστικό δοκίμιο βαθμολογείται με 100 μονάδες. • Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα με μολύβι). • Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας. • Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.	

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του μέρους Α΄.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε το πιο κάτω ανάπτυγμα:

$$(x - 1)^2 =$$

Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $7x + 7\psi =$

β) $\omega^2 - 64 =$

2. Να υπολογίσετε τον **όγκο** και το **εμβαδόν ολικής** επιφάνειας κύβου με ακμή 6 cm.

3. Να λύσετε το σύστημα: $4\chi + 2\psi = 10$
 $\chi - \psi = 13$

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

α) Αν ένα τετράπλευρο έχει κάθετες διαγώνιους είναι τετράγωνο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
β) Κάθε παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές γωνίες ίσες είναι ορθογώνιο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
γ) Οι ευθείες $\chi + 2\psi = 3$ και $2\chi + 4\psi = -5$ τέμνονται σε ένα σημείο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
δ) Δύο τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν μια προς μία τις πλευρές τους ίσες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

5. Δίνεται ευθεία ε_1 που περνάει από τα σημεία A(3,7) και B(-3,-5).

- α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας.
β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας.

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α) $\chi^2 - 4\chi + 4 = 0$

β) $2\chi^2 - 8 = 0$

7. Για την αντικατάσταση κεραμιδιών στην στέγη του σχολείου θα χρησιμοποιηθεί σκάλα μήκους 6 μέτρων. Για την ασφάλεια του εργάτη η σκάλα πρέπει να ακουμπήσει τον τοίχο υπό γωνία 20° . ($\eta\mu 20^\circ = 0.34$, $\sigma\upsilon\nu 20^\circ = 0.94$, $\epsilon\varphi 20^\circ = 0.36$)

- α) Να υπολογίσετε το ύψος του τοίχου.



- β) Να υπολογίσετε την απόσταση από τον τοίχο που πρέπει να τοποθετηθεί η βάση της σκάλας.

8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Να αποδείξετε ότι οι διάμεσοι ΒΜ και ΓΝ του τριγώνου ΑΒΓ είναι ίσες. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



9. α) Να απλοποιήσετε την πιο κάτω αλγεβρική παράσταση:

$$\frac{y^2-9}{y^2-6y+9} : \frac{y^2+5y+6}{y^2-3y} =$$

- β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(x^3 + y^3)^2 - (x^2 + y^2)^3 + 3x^2y^2(x + y)^2 = (2xy)^3$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του μέρους Β΄. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 + 3x - 20 = 0$
2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Στην προέκταση της ΒΓ παίρνουμε τα τμήματα ΔΒ=ΓΕ.
 - α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.
 - β) Να φέρετε την ΓΗ κάθετη στην ΑΔ και την ΒΖ κάθετη στην ΑΕ και να αποδείξετε ότι είναι ίσες. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



3. Ντοματοπολτός πωλείται σε κυλινδρικά τενεκεδένια δοχεία διαμέτρου 7.4 cm και ύψους 11 cm. Τα κυλινδρικά δοχεία αποθηκεύονται σε χάρτινα κουτιά που χωράνε 12 κυλινδρικά δοχεία σε 4 σειρές.

α) Να βρείτε τον όγκο του κάθε κυλινδρικού δοχείου.

β) Να βρείτε τις διαστάσεις και τον όγκο του χάρτινου κουτιού.

γ) Να βρείτε τον όγκο του χάρτινου κουτιού που μένει άδειος αφού τοποθετηθούν τα 12 κυλινδρικά δοχεία.

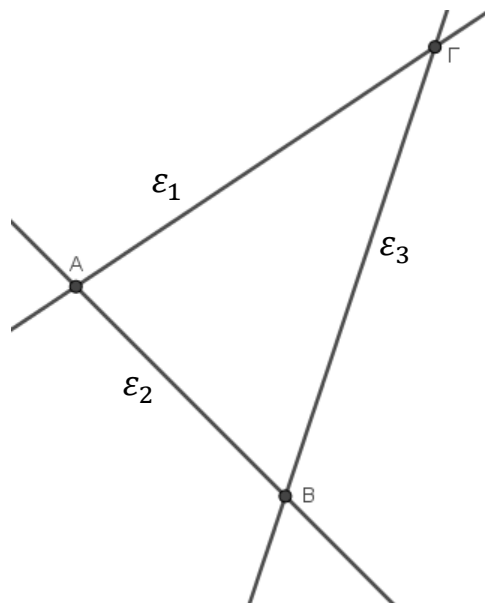
4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ και AM διάμεσος του τριγώνου. Από το σημείο M φέρουμε κάθετη πάνω στην AB , που την τέμνει στο σημείο D . Προεκτείνουμε τη MD κατά τμήμα $MD=DE$. Δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

β) Το τετράπλευρο $AEBM$ είναι ρόμβος.

5.

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2x - 3y = -14$, $\varepsilon_2: x + y = -2$ και $\varepsilon_3: 3x - y = 14$ που τέμνονται αντίστοιχα ε_1 και ε_2 στο σημείο A , ε_2 και ε_3 στο σημείο $B(3, -5)$ και ε_1 και ε_3 στο σημείο $\Gamma(8, 10)$.



α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .

β) Να βρείτε το μήκος των πλευρών AB , $B\Gamma$ και $A\Gamma$ και να χαρακτηρίσετε το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.

γ) Να βρείτε τις κλίσεις των ευθειών ε_1 , ε_2 και ε_3 και να ελέγξετε κατά πόσο το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο δικαιολογώντας την απάντησή σας.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας του ύψους ΓD που άγεται από το σημείο Γ και είναι κάθετη στην πλευρά AB .

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

Τάξη: Γ΄

Μάθημα: Μαθηματικά

Βαθμός:

Χρόνος: 2 ώρες

Ημερομηνία: 05/06/2019

Υπογραφή:

Όνομα μαθητή/τριας: Τμήμα: Αρ.:

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 2. Να γράφετε με στυλό μπλε ή μαύρο. (Τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι.)
 3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από εννέα (9) σελίδες.

Μέρος Α΄ Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-2)^2 =$

β) $(x-7)(x+7) =$

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $x^2 + 5x + 6 =$

β) $\psi^2 - 5\psi =$

3. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1 : \psi = (4\alpha - 10)x + 3$ και $\varepsilon_2 : \psi = 2x - 1$. Αν οι ευθείες είναι παράλληλες, να υπολογίσετε την τιμή του α .

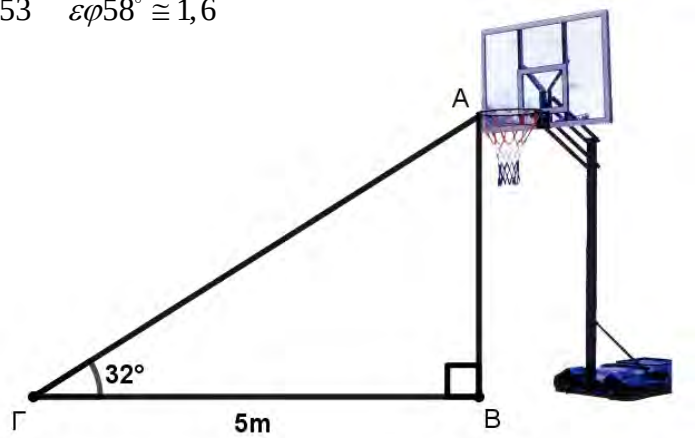
4. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned}x + 2y &= 1 \\ 3x + 8y &= 7\end{aligned}$$

5. Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 - 8x + 4 = 0$

6. Ο Γιώργος βρίσκεται στο γήπεδο καλαθόσφαιρας, στο σημείο Γ που απέχει 5 m από το σημείο Β. Αν η γωνία $\hat{\Gamma} = 32^\circ$, να υπολογίσετε σε τι ύψος βρίσκεται το καλάθι από το δάπεδο. (Η απάντηση να δοθεί κατά προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων.)

Δίνονται: $\eta\mu 32^\circ \cong 0,53$ $\sigma\upsilon\nu 32^\circ \cong 0,848$ $\epsilon\phi 32^\circ \cong 0,625$
 $\eta\mu 58^\circ \cong 0,848$ $\sigma\upsilon\nu 58^\circ \cong 0,53$ $\epsilon\phi 58^\circ \cong 1,6$

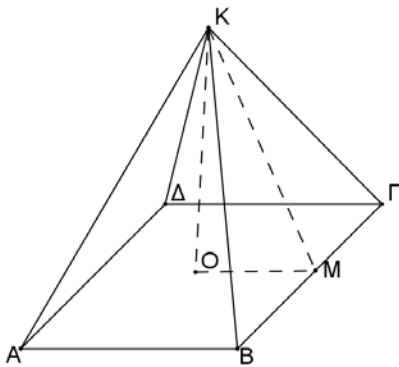


7. Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με ύψος 8 cm και με πλευρά βάσης 12 cm . Να υπολογίσετε:

- α) Τον όγκο της.
 β) Το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας.

[M.2]

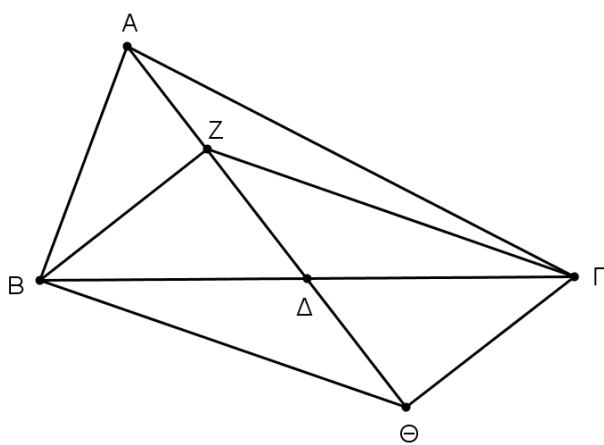
[M.3]



8. Αν $\chi - \psi = 5$ και $\chi \cdot \psi = 3$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\chi^3 \psi + \chi \psi^3}{3}$$

9. Στο πιο κάτω σχήμα το Δ είναι το μέσο του $B\Gamma$ και το BZ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Delta$. Αν το $\Gamma\Theta$ είναι η απόσταση του σημείου Γ από το $A\Theta$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Theta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.



10. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha^2 - 4} - \frac{1}{\alpha^2 - 2\alpha} \right) \div \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 1}{\alpha + 2} = \frac{1}{\alpha(\alpha + 1)}$$

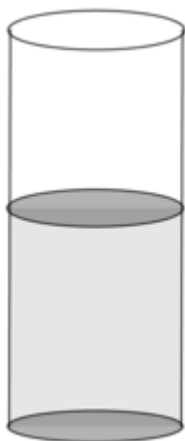
ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

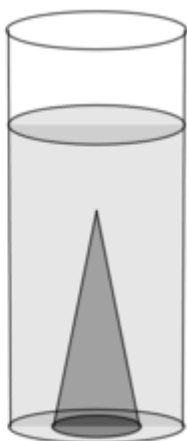
$$\frac{5\chi^2}{\chi - 3} - \frac{3\chi}{2 - \chi} = \frac{4\chi^3 - 7\chi^2}{\chi^2 - 5\chi + 6}$$

2. Σε κυλινδρικό δοχείο που έχει ακτίνα βάσης 4 cm υπάρχει νερό (Σχήμα 1). Μέσα στο ίδιο δοχείο τοποθετούμε ένα συμπαγή μαρμάρινο κώνο, ο οποίος καλύπτεται πλήρως από το νερό και αμέσως η στάθμη του νερού ανεβαίνει (Σχήμα 2).

Αν ο κώνος έχει εμβαδόν βάσης $9\pi\text{ cm}^2$ και ύψος 16 cm , να βρείτε πόσο ανέβηκε η στάθμη του νερού.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

3. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$), να προεκτείνετε την πλευρά AB προς το B και την πλευρά $A\Gamma$ προς το Γ κατά τμήματα $B\Delta = \Gamma E$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Delta\Gamma$ και ABE είναι ίσα.

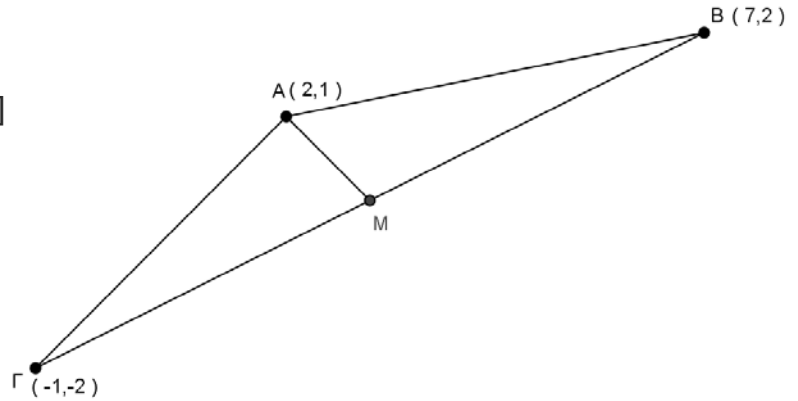
β) Αν O είναι το σημείο τομής των BE και $\Gamma\Delta$, να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta O E$ είναι ισοσκελές.

(Να γίνει σχήμα)

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(2,1)$, $B(7,2)$, $\Gamma(-1,-2)$ και AM διάμέσός του.

α) Να βρείτε:

i) Τις συντεταγμένες του σημείου M . [M.2]



ii) Την εξίσωση της διαμέσου AM .

[M.2,5]

β) Να δείξετε ότι η γωνία $\angle M\hat{A}\Gamma = 90^\circ$.

[M.2,5]

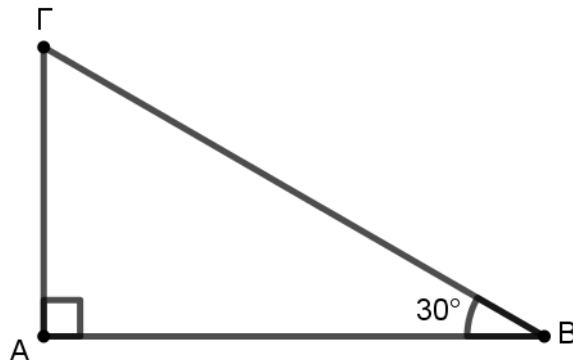
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AM\Gamma$.

[M.3]

5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με την γωνία $\hat{B} = 30^\circ$. Αν τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να προεκτείνετε την ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$.

Να δείξετε ότι: (Να δικαιολογήσετε πλήρως όλες τις απαντήσεις σας.)

α) $A\Gamma Z\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. [M.5]



β) AEB είναι ισοσκελές τρίγωνο.

[M.2]

γ) Αν $E\Delta = 2\text{cm}$ να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου AEB .

[M.3]

Οι διδάσκοντες:

Άννα Φάκα
Γιώργος Πανάου
Μιχαήλ Πηλαβάκης

Ο Διευθυντής,

Δρ. Άγγελος Παπαγεωργίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 05/06/2019

ΤΑΞΗ : Γ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

1. Να προσέξετε την εμφάνιση του γραπτού σας.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. Για τα σχήματα επιτρέπεται και το μολύβι.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
5. Αν χρειαστείτε επιπλέον χώρο να γράψετε πάνω στην τελευταία άδεια σελίδα.

ΜΕΡΟΣ Α΄:

Το μέρος αυτό αποτελείται από **δέκα (10)** ασκήσεις. Να λύσετε **και τις δέκα (10)**. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **πέντε (5)** μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

α) $(x + 3)^2 =$

β) $(y - 5)(y + 5) =$

2. Κύβος έχει ακμή 5 cm. Να υπολογίσετε το **εμβαδόν ολικής** επιφάνειας και τον **όγκο** του.

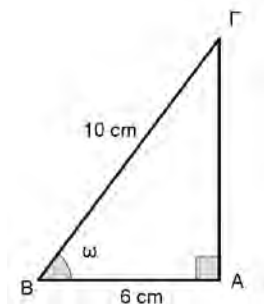
3. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 + 7x + 3 = 0$

4. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα που βρίσκονται στη στήλη Α και να τα αντιστοιχίσετε με τα πολυώνυμα της στήλης Β.

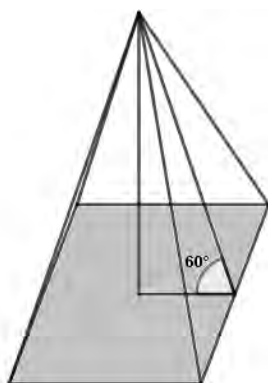
A	B
α) $f(x) = 3x - 5xy$	i) $(x + 1 - y)(x + 1 + y)$
β) $f(x) = x^2 - 49$	ii) $(x - 7)(x + 7)$
γ) $f(x) = x^2 + 2x - 15$	iii) $x(3 - 5y)$
δ) $f(x) = x^2 - 2x + 1 - y^2$	iv) $(x - 1 - y)(x - 1 + y)$
ε) $f(x) = 3x^2 + yx - 6x - 2y$	v) $(x + 2)(3x - y)$
	vi) $(x + 5)(x - 3)$
	vii) $(x - 2)(3x + y)$

α) →	β) →	γ) →	δ) →	ε) →
------------	------------	------------	------------	------------

5. Στο πιο κάτω σχήμα να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .



6. Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με ακμή βάσης 6 cm . Αν το παράπλευρο ύψος σχηματίζει με τη βάση γωνία 60° , να υπολογίσετε το **εμβαδόν ολικής επιφάνειας** και τον **όγκο** της.



7. Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{2x^2 - 2x - 12}{x^2 - 6x + 8} : \frac{x^3 + 4x^2 + 4x}{x^3 - 4x} =$$

8. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας B η οποία τέμνει την $\Gamma\Delta$ στο E . Προεκτείνουμε την $\Delta\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma Z = \Gamma E$ και την $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma H = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι το $BZHE$ είναι ορθογώνιο.

9. α) Στον Χριστουγεννιάτικο χορό του σχολείου μας πήγαν 130 παιδιά, αγόρια και κορίτσια. Τα μεσάνυχτα έφυγαν 14 αγόρια και 16 κορίτσια. Από τα παιδιά που έμειναν, τα αγόρια ήταν 20 λιγότερα από το διπλάσιο των κοριτσιών. Να βρείτε πόσα αγόρια και πόσα κορίτσια πήγαν στον χορό. **(Να λυθεί με σύστημα)**.

β) Δίνεται το σύστημα:

$$3y - (\mu^2 - 6)x = 4\kappa^2$$

$$y - (\mu + 4)x = \kappa^2 - 3\kappa$$

Να υπολογίσετε τις τιμές των μ και κ έτσι ώστε το πιο πάνω σύστημα να έχει **άπειρες** λύσεις.

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Προεκτείνουμε τη ΒΓ προς το μέρος των Β και Γ κατά τμήματα ΒΚ=ΓΛ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι :

α) Οι αποστάσεις των σημείων Κ και Λ από τις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα είναι ίσες.

β) το τρίγωνο ΑΚΛ είναι ισοσκελές.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Το μέρος αυτό αποτελείται από **πέντε (5)** ασκήσεις. Να λύσετε **και τις πέντε (5)**. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **δέκα (10)** μονάδες.

1. α) Να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{2x}{x-1} + \frac{x+1}{2-x} = \frac{5-7x}{x^2-3x+2}$$

β) Αν $x^2 - y^2 = 12$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \left(\frac{2x-y}{2} \right)^2 - \left(\frac{x-2y}{2} \right)^2$$

2. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές Α(1,3), Β(3,4), Γ(5,0), Δ(3,-1).

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (μ.7)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΔ. (μ.1)

γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΜΓ είναι ισοσκελές. (μ.2)

3. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{2 - \frac{18}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}}$ και $B = \left(\frac{4}{x^2 - 9} + \frac{1}{x+3} \right) \cdot \left(\frac{x^3 + 2x^2 - 3x}{2x^2 - 2} \right)$

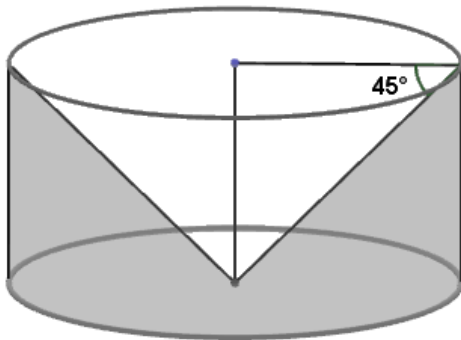
α) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις Α και Β. (μ.8,5)

β) Να δείξετε ότι οι παραστάσεις Α και Β είναι αντίστροφες. (μ.1,5)

4. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται ένας κύλινδρος από τον οποίο αφαιρέθηκε ένας κώνος. Η περίμετρος της βάσης του στερεού είναι $10\pi \text{ cm}$. Η γωνία που σχηματίζει η γενέτειρα του κώνου με τη βάση είναι ίση με 45° . Να υπολογίσετε:

α) τον **όγκο** του στερεού (μ.4)

β) την **ολική επιφάνεια** του στερεού. (μ.6)



5. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($\hat{A} = 90^\circ$), $AB \parallel \Delta\Gamma$ και $\Delta\Gamma = 2AB$. Φέρουμε τη $BH \perp \Delta\Gamma$. Αν N είναι το σημείο τομής των AH και $B\Delta$, P είναι το σημείο τομής των $A\Gamma$ και BH , να αποδείξετε ότι:

α) $AH = B\Delta$ (μ.5)

β) P είναι το μέσο της BH (μ.2)

γ) $NP \parallel \frac{1}{4}\Delta\Gamma$ (μ.3)

ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

.....

Αργυρού Παναγιώτα

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2019

ΧΡΟΝΙΚΗ ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

(07:45 - 09:45)

Βαθμός:

Ολογράφως:

Υπογραφή Καθηγητή/τριας:

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα: Αριθμός:

ΟΔΗΓΙΕΣ: (α) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται να τα κάνετε με μολύβι).

(β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

(γ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

(δ) Σε όλα τα θέματα, να φαίνονται αναλυτικά οι πράξεις και η διαδικασία που θα ακολουθήσετε και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΟ ΜΕΡΗ
ΚΑΙ ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΔΕΚΑ (10) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα

Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100)

Θέμα 1: Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x+5)^2 =$

(β) $(x+3) \cdot (x-3) =$

Θέμα 2: Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τα πιο κάτω πολυώνυμα:

(α) $6\alpha\beta + 6\alpha\gamma =$

(β) $x^3\gamma - x^2\gamma^3 =$

(γ) $x^2 - 36 =$

(δ) $x^2 + 9x + 20 =$

Θέμα 3: Κύβος έχει ακμή ίση με 5m

Να υπολογίσετε: (α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

(β) Τον όγκο του.

Θέμα 4: Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 + 7x + 6 = 0$

Θέμα 5: Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2(x+3) - 5y = 5 \\ x + 5y = 7 \end{cases}$$

Θέμα 6: Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$)

α) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu^2 A + \sigma\upsilon\nu^2 A = 1$

(μ.2)

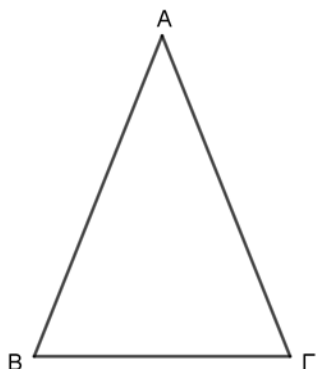
β) Αν η πλευρά AB είναι ίση με 8m και η πλευρά $B\Gamma$ ίση με 6m,
να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu A$, $\sigma\upsilon\nu A$, $\epsilon\phi A$

(μ.3)

Θέμα 7: Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$)

Στις πλευρές AB και $A\Gamma$ παίρνω σημεία K και Λ αντίστοιχα έτσι ώστε $BK = \Gamma\Lambda$

Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις $K\Delta$ και ΛE των σημείων K και Λ από τη $B\Gamma$ είναι ίσες.
(σχήμα – δεδομένα – ζητούμενα – απόδειξη)



Θέμα 8: Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: y = (\kappa^2 - 2\kappa + 4)x - 9$ και $\epsilon_2: y = (\kappa^2 + 8)x + \mu^2$

α) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 να τέμνονται.

(μ.3)

β) Να εξετάσετε κατά πόσο οι πιο πάνω ευθείες μπορεί να ταυτίζονται.

(μ.2)

Να δικαιολογήσετε πλήρως την απάντησή σας.

Θέμα 9: Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

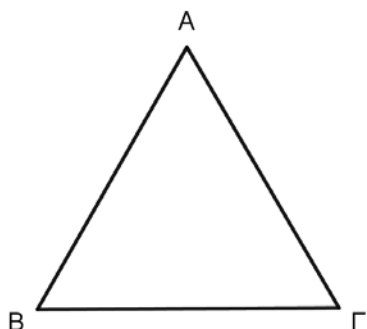
α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(μ.3)

β) Από τις κορυφές B και Γ , να φέρετε τις αποστάσεις BZ και ΓH στη ΔE

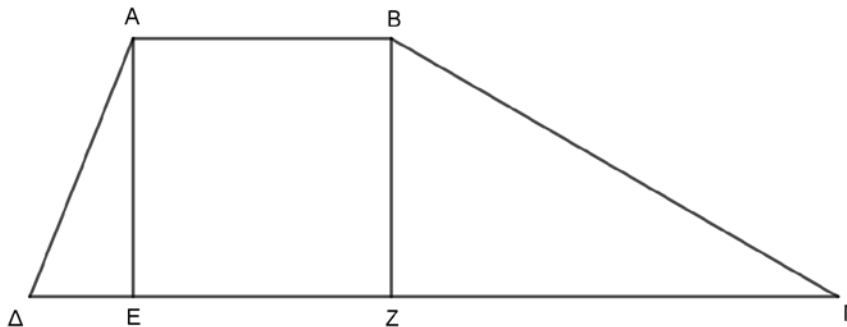
(μ.2)

Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Gamma H Z$ είναι ορθογώνιο.



Θέμα 10: Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ και ΓΔ.

Τα ΑΕ και ΒΖ είναι ύψη του τραpezίου και $AB = 10m$, $BΓ = 20m$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$
 Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΖΕ είναι τετράγωνο.



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα

Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες (10/100)

Θέμα 1: α) Να λύσετε την εξίσωση: $(\alpha - 2)^3 - 38\alpha + (3\alpha - 4)^2 = \alpha^2(3 - 7\alpha) + 8$ (μ.4)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{9(1-x)}{x^2-9} + \frac{1-3x}{3-x} = \frac{2x}{x+3}$ (μ.6)

Θέμα 2: Τετράπλευρο επίπεδο σχήμα ΑΒΓΔ έχει κορυφές τα σημεία

$A(-2,3)$, $B(1,2)$, $\Gamma(2,\kappa)$ και $\Delta(-1,0)$

α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΑΒ
 (μ.1,5)

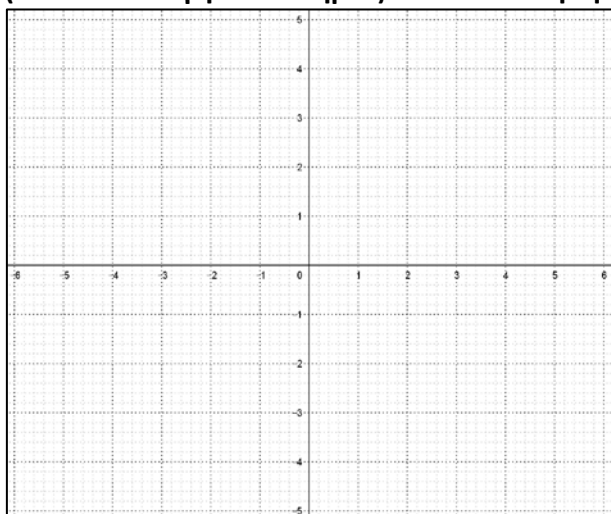
β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου Μ της διαγωνίου ΒΔ (μ.1,5)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ΒΔ (μ.2)

δ) Να βρείτε την τιμή του κ έτσι ώστε το ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο. (μ.2)

ε) Αν $\kappa = -1$ να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ρόμβος. (μ.3)

(Να δικαιολογήσετε πλήρως κάθε απάντηση σας)



Θέμα 3: Το πιο κάτω στερεό αποτελείται από έναν κύλινδρο από τον οποίον έχουμε αφαιρέσει ένα κώνο και ένα ημισφαίριο. Το ύψος του κυλίνδρου είναι ίσο με 7cm και η διάμετρος της βάσης του ίση με 6cm

Να βρείτε: (α) i) Το μήκος της ακτίνας του ημισφαιρίου. (μ.2)

ii) Το μήκος της ακτίνας του κώνου.

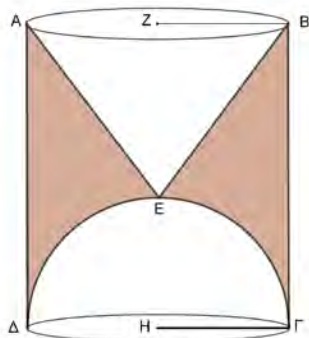
iii) Το μήκος του ύψους του κώνου.

iv) Το μήκος της γενέτειρας του κώνου.

(β) Τον όγκο του στερεού. (μ.4)

(γ) Το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού. (μ.4)

(Τις απαντήσεις σας μπορείτε να τις δώσετε και συναρτήσει του π)



Θέμα 4: Δίνονται οι ρητές αλγεβρικές παραστάσεις A και B

$$A = \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 3x - 10} : \frac{x^3 + 4x^2}{x^2 + 6x + 8} \quad B = \left(\frac{4x}{9x^2 + 12x + 4} - \frac{1}{3x + 2} \right) \cdot \frac{\frac{3x^2 + 2x}{x - 2}}{\frac{1}{3x + 2}}$$

(Να γράψετε όλους τους περιορισμούς που ισχύουν)

(α) Να αποδείξετε ότι: $A = \frac{1}{x}$ και $B = x$ (μ.7)

(β) Αν ισχύει $A + B = 2$ να αποδείξετε ότι $A^2 + B^2 = A^3 + B^3$ (μ.3)

Θέμα 5: Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται: $OA = OB$, $OD = OE$ και $\hat{AOD} = \hat{BOE}$

Να αποδείξετε ότι: α) $AE = BD$

β) $AH = B\Theta$

(δεδομένα – ζητούμενα - απόδειξη)

Η Διευθύντρια

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΤΑΞΗ: Γ'****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 31/05/2019****ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ΩΡΕΣ**

Βαθμός:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 θέματα του Μέρους Α'.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες (5/100).

ΘΕΜΑ 1: Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x+3)^2 =$

(β) $(x+2)(x-2) =$

ΘΕΜΑ 2: Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

(α) $9x^2 - 3x =$

(β) $x^2 - 4x - 21 =$

ΘΕΜΑ 3: Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα εξισώσεων:

$$3x + 2\psi = 12$$

$$2x - \psi = 1$$

ΘΕΜΑ 4:

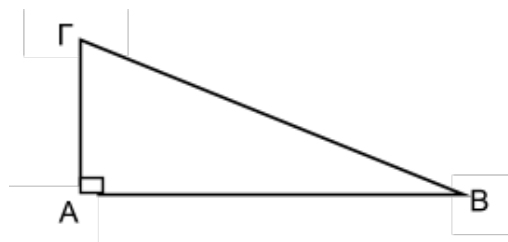
Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $(x-6)x = 0$

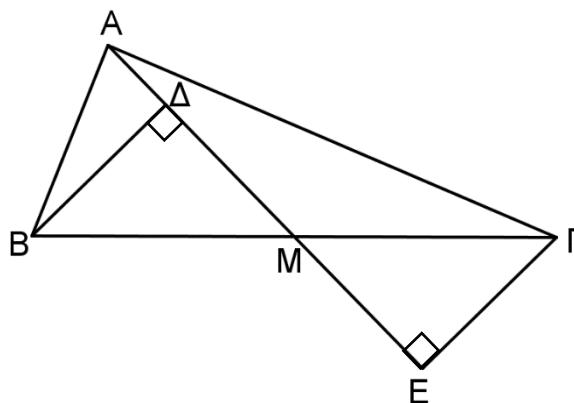
(β) $x^2 + x(x-4) = 16$

ΘΕΜΑ 5: Να βρείτε τον όγκο και την ολική επιφάνεια κύβου με ακμή 4 cm

ΘΕΜΑ 6: Εάν $AB = 8\text{m}$ και $B\Gamma = 10\text{m}$,
να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς
της γωνίας Γ στο διπλανό σχήμα,



ΘΕΜΑ 7: Στο σχήμα δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ και AM διάμεσος του τριγώνου. Αν $BD \perp AM$ και $\Gamma E \perp AM$, να αποδείξετε ότι $BD = \Gamma E$. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.)



ΘΕΜΑ 8: Δίνονται τα σημεία $A(3,4)$ και $B(-3,6)$. Να βρείτε

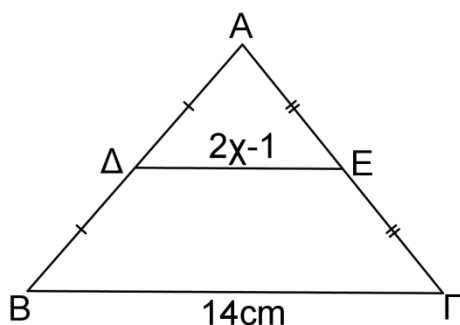
(α) τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB (Μον. 1)

(β) την κλίση της ευθείας AB (Μον. 1)

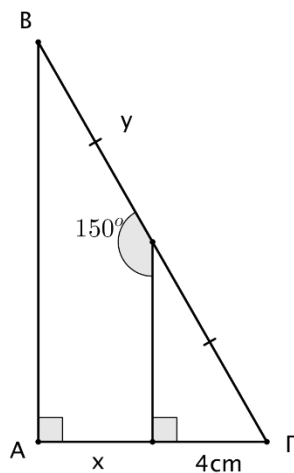
(γ) την εξίσωση της ευθείας ϵ_1 που διέρχεται από το σημείο A και είναι κάθετη στην ευθεία AB (Μον. 2)

(δ) πόσα κοινά σημεία έχει η ευθεία $\epsilon_1: \epsilon_2: 4x - 2y = 12$ με την ευθεία AB . (Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μον. 1)

ΘΕΜΑ 9: Να βρείτε τα x και y στα πιο κάτω σχήματα δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας
(α)



(β)



ΘΕΜΑ 10: Να απλοποιήσετε τις αλγεβρικές παραστάσεις A και B

$$A = \frac{3 - \frac{12}{x^2}}{1 + \frac{2}{x}} =$$

$$B = \left(\frac{3}{x^2 - 4} + \frac{1}{x + 2} \right) \cdot \frac{x^3 + x^2 - 2x}{3x^2 - 3} =$$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 θέματα του Μέρους Β'.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες (10/100).

ΘΕΜΑ 1:

(α) Να απλοποιήσετε την πιο κάτω παράσταση

$$\frac{x^2 + 3x - 10}{25 - x^2} \div \frac{4x - 8}{x^2 + 4x - 5}$$

(β) Εάν $A = (2x - 3)(2x + 3) + x(x - 2)^2 - (2 - x)^3 - 2x^3$, να αποδείξετε

$$\text{ότι } A = 16x + 6x^2 - 17$$

ΘΕΜΑ 2: Να λύσετε την εξίσωση $\frac{7x}{x^2 - x - 12} - \frac{x - 2}{4 - x} = \frac{3}{x + 3}$

ΘΕΜΑ 3:

4. Δίνονται τα σημεία $A(1,5)$, $B(2,1)$, $\Gamma(-3,4)$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μον 3)

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $B\Gamma$. (Μον 2)

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο M και είναι παράλληλη με την πλευρά AB . (Μον 3)

(δ) Να υπολογίσετε την τιμή του κ αν η ευθεία $\varepsilon_2 : y = (2\kappa - 1)x - 4$ είναι κάθετη στην πλευρά AB . (Μον 2)

ΘΕΜΑ 4:

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και με $\hat{B} = 30^\circ$. Αν Δ είναι το μέσο της AB και E το μέσο της $B\Gamma$, να προεκτείνετε το $E\Delta$ κατά τμήμα $\Delta Z = \Delta E$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $A\Gamma EZ$ είναι ρόμβος. (Μον 7)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\hat{BAE}$. (Μον 3)

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

ΘΕΜΑ 5:

Στο διπλανό σχήμα, το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι $135\pi \text{ cm}^2$ και η περίμετρος της βάσης του κυλίνδρου είναι $18\pi \text{ cm}$.

Να υπολογίσετε:

(α) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.

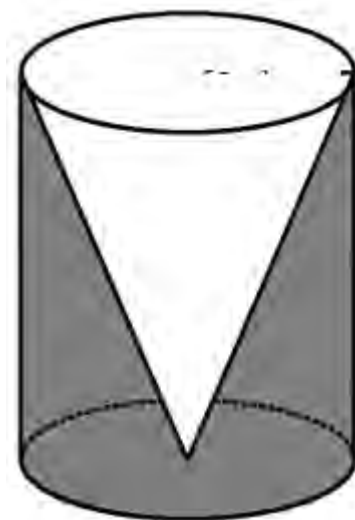
(β) Τον όγκο της σκιασμένης περιοχής του στερεού.

(Οι απαντήσεις σας να δοθούν συναρτήσει του π)

Ο Διευθυντής

.....

Ορφανίδης Ιωάννης



ΜΕΡΟΣ Α': (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $x^2 - 4 =$

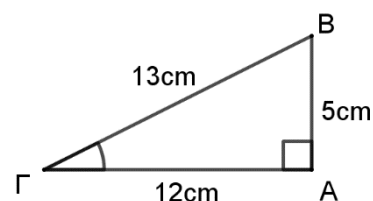
β) $3x + 3y + ax + ay =$

2) Να λύσετε το σύστημα:

$2x + y = 4$

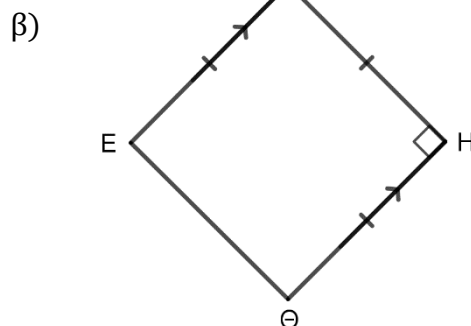
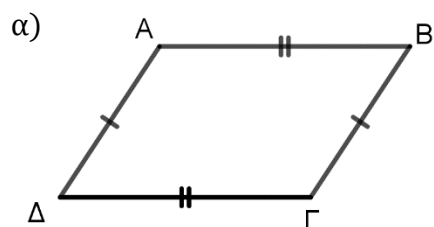
$2x - y = 0$

3) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$). Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ.



4) Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο κύβου που έχει ακμή 7cm.

5) Να χαρακτηρίσετε τα πιο κάτω τετράπλευρα ως προς το είδος τους. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

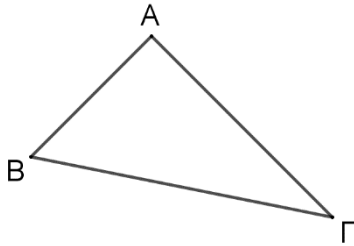


6) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x - 8)^2 =$

β) $\left(\frac{1}{2}x - \sqrt{5}\right)\left(\frac{1}{2}x + \sqrt{5}\right) =$

- 7) Στο τυχαίο τρίγωνο ABΓ να φέρετε το ύψος ΑΔ και να το προεκτείνετε κατά τμήμα ΔΕ=ΑΔ. Να δείξετε ότι AB=BE.

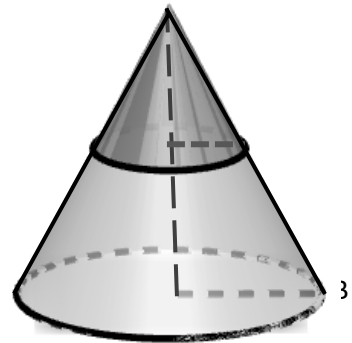


- 8) Να βρείτε την τιμή του α ώστε η ευθεία $\varepsilon_1: y = \frac{2\alpha-1}{\alpha}x - 5$, να είναι παράλληλη με την ευθεία $\varepsilon_2: y = \alpha x$, $\alpha \neq 0$.

- 9) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x-3}{x^2-3x+2} + \frac{x+2}{1-x} = \frac{1}{x-2}$$

- 10) Η κυρτή επιφάνεια του διπλανού κώνου έχει βαφτεί με δύο διαφορετικά χρώματα. Η επιφάνεια του κώνου από το μέσο του ύψους μέχρι και την κορυφή του έχει κόκκινο χρώμα και η υπόλοιπη κυρτή επιφάνειά του έχει κίτρινο χρώμα. Αν $OB = 6\text{cm}$ και $OA = 8\text{cm}$, να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτει το κάθε χρώμα.

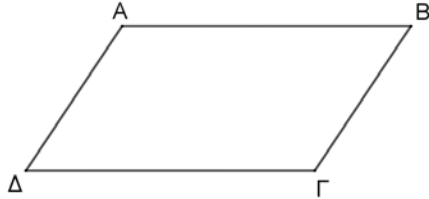


ΜΕΡΟΣ Β': (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2(2x-1)(2x+1) - (2x-1)^2 - 3x^2 + 7$.
- α) Να δείξετε ότι $P(x) = (x+2)^2$. (μον. 4)
- β) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $P(27) - P(26)$. (μον. 2)
- γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση $\frac{P(x)-4x-8}{P(x)}$. (μον. 4)

- 2) Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το Ε είναι σημείο της πλευράς ΔΓ ώστε ΔΕ=ΔΑ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Δ τέμνει την ΑΕ στο Ζ και την ΑΒ στο Η, να δείξετε ότι:
- α) Τα τρίγωνα ΑΖΗ και ΔΖΕ είναι ίσα. (μον. 5)
- β) Το τρίγωνο ΑΔΗ είναι ισοσκελές. (μον. 2)
- γ) Το τετράπλευρο ΑΔΕΗ είναι ρόμβος. (μον. 3)



3) Η παράσταση $A = \frac{4x-6}{x^3-9x} : \left(\frac{x-3}{x^2+3x} - \frac{x}{x^2-9} \right)$ ορίζεται για $x \neq 0$, $x \neq 3$, $x \neq -3$ και $x \neq \frac{3}{2}$.

Να δείξετε ότι είναι ανεξάρτητη του x .

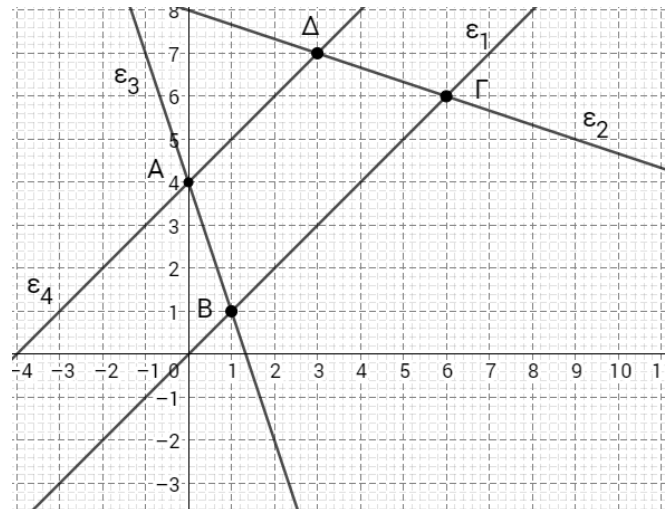
- 4) Κύλινδρος έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας ίσο με $480\pi \text{ cm}^2$ και το ύψος του είναι κατά 4 cm μικρότερο από την ακτίνα του.
- α) Να δείξετε ότι η ακτίνα του κυλίνδρου είναι ίση με 12 cm και το ύψος του είναι ίσο με 8 cm. (μον. 5)
- β) Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου. (μον. 2)
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, που έχει ύψος ίσο με το ύψος του κυλίνδρου και πλευρά βάσης ίση με την ακτίνα του κυλίνδρου. (μον. 3)
- δ)

- 5) Στο διπλανό ορθογώνιο σύστημα αξόνων δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών

$$\varepsilon_1: y = x, \quad \varepsilon_2: x + 3y = 24, \quad \varepsilon_3: 3x + y = 4$$

$$\text{και } \varepsilon_4: x - y = -4.$$

- α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (μον. 6)
- β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_5 , που περνά από το μέσο του ΑΔ και είναι κάθετη στην ευθεία ε_2 . (μον. 4)



ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\chi + 2)^2 =$

β) $(\chi + 5\psi)(5\psi - \chi) =$

2. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $3\chi^2 - 6\chi^3\psi =$

β) $\chi^2 - 49 =$

γ) $\kappa\chi + \kappa\psi + \alpha\chi + \alpha\psi =$

δ) $\chi^2 + 12\chi\psi + 36\psi^2 =$

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, $\hat{A} = 90^\circ$, ισχύει ότι $\eta_{\mu B} = \frac{3}{5}$. Να βρείτε:

α) $\sin B$

β) $\varepsilon_{\phi \Gamma}$

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\chi^2 - 3\chi = 0$

β) $\chi^2 + 5\chi - 14 = 0$

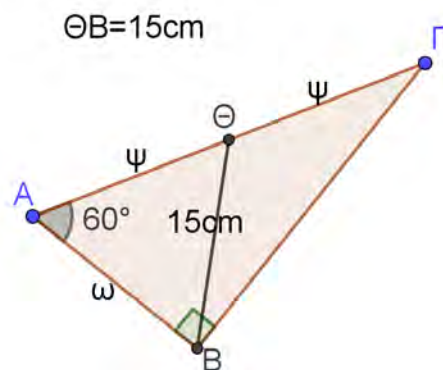
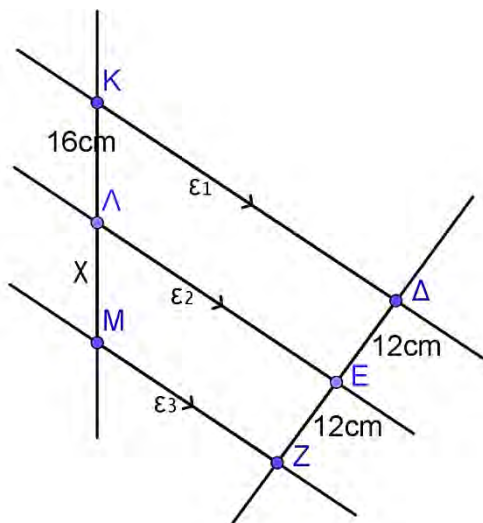
5. Να λύσετε το σύστημα που ακολουθεί:

$$2\chi - 3\psi = -12$$

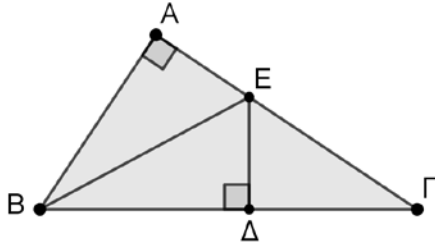
$$-3\chi + 5(\psi - 1) = 14$$

6. Να βρείτε την τιμή των χ , ψ και ω σε καθεμιά από τις πιο κάτω περιπτώσεις. **Να δικαιολογήσετε πλήρως όλες τις απαντήσεις σας.**

α) β)



7. Στο τρίγωνο ABΓ του πιο κάτω σχήματος ισχύει $\hat{A} = 90^\circ$, BE διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ και $ED \perp BG$. Να δείξετε ότι τα τμήματα AB και BD ισούνται.



8. Να κάνετε τις πράξεις:

α) $\frac{\chi^2 + \chi - 12}{\chi^2 - 16} \cdot \frac{\chi^2 + 5\chi}{\chi^2 + 2\chi - 15} =$

β) $\frac{\chi - 2}{\chi - 3} - \frac{3}{\chi^2 - 3\chi} =$

9. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης $40cm$ και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $260cm^2$. Να βρείτε:

- α) το παράπλευρο ύψος (μ. 2)
 β) το ύψος της πυραμίδας (μ. 1)
 γ) τον όγκο της πυραμίδας. (μ. 2)

10. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: \psi = \mu(\mu - 9)\chi + 3$ και $\varepsilon_2: (7 - 3\mu)\chi - \psi = 1$.

- α) Να βρείτε τις πιθανές τιμές του μ για να είναι παράλληλες.
 β) Η ευθεία ε_2 διέρχεται από το μέσο M των σημείων $A(2\kappa, 3)$ και $B(4, \kappa - 3)$. Να βρείτε την τιμή του κ , αν γνωρίζετε ότι $\mu = -1$.

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

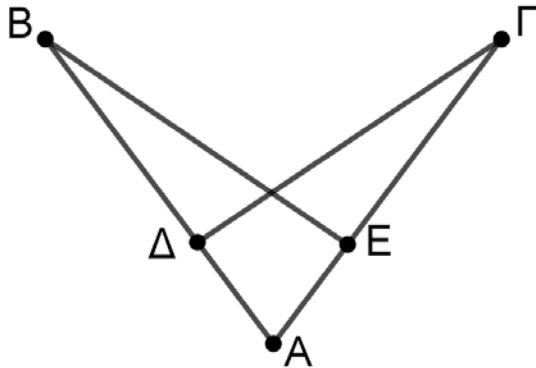
1. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2\chi}{3\chi - 9} + \frac{6}{3\chi - \chi^2} = \frac{1}{\chi}$ (μ. 6)

β) Να μετατρέψετε το πιο κάτω σύνθετο κλάσμα σε απλό: (μ. 4)

$$\frac{\frac{1}{\chi^2 - 1} + \frac{1}{\chi + 1}}{\frac{\chi}{\chi^2 - 2\chi + 1}} =$$

2. Δίνεται το ορθογώνιο ABΓΔ και M το μέσο της AB. Φέρουμε την ευθεία ε που περνά από την κορυφή B, είναι παράλληλη προς τη ΜΓ και τέμνει την προέκταση της ΓΔ στο σημείο E.
 α) Να δείξετε ότι:

- i) το τετράπλευρο MBEΓ είναι παραλληλόγραμμο (μ. 3)
 ii) το τετράπλευρο MBEΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (μ. 3)
 β) Αν $AB = \chi^2 + 6\chi\psi + 9\psi^2$ και $\chi + 3\psi = 8$ να υπολογίσετε το μήκος της AB. (μ. 2)
 γ) Ονομάζουμε Z το μέσο της MD και H το μέσο της BE. Να υπολογίσετε το μήκος της ZH. (μ. 2)
(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας).
3. Στο πιο κάτω σχήμα ισχύει ότι $BD = (\chi + 2)^3 - (\chi + 1)(\chi - 1)$, $GE = (2\chi + 3)^2 + \chi^2(\chi + 1)$ και $AD = AE$.
 α) Να αποδείξετε ότι $\Delta B = \Gamma E$.
 β) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και AΔΓ είναι ίσα.



4. Δοχείο σε σχήμα ορθού τετραγωνικού πρίσματος έχει ύψος διπλάσιο από την ακμή της βάσης του. Αν γεμίσει εντελώς με νερό, ο όγκος του ισούται με 1024cm^3 .
 α) Να υπολογίσετε την ακμή της βάσης και το ύψος του πρίσματος. (μ. 4)
 β) Βάζουμε νερό στο δοχείο, έτσι ώστε το ύψος του νερού να φτάσει στο $\frac{1}{4}$ του ύψους του δοχείου. Ρίχνουμε στο νερό 12 μικρούς μεταλλικούς κυλίνδρους. Ο κάθε κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης 2cm και ύψος 4cm. Να βρείτε σε ποιο ύψος θα ανεβεί το νερό. **(Η απάντησή σας να στρογγυλοποιηθεί στα δύο (2) δεκαδικά ψηφία).** (μ. 6)
5. Δίνεται το τετράγωνο ABΓΔ με κορυφές Γ(4, -1) και Δ(0, -3).
 α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΓΔ.
 β) Αν B(α, 3) να υπολογίσετε τις πιθανές τιμές του α.
 γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγώνιων του τετραγώνου, αν α=2.
 δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Α.
 ε) Να σχηματίσετε την εξίσωση της ευθείας ε που είναι κάθετη στην ΑΓ και περνά από την κορυφή Γ.

Η Διευθύντρια

Παρασκευή Μόρμωρη

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 05 / 06 / 2019

ΤΑΞΗ: Γ΄ Γυμνασίου

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 Ώρες

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
 2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 3. Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
 4. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 11 σελίδες.
 5. Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να απαντήσετε και στις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 5)^2 =$

(β) $(x - 6)(x + 6) =$

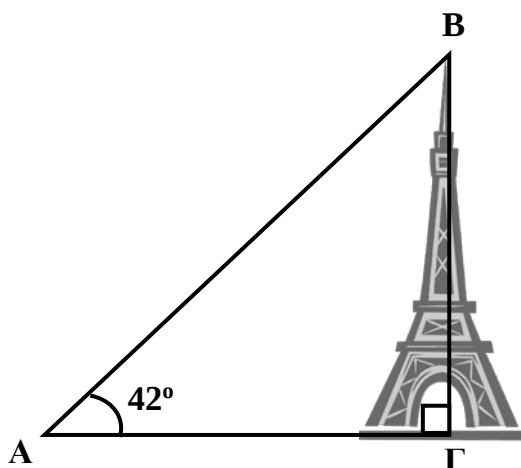
2. Δίνεται κύβος με ακμή $a = 4$ m. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$12x + 3\psi = 15$$

$$2x - 3\psi = 13$$

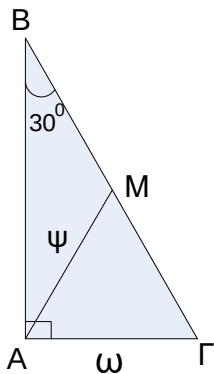
4. Στο πιο κάτω σχήμα ένας τουρίστας στο Παρίσι βρίσκεται στο σημείο A και βλέπει τον Πύργο του Άιφελ μέχρι την κορυφή υπό γωνία 42° . Αν η απόσταση ΑΓ είναι 360 m, να υπολογίσετε το ύψος ΒΓ του Πύργου του Άιφελ.



Γωνία	ημ	συν	εφ
42°	0,67	0,74	0,90
48°	0,74	0,67	1,11

5. Να βρείτε την τιμή των χ , ψ και ω στα πιο κάτω σχήματα.
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

(α)



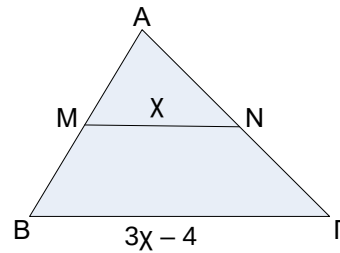
$$\hat{A} = 90^\circ$$

$$\hat{B} = 30^\circ$$

$$B\Gamma = 12 \text{ cm}$$

M μέσο της BΓ

(β)



M μέσο της AB

N μέσο της AG

$$MN = \chi$$

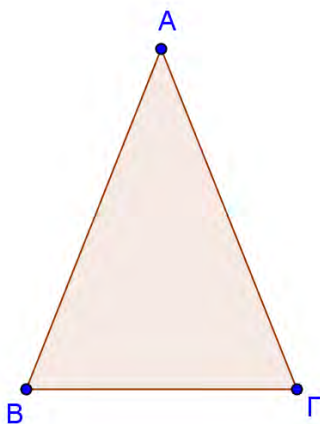
$$B\Gamma = 3\chi - 4$$

6. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} \cdot \frac{x - 3}{2x^2 - 8} =$$

7. Σε ένα ισοσκελές τραπέζιο ABΓΔ το μήκος των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ είναι $(3x^2 - 2x)$ cm και $(5x - 4)$ cm αντίστοιχα. Να βρείτε το μήκος των διαγωνίων.

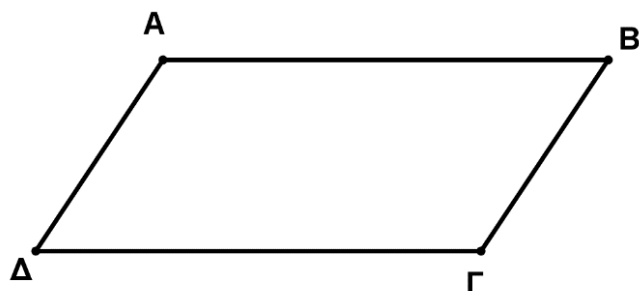
8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ ($AB = AG$). Αν M είναι το μέσο της AB και Λ το μέσο της AG, να δείξετε ότι τα σημεία M και Λ απέχουν ίση απόσταση από την πλευρά BΓ.



9. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΓΔ στο Ζ και ΓΟ ⊥ ΒΖ. Αν η προέκταση της ΓΟ τέμνει την ΑΒ στο Ε να δείξετε ότι :

(α) το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές και

(β) το τετράπλευρο ΕΒΓΖ είναι ρόμβος.



10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο 384 cm^3 και ύψος 8 cm . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να απαντήσετε και στις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2x-1}{x^2-x-12} + \frac{5-x}{4-x} = \frac{6}{x+3}$$

2. Να δείξετε ότι:

(α) $(2\alpha+1)^3 + \alpha^2 + 3 = 4\alpha^2(2\alpha+3) + (\alpha+2)^2 + 2\alpha$ (μον.5)

(β) $\frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha\beta}}{\frac{(\alpha-\beta)^2 - 1}{\alpha - \beta + 1}} = -\frac{1}{\alpha\beta}$ (μον.5)

3. Δίνονται τα σημεία Α(7,-1), Β(0,2), Γ(-1,5) και Δ(6,2).

(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (μον.4)

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου Ο του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. (μον.2)

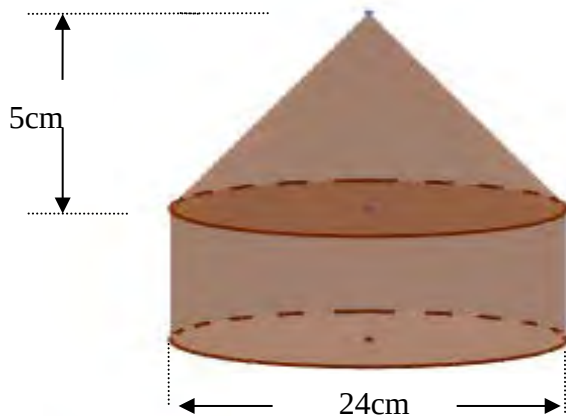
(γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ε) που περνά από το σημείο Δ και είναι κάθετη με τη διαγώνιο ΑΓ είναι $\varepsilon: 3y = 4x - 18$. (μον.2)

(δ) Να υπολογίσετε την τιμή του μ αν η ευθεία $\varepsilon_1: y = (2\mu + 1)x - 4$ είναι παράλληλη με την ευθεία (ε). (μον.2)

4. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται μια κλειστή μεταλλική κατασκευή, η οποία αποτελείται από ένα κύλινδρο και ένα κώνο. Η βάση της κατασκευής έχει διάμετρο 24 cm και το ύψος του κώνου είναι 5 cm. Ο συνολικός όγκος της κατασκευής είναι $816\pi \text{ cm}^3$.

(α) Να δείξετε ότι το ύψος του κυλίνδρου είναι 4 cm. (μον.5)

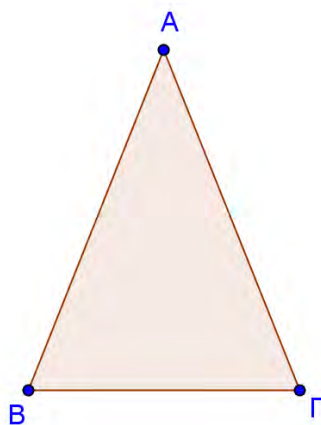
(β) Η επιφάνεια της κατασκευής είναι βαμμένη με ειδική αντισειδωτική μπογιά, η οποία κοστίζει 1,5 σεντ το τετραγωνικό εκατοστόμετρο. Να υπολογίσετε πόσο έχει κοστίσει το βάψιμο της κατασκευής. (μον.5)



5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Η μεσοκάθετη της πλευράς $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο Δ . Προεκτείνουμε την ΔA κατά τμήμα $A\epsilon=\Delta B$. Να δείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι ισοσκελές και (μον.5)

(β) $\epsilon\Gamma=\Delta\Gamma$ (μον.5)



ΜΕΡΟΣ Α: Να απαντήσετε και στα δέκα (10) θέματα του μέρους Α΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

Θέμα 1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x+2)^2 =$

(β) $(10-x)(10+x) =$

Θέμα 2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

(α) $5x\psi - 5\omega x =$

(β) $x^2 + 9x + 14 =$

Θέμα 3. Να λύσετε το σύστημα :

$$6x - \psi = -9$$

$$3x + 2\psi = 3$$

Θέμα 4. Να λύσετε την εξίσωση : $3x^2 - 2x - 1 = 0$

Θέμα 5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, $\hat{A} = 90^\circ$ να υπολογίσετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς, αν δίνεται $\eta\mu\Gamma = \frac{12}{13}$.

(α) $\text{συν}B =$

(β) $\epsilon\phi\Gamma =$

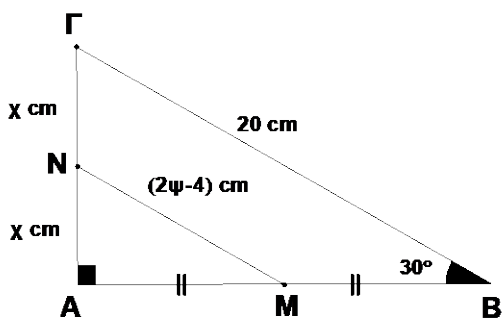
Θέμα 6. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: \psi=5x-1$ και $\epsilon_2: \psi=(2\mu-3)x-4$.

Αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες, να υπολογίσετε την τιμή του μ .

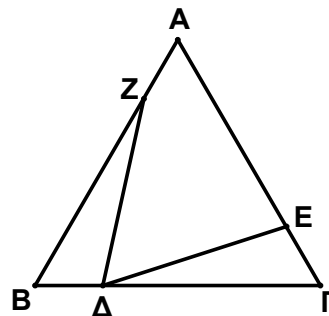
Θέμα 7. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α) Ένα παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία είναι ορθογώνιο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β) Αν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιοι του διχοτομούνται κάθετα, τότε είναι ρόμβος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ) Ένα τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνιές του ορθές είναι τετράγωνο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ) Η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε) Αν δύο απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι παράλληλες, τότε είναι παραλληλόγραμμο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

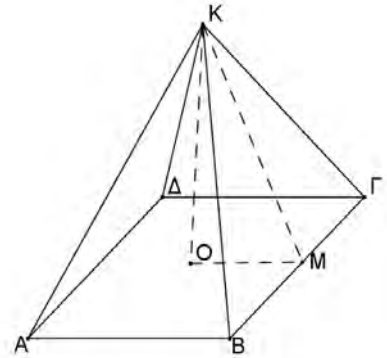
Θέμα 8. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, με $B\Gamma = 20\text{ cm}$, $MN = (2\psi - 4)\text{ cm}$ και $\hat{B} = 30^\circ$.
Να βρείτε τα x και ψ , αν $AN = N\Gamma = x$ και $AM = MB$.
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



Θέμα 9. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$. Στην πλευρά $B\Gamma$ παίρνουμε τμήμα $B\Delta$, στην πλευρά $A\Gamma$ παίρνουμε τμήμα ΓE και στην πλευρά AB παίρνουμε τμήμα AZ , ώστε $B\Delta = \Gamma E = AZ$.
Να δείξετε ότι: $\Delta Z = \Delta E$.



Θέμα 10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν ολικής επιφάνειας 384 cm^2 και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας 240 cm^2 . Να βρείτε τον όγκο της.



ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

Θέμα 1. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = 1 - \frac{\chi - 5}{\chi - 2}$, με $\chi \neq 2$ και

$$B = \frac{2\chi^2 + \chi}{\chi - 3} \cdot \frac{\chi^2 + 3\chi}{\chi^2 - 9} \quad \text{με } \chi \neq 2, \chi \neq 3, \chi \neq -3$$

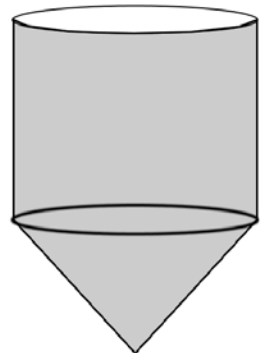
(α) Να αποδείξετε ότι: $A = \frac{3}{\chi - 2}$ (μ.2)

(β) Να αποδείξετε ότι: $B = 2\chi + 1$ (μ.4)

(γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{15}{\chi^2 + \chi - 6} - A = \frac{B}{\chi + 3}$ (μ.4)

Θέμα 2. Το στερεό του διπλανού σχήματος είναι φτιαγμένο από λαμαρίνα κόστους $\text{€}20/\text{m}^2$ και είναι ανοικτό από πάνω. Ο κύλινδρος έχει ακτίνα βάσης 3m και ύψος 10m . Η γενέτειρα του κώνου είναι 5m .

(α) Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του στερεού. (μ.7)
(Οι απαντήσεις σας μπορούν να δοθούν συναρτήσει του π)



(β) Να βρείτε το κόστος κατασκευής του στερεού. (μ.3)

Θέμα 3. (α) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα.

(μ.5)

$$(x-2)^3 - x(x-5)^2 = (2x-3)(2x+3) - 13(x-1) - 12$$

(β) Να λύσετε την εξίσωση : $(2x-4)(x^2-9) + (8-4x)(x-3)^2 = 0$ (μ.5)

Θέμα 4. Δίνονται τα σημεία $A(1,5)$, $B(-3,3)$ και $\Gamma(-1,1)$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές. (μ.3)

(β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ. (μ.4)

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ. (μ.3)

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

Θέμα 5. Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΔΖ διχοτόμος της γωνίας Δ (Ζ σημείο της ΑΒ). Φέρουμε ΑΚ κάθετη στη ΔΖ ($AK \perp \Delta Z$) και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την ΓΔ στο Ε.

Να δείξετε ότι:

(α) Το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (μ. 2)

(β) Τα τρίγωνα ΑΚΖ και ΔΚΕ είναι ίσα. (μ. 4)

(γ) Το τετράπλευρο ΑΖΕΔ είναι ρόμβος. (μ. 4)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ'

ΜΕΡΟΣ Α' :

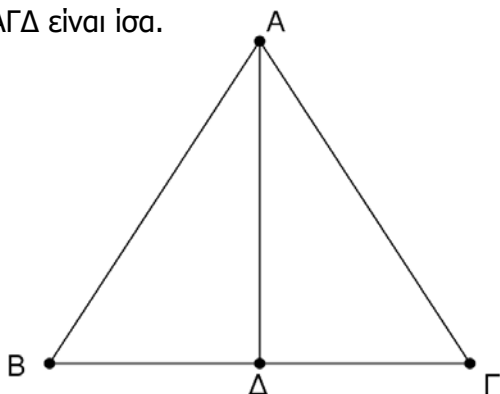
1) Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x + 4)^2 =$

β) $(x - 7)(x + 7) =$

[μον. 2 x 2,5]

2) Το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές ($AB=AG$). Αν ΑΔ είναι ύψος, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ είναι ίσα.



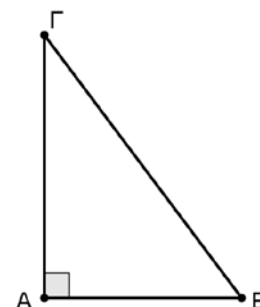
[μον. 5]

3) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 3x - 4y = 10 \\ 5x + 2y = 8 \end{cases}$

[μον. 5]

4) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB=3\text{cm}$ και $AG=4\text{cm}$.

Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημΒ, συνΒ και εφΒ.



[μον. 5]

5) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $x^2 - 9 =$

β) $3x^5 y^3 - 21x^9 y^4 =$

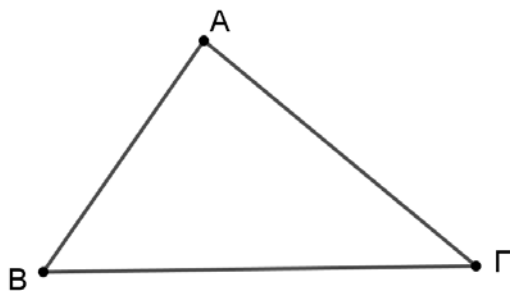
γ) $x^2 - 12x + 20 =$

δ) $a^3 + 8 =$

ε) $a^2 + 5a + 2ab + 10b =$

[μον. 5 x 1]

- 6) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Το σημείο Δ είναι το μέσο της ΑΒ και το σημείο Ε είναι το μέσο της ΑΓ.
Να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΒ είναι τραπέζιο.



[μον. 5]

- 7) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 + 5x - 12 = 0$

[μον. 5]

- 8) Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 100cm^2 και παράπλευρο ύψος 13cm .
Να υπολογίσετε: α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.
β) τον όγκο της πυραμίδας.

[μον. 3]

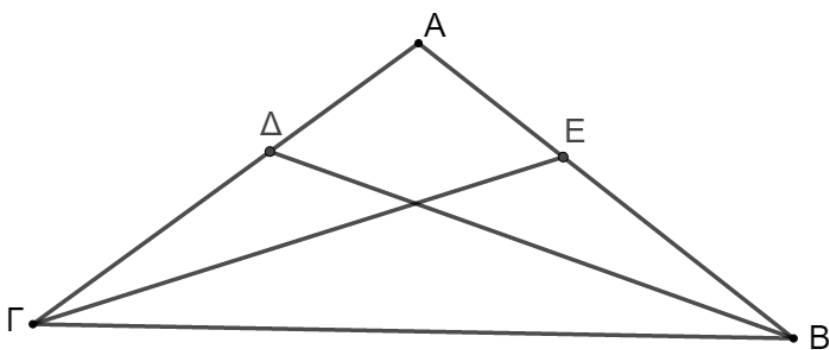
[μον. 2]

- 9) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(x - 2)^3 - x(x - 5)^2 + 13(x - 1) + 12 = (2x - 3)(2x + 3)$$

[μον. 5]

- 10) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($AB = AΓ$). Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Β και Γ ισαπέχουν από τις πλευρές ΓΕ και ΒΔ αντίστοιχα. (Σχήμα, Δεδομένα, Ζητούμενα, Απόδειξη)



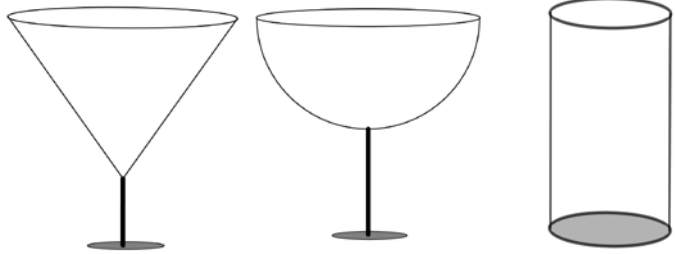
[μον. 5]

ΜΕΡΟΣ Β'

1) Να λύσετε την εξίσωση:
$$\frac{4}{x+1} - \frac{2x}{3-x} = \frac{11x-9}{x^2-2x-3}$$

[μον. 10]

- 2) Στο διπλανό σχήμα δίνονται τρία ποτήρια.
Το ποτήρι σχήματος ημισφαιρίου έχει όγκο $144\pi \text{ cm}^3$ και το ποτήρι σχήματος κώνου έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $60\pi \text{ cm}^2$. Τα δύο ποτήρια, σε σχήμα κώνου και ημισφαιρίου, έχουν την ίδια ακτίνα. Το κυλινδρικό ποτήρι έχει ακτίνα 4 cm .



- α) Να υπολογίσετε το ύψος του κώνου στο κωνικό ποτήρι.

[μον. 6]

- β) Γεμίζουμε το κωνικό ποτήρι και το ποτήρι σχήματος ημισφαιρίου με νερό και μετά τα αδειάζουμε στο κυλινδρικό ποτήρι. Να βρείτε το ύψος της στάθμης του νερού μέσα στο κυλινδρικό ποτήρι.

[μον. 4]

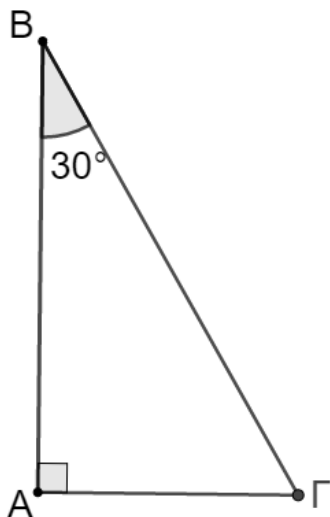
- 3) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{B} = 30^\circ$. Να φέρετε τη διάμεσο AM του τριγώνου $AB\Gamma$.

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AM\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

[μον. 4]

- β) Από το μέσο Δ της $A\Gamma$, να φέρετε παράλληλη προς την AM που τέμνει την $M\Gamma$ στο σημείο K . Προεκτείνουμε την ΔK και παίρνουμε σημείο E , έτσι ώστε $\Delta K = KE$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta M E \Gamma$ είναι ορθογώνιο.

[μον. 6]



4) α) Να αποδείξετε ότι: $\left(\frac{2}{\chi+1} - \frac{1}{\chi+2}\right) : \frac{4+\frac{12}{\chi}}{\chi^3+3\chi^2+2\chi} = \frac{\chi^2}{4}$ [μον. 5]

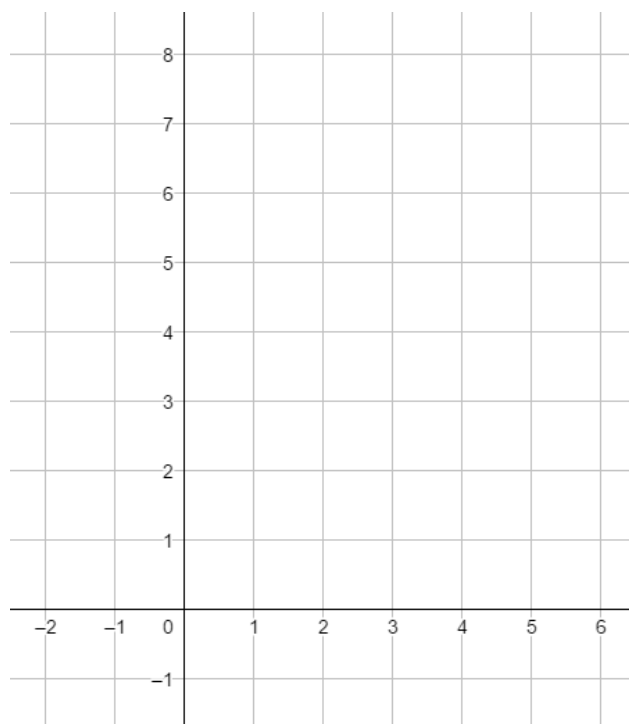
β) Αν $\chi + \psi = -\omega$ και $\chi\psi = -12\omega^2$

i) να αποδείξετε ότι $\chi^2 + \psi^2 = 25\omega^2$ [μον. 2]

ii) να εκφράσετε την πιο κάτω παράσταση συναρτήσει του ω και στην συνέχεια να την παραγοντοποιήσετε. $(2\chi + 3)^2 + (2\psi + 3)^2 - 8\omega - 17$ [μον. 3]

5) Δίνεται τρίγωνο ABΓ με συντεταγμένες κορυφών A(-1,4), B(1,8) και Γ(3,2).

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία περνά από το σημείο A(-1,4) και είναι κάθετη στην ευθεία ΑΓ. [μον. 3]



β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές. [μον. 3]

γ) Αν Κ είναι το μέσο της ΒΓ και ΑΚ=ΚΔ, όπου ΚΔ προέκταση της ΑΚ, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ. [μον. 2]

δ) Να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου ΑΒΔΓ, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας. [μον. 2]

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ' Γυμνασίου

Ημερομηνία: 03/06/2019

Βαθμός:

Ώρα: 8:00 π.μ.

Ολογράφως:

Χρόνος: 2 ώρες

Διορθωτής/τρια:

Υπογραφή:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να χρησιμοποιείτε μόνο απλό στυλό μπλε ή μαύρου χρώματος.
2. Τα σχήματα μπορούν να γίνονται με μολύβι.
3. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
5. Δεν επιτρέπεται να δανείζεστε οτιδήποτε από συμμαθητές/τριες σας.
6. Η κατοχή κινητού τηλεφώνου **ισοδυναμεί με δολίευση**.
7. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **10** σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις.

Να λύσετε ΟΛΕΣ τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με μία (1) μονάδα.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(x-3)^2 =$

(β) $(\omega-5)(\omega+5) =$

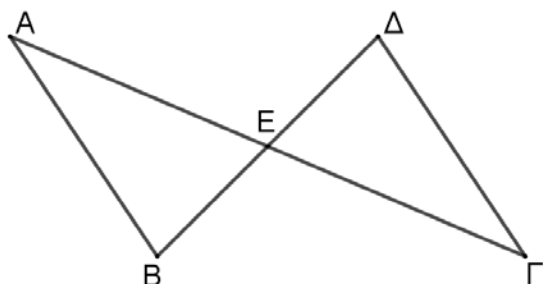
2. Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

(α) $2ax+2\beta x-10x =$

(β) $x^2+8x+12 =$

3. Δίνεται κύβος με ακμή $a=3\text{ cm}$. Να βρείτε το εμβαδό ολικής επιφάνειας και τον όγκο του.

4. Στο πιο κάτω σχήμα $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και E μέσο της $ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και $\Gamma E\Delta$ είναι ίσα.



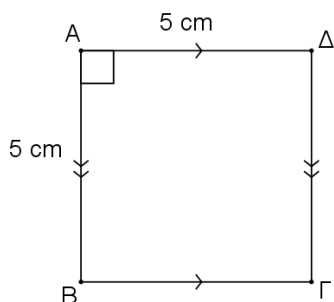
5. Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 - 7x + 2 = 0$

6. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$x - 4\psi = 7$$

$$5x + 4\psi = 11$$

7. Δίνεται το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$. Να ελέγξετε αν είναι παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο ή/και τραπέζιο. Αν η απάντησή σας είναι θετική, να γράψετε το **αντίστοιχο κριτήριο**. Αν είναι αρνητική, να γράψετε τη φράση «**Δεν είναι**».



Παραλληλόγραμμο:.....

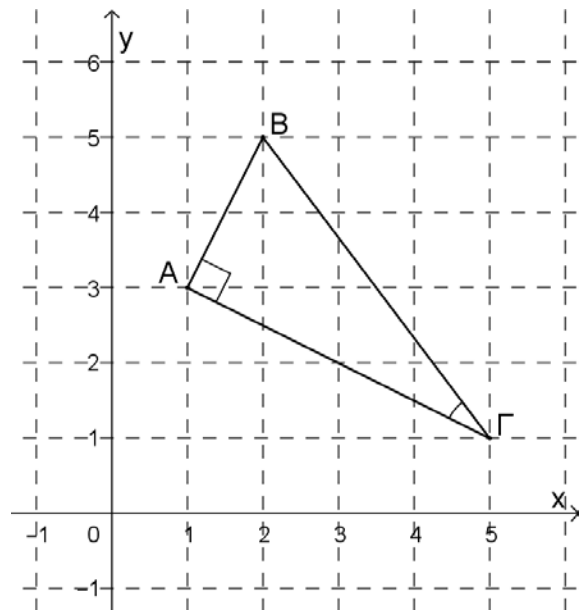
Ορθογώνιο:.....

Ρόμβος:.....

Τετράγωνο:.....

Τραπέζιο:.....

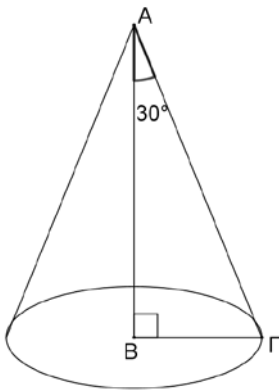
8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ.
(α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών (ΑΒ) και (ΒΓ) του τριγώνου. (μονάδες 0,6)



- (β)** Αν $(ΑΓ) = 2\sqrt{5}cm$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς **ημΓ** και **εφΓ** της γωνίας Γ του τριγώνου. (μονάδες 0,4)

9. Στο πιο κάτω σχήμα $ΑΓ=20cm$ και $Β\hat{A}Γ = 30^\circ$.

- (α)** Να υπολογίσετε το εμβαδό ολικής επιφάνειας του κώνου E_1 , δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.



- (β)** Κύλινδρος έχει την ίδια ακτίνα με τον πιο πάνω κώνο, και ο λόγος του εμβαδού ολικής επιφάνειας του κυλίνδρου E_2 προς το εμβαδό ολικής επιφάνειας του κώνου

$$E_1 \text{ είναι } \frac{E_1}{E_2} = \frac{3}{5}.$$

Να υπολογίσετε το ύψος u του κυλίνδρου.

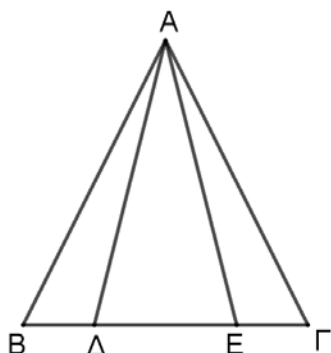
10. Να απλοποιηθεί πλήρως η ρητή αλγεβρική παράσταση: $A = \frac{(x-3)^4 - 2(x-3)^3}{x^3 - 25x - 3x^2 + 75}$

ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 5 ασκήσεις.

Να λύσετε ΟΛΕΣ τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δύο (2) μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x+2}{x+1} = \frac{4x}{x^2-2x-3} + \frac{4}{3-x}$

2. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ=ΑΓ. Παίρνουμε ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ=ΕΓ πάνω στη ΒΓ.

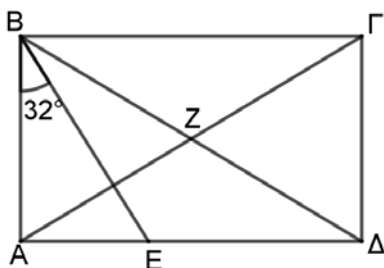


(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΕ είναι ίσα.

(β) Αν Ζ και Η είναι τα μέσα των ΑΔ και ΑΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΗΕΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

3. Στο πιο κάτω τετράπλευρο ΑΒΓΔ δίδεται ότι ΒΖ=ΖΔ=ΓΖ=ΖΑ και η γωνία ΑΒΕ=32°.

Το μήκος της πλευράς ΒΓ = $\frac{7x^3+7x^2+7x}{x+1}$ και της πλευράς ΑΒ = $\frac{x^2-1}{x(x^3-1)}$.



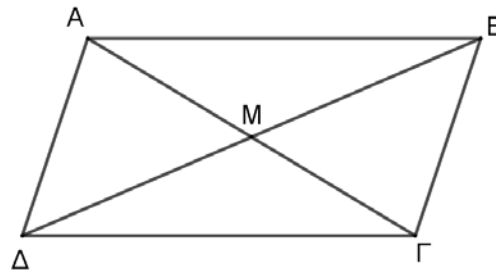
$\eta\mu 32^\circ = 0,53$	$\sigma\upsilon\nu 32^\circ = 0,84$	$\epsilon\phi 32^\circ = 0,62$
---------------------------	-------------------------------------	--------------------------------

(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (μονάδες 0,4)

(β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$ είναι ανεξάρτητο του x . (μονάδες 0,8)

(γ) Αν $x=2\text{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος BE , δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας. (μονάδες 0,8)

4. Το πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. Οι συντεταγμένες της κορυφής A είναι $A((a+\beta)^2, a^2+\beta^2)$ και οι συντεταγμένες της κορυφής Γ είναι $\Gamma((a-\beta)^2, (a-\beta)(a+\beta))$.



(α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του κέντρου του παραλληλογράμμου M , είναι ίσες με $M(a^2+\beta^2, a^2)$. (μονάδες 0,6)

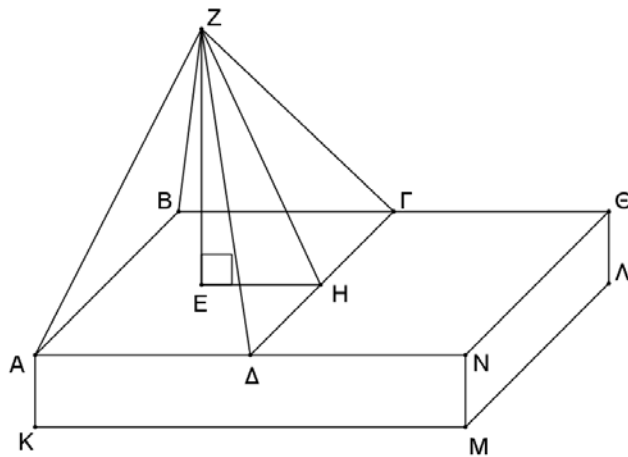
(β) Αν η εξίσωση της πλευράς AB είναι $\psi=2x-13$, και η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ είναι $2x+3\psi=-7$, να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής B του παραλληλογράμμου. (μονάδες 0,6)

(γ) Αν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ είναι $\Gamma(1,-3)$, να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $\Delta\Gamma$, και την εξίσωση του ύψους ΓE . (μονάδες 0,8)

5. Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται στερεό που αποτελείται από μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα με περίμετρο βάσης 40cm και παράπλευρο ύψος $ZH=13\text{cm}$, και από ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με ύψος $AK=2\text{cm}$. Αν Δ είναι το μέσο της ακμής AN , να υπολογίσετε:

(α) τον όγκο του στερεού.

(β) το εμβαδό ολικής επιφάνειας του στερεού.



ΟΝΟΜΑ:

ΕΠΩΝΥΜΟ:

ΤΜΗΜΑ:

ΒΑΘΜΟΣ:

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΔΙΟΡΘΩΤΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥ:.....



**ΕΜΠΟΡΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΜΙΤΣΗ ΛΕΜΥΘΟΥ
ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018 - 2019**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**

ΤΑΞΗ : Γ' Γυμνασίου
ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 29 Μαΐου 2019
ΩΡΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 7:45-9:45

Επιτρεπόμενη διάρκεια γραπτού 2 ώρες

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο (2) μέρη (Α,Β), οκτώ (8) σελίδες.

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να συμπληρώσετε το ονοματεπώνυμό σας, με την έναρξη της εξέτασης.
2. Οι απαντήσεις να δοθούν στο εξεταστικό δοκίμιο.
3. Να απαντήσετε **σε όλα** τα θέματα.
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
5. Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
6. Να χρησιμοποιήσετε μόνο μπλε μελάνι για τα κείμενα των απαντήσεών σας και μολύβι για τα σχέδια.

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(\psi - 3)(\psi + 3) =$

(β) $(\chi + 2)^2 =$

2. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $5\chi + 5\psi - 5\zeta =$

(β) $4\chi^2 - \psi^2 =$

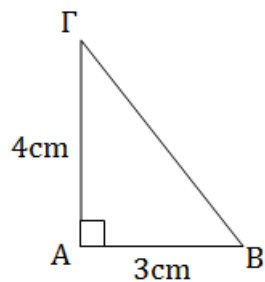
(γ) $\chi^2 - 6\chi + 5 =$

3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με πλευρές $A\Gamma = 4\text{cm}$ και $AB = 3\text{cm}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

(α) $\eta\mu B =$

(β) $\sigma\upsilon\nu B =$

(γ) $\epsilon\phi\Gamma =$



4. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} 3\chi - \psi &= 3 \\ 2\chi + 3\psi &= 13 \end{aligned}$$

5. Να λύσετε την εξίσωση: $2\chi^2 + 5\chi - 12 = 0$.

6. Να κάνετε τις πράξεις και όλες τις δυνατές απλοποιήσεις:

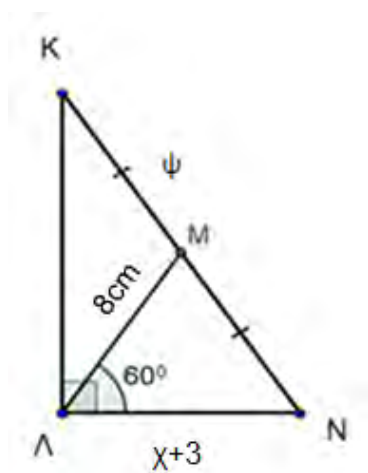
(α) $\frac{2\chi + 6}{\chi^2} \cdot \frac{4\chi}{\chi + 3} =$

$$(β) \quad \frac{\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}}{\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2}} =$$

7. Να χαρακτηρίσετε με **ΣΩΣΤΟ** ή **ΛΑΘΟΣ** τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

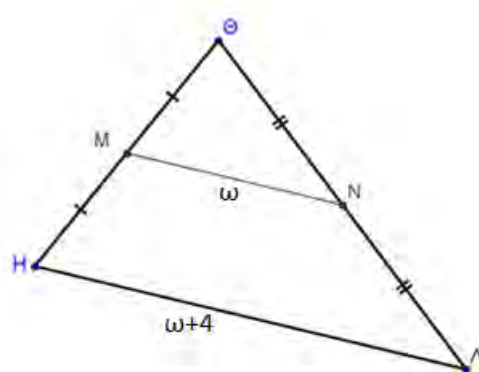
Ένα παραλληλόγραμμο με μια ορθή γωνία είναι ορθογώνιο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Αν σε ένα τετράπλευρο οι διαγώνιοι του διχοτομούνται κάθετα, τότε είναι ρόμβος.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Ένα τετράπλευρο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές είναι τετράγωνο.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Αν οι διαγώνιοι ενός τραπέζιου είναι ίσες, τότε το τραπέζιο είναι ισοσκελές.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Αν δύο απέναντι πλευρές ενός τετραπλεύρου είναι παράλληλες, τότε είναι παραλληλόγραμμο .	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

8. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα χ , ψ και ω .



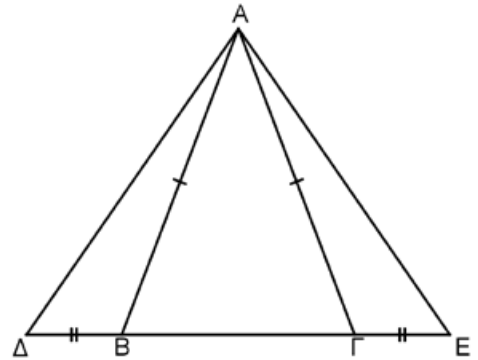
(α) ΛΜ διάμεσος

(β)



9. Αν από μια πλάκα χρυσού που έχει σχήμα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 80cm, 50cm και 5cm μπορούμε να φτιάξουμε 2500 κύβους χρυσού, να υπολογίσετε την ακμή του κύβου χρυσού. (Για την επίλυση της άσκησης, η απώλεια του χρυσού να θεωρηθεί αμελητέα).

10. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB = A\Gamma$). Τα ευθύγραμμα τμήματα $B\Delta$, ΓE είναι προεκτάσεις της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιες ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



**ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄**

ΜΕΡΟΣ Β΄ : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε ορθή άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\chi + 2)^2 - (4 - \chi)(\chi + 4) + (\chi - 3)^2 + 3 = \chi(3\chi - 2)$$

(β) Δίνονται οι ρητές παραστάσεις: $A = \frac{\chi^2 - 4\chi + 4}{\chi^2 - 2\chi}$ και $B = \frac{\chi^2 - 2\chi - 8}{\chi^2 - 4}$

- i. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A και B. (Μον.3)
- ii. Να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Gamma = (A - B) \div \frac{12}{\chi^2 - 2\chi}$ είναι σταθερή. (Μον.2)

2. Να λύσετε την εξίσωση:

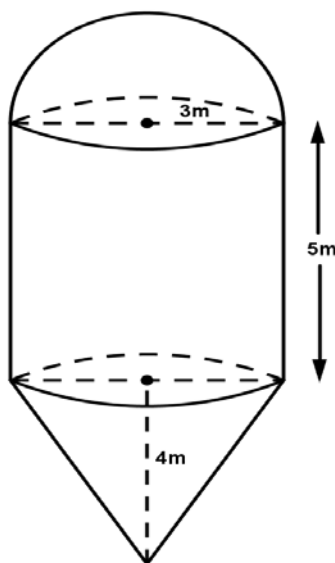
$$\frac{\chi}{\chi-2} - \frac{3\chi+29}{\chi^2+3\chi-10} = \frac{2}{\chi+5}$$

3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύλινδρος. Στη μια βάση του τοποθετήθηκε ημισφαίριο ακτίνας 3m και στην άλλη βάση του κώνος ύψους 4m (όπως φαίνεται στο σχήμα).

(α) Να βρείτε:

(Μον.8)

- i. τον όγκο και
- ii. το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της κατασκευής.



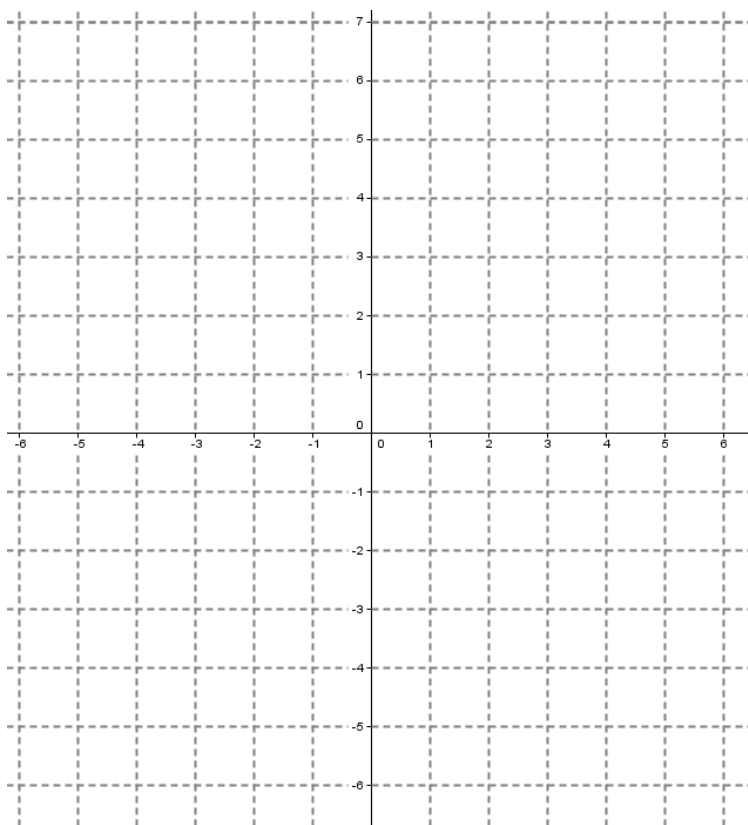
(β) Η εξωτερική επιφάνεια του στερεού θα βαφτεί με ειδική μεταλλική μπογιά (για την επίλυση της άσκησης, το πάχος του στερεού να θεωρηθεί αμελητέο). Αν το βάψιμο κάθε τετραγωνικού μέτρου θα στοιχίσει €3, να βρείτε το συνολικό κόστος.

($\pi \cong 3,14$)

(Μον.2)

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-3,2)$, $B(-2,6)$ και $\Gamma(5,0)$.

(α) Να βρείτε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου.



(β) Να δείξετε ότι το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το Γ και είναι παράλληλη με την AB .

(δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της $A\Gamma$.

(ε) Να δείξετε ότι το $(A\Gamma)=2(AB)$.

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Προεκτείνουμε τις πλευρές AB προς το B και AG προς το Γ κατά τμήματα BM και ΓE αντίστοιχα έτσι ώστε $BM=GE$. Από τα σημεία M και E φέρουμε τις αποστάσεις $M\Delta$ και EZ από την ευθεία $B\Gamma$.

(α) Να αποδείξετε ότι $M\Delta=EZ$.

(Μον.7)

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔZEM είναι ορθογώνιο.

(Μον.3)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Η Διευθύντρια



ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΛΙΝΟΠΕΤΡΑΣ ΛΕΜΕΣΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018-2019

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΑΞΗ: Γ'

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03/06/2019

ΩΡΑ: 07:45 – 09:45

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

ΒΑΘΜΟΣ:.....

Ολογράφως:.....

Υπογραφή:.....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:ΤΜΗΜΑ:.....ΑΡ.:.....

- Να απαντηθούν και τα δύο μέρη Α' και Β' του εξεταστικού δοκιμίου.
- Το παρόν εξεταστικό δοκίμιο βαθμολογείται με 100/100 μονάδες.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας (Tipp-Ex).
- Για τις απαντήσεις σας, να χρησιμοποιήσετε μόνο μπλε μελάνι (στυλό).
- Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από εννέα (9) αριθμημένες σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

i) $(\omega - 4)^2$

ii) $(\chi + 3)(\chi - 3)$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

i) $3\alpha^2 + 15\alpha\beta$

ii) $\psi^2 + 6\psi + 9$

3. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις 4m , 6m και 5m.

Να υπολογίσετε:

i) τον όγκο του.

ii) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.

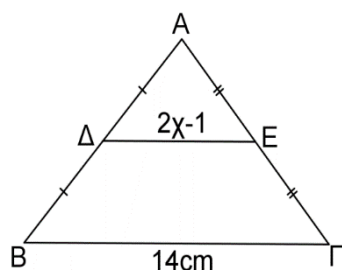
4. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 3\chi + 2\psi = 6 \\ 2\chi - \psi = 11 \end{cases}$$

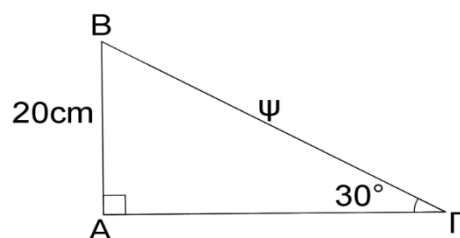
5. Να υπολογίσετε την τιμή των χ και ψ στα πιο κάτω σχήματα.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας:

α)

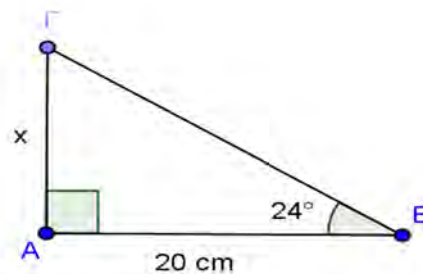


β)



6. Να υπολογίσετε το x στο πιο κάτω σχήμα, αν

γνωρίζετε ότι: $\eta\mu 24^\circ \cong 0,41$ $\sigma\upsilon\nu 24^\circ \cong 0,91$ $\epsilon\phi 24^\circ \cong 0,45$



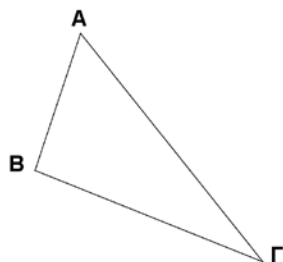
7. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3\chi^2 + 7\chi - 6 = 0$$

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να φέρετε τη διάμεσο ΑΜ και να την προεκτείνετε κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Να αποδείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΜΓΔ είναι ίσα.

ii) το τετράπλευρο ΑΓΔΒ είναι παραλληλόγραμμο.



9. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 256cm^2 και παράπλευρο ύψος 17cm . Να υπολογίσετε τον όγκο της.

10. Να κάνετε τις πράξεις: $\left(\frac{\chi-1}{\chi^2-3\chi} - \frac{\chi}{\chi^2-9}\right) : \frac{2\chi-3}{\chi^3-27}$

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\alpha-7}{\alpha^2-5\alpha+4} - \frac{1}{4-\alpha} = \frac{\alpha-3}{\alpha^2-\alpha}$

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με διαγώνιους $ΑΓ = (\chi - 2)^3 - 4\chi + 7$ και $ΒΔ = \chi(\chi - 3)(\chi - 2) - (\chi - 1)^2$.

Ο Έκτορας ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.

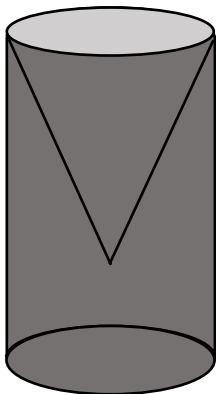
Να εξετάσετε τον ισχυρισμό του, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

3. Μια εταιρεία σχεδίασε μια ανοικτή μεταλλική κατασκευή όπως φαίνεται στο σχήμα. Η κατασκευή αποτελείται από έναν κύλινδρο ύψους 17m και ακτίνας 5m από τον οποίο αφαιρέθηκε ένας κώνος ύψους 12m .

i) Να υπολογίσετε τον όγκο της κατασκευής συναρτήσει του π .

ii) Η κατασκευή βάφεται με μπογιά που στοιχίζει 20 ευρώ το m^2 .

Πόσο θα κοστίσει το βάψιμο της κατασκευής;



4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία $A(1,2)$, $B(6,2)$ και $\Gamma(9,-2)$.

i) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

ii) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΒΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

iii) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ.

iv) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ε, έτσι ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΕ να είναι ρόμβος.

5. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε μέσο της ΑΔ.

Αν Ζ, Η είναι τα μέσα των ΕΒ, ΕΓ αντίστοιχα,

- i) να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΒ και ΔΕΓ είναι ίσα,
- ii) να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΗΔ είναι ισοσκελές τραπέζιο,
- iii) αν $ΑΔ = 6\text{cm}$ και $ΖΗ = (2\chi - \frac{2}{\chi})\text{cm}$ να βρείτε την ακέραια τιμή του χ .

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.)

(μονάδες 4-4-2)

Η Διευθύντρια

Μαρία Συμεωνίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: **27/05/2019**
ΤΑΞΗ: **Γ'**
ΧΡΟΝΟΣ: **2 ώρες**

ΒΑΘΜΟΣ:

ΥΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗ:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: **ΤΜΗΜΑ:** **Αρ.**

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 2. Δεν επιτρέπεται η χρήση κινητού τηλεφώνου.
 3. Να γράφετε μόνο με μελάνι (μπλε ή μαύρο). Με μολύβι μόνο τα σχήματα.
 4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού (TIPP – EX).

ΜΕΡΟΣ Α' : Αποτελείται από 10 θέματα.

Να λύσετε ΟΛΑ τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με μία (1) μονάδα.

ΘΕΜΑ 1:

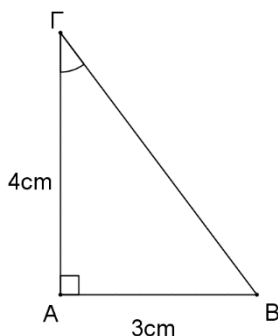
Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα με χρήση ταυτοτήτων.

(α) $(x - 6)^2 =$

(β) $(3\alpha - 2) \cdot (3\alpha + 2) =$

ΘΕΜΑ 2:

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$ και πλευρές ΑΒ=3cm και ΑΓ=4cm. Να υπολογίσετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ:



(α) $\eta\mu\Gamma =$

(β) $\epsilon\phi\Gamma =$

ΘΕΜΑ 3:

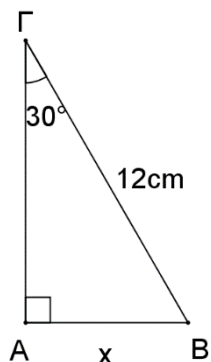
Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$5x - 2y = 12$$

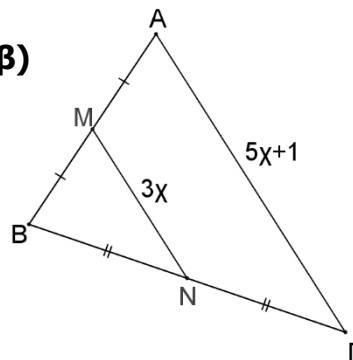
$$x + 3y = -1$$

ΘΕΜΑ 4:

Να υπολογίσετε την τιμή του x στα πιο κάτω σχήματα, **δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.**

(α)

(μον.0,4)

(β)

(μον.0,6)

ΘΕΜΑ 5:

Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$3x^2 + x - 2 = 0$$

ΘΕΜΑ 6:

Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις πιο κάτω αλγεβρικές παραστάσεις:

(α) $a\psi\omega + a\beta\psi =$

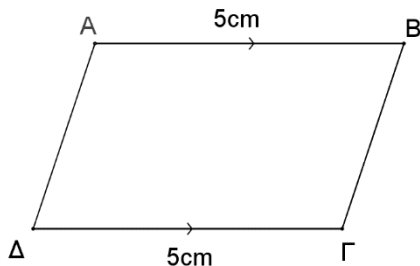
(β) $x^2 - 16y^2 =$

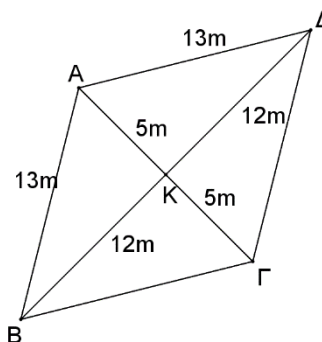
(γ) $9x^2 - 6x + 1 =$

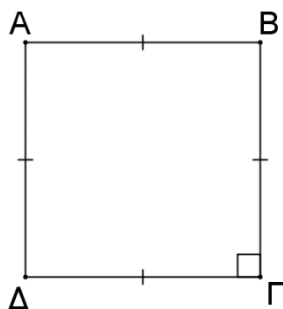
(δ) $x^3 - 27 =$

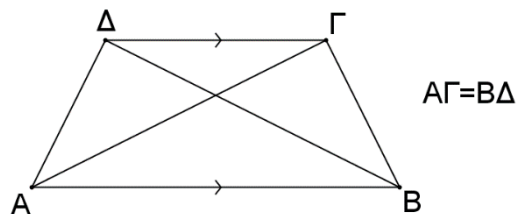
ΘΕΜΑ 7:

Να εξετάσετε τα ακόλουθα τετράπλευρα ως προς το είδος τους (παράλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, τραπέζιο, ισοσκελές τραπέζιο) και να αναφέρετε το κριτήριο που το εξασφαλίζει.

(α)

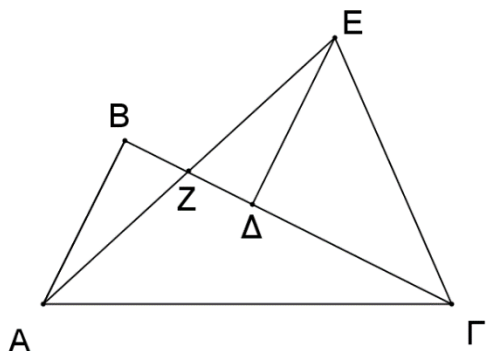
(β)

(γ)

(δ)

ΘΕΜΑ 8:

Στο πιο κάτω σχήμα $AB \perp B\Gamma$. Αν $E\Delta$ ύψος του τριγώνου $E\hat{\Delta}\Gamma$ και ΓZ διάμεσος του τριγώνου $A\hat{\Gamma}E$, να δείξετε ότι τα τρίγωνα $A\hat{Z}B$ και $\Delta\hat{E}Z$ είναι ίσα.



ΘΕΜΑ 9:

Η διπλανή κατασκευή αποτελείται από έναν κύβο πάνω στον οποίο είναι τοποθετημένη μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα.

Η πυραμίδα έχει παράπλευρο ύψος 13m και η ακμή της βάσης της είναι 10m.

(α) Να υπολογίσετε τον όγκο του κύβου. (μον.0,4)

(β) Τα πλαϊνά τοιχώματα της πυραμίδας θα βαφτούν εξωτερικά με μπογιά που στοιχίζει €5 το τετραγωνικό μέτρο. Πόσο θα είναι το κόστος βαψίματος των τοιχωμάτων της πυραμίδας; (μον.0,6)

ΘΕΜΑ 10:

Να απλοποιήσετε την πιο κάτω ρητή αλγεβρική παράσταση:

$$A = \frac{x^2(x+4) - 6x(x+4) + 9(x+4)}{x^3 + 4x^2 - 9x - 36}$$

ΜΕΡΟΣ Β': Αποτελείται από 5 θέματα.

Να λύσετε ΟΛΑ τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με δύο (2) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{3x-1}{x+3} + \frac{2x-3}{4-x} = \frac{33-17x}{x^2-x-12}$

ΘΕΜΑ 2:

Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές Α(-1,5), Β(6,2), Γ(7,-1) και Δ(0,2).

(α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (μον.0,8)

(β) Αν Κ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Κ. (μον.0,4)

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που περνά από το σημείο Κ και είναι κάθετη στη διαγώνιο ΑΓ του παραλληλογράμμου. (μον.0,4)

(δ) Να υπολογίσετε την τιμή του μ, ώστε η ευθεία $\varepsilon_1: \psi = (2\mu-9)x-1$ να είναι παράλληλη με την ΒΓ. (μον.0,4)

ΘΕΜΑ 3:

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($AB=AG$). Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ κατά ίσα τμήματα $BZ=GH$. Πάνω στις πλευρές AB και AG παίρνουμε δύο σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $A\Delta=AE$.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle B\Delta Z$ και $\triangle E\Gamma H$ είναι ίσα. (μον.0,7)

(β) Αν ΔK και $E\Theta$ είναι οι αποστάσεις των σημείων Δ και E από την πλευρά $B\Gamma$, να δείξετε ότι $\Delta K=E\Theta$. (μον.0,7)

(γ) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E\Theta K$ είναι ορθογώνιο. (μον.0,6)

(Δεδομένα/Ζητούμενα-Σχήμα-Πλήρης αιτιολόγηση)

ΘΕΜΑ 4:

Δίνονται οι πιο κάτω παραστάσεις:

$$A(x) = 16x^3 - 81x, \quad B(x) = \frac{(2x-1)^3 + 1}{x}, \quad \Gamma(x) = \frac{4x^2 - 6x + 3}{x^4 + 2x^2 + 1} \quad \text{και} \quad \Delta(x) = \frac{3}{x^2 + 1}.$$

(α) Να λύσετε την εξίσωση: $A(x) = 0$ (μον.0,6)

(β) Να δείξετε ότι η παράσταση $B(x) : \Gamma(x) \cdot [\Delta(x)]^2$ είναι ανεξάρτητη του x .

(μον.1,4)

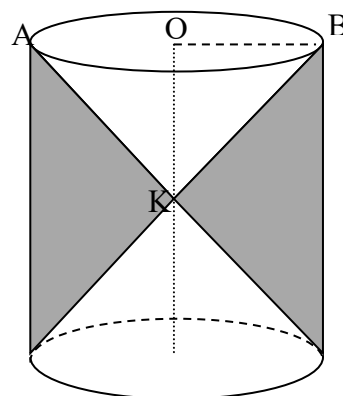
ΘΕΜΑ 5:

Από τον πιο κάτω κύλινδρο έχουν αφαιρεθεί δύο ίσοι κώνοι με κοινή κορυφή K . Εάν η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου είναι 6 cm και ο όγκος του κυλίνδρου είναι $576\pi \text{ cm}^3$, να υπολογίσετε:

(α) τον όγκο του σκιασμένου στερεού που έμεινε και

(β) το εμβαδόν της επιφάνειάς του.

(Οι απαντήσεις σας να δοθούν συναρτήσει του π)



ΔΙΕΥΘΥΝΩΝ

Ανδρέας Βίττης

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΜΑΘΗΤΡΙΑΣ:

.....

ΤΜΗΜΑ:

ΒΑΘΜΟΣ: $\frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{20}$

ΥΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗ:

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΜΑΚΕΔΟΝΙΤΙΣΣΑΣ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018 – 2019

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ'

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 05/06/2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 Ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- ✚ Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
- ✚ Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
- ✚ **Δεν επιτρέπεται** η χρήση διορθωτικού υλικού.
- ✚ Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **13** σελίδες και μία τελευταία σελίδα που μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πρόχειρο.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε ΟΛΕΣ τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να υπολογίσετε τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις 2 m, 3 m και 5 m.

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x + 2)^2 =$

(β) $(x - 5)(x + 5) =$

3. Να αναλύσετε, σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, τα πολυώνυμα:

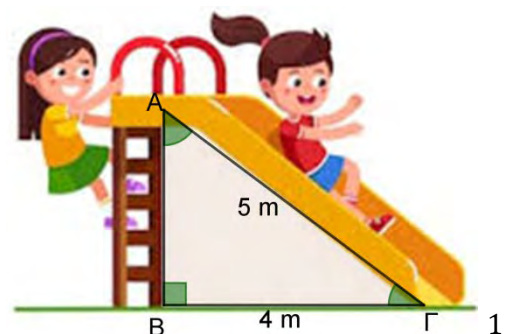
(α) $5\alpha - 5\beta + 20\gamma =$

(β) $x^2 + 4x + 3 =$

4. Από το διπλανό σχήμα, να υπολογίσετε:

(α) Το συνημίτονο της γωνίας $\hat{\Gamma}$.

(β) Την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{A}$.



5. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x + 5y = 12 \end{cases}$$

6. Να λύσετε την εξίσωση:

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

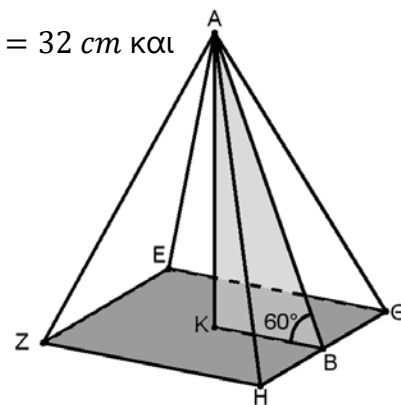
7. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{x^3 - 9x}{x^2 - 6x + 9} : \frac{x}{4x - 12} =$$

8. Δίνεται η διπλανή τετραγωνική πυραμίδα με περίμετρο βάσης $\Pi_B = 32 \text{ cm}$ και $\angle KBA = 60^\circ$. Να υπολογίσετε:

(α) Το μήκος του παράπλευρου ύψους (h) της πυραμίδας. (M.2)

(β) Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της πυραμίδας. (M.3)

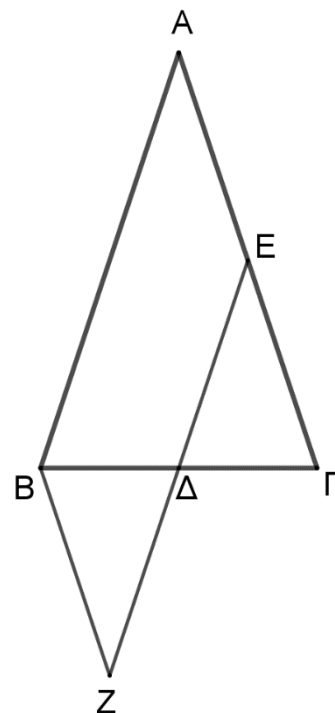


9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Από το μέσο Δ της $B\Gamma$ φέρνουμε ΔE παράλληλη προς την AB η οποία τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο E . Η ΔZ είναι η προέκταση της ΔE με $\Delta Z = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι:

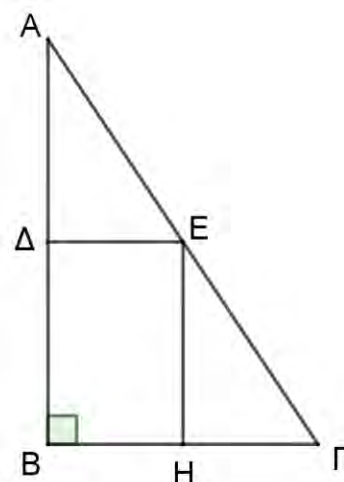
(α) Το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές. (M.2)

(β) Το τετράπλευρο $BEGZ$ είναι παραλληλόγραμμο. (M.1)

(γ) Οι αποστάσεις των σημείων Z και E από την $B\Gamma$ είναι ίσες. (M.2)



10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{B} = 90^\circ$. Από το Δ , μέσο της AB , φέρουμε τη $\Delta E \parallel B\Gamma$. Αν H είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:



(α) Το τετράπλευρο $B\Delta EH$ είναι ορθογώνιο.

(β) Τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $HE\Gamma$ είναι ίσα.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε ΟΛΕΣ τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x+2}{x+3} - \frac{4}{x^2+2x-3} = \frac{x+1}{2(x-1)}$$

2. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{\frac{27x^2}{y} - \frac{y^2}{x}}{\frac{3x^2y - xy^2}{x^2y^2}} - 9xy = (3x - y)^2$$

- (β) Αν $3x - y = 4$ και x, y είναι αντίστροφοι να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i. $A = 9x^2 + y^2$

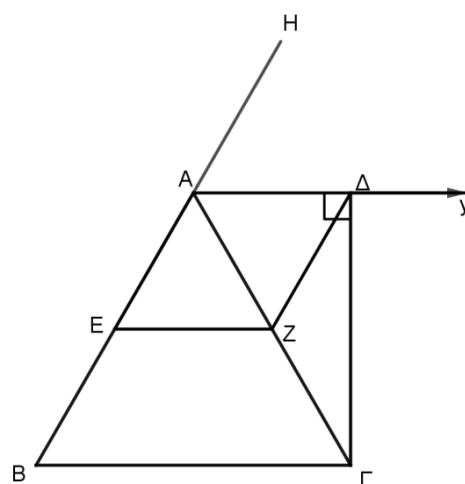
ii. $B = 27x^3 - y^3$

3. Δίνεται το **ισόπλευρο** τρίγωνο $AB\Gamma$ και E και Z τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Φέρουμε την Ay , διχοτόμο της γωνίας $H\hat{A}\Gamma$. Από την κορυφή Γ του τριγώνου φέρουμε τη $\Gamma\Delta$, κάθετη στη διχοτόμο Ay .

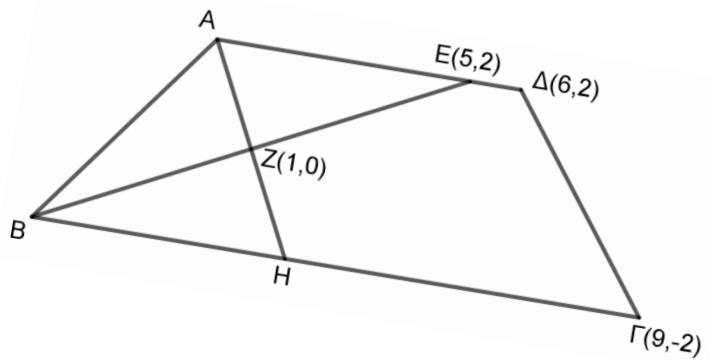
Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τρίγωνο $AZ\Delta$ είναι ισόπλευρο.

(β) Το τετράπλευρο $A\Delta ZE$ είναι ρόμβος.



4. Δίνεται $ABΓΔ$ ισοσκελές τραπέζιο ($ΑΔ \parallel ΒΓ$). Η AZ είναι διχοτόμος της γωνίας A και τέμνει την $BΓ$ στο σημείο H . Η BZ είναι κάθετη στην AH και τέμνει την $ΑΔ$ στο E .



- (α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.
 (β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΕΔΓΗ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
 (γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής B του τραπέζιου.
 (δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AH .
 (ε) Να υπολογίσετε το μήκος των διαγωνίων του τραπέζιου $ΕΔΓΗ$.
5. Το πάνω μέρος ενός ποτηριού έχει σχήμα κώνου με ακτίνα βάσης $\left(\frac{x-2}{2}\right) cm$, ύψος $(x - 4) cm$ και γενέτειρα ίση με $\left(\frac{x+2}{2}\right) cm$. Μέσα στο ποτήρι βάζουμε τρία σφαιρικά παγάκια ακτίνας $1 cm$ το καθένα και στη συνέχεια γεμίζουμε τελείως το ποτήρι με χυμό.



- (α) Να υπολογίσετε τον όγκο που καταλαμβάνουν τα παγάκια (Η απάντηση μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π).
 (β) Να υπολογίσετε το ύψος του κώνου.
 (γ) Αν το ύψος του κώνου είναι ίσο με $4 cm$, να υπολογίσετε τον όγκο του χυμού που βρίσκεται μέσα στο ποτήρι (Η απάντηση μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π).
 (δ) Όταν λιώνουν τα παγάκια, ο όγκος του νερού που προκύπτει είναι το 90% του όγκου του πάγου. Να υπολογίσετε το ύψος του υγρού που θα βρίσκεται μέσα στο ποτήρι όταν λειώσουν τελείως τα παγάκια (Η απάντηση να δοθεί κατά προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου).

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Χρίστος Ζαντήρας

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΤΑΞΗ Γ'

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΒΑΘΜΟΣ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 5 ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

ΥΠΟΓΡΑΦΗ:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

- Οδηγίες:**
- α) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα με μολύβι).
 - β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 - γ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 - δ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x-2)^2 =$ (μ.3)

β) $(x+6)(x-6) =$ (μ.2)

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $3a^3 - 3a^2 =$

β) $a^2 - 64 =$

γ) $x^2 + 6x + 5 =$

δ) $25x^2 + 30x + 9 =$

3. Να λύσετε το σύστημα.

$$5x - 2y = 16$$

$$2x - 3y = 13$$

4. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB με άκρα τα σημεία A(2,4) και B(14,20).
Να βρείτε:

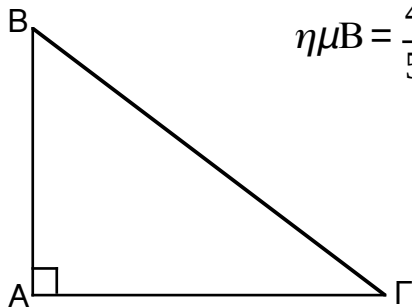
α) το μήκος του AB

β) τις συντεταγμένες του μέσου M του AB

γ) την κλίση του AB

δ) την εξίσωση της ευθείας που είναι κάθετη στο AB και περνά από το σημείο (0,5).

5.



Δεδομένο

$$\eta\mu B = \frac{4}{5}$$

Ζητούμενα

α) $\sigma\upsilon\nu B =$

(μ.2,25)

β) $\epsilon\varphi \Gamma =$

(μ.1,25)

γ) $\widehat{\Gamma} \approx$

κατά προσέγγιση ακεραίου
(μ.1,5)

6. Να λύσετε την εξίσωση: $4x^2 + 11x - 3 = 0$

7. α) Να απλοποιήσετε το κλάσμα:

(μ.2)

$$\frac{5\alpha^2\beta - 5\alpha\beta^2}{\alpha^3\beta - \alpha\beta^3} =$$

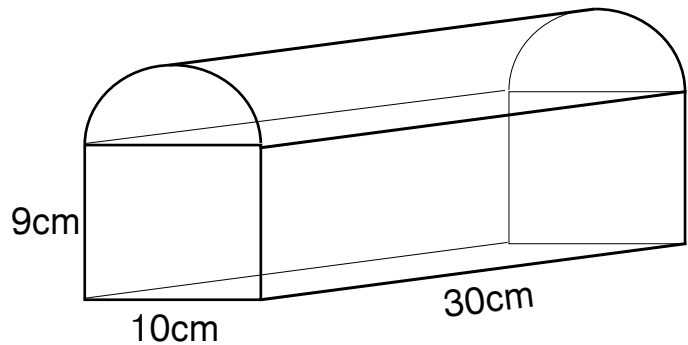
β) Να κάνετε τις πράξεις:

(μ.3)

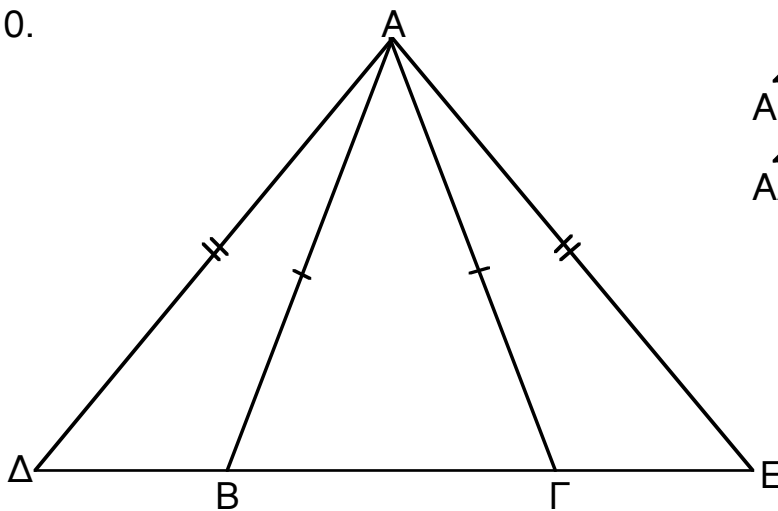
$$\frac{x^2 - 16}{x^2 + 3x - 4} : \frac{x^2 - 4x}{x^2 - x} =$$

8. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και ν , ώστε οι ευθείες $y = (3\kappa + 1)x + 2\nu$ και $y = (\kappa - 9)x - 4\kappa$ να ταυτίζονται.

9. Αγόρασα από τον φούρνο ένα ψωμί, όπως φαίνεται πιο κάτω. Η κάθετη τομή του ψωμιού αποτελείται από ένα ημικύκλιο και ένα ορθογώνιο με διαστάσεις 10cm και 9cm. Αν το μήκος του ψωμιού είναι 30cm, να υπολογίσετε τον όγκο του.



10.



Δεδομένα

$\triangle AB\Gamma$ ισοσκελές

$\triangle A\Delta E$ ισοσκελές

Ζητούμενο

$B\Delta = \Gamma E$

Απόδειξη

**ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^3 - 2x^2 = x - 2$ (μ.3,5)

β) $\frac{x-15}{x^2-5x+6} = \frac{3x}{x-2} + \frac{4x}{3-x}$ (μ.6,5)

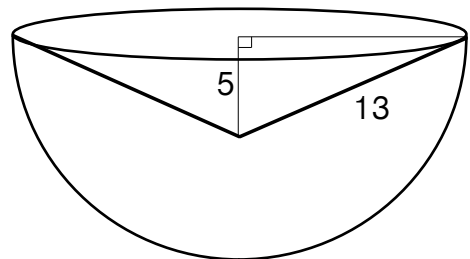
2. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: (μ.4)

$$(a+2)^3 - 6(a+1)^2 = (a-1)^3 + 3(a-1)^2 + 3a$$

β) Να κάνετε τις πράξεις: $\frac{a}{a^2-3a+2} + \frac{3}{a^2+a-2} =$ (μ.6)

3. Ένα ξύλινο κομμάτι ενός παιχνιδιού αποτελείται από ένα ημισφαίριο από το οποίο αφαιρέθηκε ένας κώνος με γενέτειρα 13cm και ύψος 5cm.

α) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.



β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.

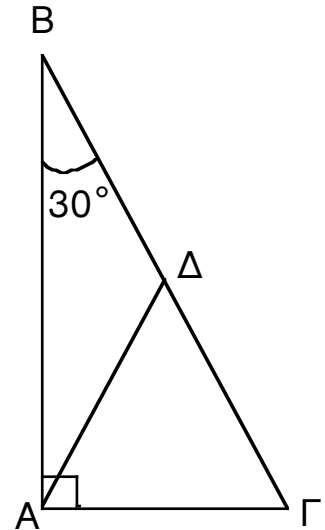
4. α) Δεδομένα

$\triangle AB\Gamma$ ορθογώνιο ($\widehat{A} = 90^\circ$)
 $\widehat{B} = 30^\circ$
 Δ μέσο $B\Gamma$

Απόδειξη

Ζητούμενο

$$A\Delta = \Delta\Gamma = A\Gamma$$



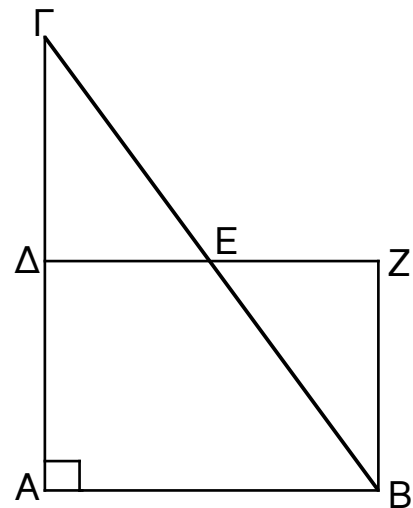
β) Δεδομένα

$\triangle AB\Gamma$ ορθογώνιο
 Δ μέσο $A\Gamma$
 E μέσο $B\Gamma$
 $\Delta E = EZ$

Απόδειξη

Ζητούμενο

$A\Delta ZB$ ορθογώνιο



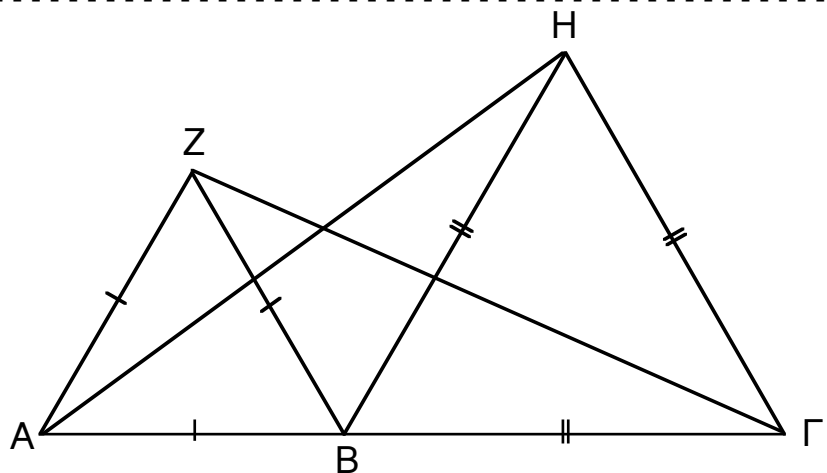
5. Δεδομένα

$\triangle ABZ$ ισόπλευρο
 $\triangle B\Gamma H$ ισόπλευρο
 $A\Gamma$ ευθύγραμμο τμήμα

Ζητούμενο

$$\triangle ABH = \triangle ZB\Gamma$$

Απόδειξη



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 05/06/2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

ΩΡΑ: 07:45 – 09:45

Βαθμός:

Βαθμός Ολογράφως:

Υπογραφή:

Ονοματεπώνυμο: **Τμήμα:**

ΟΔΗΓΙΕΣ :

1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
2. Να γράφετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
4. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 9 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο παραγόντων:

$$(\alpha) \quad 4\chi + \chi^2 =$$

$$(\beta) \quad \psi^2 - 5\psi + 6 =$$

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο κύβου με ακμή 5m.

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

$$(\alpha) \quad (\alpha - 2) \cdot (\alpha + 2) =$$

$$(\beta) \quad (\chi - 4)^2 =$$

4. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 2\chi - \psi = 9 \\ 3\chi + \psi = -29 \end{cases}$$

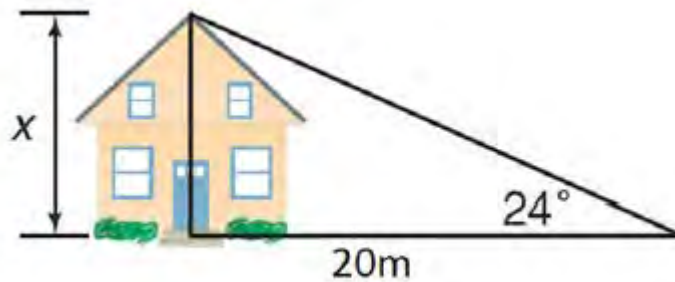
5. Να λύσετε την εξίσωση: $3\chi^2 - 5\chi + 2 = 0$

6. Στο πιο κάτω σχήμα, να υπολογίσετε το ύψος του σπιτιού, αν γνωρίζετε ότι:

$$\eta\mu 24^\circ \cong 0,41$$

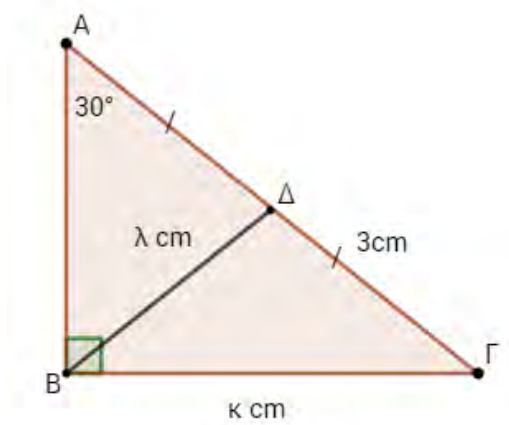
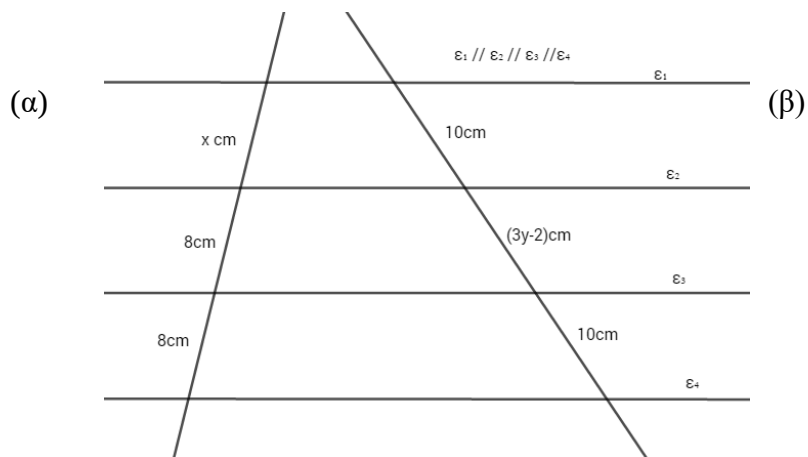
$$\sigma\upsilon\nu 24^\circ \cong 0,91$$

$$\epsilon\phi 24^\circ \cong 0,45$$



7. Να βρείτε τις τιμές των x , y , κ και λ στα πιο κάτω σχήματα:

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



8. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας ισούται με 240cm^2 και το παράπλευρο ύψος είναι 10cm . Να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.
9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Το σημείο M είναι μέσο της $B\Gamma$ και στις πλευρές AB και $A\Gamma$ παίρνω σημεία Δ και E αντίστοιχα, τέτοια ώστε $A\Delta = AE$.
 (α) Να δείξετε ότι $\Delta M = EM$
 (β) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των σημείων Δ και E από την πλευρά $B\Gamma$ ισούνται.
10. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{\chi+1}{2\chi-2} + \frac{6}{2\chi^2-2} - \frac{\chi+3}{2\chi+2} \right) \div \frac{3}{\chi^2-1} = \quad (\text{όπου } \chi \neq 1, \quad \chi \neq -1)$$

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{3\chi}{\chi+2} - \frac{\chi+1}{3-\chi} = \frac{2\chi+14}{\chi^2-\chi-6}$$

2. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), το σημείο Δ είναι το μέσο της $B\Gamma$ και E το μέσο της $A\Gamma$. Προεκτείνουμε τη ΔE κατά τμήμα $EZ = \Delta E$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.
3. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(-2, 4)$, $B(-3, 1)$ και $\Gamma(-5, 5)$.
 (α) Να αποδείξετε ότι τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
 (β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου $A\Delta$.
 (γ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
 (δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ και περνά από το σημείο A .

4. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{10\chi}{\chi^2-25} + \frac{\chi}{\chi+5}$, $B = \frac{\chi^2-9}{\chi^2+3\chi} \div \left(\frac{3}{\chi^2} - \frac{1}{\chi}\right)$ και $\Gamma = B \div A$

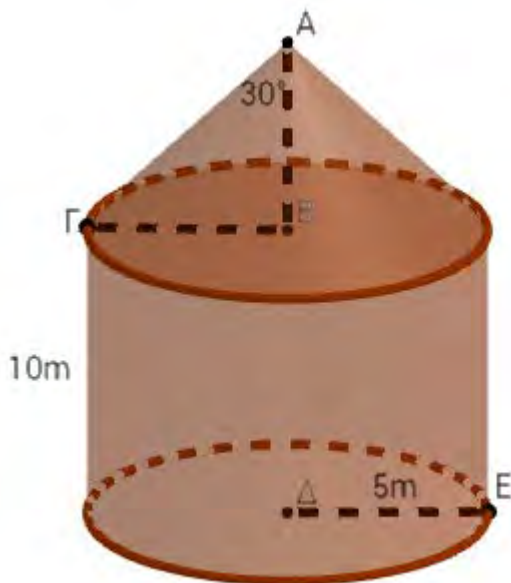
(α) Να δείξετε ότι: $A = \frac{\chi}{\chi-5}$, $B = -\chi$ και $\Gamma = 5 - \chi$

(β) Να αποδείξετε ότι: $\Gamma^3 - B^2 \cdot (15 - \chi) = 25(5 - 3\chi)$

5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ένας κύλινδρος με ακτίνα $R = 5\text{m}$ και ύψος $h = 10\text{m}$. Στη μία του βάση εφαρμόζουμε κώνο του οποίου η γενέτειρα σχηματίζει με το ύψος του γωνία 30° , δηλαδή $\hat{\Gamma A B} = 30^\circ$.

(α) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.

(β) Να υπολογίσετε το κόστος για το βάψιμο της επιφάνειας του στερεού, αν η μπογιά στοιχίζει €3 το τετραγωνικό μέτρο (m^2).





ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Ημερομηνία: 05/06/2019

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ΩΡΕΣ

Ωρα: 08:00 - 10:00

ΟΝΟΜΑ:.....

ΤΑΞΗ:.....

- ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
 β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
 γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από εννέα (9) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα :

(α) $(x + 5)^2 =$

(β) $(x + 3)(x - 3) =$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις :

(α) $30x^3y^2 - 5x^2y^5 =$

(β) $x^2 + 5x - 6 =$

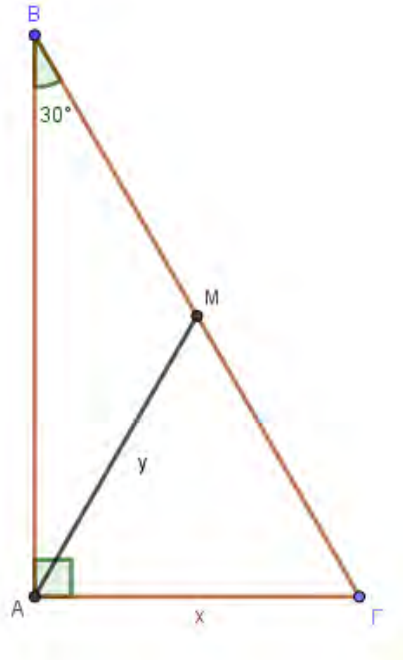
3. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις :

(α) $3x^2 + 4x - 15 = 0$

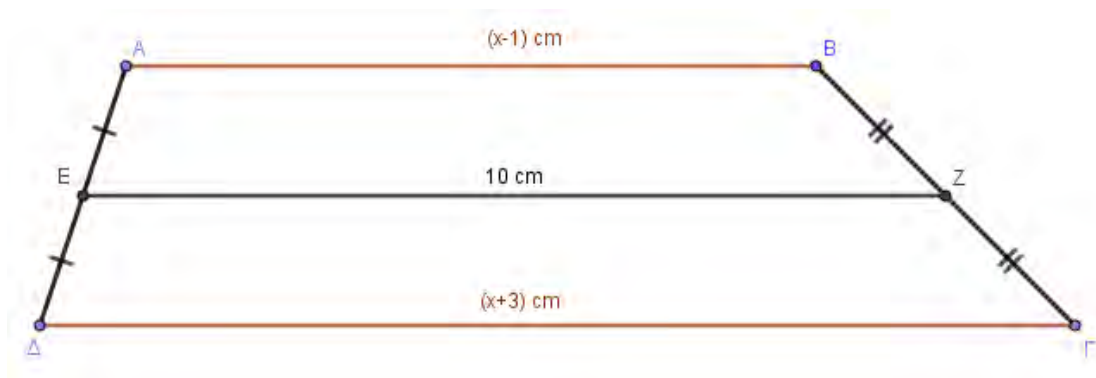
(β) $(x + 3)(2x - 5)(7 - x) = 0$

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 3x + 1$ και περνά από το σημείο $A(-1,2)$.

5. (α) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $B = 30^\circ$ και $B\Gamma = 14\text{ cm}$. Αν M μέσο της $B\Gamma$, να υπολογίσετε τις τιμές των x και y . Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

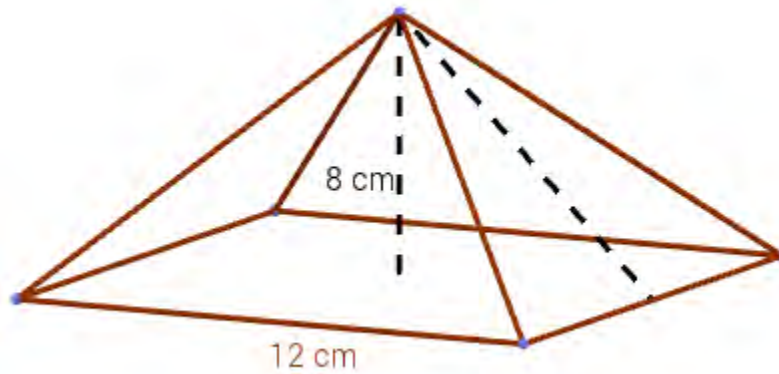


- (β) Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Να υπολογίσετε το μήκος των βάσεων AB και $\Delta\Gamma$. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{B} = 90^\circ$), $\eta\mu A = \frac{5}{13}$. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας A .
7. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Αν M και N είναι τα μέσα των πλευρών AB και $\Gamma\Delta$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι το $AMN\Delta$ είναι ρόμβος.
8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Τα ευθύγραμμα τμήματα BE και $\Gamma\Delta$ είναι προεκτάσεις της πλευράς $B\Gamma$ τέτοια ώστε $BE=\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AE\Delta$ είναι ισοσκελές.

9. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 12 cm και ύψος 8 cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.



10. Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$(\alpha - 1)^3 + 12 - \alpha^3 = (\alpha - 5)(\alpha - 4) - (2\alpha - 3)^2$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να κάνετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε τα αποτελέσματα όπου είναι δυνατόν.

$$(\alpha) \frac{x^2 + 3x}{x^2 + 2x + 4} : \frac{9 - x^2}{x^3 - 8} =$$

$$(\beta) \frac{1}{x - 4} - \frac{x - 3}{x^2 + 3x} - \frac{6}{x^2 - x - 12} =$$

2. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

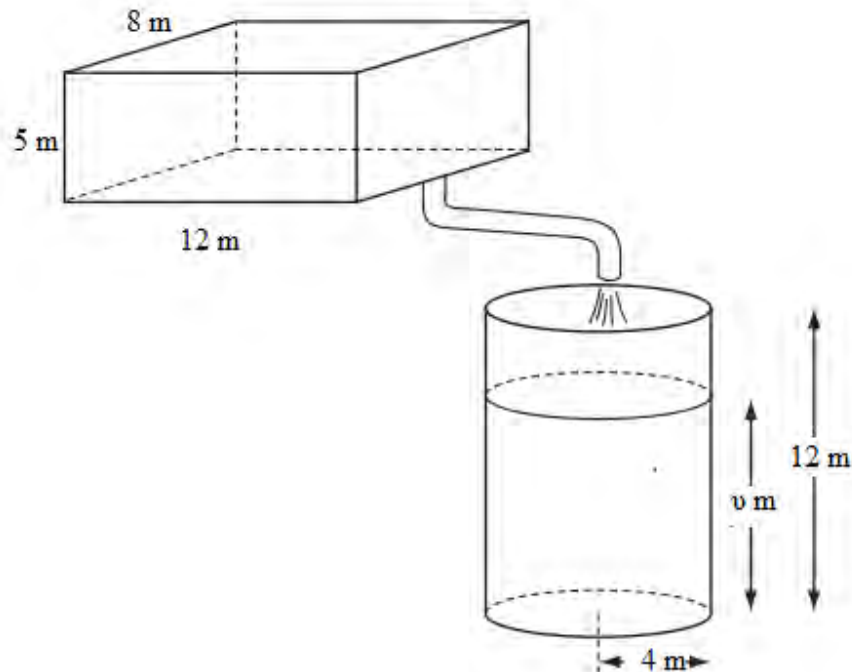
$$\frac{x}{x+1} + \frac{1}{1-x} = \frac{2}{x^2-1}$$

3. (α) Δίνονται τα σημεία $A(2,3)$ και $B(-3,7)$. Να βρείτε την απόσταση AB και τις συντεταγμένες του μέσου του ευθύγραμμου τμήματος AB .

(β) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 17 \\ 5(x - 3) - 4 &= 2y \end{aligned}$$

4. Ένα ντεπόζιτο γεμάτο νερό έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις 5 m , 8 m και 12 m . Το νερό μεταφέρεται σε ένα άλλο ντεπόζιτο το οποίο έχει σχήμα κυλινδρικό και είναι ανοιχτό από πάνω. Το κυλινδρικό ντεπόζιτο έχει ύψος 12 m και ακτίνα βάσης 4 m .



Να βρείτε το ύψος που θα φθάσει το νερό στο κυλινδρικό ντεπόζιτο όταν όλο το νερό από το ντεπόζιτο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου μεταφερθεί στο κυλινδρικό ντεπόζιτο .

(Οι απαντήσεις σας μπορούν να δοθούν συναρτήσει του π).

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο $ABΓΔ$. Από τις κορυφές A και $Γ$ φέρουμε κάθετες AE και $ΓZ$ στην BD (E και Z σημεία της BD). Να αποδείξετε ότι:
- α) Τα τρίγωνα $AEΔ$ και $ΒΓZ$ είναι ίσα. (μον. 4)
- β) $AE = ZΓ$. (μον. 2)
- γ) Το τετράπλευρο $AZΓE$ είναι παραλληλόγραμμο. (μον. 4)

Η Διευθύντρια

Μυρτώ Πουαγκαρέ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019
ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.:

ΤΑΞΗ: Γ'

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: Τετάρτη , 29 / 05 / 2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

ΩΡΑ: 7:45 π.μ. – 9:45 π.μ.

ΒΑΘΜΟΣ

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΣ:

ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:

ΥΠΟΓΡ. ΚΑΘΗΓΗΤΗ /ΤΡΙΑΣ:

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
(β) Να γράφετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
(γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
(δ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από εννέα (9) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α'

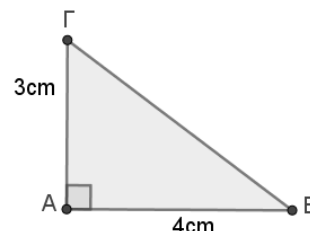
Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α'. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(\omega + 3)^2 =$

(β) $(\alpha - 2)(\alpha + 2) =$

2. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Β.



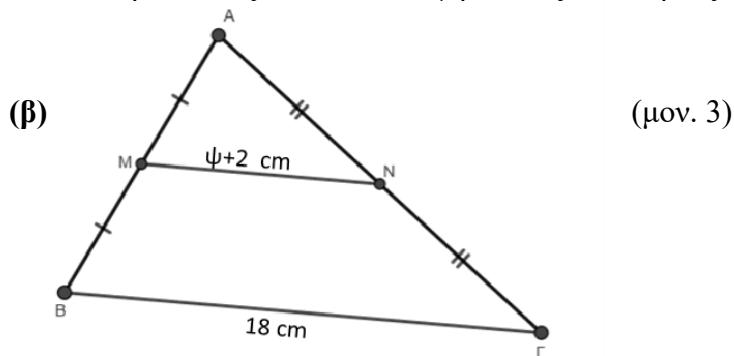
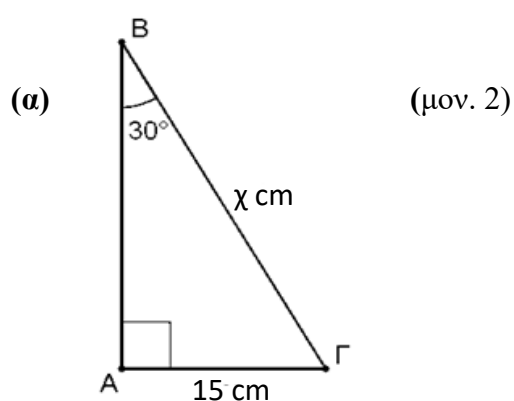
3. Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 + 3x - 2 = 0$

4. Να λύσετε το σύστημα εξισώσεων:

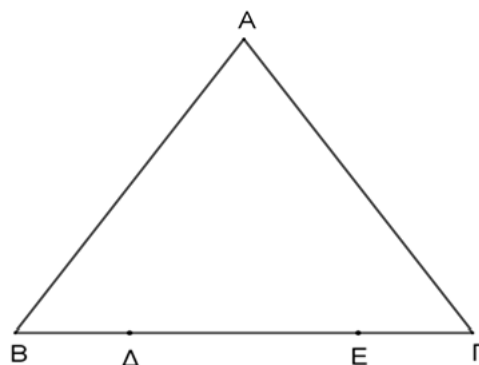
$$\begin{cases} 3x - \psi = 7 \\ 2x + 3\psi = 1 \end{cases}$$

5. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 6 cm και το παράπλευρο ύψος της είναι 5 cm .
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας.

6. Να υπολογίσετε τις τιμές των χ, ψ στις πιο κάτω περιπτώσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



Δεδομένα	Ζητούμενα
$\triangle AB\Gamma$ ισοσκελές τρίγωνο $AB = A\Gamma$ $B\Delta = \Gamma E$	$\triangle A\Delta E$ ισοσκελές τρίγωνο



8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ), η οποία περνά από το σημείο $(-2,3)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία (ϵ_1): $3\chi - 2\psi = -7$.

9. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $\chi^2 + 2\chi - 15 + \chi\psi + 5\psi =$

(β) $\chi^2(\chi - 3) + 9(3 - \chi) =$

10. Να αποδείξετε ότι η τιμή της πιο κάτω παράστασης K , είναι ίση με $K = (\chi - \psi)^2$.

$$K = \frac{\frac{\chi^4 - \psi^4}{\chi\psi}}{\frac{\chi - \psi}{\psi} - \frac{\psi}{\chi}} - 2\chi\psi$$

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε **και τις πέντε (5)** ασκήσεις του Μέρους Β' . Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **δέκα (10) μονάδες**.

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2\chi-1}{\chi^2-\chi-12} + \frac{5-\chi}{4-\chi} = \frac{6}{\chi+3}$ (μον. 6)

(β) Δίνεται η παράσταση: $A(\chi) = (\chi-2)^3 - \chi(\chi-4)^2 + 8$

Να δείξετε ότι $A(\chi) = 2\chi(\chi-2)$. (μον. 4)

2. (α) Μια οικογενειακή επιχείρηση παράγει καθημερινά 120 λίτρα ελαιόλαδο. Το ελαιόλαδο αποθηκεύεται σε δοχεία των δύο λίτρων και των πέντε λίτρων. Αν όλα τα δοχεία είναι 30, να βρείτε πόσα δοχεία από κάθε είδος χρειάζονται καθημερινά. (Να χρησιμοποιήσετε σύστημα εξισώσεων).

- (β) Να κάνετε τις πράξεις και όλες τις δυνατές απλοποιήσεις:

$$\left(\frac{4}{\alpha-3} - \frac{1}{\alpha+3}\right) \div \frac{\alpha^2+10\alpha+25}{\alpha^2-9} =$$

3. Δίνονται οι κορυφές τετράπλευρου $A(7,-1)$, $B(0,2)$, $\Gamma(-1,5)$ και $\Delta(6,2)$.

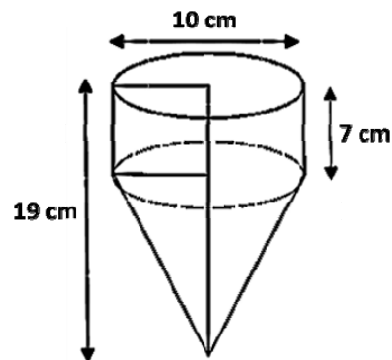
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας σε όλα τα ερωτήματα.

- (α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (μον. 4)

- (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου O του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$. (μον. 3)

- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε που περνά από την κορυφή Δ και είναι κάθετη στη διαγώνιο $A\Gamma$. (μον. 3)

4. Ένα γυάλινο δοχείο γεμάτο με κανέλα, αποτελείται από έναν κύλινδρο και έναν κώνο με διαστάσεις σε cm όπως φαίνονται στο διπλανό σχήμα:



- (α) Να υπολογίσετε τον όγκο του δοχείου.
(η απάντησή σας μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π)

(μον. 4)

- (β) Αν το δοχείο είναι ανοικτό από πάνω και το υλικό κατασκευής του κοστίζει 40 σεντ το cm^2 , να υπολογίσετε το συνολικό κόστος του υλικού που θα χρειαστεί για την κατασκευή 10 τέτοιων δοχείων.

(μον. 4)

- (γ) Το περιεχόμενο του δοχείου θα τοποθετηθεί σε γυάλινα κουτάκια σχήματος κύβου με ακμή βάσης ίση με 5cm. Να βρείτε πόσα κουτάκια θα γεμίσουν.

(μον. 2)

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και M τυχαίο σημείο της διαμέσου AD . Τα σημεία E, Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε τα πιο κάτω δικαιολογώντας όλες τις απαντήσεις σας:

- (α) $ME = MZ$

(μον. 4)



- (β) Οι αποστάσεις EH και $Z\Theta$ από τη βάση $B\Gamma$ είναι ίσες.

(μον. 3)

- (γ) Το τετράπλευρο $EZ\Theta H$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(μον. 3)

Η Διευθύντρια

Ελένη Παπαστεφάνου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2019**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΤΑΞΗ: Γ΄****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03/06/2019****ΧΡΟΝΟΣ: 2 Ώρες****ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:ΤΜΗΜΑ:**

Βαθμός:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπονται με μολύβι).

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.

ΤΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΔΕΚΑ (10) ΣΕΛΙΔΕΣ**ΜΕΡΟΣ Α** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+3)^2=$ [2,5 μ]

β) $(\alpha-5)(\alpha+5)=$ [2,5 μ]

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\beta\gamma + \beta\delta =$ [2,5 μ]

β) $x^2 - 4 =$ [2,5 μ]

3. Να βρείτε τον όγκο κύβου με ακμή 2 cm.

[5μ]

4. Να βρείτε την τιμή του α ώστε οι ευθείες

$\varepsilon_1: y=(\alpha-3)x+5$ και $\varepsilon_2: y=4x-1$ να είναι παράλληλες ($\varepsilon_1//\varepsilon_2$).

[5 μ]

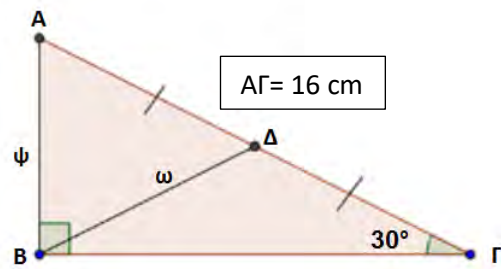
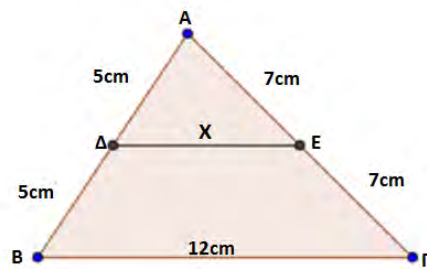
5. Να υπολογίσετε τις τιμές των χ , ψ και ω στα πιο κάτω σχήματα.
Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(α)

[2 μ]

(β)

[3 μ]



6. Να κάνετε τις πράξεις και να δώσετε το αποτέλεσμα στην πιο απλή μορφή:

(α) $\frac{4\gamma^2}{3\alpha^4} \cdot \frac{9\alpha^5}{2\gamma^2} =$ [2 μ]

(β) $\frac{x^2-1}{x-1} : \frac{3x+3}{3x} =$ [3 μ]

7. Να λύσετε την εξίσωση: $\chi^2 - 3\chi - 4 = 0$

[5 μ]

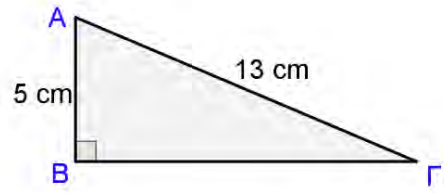
8. Να λύσετε το σύστημα:

[5 μ]

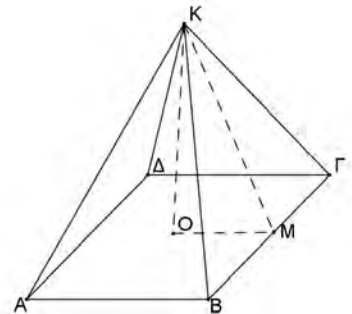
$$x - 2y = -1$$

$$3x + 2y = 13$$

9. Στο διπλανό σχήμα, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu\Gamma$, $\sigma\upsilon\nu\Lambda$ και $\epsilon\varphi\Gamma$. [5 μ]



10. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 144 cm^2 και παράπλευρο ύψος $h = 10\text{ cm}$. Να υπολογίσετε:
- (i) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας [3 μ]
- (ii) τον όγκο της πυραμίδας. [2 μ]



ΜΕΡΟΣ Β Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4}{x^2+4x} - \frac{x+2}{x} = \frac{x+3}{x+4}$$

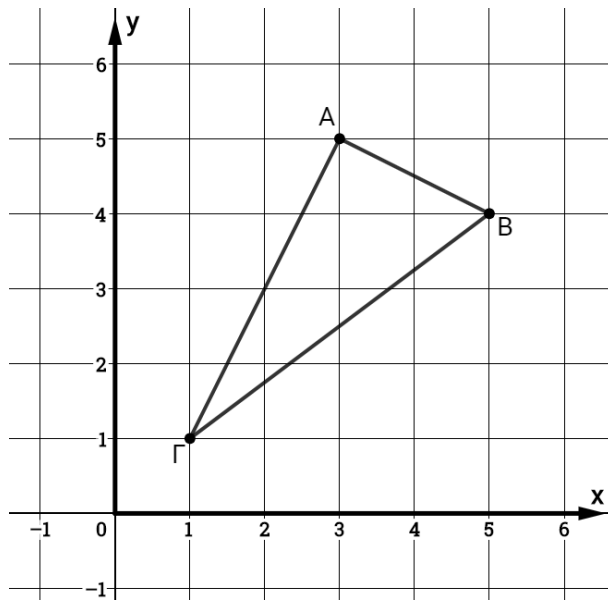
[7 μ]

(β) Αν $x - \psi = 2$ να δείξετε ότι :

$$(x^2 + 1)(\psi^2 + 1) - (x\psi + 1)^2 = 4$$

[3 μ]

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$.



(α) Να γράψετε τις συντεταγμένες των σημείων A, B και Γ . [1 μ]

(β) Να βρείτε την κλίση της πλευράς $A\Gamma$. [1 μ]

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$. [2 μ]

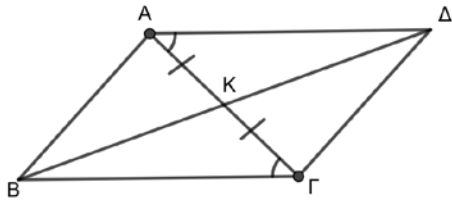
(δ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. [2 μ]

(ε) Να βρεθεί το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος $A\Gamma$. [1 μ]

(στ) Να βρεθεί το μήκος της διαμέσου BM . [1 μ]

(ζ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του σημείου Δ ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο. [2 μ]

3. α) Στο τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, $AK = K\Gamma$ και $\widehat{K\Delta} = \widehat{KB}$. Να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. [5 μ]



β) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και το ύψος του $A\Delta$. Αν M τυχαίο σημείο του $A\Delta$, να αποδείξετε ότι:

- i) Τα τρίγωνα MBA και $M\Gamma A$ είναι ίσα [4 μ]
- ii) Το τρίγωνο $BM\Gamma$ είναι ισοσκελές. [1 μ]

4. Αν $A = \frac{\chi - 3y}{\chi^2 - 6\chi y + 9y^2}$ και $B = \frac{\chi^2 + 9y^2}{\chi^4 - 81y^4}$, όπου $\chi \neq 3y$ και $\chi \neq -3y$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\frac{A}{B} = \chi + 3y$. [6 μ]

(β) Αν $\chi - 3y = 5$ και $\chi^2 - 9y^2 = 15$ να βρείτε την αριθμητική

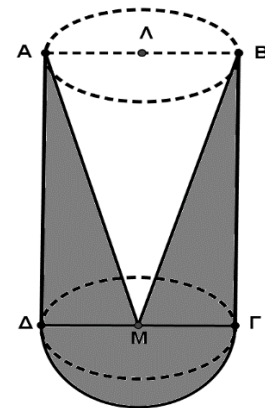
τιμή του $\frac{A}{B}$. [4 μ]

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται συμπαγής κύλινδρος με ακτίνα βάσης 6m και ύψος 8m. Από τον κύλινδρο αφαιρείται κώνος, όπως φαίνεται στο σχήμα. Στη συνέχεια στην κάτω βάση του κυλίνδρου προστίθεται συμπαγές ημισφαίριο.

(α) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται. [5 μ]

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται. [5 μ]

(Οι απαντήσεις σας μπορούν να δοθούν συναρτήσει του π)



Ο Διευθυντής

Στέλιος Στυλιανού

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 31/05/2019

ΤΑΞΗ: Γ'

ΒΑΘΜΟΣ : _____

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ΩΡΕΣ

ΥΠΟΓΡΑΦΗ: _____

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____ ΤΜΗΜΑ: ____ ΑΡ: ____

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 10 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ:

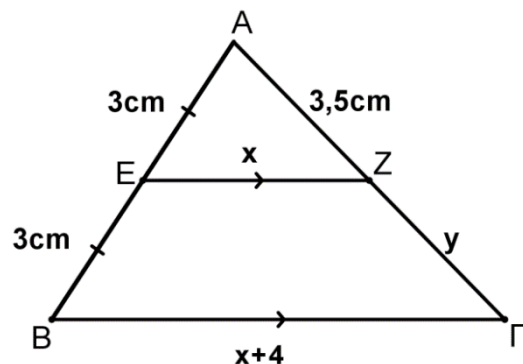
- α) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- β) Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνονται με μολύβι)
- γ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- δ) Να λύσετε τις ασκήσεις ΠΑΝΩ ΣΤΟ ΦΥΛΛΑΔΙΟ.
- ε) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης εργασίας, δεν θα βαθμολογούνται πλήρως.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να υπολογίσετε τον όγκο ορθογώνιου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις:
 $\alpha = 3\text{cm}$, $\beta = 2\text{cm}$, $\gamma = 5\text{cm}$.
- 2) Να λύσετε την εξίσωση: $(x - 1)(x + 4) = 0$.
- 3) Να βρείτε το ανάπτυγμα: $(x + 3)^2 =$
- 4) Να λύσετε το σύστημα: $\begin{cases} 2x - y = 4 \\ x + y = 5 \end{cases}$
- 5) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις :
 α) $7x + 7y =$
 β) $x^2 - 9 =$
- 6) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\alpha - 2)x + 1$, $\varepsilon_2: y = 3x - 2$.
 Να υπολογίσετε την τιμή του α , ώστε οι ευθείες ε_1 , ε_2 να είναι παράλληλες .

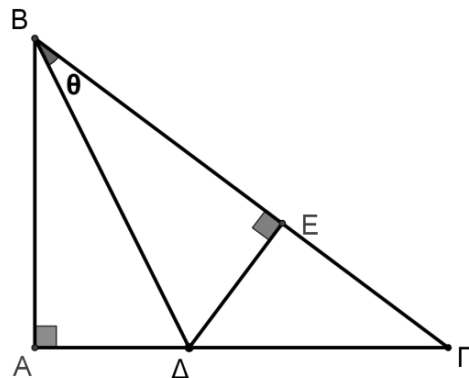
- 7) Να υπολογίσετε τις τιμές των x, y στο διπλανό σχήμα.
(να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



- 8) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$), $B\hat{E}\Delta = 90^\circ$ και $AB = BE$. Να δείξετε ότι :

α) $AD = DE$

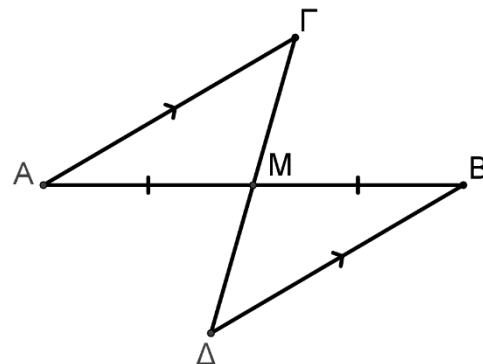
β) $\eta\mu\theta = \frac{AD}{BD}$



- 9) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB , M μέσο του AB και $A\Gamma \parallel B\Delta$.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AM\Gamma$ και DMB είναι ίσα.

β) Να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου $A\Gamma B\Delta$ και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

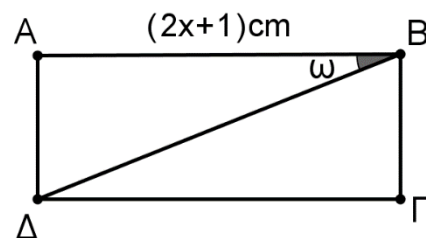


- 10) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με εμβαδόν $E = (6x^2 - 5x - 4)\text{cm}^2$ και

μήκος πλευράς $(AB) = (2x + 1)\text{cm}$, $x > \frac{4}{3}$.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς AD , συναρτήσει του x .

β) Αν $(AD) = (3x - 4)\text{cm}$ και $\varepsilon\varphi\omega = \frac{1}{2}$,
να υπολογίσετε την τιμή του x .



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) i) Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις ($x \neq 0$, $x \neq 1$, $x \neq -1$):

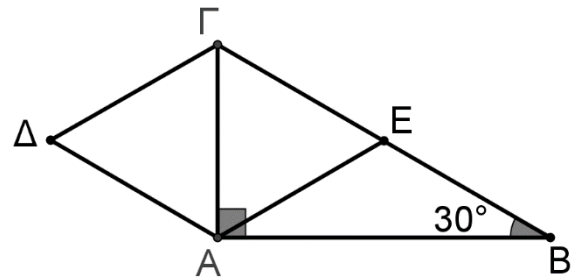
$$A = \frac{2x^3}{x^3 - x^2}$$

$$B = \frac{5x^2 - 5x + 5}{x^3 + 1}$$

$$\Gamma = \frac{2x^5 + 2x^3 - 8x^2 - 8}{x(x^4 - 1)}$$

- ii) Αν $A = \frac{2x}{x-1}$, $B = \frac{5}{x+1}$, $\Gamma = \frac{2(x^3-4)}{x(x^2-1)}$, να λύσετε την εξίσωση $A - B = \Gamma$.

- 2) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $BA\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, AE διάμεσος του τριγώνου και $AD\Gamma$ ισόπλευρο τρίγωνο.



- α) Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AD\Gamma E$ είναι ρόμβος.

- β) Αν οι κλίσεις των διαγωνίων του ρόμβου $AD\Gamma E$ είναι

$$\lambda_{A\Gamma} = \frac{2x+6}{-8x+4}, \quad x \neq \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \lambda_{\Delta E} = \frac{x^2+1}{x+3}, \quad x \neq -3,$$

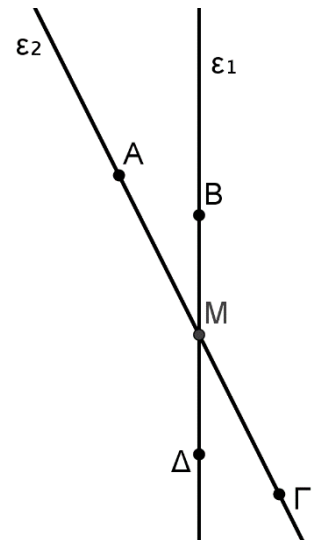
να υπολογίσετε τις τιμές του x .

- 3) Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι ευθείες ε_1 , ε_2 και τα σημεία τους $B(7,11)$, $\Delta(7,5)$ και $A(5,12)$, $\Gamma(x,y)$ αντίστοιχα.

- α) Αν $BM = M\Delta$ και $AM = M\Gamma$, να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και Γ .

- β) Αν $\Gamma(9,4)$, να υπολογίσετε την απόσταση μεταξύ των σημείων Δ και Γ .

- γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 .

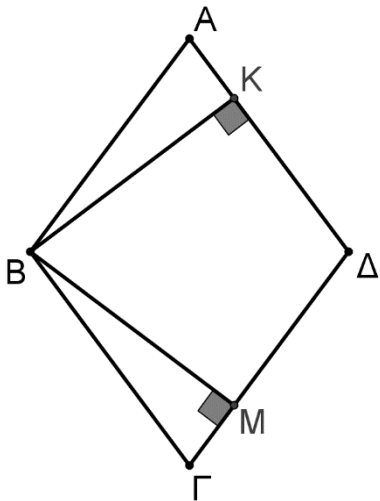


- 4) Ένα ζαχαροπλαστείο κατασκευάζει σοκολάτες σχήματος τετραγωνικής πυραμίδας με εμβαδόν βάσης 36cm^2 και παράπλευρο ύψος 5cm . Για κάθε σοκολάτα χρησιμοποιεί περιτύλιγμα το οποίο καλύπτει ακριβώς την ολική της επιφάνεια.

- α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας μιας σοκολάτας.
β) Αν χρειάστηκε 11520cm^2 περιτυλίγματος, να βρείτε πόσες σοκολάτες περιτύλιξε.
γ) Μετά τις πωλήσεις, περίσσεψαν 50 σοκολάτες. Το ζαχαροπλαστείο αποφάσισε να τις λιώσει και να τοποθετήσει τη λιωμένη σοκολάτα σε δοχείο σχήματος κυλίνδρου ακτίνας 10cm . Να υπολογίσετε σε ποιο ύψος θα φθάσει η σοκολάτα.
(να δώσετε την απάντηση σας κατά προσέγγιση δεκάτου).

- 5) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ και $BK \perp AD$, $BM \perp \Gamma\Delta$.

- α) Να δείξετε ότι $BK = BM$.
- β) Από την κορυφή A να φέρετε κάθετη AE στην προέκταση της πλευράς $\Gamma\Delta$ (E σημείο της $\Gamma\Delta$).
Να δείξετε ότι:
- Τα τρίγωνα $AE\Delta$ και AKB είναι ίσα.
 - Το τετράπλευρο $AEMB$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.



Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Κυριάκος Παναγιώτου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ	ΒΑΘΜΟΣ
ΤΑΞΗ: Γ΄	ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΣ:
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες	ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03 / 06 / 2019	ΥΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.:	
ΟΔΗΓΙΕΣ: (α) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από (11) έντεκα αριθμημένες σελίδες. (β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (μολύβι μόνο για τα σχήματα). (γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού. (δ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.	

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε **και τις 10** ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα των πιο κάτω χρησιμοποιώντας τις ταυτότητες :

(α) $(x + 7)(x - 7) =$

(β) $(x + 4)^2 =$

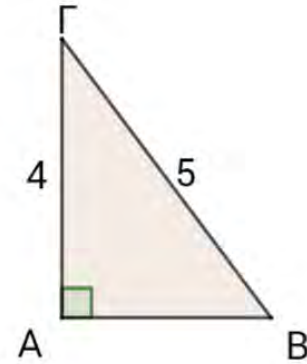
2. Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις πιο κάτω παραστάσεις :

(α) $2x + 2y =$

(β) $a^2 - 25 =$

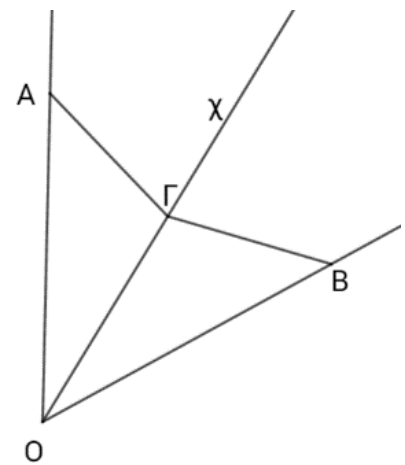
3. Δίνεται το διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ.

Να υπολογίσετε το $\hat{\eta\mu B}$, το $\hat{\sigma\upsilon\nu\Gamma}$ και την $\hat{\epsilon\phi B}$.



4. Στο διπλανό σχήμα η Οχ είναι διχοτόμος της γωνίας ΑÔΒ.

Αν $OA = OB$ και Γ τυχαίο σημείο της διχοτόμου, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΟΓ και ΒΟΓ είναι ίσα.



5. Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1 : \psi = (3\kappa + 2)\chi - 7$ και $\epsilon_2 : \psi = 4 + \chi$

(α) Να βρείτε την κλίση της κάθε ευθείας. (2 μονάδες)

(β) Αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι κάθετες, να υπολογίσετε την τιμή του κ ($\kappa \in \mathbb{R}$) δικαιολογώντας την απάντησή σας. (3 μονάδες)

6. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα :

$$3\chi - \psi = 9$$

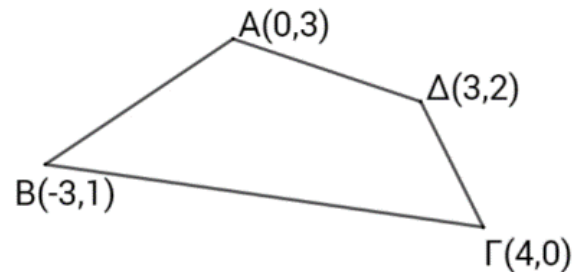
$$2\chi + 4\psi = 20$$

7. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές τις
 $A(0, 3)$, $B(-3, 1)$, $\Gamma(4, 0)$ και $\Delta(3, 2)$
όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Να υπολογίσετε:

(α) Τις συντεταγμένες του μέσου Μ της πλευράς ΑΔ.

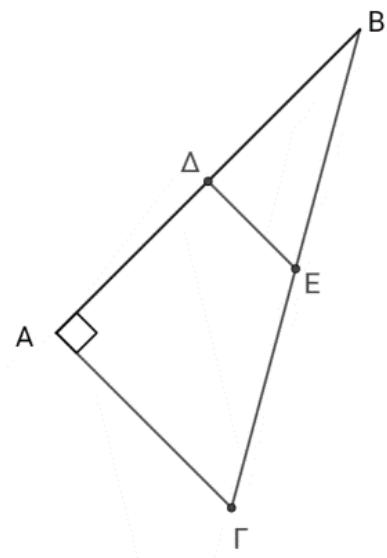
(β) Το μήκος της πλευράς ΒΓ.



8. Να λύσετε την εξίσωση : $2\chi^2 - 3\chi + 1 = 0$

9. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης ίσο με 100cm^2 και παράπλευρο ύψος ίσο με 13cm . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$, $A\Gamma = 14\text{cm}$, $\Delta E = \chi\text{cm}$ και $B\Gamma = (2\psi - 6)\text{cm}$. Αν Δ μέσο της ΑΒ και $\Delta E \parallel A\Gamma$, να υπολογίσετε τα χ και ψ , δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε **και τις 5** ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

$$\frac{x-1}{x} - \frac{x+5}{1-x} = \frac{10x+1}{x^2-x} - 3$$

2. Δίνονται οι πιο κάτω παραστάσεις:

$$A = x^3 + (2x-1)^2 - (x-1)^3 \quad \text{και} \quad B = \frac{A-2}{x^2-x-2} \cdot \frac{x}{x-2} \quad \text{με} \quad x \neq 2, x \neq 1, x \neq -1 \text{ και } x \neq 0$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $A = 7x^2 - 7x + 2$

(β) Να γράψετε την παράσταση B στην πιο απλή της μορφή, κάνοντας όλες τις δυνατές απλοποιήσεις.

3. Ο κύριος Λευτέρης κατασκευάζει ξύλινα κηροπήγια όπως αυτό που φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Αρχικά παίρνει ένα κομμάτι ξύλο (ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο), με διαστάσεις 8cm, 26cm και 6cm στο οποίο βγάζει 3 ίσες κυλινδρικές τρύπες, όπου θα τοποθετούνται τα κεριά. Η ακτίνα της βάσης της κάθε κυλινδρικής τρύπας είναι 3cm και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς της ισούται με $18\pi\text{cm}^2$.



(α) Να υπολογίσετε το ύψος της κάθε κυλινδρικής τρύπας. (4 μονάδες)

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του ξύλινου κηροπηγίου.

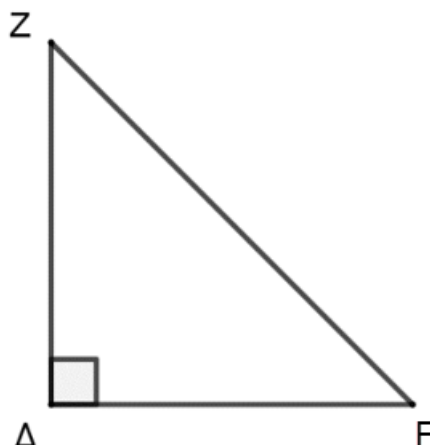
(η απάντησή σας μπορεί να δοθεί συναρτήσει του π) (4 μονάδες)

(γ) Ο κύριος Λευτέρης αποφάσισε να κολλήσει στην γύρω επιφάνεια του κηροπηγίου διακοσμητική κορδέλα που θα καλύπτει το κηροπήγιο μέχρι τα $\frac{2}{3}$ του ύψους του.

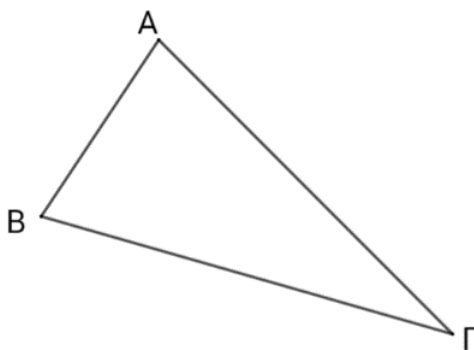
Να υπολογίσετε την επιφάνεια της κορδέλας που θα χρειαστεί. (2 μονάδες)

4. Δίνεται το πιο κάτω ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο με $\hat{\Delta} = 90^\circ$.

Θ και H είναι μέσα των πλευρών ΔZ και EZ αντίστοιχα. Να προεκτείνετε την $H\Theta$ (προς το Θ) κατά τμήμα $\Theta K = \Theta H$ και να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $KZH\Delta$ είναι τετράγωνο.



5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να φέρετε τη διάμεσο AM και να την προεκτείνετε (προς το M) κατά τμήμα $MK = AM$.



Να απαντήσετε στα πιο κάτω ερωτήματα δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

(α) Να αποδείξετε ότι οι γωνίες ABM και $K\Gamma M$ είναι ίσες. (3 μονάδες)

(β) Να φέρετε τις αποστάσεις των σημείων A και K από την πλευρά $B\Gamma$ και να αποδείξετε ότι αυτές είναι ίσες. (4 μονάδες)

γ) Αν οι συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι : $A(2,10)$, $B(-2,4)$ και $\Gamma(12,0)$ να υπολογίσετε την κλίση της BK . (3 μονάδες)

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03/06/2019

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

ΩΡΑ: 10:45 – 12:45

ΒΑΘΜΟΣ:

ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:.....

ΥΠΟΓΡΑΦΗ:.....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: **ΤΜΗΜΑ:** **ΑΡ.:** ...

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ :

- α) Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής.
- β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- δ) Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΟ (2) ΜΕΡΗ ΚΑΙ ΔΩΔΕΚΑ (12) ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

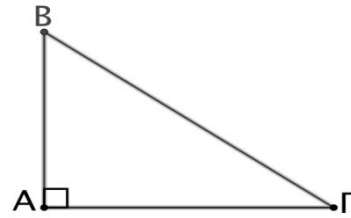
α) $(x + 4)^2 =$

β) $(x - 3)(x + 3) =$

2. Δίνεται ένα ζάρι σχήματος κύβου με ακμή 5cm. Να βρείτε:

- (α) τον όγκο του,
- (β) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), δίνεται ότι $\eta\mu B = \frac{6}{10}$. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\epsilon\phi B$ και $\sigma\upsilon\nu\Gamma$



4. Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 - 7x + 2 = 0$

5. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x + y &= 8 \\ 2x - 3y &= 9 \end{aligned}$$

6. Να αναλύσετε τα πιο κάτω πολώνυμα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων:

α) $3x - 6x\omega =$

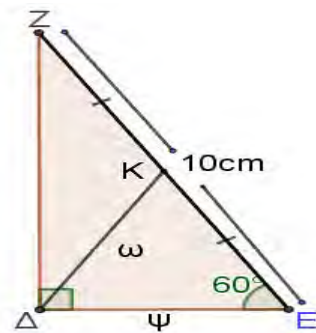
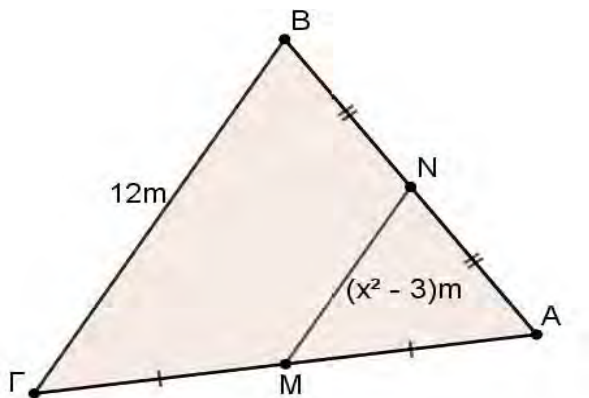
β) $y^2 - 49x^2 =$

γ) $x^2 + 5x - 14 =$

δ) $\alpha x - \alpha^2 + 5x - 5\alpha =$

7. Χρησιμοποιώντας τα στοιχεία που δίνονται στο σχήμα να υπολογίσετε τις τιμές των χ, ψ, ω δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.

(α) $MN = (\chi^2 - 3)m$ και $B\Gamma = 12m$. (β) $ZE = 10cm$, $E = 60^\circ$ και K μέσο της EZ .



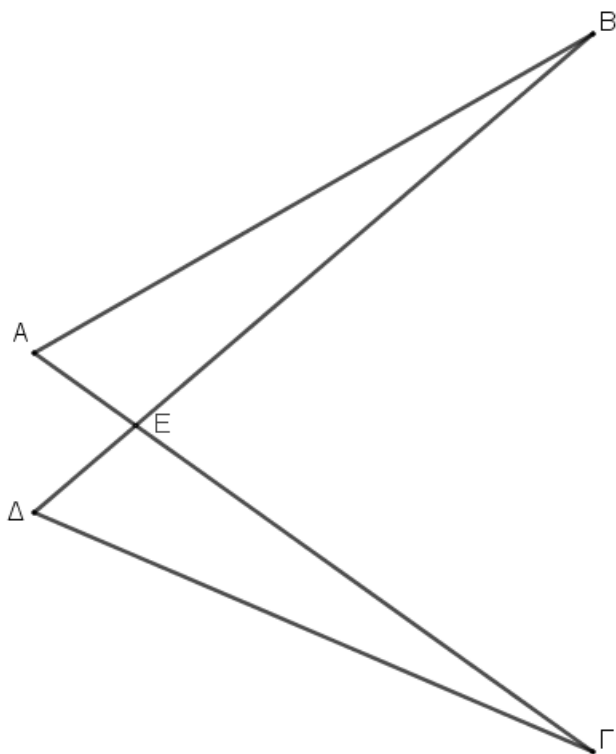
8. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{4}{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) : \left(\frac{x^2 + 10x + 25}{x^2 - 9} \right) =$$

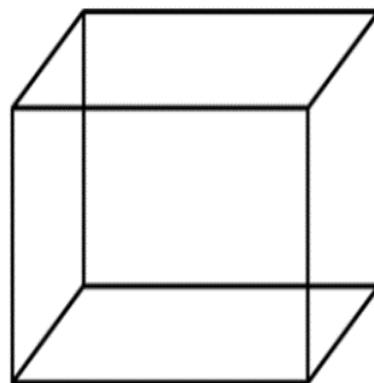
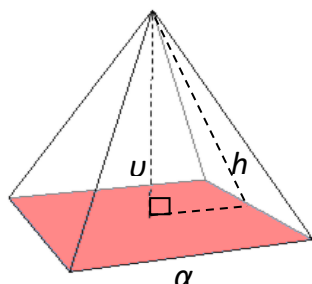
9. Στο πιο κάτω σχήμα ισχύει ότι $AE = DE$ και $EB = E\Gamma$

(α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ABE και ΓDE είναι ίσα.

(β) Να δείξετε ότι οι αποστάσεις του σημείου E από τις πλευρές AB και $\Gamma\Delta$ είναι ίσες.



10. Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται ένα δοχείο σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου και μια μεταλλική κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 12cm, πλάτος 8cm και ύψος 14cm και η κανονική τετραγωνική πυραμίδα ακμή βάσης $a=6\text{cm}$ και παράπλευρο ύψος $h=5\text{cm}$. Ρίχνουμε στο δοχείο νερό μέχρι που η στάθμη του να φθάνει στο μέσο του ύψους του και στη συνέχεια βυθίζουμε μέσα στο νερό την πυραμίδα. Να βρείτε το ύψος της στάθμης του νερού στο δοχείο μετά την ρίψη της πυραμίδας.



ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{14}{x^2 - x - 12} + \frac{2}{4 - x} + \frac{x+2}{x^2 + 3x} = 0$

2. (α) Να αποδείξετε την ισότητα:

$$(x+2)^3 - (2-3x)(2+3x) - (3x+2)^2 = x^2(x+6)$$

(β) i) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{(x^4 - y^4)y^5}{4x^4(x+y)} \div \frac{y^6(x-y)}{2x^3}$

ii) Αν ισχύουν οι σχέσεις $x + y = 3$ και $xy = -2$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης A.

3. (α) Δίνεται η ευθεία $\mathcal{E}_1 : (\kappa + 1)x - \kappa y = 5$

Να βρείτε την τιμή του κ ώστε η ευθεία να είναι παράλληλη με την ευθεία $\mathcal{E}_2 : y = 2x$.

(β) Δίνεται η ευθεία $\mathcal{E}_1 : y = (3\lambda + 1)x$. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η ευθεία να είναι κάθετη με την ευθεία $\mathcal{E}_2 : x - 2(\lambda + 2)y = 2$.

(γ) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με συντεταγμένες κορυφών $A(-2,1)$, $B(8,3)$ και $\Gamma(-6,-5)$. Να βρείτε:

(i) Το μήκος της διαμέσου ΓM του τριγώνου.

(ii) Την εξίσωση της διαμέσου ΓM

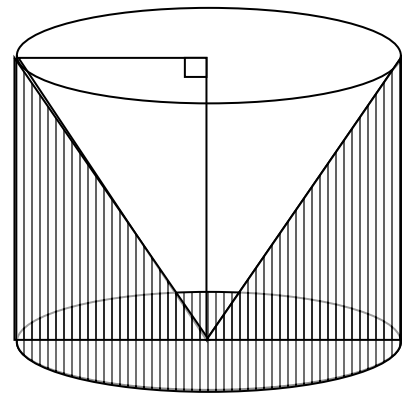
(iii) Την εξίσωση του ύψους $\Gamma \Delta$ του τριγώνου.

4. Στο πιο κάτω σχήμα το στερεό αποτελείται από έναν κύλινδρο που έχει κενό σχήματος κώνου. Η άνω βάση του κώνου συμπίπτει με την άνω βάση του κυλίνδρου και η κορυφή του συμπίπτει με το κέντρο της κάτω βάσης του κυλίνδρου. Η περίμετρος της βάσης του κώνου είναι $\Gamma = 16\pi$ cm και η γενέτειρα του λ είναι κατά 2 cm μεγαλύτερη από το ύψος του u .

(α) Να βρείτε το ύψος και τη γενέτειρα του κώνου

(β) Να αποδείξετε ότι ο όγκος του στερεού είναι ίσος με 640π cm³

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού.



5. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις της διαγωνίου του $A\Gamma$ προς το A και Γ παίρνουμε σημεία K και Λ αντίστοιχα, έτσι ώστε $AK = \Gamma\Lambda$.
- (α) Να δείξετε ότι το $KB\Lambda\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
- (β) Αν η γωνιά $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$ και η πλευρά $B\Gamma = 6\text{cm}$ να βρείτε το μήκος των διαγωνίων του ορθογωνίου $AB\Gamma\Delta$.

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

PENA BAPNABA

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29 / 05 / 2019

ΧΡΟΝΟΣ: 2 Ώρες

Ονοματεπώνυμο: **Τμήμα:** **Αριθ.:**

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τα 10 θέματα του Μέρους Α΄.
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

Να βρείτε τα αναπτύγματα

(α) $(\chi + 4)^2 =$

(β) $(\psi - 7) \cdot (\psi + 7) =$

ΘΕΜΑ 2:

Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κύβου αν ο όγκος του είναι 64 m^3 .

ΘΕΜΑ 3:

Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις

(α) $4\chi + 4\psi =$

(β) $\chi^2 + 7\chi + 10 =$

(γ) $\alpha^2 - \beta^2 =$

(δ) $6\chi + \alpha\psi + 6\psi + \alpha\chi =$

ΘΕΜΑ 4:

Να λύσετε την εξίσωση

$2\chi^2 - \chi - 3 = 0$

ΘΕΜΑ 5:

Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών

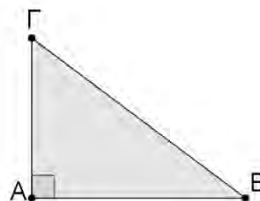
$$\varepsilon_1: \chi + \psi = 2$$

$$\varepsilon_2: 3\chi - 2\psi = 26$$

ΘΕΜΑ 6:

Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$, $\hat{A} = 90^\circ$ και $\eta\mu\hat{B} = \frac{3}{5}$. Να υπολογίσετε την τιμή της

παράστασης : $K = \frac{16\varepsilon\varphi\hat{B} - 5\eta\mu\hat{\Gamma}}{\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma}}$

**ΘΕΜΑ 7:**

Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$(\alpha + 1)^3 - \alpha(\alpha - 2)(\alpha + 2) - 2\alpha^2 = (\alpha + 1)^2 + 5\alpha$$

ΘΕΜΑ 8:

Δίνεται η εξίσωση της ευθείας $\varepsilon_1: \psi = 3\chi + 7$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 που περνά από το σημείο $(0, -2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία ε_1 .

(β) Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου μ , $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε οι πιο κάτω ευθείες να είναι παράλληλες:

$$\varepsilon_1: \psi = 3\chi + 7$$

$$\varepsilon_3: \psi - (\mu - 1)\chi = 9$$

ΘΕΜΑ 9:

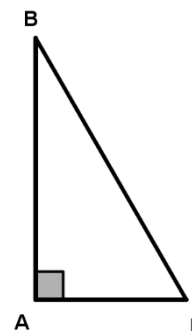
Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ και M, N τα μέσα των πλευρών AB και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε το MN κατά τμήμα $NK = MN$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $MN = A\Gamma$,

(Μον. 7)

(β) το τετράπλευρο $AM\Gamma K$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μον. 3)



ΘΕΜΑ 10:

Να δείξετε ότι :

$$\left(\frac{\chi}{\psi} - 2 + \frac{\psi}{\chi}\right) \div \left(\frac{\chi}{\chi\psi + \psi^2} - \frac{\psi}{\chi^2 + \chi\psi}\right) = \chi - \psi$$

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τα 5 θέματα του Μέρους Β΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

ΘΕΜΑ 1:

Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{3}{\chi^2 - 3\chi + 2} + 4 = \frac{2\chi}{\chi - 1} + \frac{\chi + 1}{\chi - 2}$$

ΘΕΜΑ 2:

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΒ = ΑΓ. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Ε έτσι ώστε ΑΔ = ΑΕ. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΕ και ΓΔ τέμνονται στο σημείο Η. Να δείξετε ότι :

(α) ΓΔ = ΒΕ ,

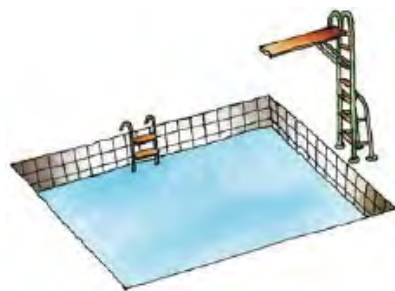
(Μον. 7)

(β) το τρίγωνο ΗΒΓ είναι ισοσκελές.

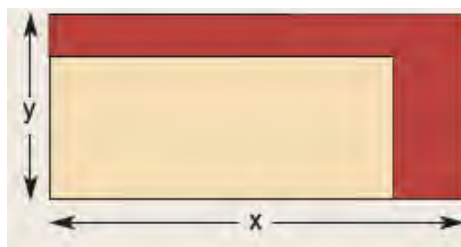
(Μον. 3)

ΘΕΜΑ 3:

(α) Πισίνα σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει εμβαδόν βάσης 36m². Αν το μήκος της βάσης είναι κατά 9m μεγαλύτερο από το πλάτος της , να βρείτε τις διαστάσεις της βάσης.



(β) Ενός ορθογωνίου οικοπέδου οι διαστάσεις x και y μειώθηκαν επειδή έπρεπε να κατασκευαστούν δρόμοι, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν το εμβαδόν του οικοπέδου που απέμεινε είναι $xy - 3x - 4y + 12$, να βρείτε ποια θα μπορούσε να είναι η μείωση της κάθε διάστασης του οικοπέδου. (Οι διαστάσεις x και y του οικοπέδου είναι σε μέτρα).



ΘΕΜΑ 4:

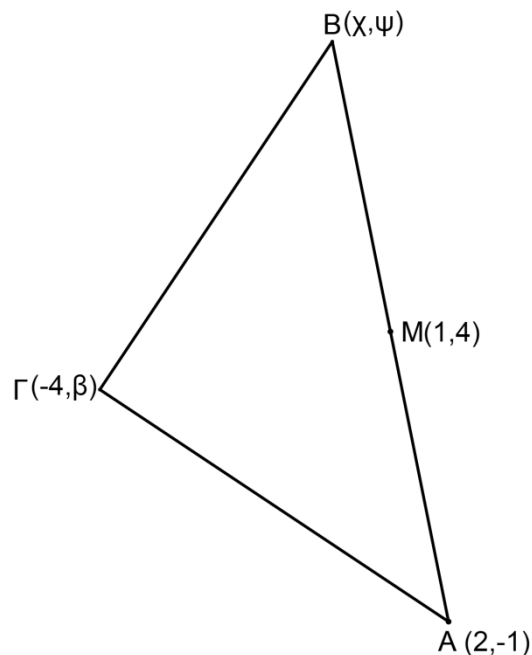
Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(2, -1)$, $B(x, y)$, $\Gamma(-4, \beta)$ και $M(1, 4)$ το μέσο της πλευράς AB .

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής B .

(β) Να βρείτε την εξίσωση της AB .

(γ) Αν το μήκος της διαμέσου ΓM του τριγώνου είναι $\sqrt{26}$ μονάδες, να βρείτε τις δυνατές τιμές του β .

(δ) Αν $\Gamma(-4, 3)$ να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

**ΘΕΜΑ 5:**

Μια εταιρεία σχεδίασε μια κλειστή μεταλλική κατασκευή, όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.

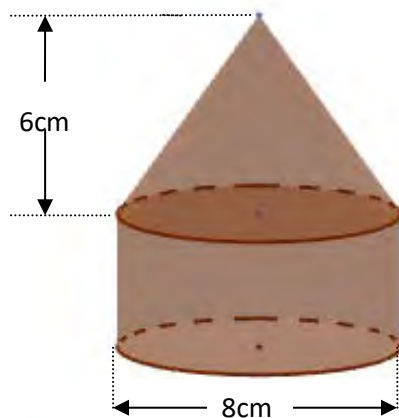
Η κατασκευή αποτελείται από ένα κύλινδρο και ένα κώνο. Η βάση της κατασκευής έχει διάμετρο 8 cm και το ύψος του κώνου είναι 6 cm. Ο συνολικός όγκος της κατασκευής είναι $192\pi \text{ cm}^3$.

(α) Να δείξετε ότι το ύψος του κυλίνδρου είναι 10 cm.

(Μον. 4)

(β) Όλη η επιφάνεια της κατασκευής βάφεται με ειδική αντισειδωτική μπογιά, η οποία κοστίζει 2 σεντ ανά τετραγωνικό εκατοστόμετρο. Να υπολογίσετε πόσο θα κοστίσει το βάψιμο της κατασκευής.

(Μον. 6)



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

Τάξη: Γ ' Γυμνασίου	
Μάθημα: Μαθηματικά	ΒΑΘΜΟΣ Αριθμητικά : Ολογράφως: Υπ. Καθηγητή:.....
Ημερομηνία: 29/ 05 /2019	
Χρόνος εξέτασης: 2 (δύο ώρες)	

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ: Αρ.

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **6 σελίδες** (συμπεριλαμβανομένης της 1^{ης} σελίδας)
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο (2) μέρη. Να απαντήσετε **και στα δύο** μέρη και σε **όλα** τα ερωτήματα.
- Όλες οι απαντήσεις να γραφούν στο εξεταστικό δοκίμιο.
- **Επιτρέπεται** η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Για τα σχήματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι.
- **Δεν επιτρέπεται** η χρήση διορθωτικών υλικών.
- Γράφετε **μόνο με μπλε μελάνι**.
- Η δολίευση τιμωρείται αυστηρά.

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(a + 5)^2 =$

(β) $(\chi - 2) \cdot (\chi + 2) =$

2. Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις

(α) $6x + 6\psi =$

(β) $\chi^2 + 7\chi + 12 =$

3. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν κύβου ακμής $a = 2\text{cm}$.

4. (α) Να λύσετε την εξίσωση $\chi^2 - 36 = 0$.

(β) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{2\chi - 2\psi}{\chi^2 - \psi^2}$.

5. Να αντιστοιχήσετε κάθε εξίσωση ευθείας από τη στήλη Α με την κλίση της στη στήλη Β.

A	B
(α) $\psi = 5\chi + 1$	(i) $\lambda = 4$
(β) $\psi = -\frac{1}{2}\chi$	(ii) $\lambda = 0$
(γ) $4\chi - \psi = 5$	(iii) λ δεν ορίζεται
(δ) $\psi = 9$	(iv) $\lambda = 5$
(ε) $\chi = -3$	(v) $\lambda = -\frac{1}{2}$

(α) $\longrightarrow$ (β) $\longrightarrow$ (γ) $\longrightarrow$ (δ) $\longrightarrow$ (ε) $\longrightarrow$

6. Να λύσετε το σύστημα:

$\chi + \psi = 7$

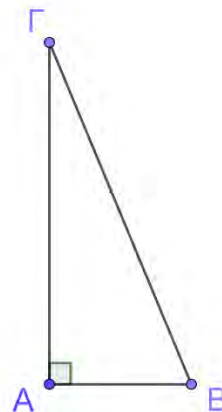
$\chi - \psi = 5$

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με ΑΒ=5cm και ΑΓ=12cm. Να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς:

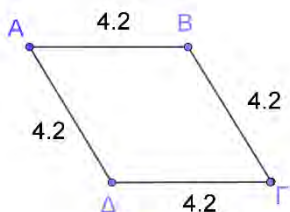
$$\eta\mu\hat{B} =$$

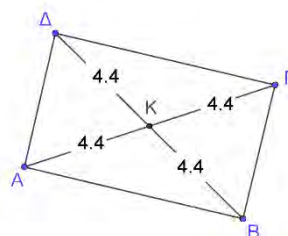
$$\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} =$$

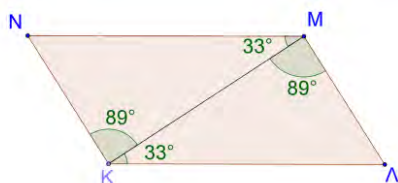
$$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} =$$

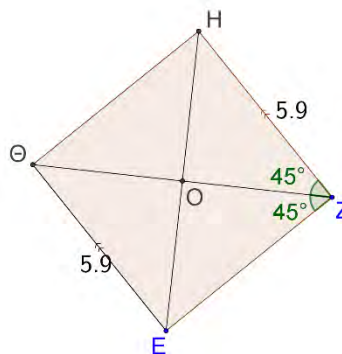


8. Να χαρακτηρίσετε τα πιο κάτω τετράπλευρα ως προς το είδος τους (παράλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο κτλ.) και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.





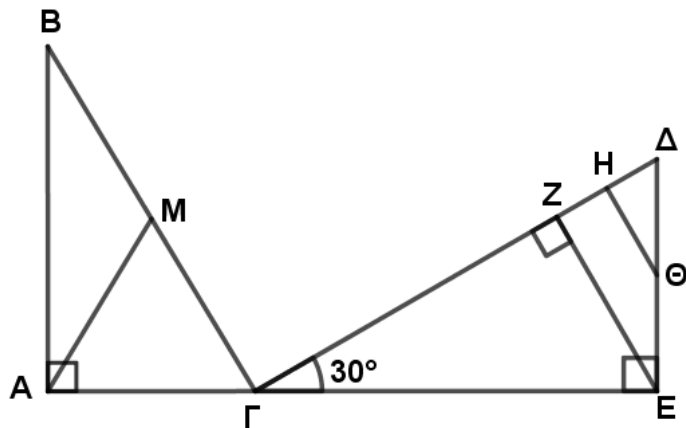




9. Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 - 5x + 2 = 0$

10. Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\triangle \Delta E\Gamma$ ($\hat{E} = 90^\circ$). Ισχύει ότι $B\Gamma = \Gamma E$, $AM = 6\text{cm}$ και είναι διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$, $\angle \Gamma E \Delta = 30^\circ$, $EZ \perp \Gamma \Delta$ και H, Θ είναι τα μέσα των πλευρών $Z\Delta$ και $E\Delta$ αντίστοιχα. Να βρείτε το μήκος του $H\Theta$.

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



- ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β -

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β' .
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι ρητές αλγεβρικές παραστάσεις A και B .

$$A = \left(\frac{2\chi-1}{\chi^2-9} - \frac{1}{\chi+3} \right) \cdot \frac{\chi^2-9}{\chi^3+2\chi^2} \quad \text{και} \quad B = \frac{4\psi^2-6\psi}{4\psi^2-12\psi+9} : \frac{4\psi^4+6\psi^3}{4\psi^2-9}$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $A = \frac{1}{\chi^2}$ και $B = \frac{1}{\psi^2}$.

(β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$4(\chi + 2\psi)^2 - (4\psi - 5\chi) \cdot (4\psi + 5\chi) - 3\chi(8\chi + 2\psi) = 5\chi(\chi + 2\psi)$$

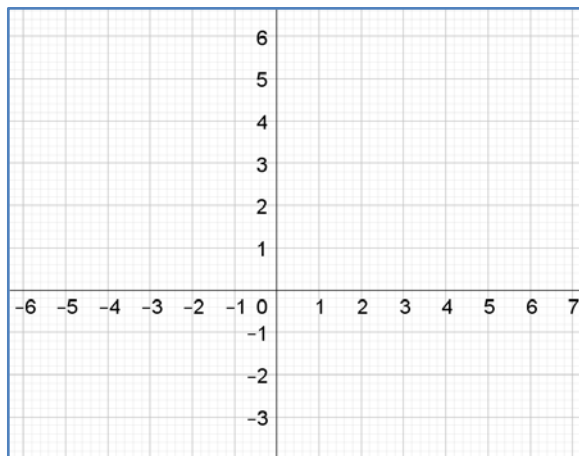
2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(1, -1)$, $B(-1, 1)$ και $\Gamma(4, 2)$.

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΓM του τριγώνου $AB\Gamma$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $A\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$



3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB , $A\Gamma$ προς τα B και Γ παίρνουμε σημεία Δ , E αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$. Από τα σημεία Δ και E φέρουμε κάθετες στη προέκταση της $B\Gamma$ την οποία τέμνουν στα σημεία Z και H αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

(i) $\Delta Z = HE$

(ii) το τετράπλευρο $Z\Delta EH$ είναι ορθογώνιο

4. Κύλινδρος έχει περίμετρο βάσης 8π cm και εμβαδόν ολικής επιφάνειας 272π cm².
α) Να υπολογίσετε τον όγκο του κυλίνδρου. (μον : 4)
β) Δοχείο σχήματος κώνου είναι γεμάτο με νερό. Ο κώνος έχει εμβαδόν βάσης 144π cm² και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας 156π cm². Αδειάζουμε το περιεχόμενο του κώνου στον κύλινδρο. Να βρείτε το ύψος της στάθμης του νερού στον κύλινδρο. (μον : 5)
γ) Στην συνέχεια τοποθετούμε μια μεταλλική σφαίρα ακτίνας 3 cm μέσα στον κύλινδρο. Να υπολογίσετε τον όγκο του νερού που εκτοπίζεται. (μον : 1)
5. Σε ένα τηλεοπτικό παιχνίδι σε κάθε παίκτη υποβάλλονται 10 ερωτήσεις. Για κάθε σωστή απάντηση προστίθενται βαθμοί ,ενώ για κάθε λανθασμένη απάντηση αφαιρούνται βαθμοί. Κάποιος παίκτης έδωσε 7 σωστές απαντήσεις και συγκέντρωσε 52 βαθμούς ενώ κάποιος άλλος απάντησε σωστά 4 ερωτήσεις και πήρε 4 βαθμούς συνολικά. Πόσους βαθμούς παίρνει για κάθε σωστή απάντηση και πόσους βαθμούς του αφαιρούνται για κάθε λανθασμένη απάντηση;

-ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ-

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....

ΑΝΤΡΕΑΣ ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΙΔΗΣ

ΒΑΘΜΟΣ: $\frac{\quad}{100} = \frac{\quad}{20}$

Ολογράφως:

Υπογραφή:

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2019 ΩΡΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 7:45π.μ. – 9:45π.μ. ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡΙΘΜΟΣ:

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΝΕΑ (9) ΣΕΛΙΔΕΣ

	ΜΕΡΟΣ Α'										ΜΕΡΟΣ Β'					
Ασκ.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	1	2	3	4	5	Συν.
Βαθμ.																

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι(τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
- (β) Όλες οι ασκήσεις να απαντηθούν στο εξεταστικό δοκίμιο.
- (γ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- (ε) Στη λύση των ασκήσεων να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x+4)^2 =$

(β) $(x+1)(x-1) =$

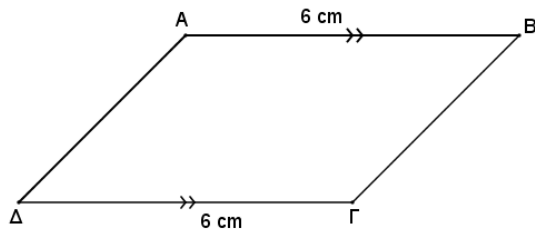
A2. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει μήκος 7 m , πλάτος 2m και ύψος 5 m . Να υπολογίσετε τον όγκο του.

A3. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $5x - 10y =$

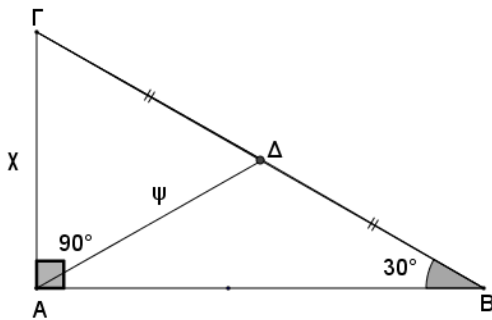
(β) $x^2 + 7x + 12 =$

A4. (α) Να εξετάσετε αν το πιο κάτω τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο. Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (μον : 2)

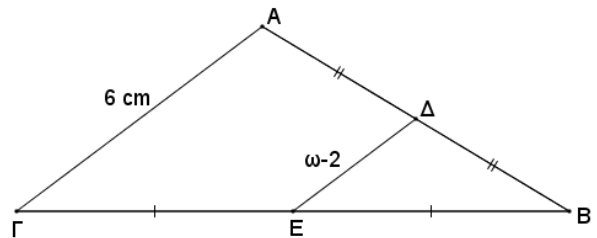


(β) Να υπολογίσετε τις τιμές των χ , ψ και ω στα πιο κάτω σχήματα. Δικαιολογήστε τις απαντήσεις σας. (μον : 3)

i) $B\Gamma = 8 \text{ cm}$



ii)



A5. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 2x + 5y = 9 \end{cases}$$

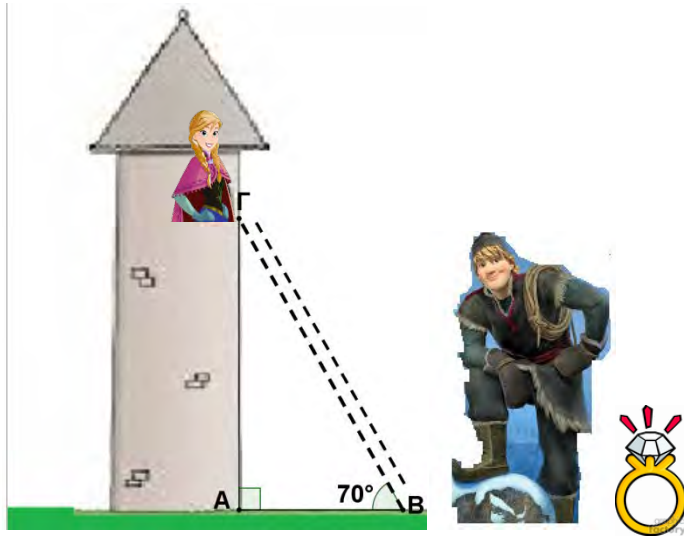
A6. Να λύσετε την εξίσωση: $5x^2 - 4x - 1 = 0$

A7. Ο Κριστόφ θέλει να κάνει πρόταση γάμου στην Πριγκίπισσα Άννα. Για να ανέβει στο παράθυρο της χρησιμοποιεί μια σκάλα (ΒΓ). Αν η γωνία που σχηματίζει η σκάλα με το έδαφος είναι 70° και το μήκος της απόστασης της βάσης του Πύργου, από το σημείο που βρίσκεται ο Κριστόφ είναι 1m ($AB=1\text{m}$). Να υπολογίσετε:

(α) Το μήκος της σκάλας (ΒΓ) που πρέπει να ανέβει ο Κριστόφ.

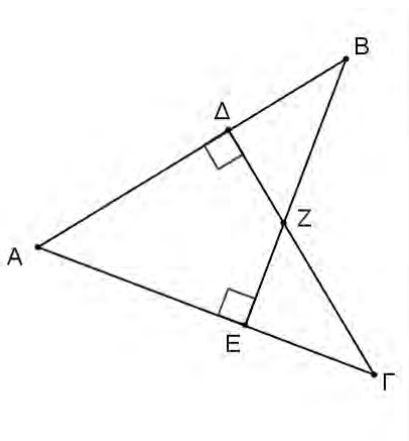
(β) Πόσο απέχει το παράθυρο της Πριγκίπισσας Άννας από το έδαφος (ΑΓ).

(Οι απαντήσεις σας να δοθούν με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων.)



A8. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $\frac{4a^2 - 9b^2}{a - b} : \frac{4a^2 - 12ab + 9b^2}{a^3 - ab^2} =$

A9. Στο πιο κάτω επίπεδο σχήμα $(\Delta B) = (E\Gamma)$. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΓΔ και ΒΕ είναι κάθετα στα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι $(\Delta Z) = (ZE)$.



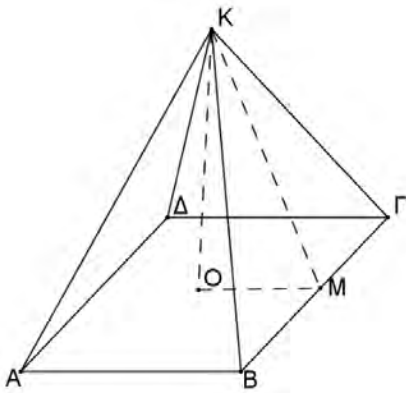
A10. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης 144 cm^2 και παράπλευρο ύψος $(KM) = 10\text{ cm}$. Να υπολογίσετε:

(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

(μον : 3)

(β) Τον όγκο της πυραμίδας.

(μον : 2)



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις **5 ασκήσεις**.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **10 μονάδες**.

B1. (α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{x^2+x} + \frac{2}{x^2-1} + \frac{x+1}{x^2-x} = 0$

(μον : 6)

(β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(3x+1)^2 + (x-1)^3 - x(x-4)(x+4) - x^2 = 5x(x+5)$$

(μον : 4)

B2. (α) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(μον : 4)

i) $a^2 - b^2 - 8a + 16 =$

ii) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 =$

(β) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{2 - \frac{18}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}}$ και $B = \left(\frac{2}{x^2-9} + \frac{1}{x+3} \right) : \frac{2x^2-2}{x^3+4x^2+3x}$.

Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις και να δείξετε ότι $A \cdot B = 1$.

(μον : 6)

B3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(-5,6)$, $B(-3,2)$ και $\Gamma(1,4)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $A\Gamma$.

(μον : 2)

(β) Αν είναι $M(-2,5)$, να βρείτε το μήκος της διαμέσου BM .

(μον : 2)

(γ) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(μον : 3)

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Γ και είναι παράλληλη με την ευθεία AB .

(μον : 3)

B4. Για την παρασκευή ενός κέικ, γεμίζουμε το πιο κάτω κυλινδρικό δοχείο με ζάχαρη χρησιμοποιώντας χάρτινο κύπελλο σχήματος κώνου. Η διάμετρος του κυλινδρικού δοχείου 8cm και το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας είναι $240\pi\text{cm}^2$. Επίσης δίνονται ότι το εμβαδόν της βάσης του κωνικού κυπέλλου είναι $36\pi\text{cm}^2$ και η γενέτειρα του είναι ίση με 10cm . Να βρείτε πόσες φορές θα χρειαστεί να αδειάσουμε το κύπελλο στο δοχείο για να γεμίσει.



B5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 30^\circ$ και την AM διάμεσο του τριγώνου.

Από το σημείο M να φέρετε κάθετη στην AB , την οποία τέμνει στο σημείο Δ .

Να προεκτείνετε την $M\Delta$ κατά τμήμα ΔE έτσι ώστε $M\Delta = \Delta E$.

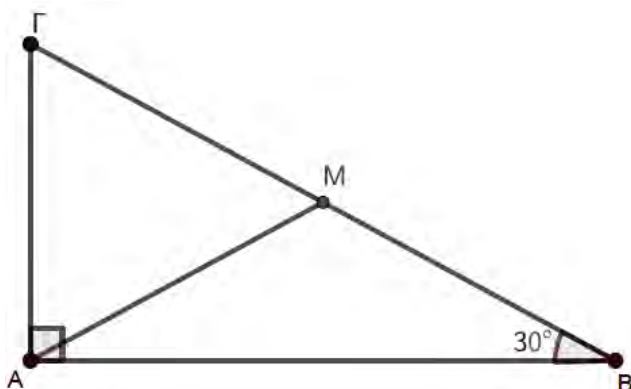
Να αποδείξετε ότι:

(α) Το τρίγωνο ABM είναι ισοσκελές.

(μον : 3)

(β) Το τετράπλευρο $AEM\Gamma$ είναι ρόμβος.

(μον : 7)



ΟΝΟΜΑ :

ΤΜΗΜΑ:ΑΡ.: ΒΑΘΜΟΣ:

ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ:



ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΣΟΛΕΑΣ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018 – 2019

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ/ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 31/05/2019

ΤΑΞΗ: Γ΄ Γυμνασίου

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ώρες (120΄ λεπτά)

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Το δοκίμιο αποτελείται από 10 σελίδες. Η 10^η σελίδα να χρησιμοποιηθεί ως πρόχειρο.
2. Να απαντήσετε και τα δύο Μέρη, Α΄ και Β΄ του εξεταστικού δοκιμίου.
3. Το εξεταστικό δοκίμιο βαθμολογείται με 100 μονάδες.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
6. Να γράψετε μόνο με μελάνι χρώματος μπλε.
7. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες. (Σύνολο μονάδων 50)

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(y - 3)^2 =$

(β) $(x + 5)(x - 5) =$

2. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις $2cm$, $4cm$ και $6cm$. Να υπολογίσετε τον όγκο του.

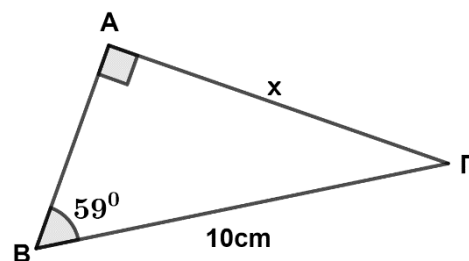
3. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $4x^2 + 8x =$

(β) $x^2 + 5x + 4 =$

4. Στο διπλανό ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$), $B\Gamma = 10cm$ και $\hat{B} = 59^\circ$. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς $A\Gamma$ (με προσέγγιση εκατοστού).

($\eta\mu 59^\circ \cong 0,857$, $\sigma\upsilon\nu 59^\circ \cong 0,515$, $\epsilon\varphi 59^\circ \cong 1,664$)

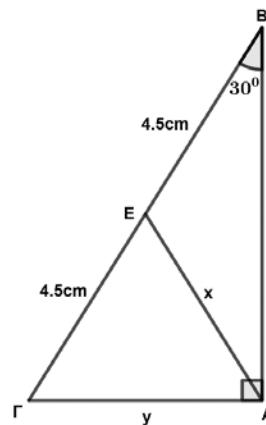


5. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x - y = 7 \\ 2x + 5y = -1 \end{cases}$$

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-1,2)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $y = 2x - 4$

7. Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 + 5x - 2 = 0$

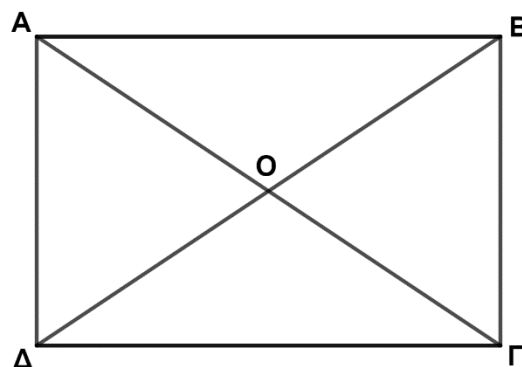
8. Στο διπλανό σχήμα να υπολογίσετε την τιμή των x και y , δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



9. Να κάνετε τις πράξεις γράφοντας το αποτέλεσμα στην πιο απλή μορφή.

$$\left(\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x+2} \right) : \frac{x^2 + 4x}{x^2 - 4}$$

10. Το διπλανό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο και O είναι το σημείο τομής των διαγώνιων. Αν K, Λ, M και N είναι τα μέσα των $AO, BO, \Gamma O$ και ΔO αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β΄.

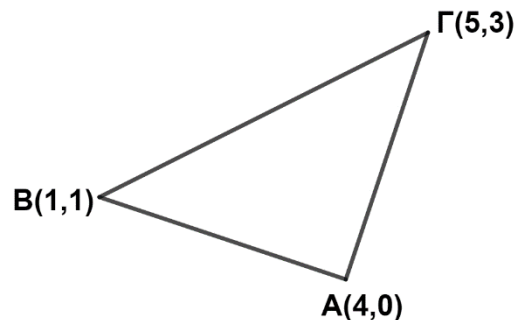
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες. (Σύνολο μονάδων 50)

1. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x-1}{x-3} - \frac{2-x}{x+1} = \frac{x+13}{x^2-2x-3}$

2. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(4,0)$, $B(1,1)$ και $\Gamma(5,3)$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

(β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους AD του τριγώνου.



3. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \left(\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2 \cdot \left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\beta} + 2\alpha\right) \cdot \left(\frac{\alpha^2-\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}\right) \div \left(\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}\right)^3, \alpha, \beta \neq 0, \alpha \neq \pm\beta.$$

Να αποδείξετε ότι: $A = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}$

4. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με K το σημείο τομής των διαγώνιων του. Φέρουμε την AZ κάθετη στη διαγώνιο $B\Delta$ του παραλληλόγραμμου και την προεκτείνουμε κατά τμήματα $ZE = AZ$.

Να αποδείξετε ότι:

(α) το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές

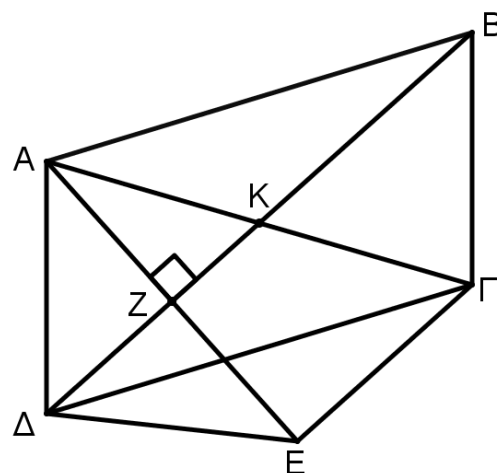
(μον.5)

(β) η ZK είναι παράλληλη με την $E\Gamma$

(μον.2)

(γ) το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο

(μον.3)



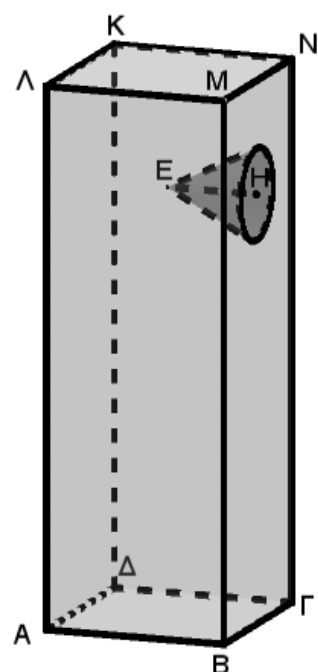
5. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η συσκευασία ενός αρωματικού χώρου. Η συσκευασία αποτελείται από ένα τετραγωνικό πρίσμα από το οποίο αφαιρέθηκε ένας κώνος ώστε να διοχετεύει το άρωμα στον χώρο. Το τετραγωνικό πρίσμα έχει ακμή βάσης 8 cm και ύψος 20 cm . Ο κώνος έχει διάμετρο βάσης 6 cm και ύψος $EH = 4\text{ cm}$.

Να υπολογίσετε:

(α) τον όγκο της συσκευασίας

(Η απάντηση να δοθεί συναρτήσει του π)

(μον.4)



(β) το εμβαδόν της ολικής επιφανείας της συσκευασίας

(Η απάντηση να δοθεί συναρτήσει του π)

(μον.6)

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΣΤΑΥΡΟΥ ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2018-2019	ΒΑΘΜΟΣ Αριθμητικώς: Ολογράφως: Υπογραφή:
ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2019 ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03 /06 /2019 ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες /120 λεπτά	
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.	

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Οι απαντήσεις δίνονται μόνο με **μπλε μελάνι** (Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού (υγρού ή ταινίας/Tipp Ex).
3. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **έντεκα (11)** σελίδες.

Μέρος Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1.** Να βρείτε τα αναπτύγματα

α) $(x + 4)^2 =$

β) $(y + 5)(y - 5) =$

- 2.** Να λύσετε το σύστημα

$$4x + y = -3$$

$$x - y = -7$$

3. Να παραγοντοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $5x + 10y =$

(2 μονάδες)

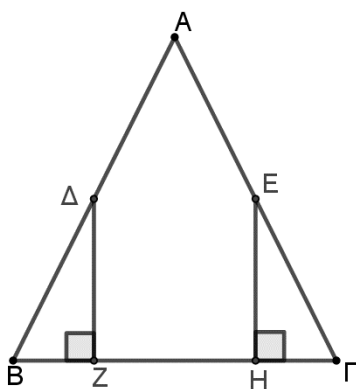
β) $x^2 - 36 =$

(1,5 μονάδες)

γ) $x^2 + 5x + 4 =$

(1,5 μονάδες)

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$). Τα σημεία Δ και E είναι τα μέσα των AB και AG αντίστοιχα. Αν $\Delta Z \perp B\Gamma$ και $EH \perp B\Gamma$, να δείξετε ότι $\Delta Z=EH$.



5. Ένας παρατηρητής A, ο οποίος βρίσκεται 100 m από την ακτή B και 150 m από ένα δέντρο Γ, θέλει να υπολογίσει την απόσταση BΔ του πλοίου Δ από την ακτή B. Με ένα γωνιόμετρο, βρίσκει ότι η $\hat{\Delta A \Gamma} = 70^\circ$. Αν $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, να υπολογίσετε την απόσταση ΔB. (Να δώσετε την απάντησή σας κατά προσέγγιση ακεραίου).



($\epsilon\phi 70^\circ \cong 2,75$, $\eta\mu 70^\circ \cong 0,94$, $\sigma\upsilon\nu 70^\circ \cong 0,34$)

6. Να κάνετε τις πράξεις

$$\frac{10\chi}{\chi^2 - 25} + \frac{5}{\chi - 5} - \frac{5}{\chi + 5} =$$

7. Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο ($\hat{A} = 90^\circ$) και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$.

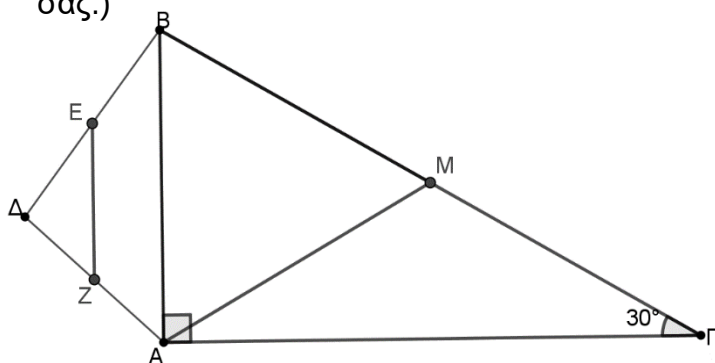
Η AM είναι διάμεσος του τριγώνου ABΓ, το E είναι το μέσο της BD και το Z είναι το μέσο της AD. Αν AM=6 cm, να υπολογίσετε:

α) το μήκος της πλευράς BΓ (2 μονάδες)

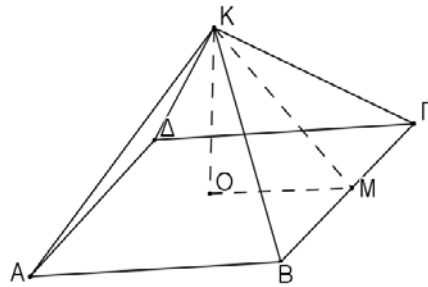
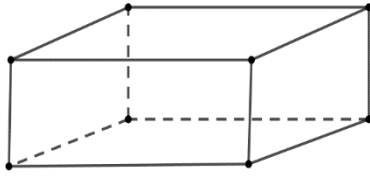
β) το μήκος της πλευράς AB (1,5 μονάδες)

γ) το μήκος του EZ (1,5 μονάδες)

(Να χρησιμοποιήσετε τα κατάλληλα θεωρήματα, για να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.)



8. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο, με διαστάσεις 6 cm , 4 cm και 2 cm, έχει όγκο ίσο με τον όγκο κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, η οποία έχει πλευρά βάσης 6 cm.
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.



9. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α) $x^2 - 2x = 0$

(1,5 μονάδες)

β) $3x^2 - 7x = -2$

(3,5 μονάδες)

10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=A\Gamma$). Να προεκτείνετε την AB προς το μέρος του B , κατά τμήμα $B\Delta$, και την $A\Gamma$ προς το μέρος του Γ , κατά τμήμα ΓE , έτσι ώστε $B\Delta=\Gamma E$. Να αποδείξετε ότι $BE=\Gamma\Delta$.

Μέρος Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(1,4)$, $B(-4,-1)$ και $\Gamma(2,1)$.
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.
 - β) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου.
 - γ) Αν M το μέσο της $B\Gamma$, να υπολογίσετε το μήκος του AM .
 - δ) Να υπολογίσετε την τιμή του κ , ώστε η ευθεία $\varepsilon_1: 3y - (2\kappa + 5)x = 4$ να είναι παράλληλη με την AB .

2. α) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

(6 μονάδες)

$$\frac{6}{x+3} - \frac{x+1}{2-x} = \frac{8x-1}{x^2+x-6}$$

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα

(4 μονάδες)

$$(2\alpha - 3)^2 - (\alpha - 1)(\alpha + 1) + (\alpha - 1)^3 - \alpha^3 = 9(1 - \alpha)$$

3. α) Να παραγοντοποιήσετε την πιο κάτω παράσταση:

(3 μονάδες)

$$x^2 - 10x + 25 - y^2 =$$

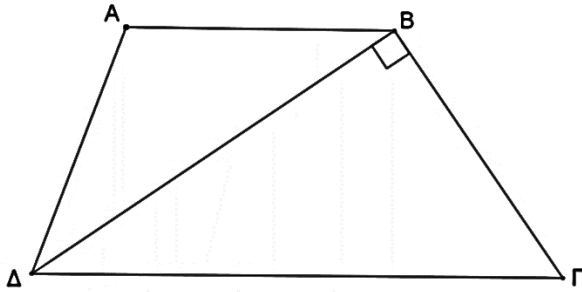
β) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \left(1 + \frac{x}{y}\right) \cdot \frac{y^2}{y^2 - x^2}$ και $B = \frac{1 - \frac{y}{x}}{1 - \frac{2y}{x} + \frac{y^2}{x^2}}$, $x \neq 0, y \neq 0$.

i) Να κάνετε τις πράξεις έτσι, ώστε οι παραστάσεις A και B να γραφούν στην πιο απλή τους μορφή. (5 μονάδες)

ii) Αν $A = \frac{y}{y-x}$ και $B = \frac{x}{x-y}$, να δείξετε ότι $A+B=1$. (2

μονάδες)

4. α) Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) ισχύει η σχέση ότι $\Delta\Gamma = 2AB$. Αν M το μέσο της $\Delta\Gamma$ και $B\Delta \perp B\Gamma$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ABM\Delta$ είναι ρόμβος. (6 μονάδες)



- β) Αν στο σχήμα η $\widehat{B\Delta\Gamma} = 30^\circ$, να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (4 μονάδες)

5. Ένα εργοστάσιο που κατασκευάζει σοκολάτες θέλει να φτιάξει σοκολάτες σε σχήμα κυλίνδρου. Ο κάθε κύλινδρος θα έχει ύψος 10 cm και ακτίνα βάσης 4 cm. Για την κατασκευή αυτών των κυλίνδρων, θα χρειαστεί να λιώσουν μία σοκολάτα σχήματος κώνου, με ακτίνα βάσης 10 cm και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας 816,4 cm². Να υπολογίσετε πόσοι τέτοιοι κύλινδροι σοκολάτας μπορούν να κατασκευαστούν. (Να χρησιμοποιήσετε $\pi = 3,14$.)

Η Διευθύντρια

Ελένη Χαπελή

5. Ένα εργοστάσιο που κατασκευάζει σοκολάτες θέλει να φτιάξει σοκολάτες σε σχήμα κυλίνδρου. Ο κάθε κύλινδρος θα έχει ύψος 10 cm και ακτίνα βάσης 4 cm. Για την κατασκευή αυτών των κυλίνδρων, θα χρειαστεί να λιώσουν μία σοκολάτα σχήματος κώνου, με ακτίνα βάσης 10 cm και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας 816,4 cm². Να υπολογίσετε πόσοι τέτοιοι κύλινδροι σοκολάτας μπορούν να κατασκευαστούν. (Να χρησιμοποιήσετε $\pi = 3,14$.)

Οι Εισηγητές

Διονύσιος Χαραλάμπους, ΒΔ

Μαίρη Αντωνιάδου

Η Διευθύντρια

Φανή Ιωάννου

Ελένη Χαπελή

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΤΑΞΗ: Γ΄ Γυμνασίου

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03/06/2019

ΩΡΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 10:30-12:30

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες

ΒΑΘΜΟΣ :

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ:.....

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΑΡ.:... ΤΜΗΜΑ:

ΟΔΗΓΙΕΣ

- (α) Να ελέγξετε ότι το γραπτό αποτελείται από τέσσερις(4) σελίδες.
- (β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (γ) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- (δ) Δεν επιτρέπεται η χρήση οποιασδήποτε μορφής διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες

ΘΕΜΑ 1

Να βρείτε τα πιο κάτω αναπτύγματα:

(α) $(x - 5)^2 =$

(β) $(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) =$

ΘΕΜΑ 2

Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πιο κάτω πολυώνυμα:

(α) $3x - 3\psi + 3\omega =$

(β) $4\kappa^2 - 25\lambda^2 =$

ΘΕΜΑ 3

Δίνονται τα σημεία Α(-1,5) και Β(7,-1). Να βρείτε:

(α) Την απόσταση του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

(β) Τις συντεταγμένες του μέσου του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

ΘΕΜΑ 4

Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα με τη μέθοδο των αντίθετων συντελεστών:

$$4x - 5\psi = 13$$

$$3x + 5\psi = 1$$

ΘΕΜΑ 5

Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{\chi^2+4\chi-21}{2\chi+6} \cdot \frac{(\chi+3)^2}{\chi^2-9} =$$

ΘΕΜΑ 6

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $\chi(\chi - 4)(2\chi + 1) = 0$

(β) $\chi^2 - \chi - 20 = 0$

ΘΕΜΑ 7

Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Α(5,-2) και τέμνει κάθετα την ευθεία $\chi - 3\psi = 1$.

ΘΕΜΑ 8

Να συμπληρώσετε **Σωστό** ή **Λάθος** στις πιο κάτω προτάσεις:

(α) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν οι διαγώνιοι του διχοτομούνται

(β) Ένα τετράπλευρο είναι τετράγωνο αν οι διαγώνιοι του είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

(γ) Ένα παραλληλόγραμμο με δύο διαδοχικές πλευρές ίσες είναι ρόμβος.

(δ) Η διάμεσος που αντιστοιχεί σε μια από τις κάθετες πλευρές ορθογωνίου τριγώνου είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας του.

(ε) Ένα ισοσκελές τραπέζιο έχει όλες τις γωνίες του ίσες.

ΘΕΜΑ 9

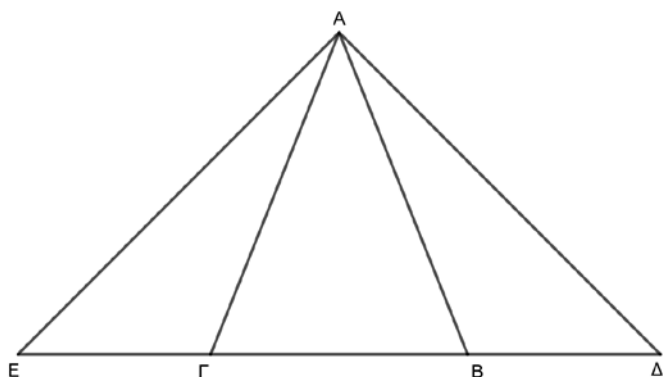
Κώνος έχει όγκο $96\pi \text{ cm}^3$ και ύψος 8 cm. Να υπολογίσετε:

(α) Την ακτίνα του.

(β) Το εμβαδόν της ολικής του επιφάνεια.

ΘΕΜΑ 10

Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο με $AB=AG$. Προεκτείνουμε την $B\Gamma$ κατά τμήματα $B\Delta=\Gamma E$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $A\Delta E$ είναι ισοσκελές.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄ **Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες**

ΘΕΜΑ 1

Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $3\chi^2 - 5\chi - 12 = 0$ (μ. 4)

(β) $\frac{7\chi+7}{\chi^2-\chi-12} + \frac{2\chi-3}{4-\chi} = \frac{1-3\chi}{\chi+3}$ (μ. 6)

ΘΕΜΑ 2

(α) Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ τα $B\Delta$ και ΓE είναι τα ύψη του. Αν το σημείο M είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta M E$ είναι ισοσκελές.

(β) Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, τα K , Λ , M και N είναι τα μέσα των πλευρών του. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda M N$ είναι παραλληλόγραμμο.

ΘΕΜΑ 3

(α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{(\chi+\psi)^3 - (\chi-\psi)^3}{3\chi^2 + \psi^2} = 2\psi$$

(β) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$, ισχύει ότι $\eta\mu B = \frac{5}{13}$ και $AG=10$ cm. Να υπολογίσετε τις πλευρές AB και $B\Gamma$ του τριγώνου και την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A = 13 \cdot \sigma\upsilon\nu B + 15 \cdot \epsilon\phi\Gamma$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: 2\chi + 3\psi = 5$, $\varepsilon_2: 3\chi - 2\psi = -12$ και $\varepsilon_3: 6\chi - 4\psi + 5 = 0$. Αν Α το σημείο τομής των ευθειών ε_1 και ε_2 :

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Α και είναι παράλληλη της ε_3 .

(γ) Να εξετάσετε αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται κάθετα.

(δ) Δίνεται η ευθεία $\varepsilon_4: \psi = -\frac{2}{3}\chi + 1$. Να αναφέρετε το είδος του τετραπλεύρου που ορίζεται από τις τέσσερις ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ και ε_4 , δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 5

Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται κύλινδρος και κώνος με κοινή βάση και κοινή ακτίνα. Η ακτίνα του κυλίνδρου είναι κατά 2 cm μεγαλύτερη από το τριπλάσιο του ύψους του κυλίνδρου και το ύψος του κώνου είναι τριπλάσιο του ύψους του κυλίνδρου. Αν γνωρίζουμε ότι το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου είναι $32\pi \text{ cm}^2$, να υπολογίσετε:

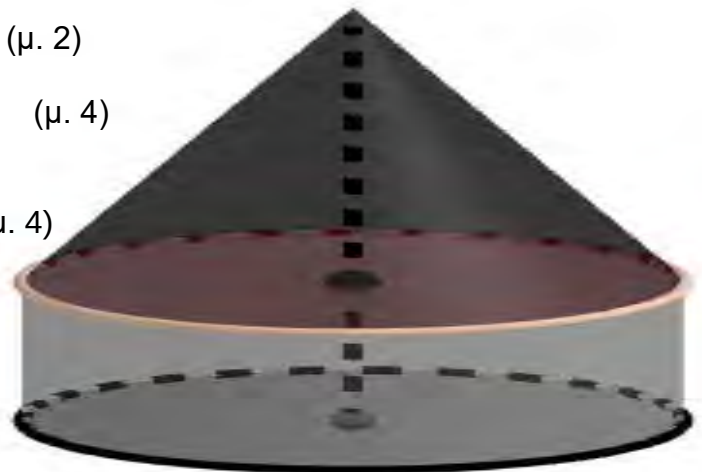
(α) την ακτίνα τους.

(μ. 2)

(β) το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού στο διπλανό σχήμα.

(μ. 4)

(γ) τον όγκο του στερεού στο πιο πάνω σχήμα. (μ. 4)



Η Διευθύντρια:

Νεοφύτα Ευαγγέλου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

Τάξη: Γ'

Διάρκεια: 2 ώρες

Ώρα: 08:00 - 10:00

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1

Να βρείτε τα αναπτύγματα:

(α) $(x-6)^2 =$

(β) $(4-x)(4+x) =$

ΘΕΜΑ 2

Μια ξύλινη δοκός, σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, έχει διαστάσεις 20 cm, 10 cm και 340 cm. Να βρείτε τον όγκο της.

ΘΕΜΑ 3

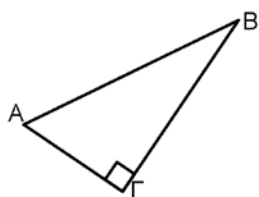
Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

(α) $5\alpha^2 + 15\alpha\beta =$

(β) $x^2 - 25 =$

ΘΕΜΑ 4Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 9x + 18 = 0$ **ΘΕΜΑ 5**

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} = 90^\circ$, ΑΓ = 10 cm και ΑΒ = 26 cm. Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΒΓ καθώς και τους τριγωνομετρικούς αριθμούς $\eta\mu A$, $\sigma\upsilon\nu A$ και $\epsilon\varphi B$.

**ΘΕΜΑ 6**

Να λύσετε το σύστημα:

$$2x + 3y = 1$$

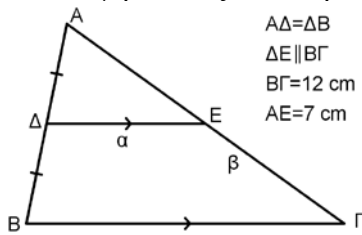
$$3x - 4y - 10 = 0$$

ΘΕΜΑ 7

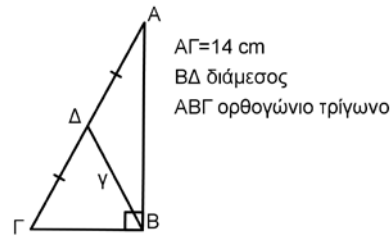
Στα πιο κάτω σχήματα να υπολογίσετε τις τιμές των α , β και γ .

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)

(α)



(β)

**ΘΕΜΑ 8**

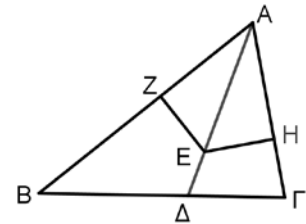
Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

(α)	Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος ΑΔ είναι και διάμεσος του τριγώνου, τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(β)	Αν η ευθεία $\psi = 3\chi - 5$ είναι κάθετη με την ευθεία $2\psi = 4 - \alpha\chi$, τότε $\alpha = 6$.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(γ)	Δύο ισοσκελή τρίγωνα που έχουν ίσες τις βάσεις τους είναι πάντοτε ίσα μεταξύ τους.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ
(δ)	Αν οι γωνίες που πρόσκεινται στην ίδια βάση ενός τραπέζιου είναι ίσες, τότε το τραπέζιο είναι ορθογώνιο τραπέζιο.	ΣΩΣΤΟ	ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ 9

Στο σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε την διχοτόμο ΑΔ και από τυχόν σημείο της Ε φέρουμε τις αποστάσεις ΕΖ και ΕΗ προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $EZ = EH$.

Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

**ΘΕΜΑ 10**

(α) Να αποδείξετε την ισότητα: $\left(\frac{2\chi + \psi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\chi - 2\psi}{4}\right)^2 = \frac{5(\chi^2 + \psi^2)}{16}$

(β) Αν $\chi + \psi > 0$, να γράψετε την πιο κάτω παράσταση στην απλούστερη μορφή της.

$$\sqrt{\frac{\left(\frac{2\chi + \psi}{4}\right)^2 + \left(\frac{\chi - 2\psi}{4}\right)^2}{5}} + \frac{2\chi\psi}{16} =$$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

ΘΕΜΑ 1

Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $\frac{\chi - 7}{\chi^2 - 5\chi + 4} - \frac{1}{4 - \chi} = \frac{\chi - 3}{\chi^2 - \chi}$

(β) $2\chi^2 - \chi - 1 = 0$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών $B\Gamma$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε τη ΔE προς το E κατά τμήμα $EZ = \Delta E$. Να δείξετε ότι:

- (α) το $AZ\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και
- (β) $AB = \Delta Z$.

ΘΕΜΑ 3

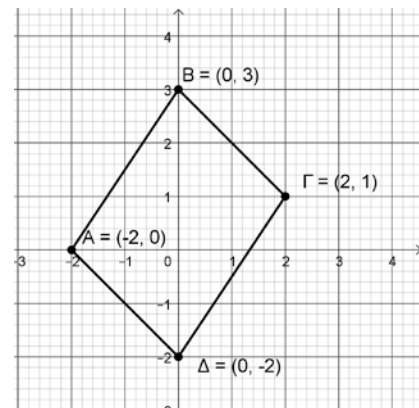
- (α) Να αποδείξετε την ισότητα: $\left(\chi + \frac{1}{3}\right)^3 - \chi\left(\chi + \frac{1}{3}\right) = \chi^3 + \frac{1}{27}$
- (β) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων την παράσταση:

$$27\left(\chi + \frac{1}{3}\right)^3 - 27\chi\left(\chi + \frac{1}{3}\right) - (8\psi^3 + 1) =$$

ΘΕΜΑ 4

Στη γραφική παράσταση δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$.

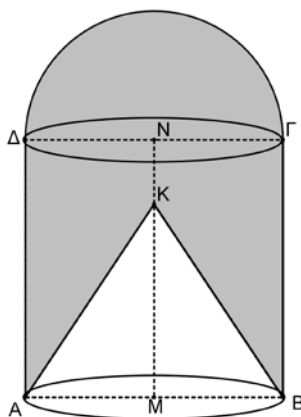
- (α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς AB .
- (β) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο αλλά **δεν** είναι ορθογώνιο.
- (γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
- (δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Γ και είναι κάθετη στην AB .
- (ε) Η ευθεία $(2\kappa + 3)\chi + \psi = 4$ είναι παράλληλη με την ευθεία $B\Gamma$. Να υπολογίσετε την τιμή του.



ΘΕΜΑ 5

Το στερεό, που φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα, είναι κατασκευασμένο από ένα κύλινδρο με διαμέτρους βάσεων $\Delta\Gamma$ και AB . Στο πάνω μέρος του έχει προστεθεί ημισφαίριο με κέντρο N και διάμετρο $\Delta\Gamma = 6$ m. Από το κάτω μέρος έχει αφαιρεθεί ορθός κώνος με διάμετρο AB και κέντρο βάσης M . Η κορυφή του κώνου K απέχει 2 m από το N και το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειάς του είναι ίσο με 15π m.

Αν το υλικό κατασκευής του στερεού κοστίζει €30 το κυβικό μέτρο, να βρείτε πόσα θα στοιχίσει η κατασκευή του.



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 05 / 06 /2019

ΧΡΟΝΟΣ: 2 Ώρες

Βαθμός:

Ολογρ.:

Υπογραφή:

Όνοματεπώνυμο:..... Τμήμα:..... Αριθμός:.....

ΟΔΗΓΙΕΣ: (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

(β) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).

(γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΔΩΔΕΚΑ(12) ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\alpha + 3)(\alpha - 3) =$

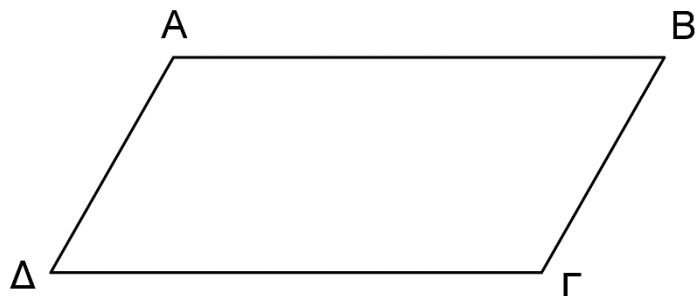
β) $(\alpha + 4)^2 =$

2. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις $\alpha = 2\text{m}$, $\beta = 3\text{m}$ και $\gamma = 5\text{m}$.

3. Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{aligned} -2\chi + 3\psi &= -16 \\ 3\chi - \psi &= 17 \end{aligned}$$

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Μ σημείο τομής των διαγώνιων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΜ και Ζ του ΜΓ, ώστε $ME = MZ$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.



5. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ καθεμιά από τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

Οι ευθείες $\epsilon_1 : 6x + 2\psi = 10$ και $\epsilon_2 : 3x + \psi = 5$ είναι παράλληλες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Η απόσταση μεταξύ των σημείων $A(0, -2)$ και $B(8, 4)$ είναι $(AB) = 10$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Αν δύο ευθείες ταυτίζονται , τότε το γραμμικό σύστημα των εξισώσεών τους έχει μια λύση.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Η πιο κάτω γραφική παράσταση αναπαριστά σύστημα εξισώσεων που έχει άπειρες λύσεις.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
Η πιο κάτω γραφική παράσταση αναπαριστά σύστημα εξισώσεων που έχει μοναδική λύση το $(3, 1)$. 	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

6. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $4\chi^2 - 8\chi =$

β) $\chi^2 - 9\chi + 18 =$

γ) $4\chi^2 - 25\psi^2 =$

δ) $\chi^2\psi + 3\chi\psi - 6 - 2\chi =$

7. Να κάνετε τις πράξεις: $\left(\frac{3\chi^2 + 2\chi - 3}{\chi^2 + 3\chi} - \frac{2\chi}{\chi + 3} \right) : \frac{\chi - 1}{\chi^4} =$ ($\chi \neq 0$, $\chi \neq 1$ και $\chi \neq -3$)

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\chi(\chi - 10) = 0$

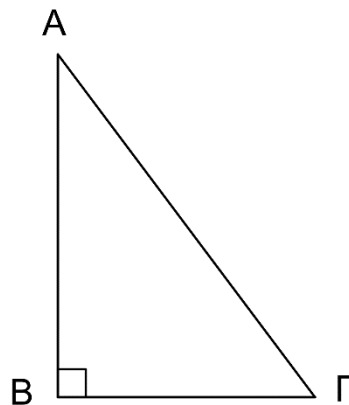
β) $\chi^2 + 9 = 0$

γ) $\chi^3 = 64\chi$

δ) $2\chi^3 - 28\chi^2 + 98\chi = 0$

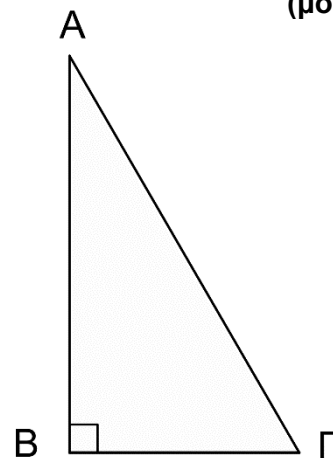
9. Δίνεται το πιο κάτω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($B = 90^\circ$).

Αν ΒΔ διάμεσος του τριγώνου, $B\Delta = 2\chi^2 - 7\chi - 1$ και $A\Gamma = 3\chi^2 - 13\chi + 4$, να υπολογίσετε την τιμή του χ .



10. α) Να λύσετε την εξίσωση $2x^2 + 9x - 5 = 0$. (μον.3)

β) Αν η μεγαλύτερη από τις ρίζες της εξίσωσης ισούται με το ημίτονο της γωνίας Α, του πιο κάτω ορθογωνίου τριγώνου, να βρείτε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Γ. (μον.2)



ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση:

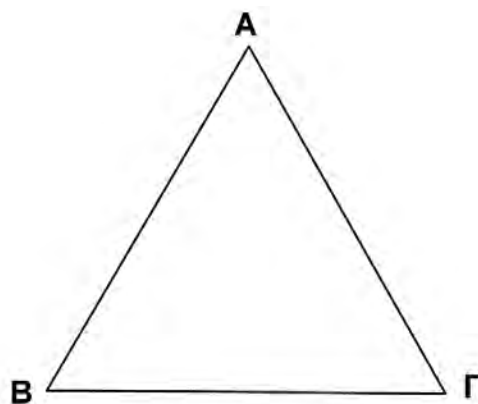
$$\frac{3}{(x-3)(x^2+7x+12)} = \frac{2}{x^2+x-12} + \frac{x}{9-x^2}$$

2. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Κ σημείο τομής των διχοτόμων ΓΕ και ΒΔ των γωνιών Γ και Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

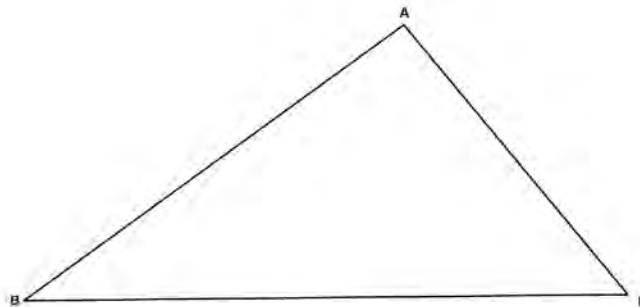
α) Το τρίγωνο ΒΚΓ είναι ισοσκελές. (μον.3)

β) Οι γωνιές ΑΚΓ και ΑΚΒ είναι ίσες. (μον.4)

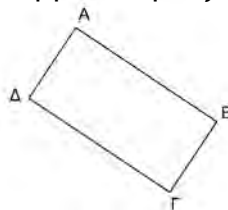
γ) Η ευθεία ΑΚ, η οποία τέμνει την ΒΓ στο Μ, είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ. (μον.3)



3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, BD η διχοτόμος της γωνίας B και M το μέσο της BD . Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την AB στο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι το $EDZB$ είναι ρόμβος.



4. α) Λιώνουμε έναν μεταλλικό κώνο που έχει ακτίνα βάσης 9 cm και εμβαδόν κυρτής επιφάνειας $135\pi\text{ cm}^2$ και φτιάχνουμε σφαίρες ακτίνας 3 cm . Να βρείτε πόσες σφαίρες μπορούμε να φτιάξουμε (θεωρούμε πως δεν υπάρχει απώλεια).
- β) Το εμβαδόν βάσης ενός κυλίνδρου, ο οποίος περιέχει υγρό, είναι $16\pi\text{ cm}^2$. Αν τοποθετήσω μέσα στον κύλινδρο τετραγωνική πυραμίδα με πλευρά βάσης 5 cm , η στάθμη του υγρού ανεβαίνει κατά 7 cm . Να βρείτε το ύψος της πυραμίδας.
5. Δίνεται **παραλληλόγραμμο** $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(0,8)$, $B(6,4)$ και $\Gamma(4,1)$.
- α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας $A\Delta$.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ .
- γ) Να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο.
- δ) Από το σημείο τομής των διαγώνιων M , να φέρετε κάθετη MK (K σημείο της $\Delta\Gamma$) προς την $\Delta\Gamma$. Αν οι συντεταγμένες του σημείου Δ είναι $(-2, 5)$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας MK .



- ε) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου K .

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

Μάθημα: Μαθηματικά

Βαθμός:

Τάξη: Γ΄

Ολογράφως:

Ημερομηνία: 03/06/2019

Υπογραφή:

Χρόνος: 2 ώρες

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα: Αριθμός:

- Οδηγίες:**
- 1) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
 - 2) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
 - 3) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 - 4) Το εξεταστικό δοκίμιο
 - αποτελείται από δεκατρείς (13) σελίδες.
 - αποτελείται από δύο μέρη: Μέρος Α΄ και Μέρος Β΄.
 - βαθμολογείται με 100 μονάδες.
 - 5) Να γράψετε τις απαντήσεις σας στο εξεταστικό δοκίμιο, στον κενό χώρο μετά από την κάθε άσκηση.

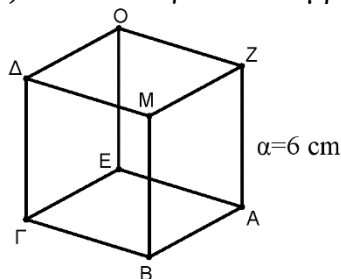
ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

- 1) Να βρείτε τα παρακάτω αναπτύγματα:

(α) $(x-2)^2 =$

(β) $(y-7)(y+7) =$

- 2) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο κύβου με ακμή $a = 6 \text{ cm}$.



- 3) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παρακάτω παραστάσεις:

(α) $a^2 - 3a =$

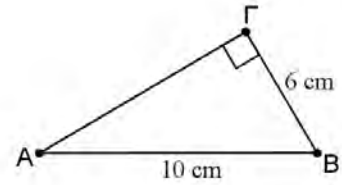
(β) $x^2 - 81 =$

4) Να λύσετε την εξίσωση:

$$4\chi^2 - 5\chi + 1 = 0$$

5) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$), με $AB = 10$ cm και $B\Gamma = 6$ cm.

Να υπολογίσετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:



(α) $\eta\mu B =$ (Mov.2)

(β) $\sigma\upsilon\nu B =$ (Mov.2)

(γ) $\epsilon\phi A =$ (Mov.1)

6) Να λύσετε το παρακάτω σύστημα:

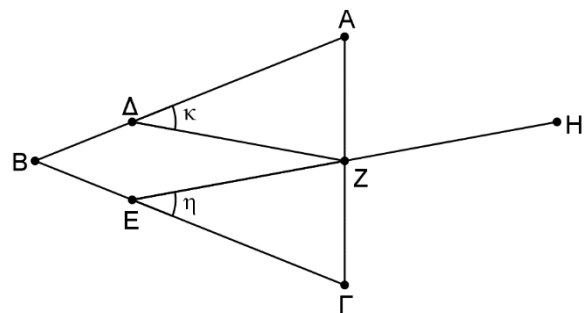
$$5\chi - 3\psi = 9$$

$$3\chi + \psi = 11$$

7) Στο διπλανό σχήμα δίνονται τρίγωνο $A\Gamma B$, $AB = \Gamma B$, $\hat{\kappa} = \hat{\eta}$ και $B\Delta = BE$. Προεκτείνουμε το EZ προς το Z κατά τμήμα $EZ = ZH$.

(α) Να αποδείξετε ότι $\triangle \overset{\Delta}{A} Z = \triangle \overset{\Gamma}{E} Z$.

(β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AH\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.



8) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(8, 2)$, $B(0, 2)$ και $\Gamma(4, -2)$ και ϵ_1 , ϵ_2 και ϵ_3 είναι οι ευθείες πάνω στις οποίες βρίσκονται οι πλευρές του τριγώνου $AB\Gamma$.

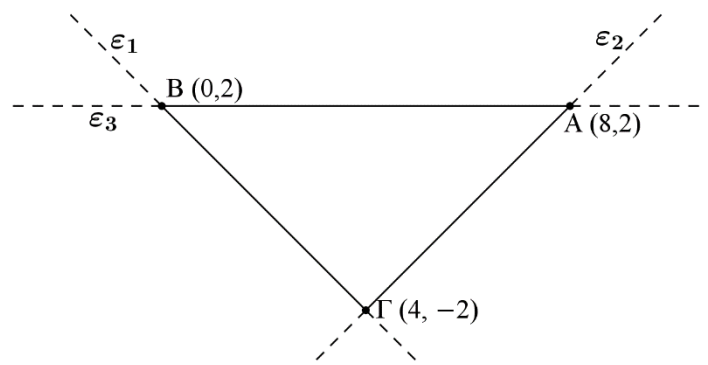
Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α) Να βρείτε τη λύση του γραμμικού συστήματος των ευθειών ϵ_3 και ϵ_2 .

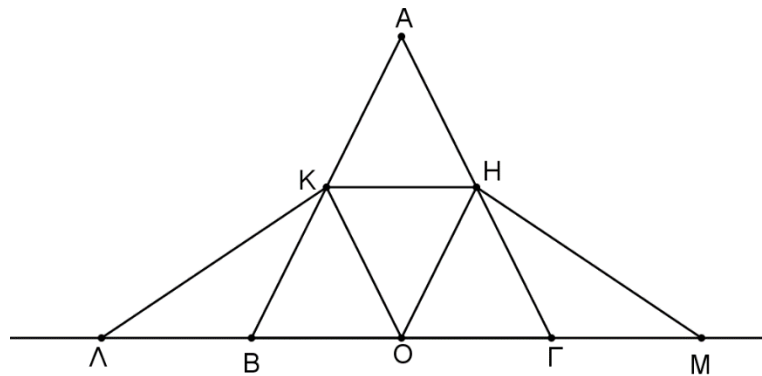
(β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

(γ) Να βρείτε το μήκος της διαμέσου AM του τριγώνου $AB\Gamma$.

(δ) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ του τριγώνου $AB\Gamma$.



- 9) Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Τα σημεία Κ, Η και Ο είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΛ και ΓΜ είναι ίσες προεκτάσεις της πλευράς ΒΓ (ΒΛ=ΓΜ), να αποδείξετε ότι:



- (α) Οι γωνίες ΚΛΒ και ΗΜΓ είναι ίσες.
(β) Το τετράπλευρο ΚΑΗΟ είναι ρόμβος.

- 10) Να κάνετε τις πιο κάτω πράξεις:

(α) $\frac{\alpha^2 - 8\alpha}{3\alpha - 15} \cdot \frac{\alpha^2 - 10\alpha + 25}{\alpha^2 - 64} =$

(β) $\left(\frac{\chi + 4}{\chi + 5} - \frac{5}{\chi^2 + 5\chi} \right) : \frac{\chi^2 + 2\chi - 3}{\chi^3} =$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.

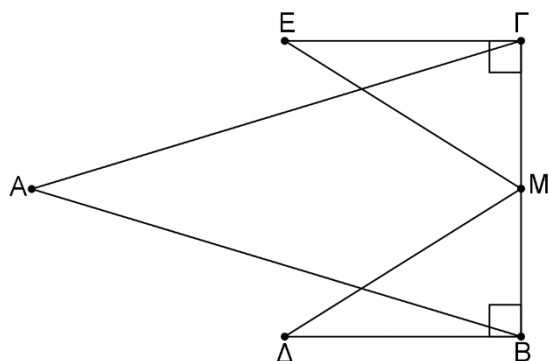
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

- 1) Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{4}{\chi - 3} - \frac{\chi}{2 - \chi} = \frac{-2}{\chi^2 - 5\chi + 6}$$

- 2) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και Μ μέσο της πλευράς ΒΓ. Αν $ΕΓ \perp ΒΓ$, $ΔΒ \perp ΒΓ$ και $ΜΔ = ΕΜ$, να αποδείξετε ότι:

- (α) $ΒΔ = ΓΕ$.
(β) Το τετράπλευρο ΕΓΒΔ είναι ορθογώνιο.

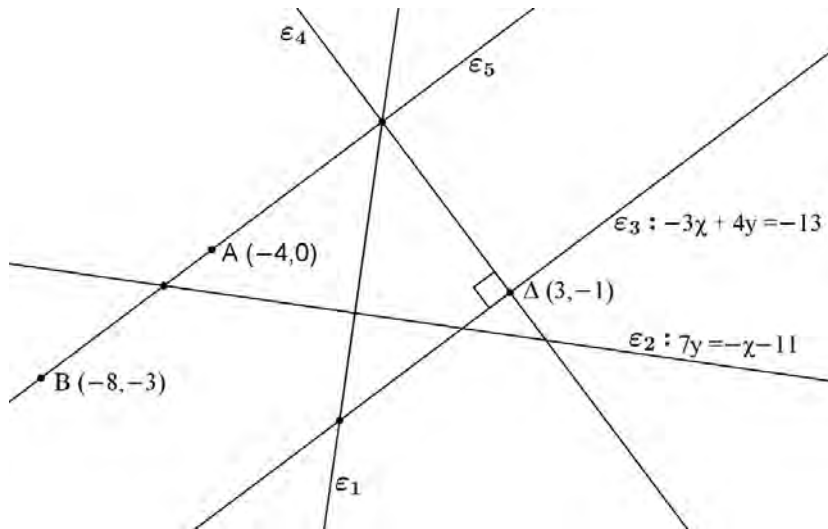


3) Πιο κάτω δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ και ε_5 . Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:

(α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_4 . (Μον.4)

(β) Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών ε_3 και ε_5 . (Μον.4)

(γ) Να υπολογίσετε τις τιμές του κ , ώστε η ευθεία $\varepsilon_1: y = (\kappa^2 - 42)x + 3$ να είναι κάθετη με την ευθεία $\varepsilon_2: 7y = -x - 11$. (Μον.2)



4) α) Δίνεται η παράσταση $A = \left(2\chi^2 - \frac{1}{\chi}\right)^2 - \left(\frac{1}{\chi} - \chi\right)\left(\chi + \frac{1}{\chi}\right) - 2\chi(2\chi^3 - 2)$.

ι) Να αποδείξετε ότι $A = \chi^2$.

ιι) Να λύσετε την εξίσωση $2A = 18$.

β) ι) Να παραγοντοποιήσετε την πιο κάτω παράσταση:

$$8(\beta - \chi) - (\chi - \beta)(3\beta - 2) =$$

ιι) Να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$\frac{\frac{\chi^2}{y} - 2\chi + y}{\frac{1}{y} - \frac{1}{\chi}} =$$

5. Το πιο κάτω στερεό αποτελείται από έναν κύλινδρο και έναν κώνο (κώνος πάνω σε κύλινδρο). Το σημείο K είναι το κέντρο της βάσης του κυλίνδρου και του κώνου. Ο όγκος του κώνου είναι $800\pi \text{ cm}^3$ και το ύψος του είναι 24 cm. Η ακτίνα της βάσης του κώνου είναι διπλάσια από την ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου και το ύψος του στερεού είναι 60 cm. Να απαντήσετε στα ακόλουθα ερωτήματα:
(Δίνεται $\pi = 3,14$)

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου.

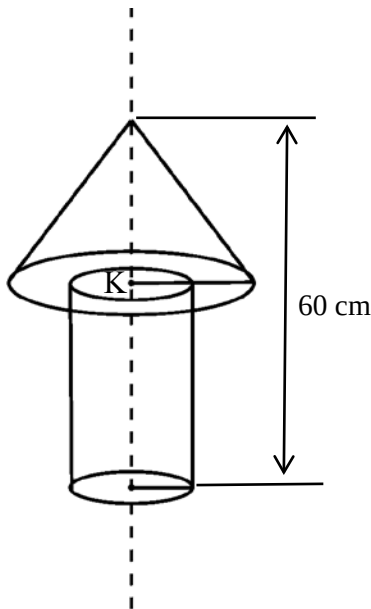
Μον.4

(β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής K επιφάνειας του στερεού.

Μον.3

(γ) Η Μαρία έχει σε ένα δοχείο 22608 cm^3 χυμό πορτοκαλιού και θέλει να χρησιμοποιήσει τον κύλινδρο του πιο πάνω στερεού ως δοχείο, για να τοποθετήσει τον χυμό. Να βρείτε πόσα τέτοια κυλινδρικά δοχεία θα χρειαστούν για τα 22608 cm^3 χυμό πορτοκαλιού.

Μον.3



ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ : Μαθηματικά

ΤΑΞΗ : Γ΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 31 / 05 / 19

ΩΡΑ : 8:00 - 10:00 π.μ.

Βαθμός :

Ολογράφως:

Υπογραφή:

Ονοματεπώνυμο : **Τμήμα :** **Αριθμός:**

- ΟΔΗΓΙΕΣ :**
1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 2. Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
 3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 4. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x^2 + 3)^2 =$

β) $(x^2 - 4)(x^2 + 3)$

2. Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα:

α) $3x + 3y =$

β) $y^2 - 25 =$

γ) $2x^2 + 4x =$

δ) $x^2 - 7x + 12 =$

3. Να λύσετε το σύστημα :

$$3 \times 5 \exists$$

$$4 \times 3 \exists$$

4. Να λύσετε την εξίσωση: $4x^2 - 5x - 6 = 0$

5. Να κάνετε τις πράξεις:

$$\frac{x^2 - 4}{x^2 - 4x - 12} : \frac{2 - x}{x^2 - 6x} =$$

6. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 12cm και ύψος 8cm. Να βρείτε:

α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

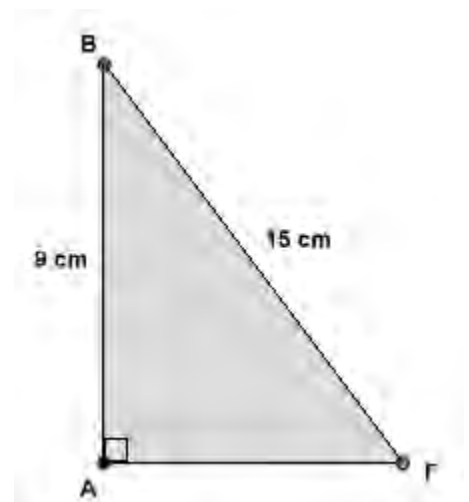
(μον. 3)

β) Τον όγκο της.

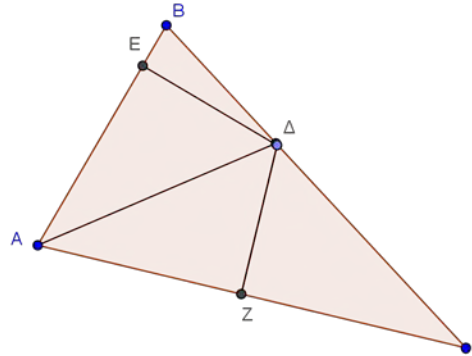
(μον. 2)

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $AB = 9 \text{ cm}$ και $AB = 15 \text{ cm}$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{30 \eta \mu B - 36 \epsilon \phi \Gamma}{45 \sigma \upsilon \nu \Gamma - 30}$.



8. Δίνεται τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$, όπου $A\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας A . Αν $\Delta E \perp AB$ και $\Delta Z \perp A\Gamma$, να δείξετε ότι $\Delta E = \Delta Z$.

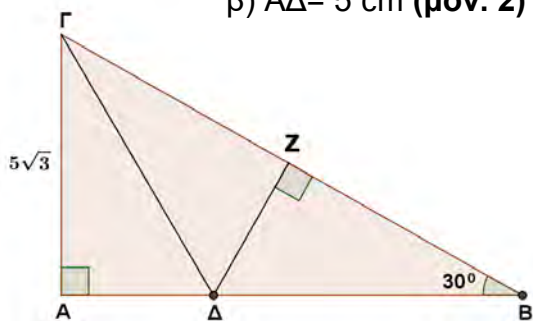


9. Στο πιο κάτω σχήμα, το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{A} = 90^\circ$) με $\hat{B} = 30^\circ$.

Το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Γ , $A\Gamma = 5\sqrt{3}$ cm και $\Delta Z \perp B\Gamma$.

Να δείξετε: α) $BZ = A\Gamma$ (μον. 3)

β) $A\Delta = 5$ cm (μον. 2)



10. α) Να δείξετε ότι $\left(x + \frac{6}{x}\right)^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2$, $x \neq 0$.

β) Αν $x = \left(2019 + \frac{6}{2019}\right)^2 - \left(2019 - \frac{6}{2019}\right)^2$ να λύσετε την εξίσωση $x^2 - x = 12$.

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση :

$$\frac{5x}{x^2 - x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x^2}$$

2. α) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{1 + \frac{x}{x^2}}{1 - \frac{x}{x^2}}$ και $B = \left(1 - \frac{x}{x^2}\right) : \left(1 - \frac{2x}{x^2} + \frac{x^2}{x^2}\right)$,

με $x \neq 0$, $\psi \neq 0$, $x \neq \psi$ και $x \neq -\psi$. Να δείξετε ότι $A + B = 1$. (μον. 6)

- β) Να αναλύσετε πλήρως σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τα πολυώνυμα :

i) $x^2(\beta - 7) + \alpha^2(7 - \beta)$ (μον. 2)

ii) $\alpha^3 + \alpha + 30$ (μον. 2)

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ με AB=ΑΓ. Στις πλευρές AB και ΑΓ παίρνουμε δύο σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, έτσι ώστε ΒΔ=ΓΕ και φέρουμε τη διχοτόμο ΑΗ.

α) Αν Ζ είναι τυχαίο σημείο της διχοτόμου ΑΗ να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΔΖ και ΑΕΖ είναι ίσα.

β) Αν προεκτείνουμε τη διχοτόμο ΑΗ κατά τμήμα ΗΘ=ΑΗ να δείξετε ότι το ΑΒΘΓ είναι ρόμβος.

4. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κορυφές Α(-1, 1) και Γ(10, -1).

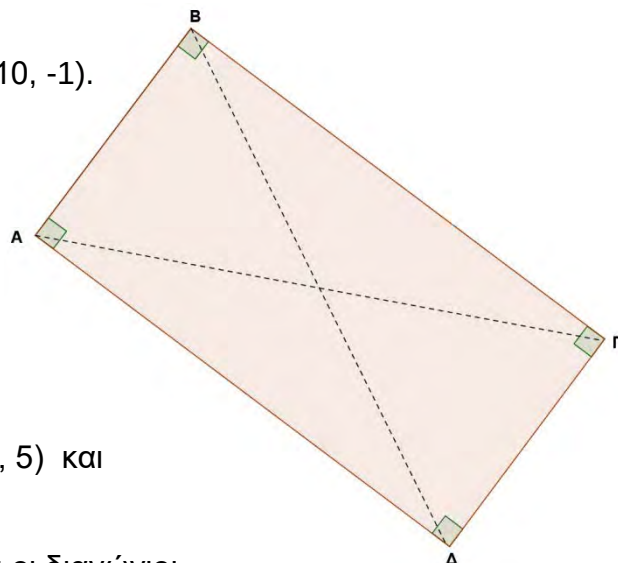
Η κλίση της ευθείας ΒΓ είναι ίση με $-\frac{3}{4}$. $\left(\angle_{\text{B}} = -\frac{3}{4} \right)$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων του. (μον. 2)

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της πλευράς ΑΒ είναι $3\psi - 4\chi = 7$. (μον. 2)

γ) Να δείξετε ότι η κορυφή Β έχει συντεταγμένες (2, 5) και στη συνέχεια να βρείτε την κορυφή Δ. (μον. 4)

δ) Να επαληθεύσετε την ιδιότητα του ορθογωνίου ότι οι διαγώνιοι του είναι ίσοι. (μον. 2)



5. α) Κυλινδρική κανάτα ακτίνας 6cm περιέχει ποσότητα κρασιού τόση ώστε να γεμίζει πλήρως 30 ποτήρια σχήματος κώνου ακτίνας 3 cm και ύψους 6 cm. Να βρείτε το **αρχικό** ύψος του κρασιού στην κυλινδρική κανάτα. (μον. 7)



β) Δίνεται κώνος με ακτίνα $R = (x + \psi)$ cm και γενέτειρα $\sqrt{x^3 + 3}$

Αν $x^2 + \psi = 100$, να δείξετε ότι το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κώνου είναι ίσο με **10192π** cm². (μον. 3)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

Μάθημα: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ** Ημερομηνία: 31/05/2019

ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ

Αριθμητικά:.....

Τάξη: Γ΄

Σελίδες: 8

Ώρα : 7:45-9:45

Τμήμα:

Ονοματεπώνυμο: Αριθμός:.....

- ΟΔΗΓΙΕΣ:
1. Επιτρέπεται η χρήση μη-προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
 3. Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).

ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τα 10 θέματα του μέρους Α΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1) Να λύσετε αλγεβρικά το σύστημα:
$$\begin{cases} x - 2y = 5 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

A2) Να βρείτε τα αναπτύγματα των πιο κάτω ταυτοτήτων:

α) $(x + 3)^2 =$

β) $(x - 5) \cdot (x + 5) =$

A3) Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις.

α) $x^2 - 16 =$

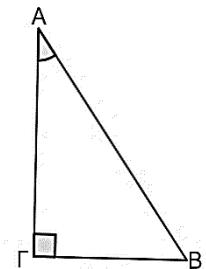
β) $x^2 + xy =$

γ) $\lambda x + \lambda y - 4x - 4y =$

δ) $x^2 + 7x + 12 =$

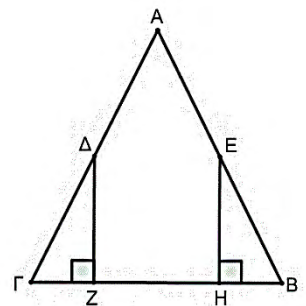
A4) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 + 7x - 4 = 0$

A5) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$). Αν $A\Gamma = 4\text{cm}$ και $AB = 5\text{cm}$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας A .



A6) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 12cm και ύψος 8cm. Να υπολογίσετε τον όγκο της.

A7) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ). Τα σημεία Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΔΖ και ΕΗ είναι ίσα.



A8) Να απλοποιήσετε την αλγεβρική παράσταση: $T = \frac{14 - 2x}{x^2 - 11x + 28} \div \frac{2x + x^2}{x^2 - 2x - 8}$.

- A9)** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) με M μέσο της $B\Gamma$. Να προεκτείνετε την $B\Gamma$ κατά ίσα τμήματα BE και $\Gamma\Delta$. Να αποδείξετε ότι:
- α) Το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές .
 - β) Οι αποστάσεις του σημείου M από τις πλευρές AD και AE (ML και MK αντίστοιχα) είναι ίσες.

A10) Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (k - 2)x - 4$, $\varepsilon_2 : y + 11 = (6 - k)x$ και $\varepsilon_3 : y = x - \lambda$.

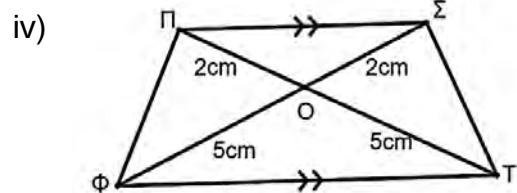
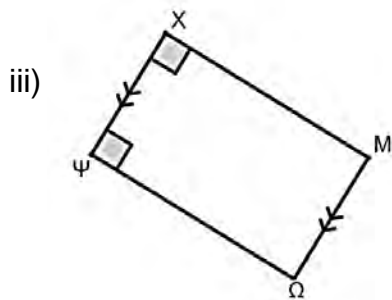
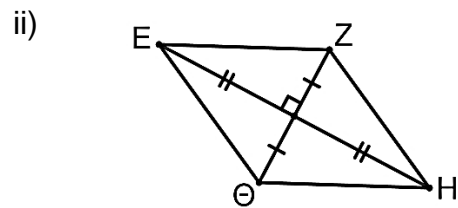
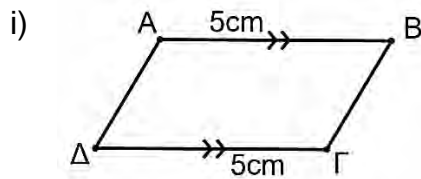
- α) Να υπολογίσετε την τιμή του k , αν γνωρίζουμε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες μεταξύ τους. (2μ)

- β) Οι ευθείες ε_1 (για $k = 4$) και ε_3 τέμνονται στο σημείο $A(0, \mu)$. Να υπολογίσετε την τιμή των λ και μ . (3μ)

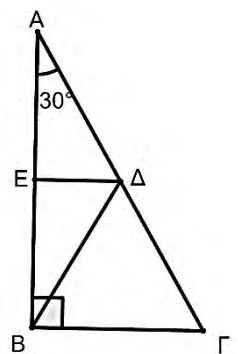
ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τα 5 θέματα του μέρους Β'.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1) α) Να γράψετε το είδος των πιο κάτω τετραπλεύρων (παράλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο, ισοσκελές τραπέζιο), δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας. (4μ)



β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{B} = 90^\circ$) με $\hat{A} = 30^\circ$ και $B\Gamma = 6\text{cm}$. Αν Ε μέσο του ΑΒ και Δ μέσο του ΑΓ, να υπολογίσετε το μήκος των ΑΓ, ΒΔ και ΔΕ. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας) (6μ)



B2) α) Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $M = \frac{(x-2)^2 - 25}{(x^2 - x - 12) \cdot (x-1)}$

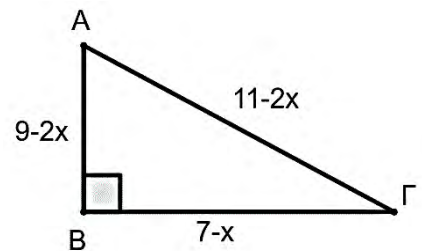
i) Για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα M ; (2μ)

ii) Να απλοποιήσετε το κλάσμα M . (2μ)

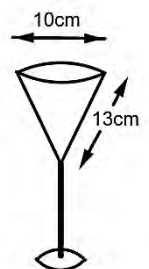
β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{x-7}{x^2-5x+4} + \frac{1}{x-4} = \frac{3-x}{x-x^2}$ (6μ)

B3) α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(9 - 2x)^2 + (7 - x)^2 = 5(x - 5)^2 + 5$

β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ. Να υπολογίσετε την τιμή του x .



B4) Σε μια δεξίωση οι καλεσμένοι κέραστηκαν κρασί. Το κρασί ήταν αποθηκευμένο σε κυλινδρικό βαρέλι ύψους 36cm και εμβαδό κυρτής επιφάνειας $E_k = 1440\pi \text{ cm}^2$. Το κρασί μοιράστηκε σε ποτήρια σχήματος κώνου, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Το κάθε ποτήρι γέμιζε με το 75% της χωρητικότητάς του. Να υπολογίσετε πόσα ποτήρια χρησιμοποιήθηκαν.



B5) Δίνονται τα σημεία $A(9,7)$, $B(8,2)$, $\Gamma(3,1)$ και $\Delta(4,6)$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι ρόμβος. (5μ)

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του κέντρου M του ρόμβου. (3μ)

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου E έτσι ώστε το τετράπλευρο $AE\Gamma M$ να είναι ορθογώνιο. (2μ)

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

.....

Θεοδώρα Οκκαρίδου-Χρίστου (Β.Δ)

.....

Μαρία Παρασκευά

.....

Χριστοθέα Τρύφωνος

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

.....

Κατερίνα Κολάνη

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΒΑΘΜΟΣ :

ΤΑΞΗ : Γ'

Αριθμητικώς :

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 27/05/2019

Ολογράφως:

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ΩΡΕΣ

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ : ΤΜΗΜΑ : ΑΡΙΘΜΟΣ :

ΟΔΗΓΙΕΣ :

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από εννέα (9) σελίδες.
- Να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα του εξεταστικού δοκιμίου.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- Να γράφετε με μπλε μελάνι. Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις παραστάσεις:

α) $4x - 4yx$

β) $5\alpha^2 - 15\alpha + \alpha\beta - 3\beta$

2. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(\alpha - 1)^2$

β) $(7x + 3)(7x - 3)$

3. Δίνεται κύβος με ακμή ίση με 8m. Να υπολογίσετε:

α) τον όγκο του

β) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του

4. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90^\circ$) δίνονται πλευρές ΒΓ=15cm και ΑΓ=12cm.

Να υπολογίσετε τους πιο κάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

συν Β

εφ Γ

ημ Β

5. Να λύσετε το σύστημα:

$$x - 3y = 5$$

$$3x + 2y = 4$$

6. Σε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) παίρνουμε σημεία Δ και E στις πλευρές AB και AG αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta=\Gamma E$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\Delta M=EM$.

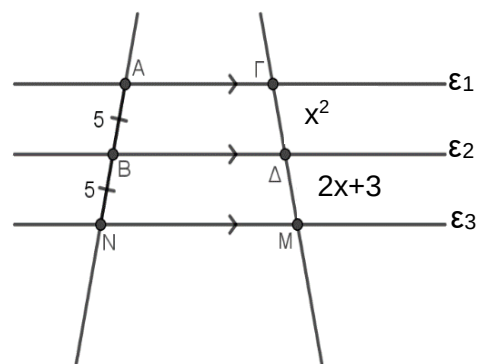
7. Να λύσετε την εξίσωση: $x(2x - 3) = 5$

8. Να υπολογίσετε την τιμή του κ έτσι ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1: 2y = 12x + 5$ και $\varepsilon_2: \kappa x - 3y + 4 = 0$ να είναι κάθετες.

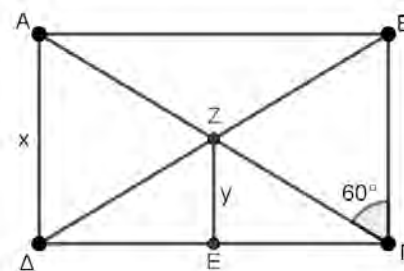
9. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{x-1}{x} - \frac{x+3}{x^2+x} = \frac{2}{x+1}$$

10. α) Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ και $AB=BN$, να υπολογίσετε το x . Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



β) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $A\Gamma=14\text{cm}$. Αν E είναι το μέσο της $\Gamma\Delta$ και $\widehat{A\Gamma B} = 60^\circ$, να υπολογίσετε τα x και y . Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. α) Να κάνετε τις πράξεις και να γράψετε την παράσταση B στην πιο απλή της μορφή.

$$B = (\alpha - 2)^3 - \alpha^2(\alpha + 1) + (2\alpha + 3)^2 - 1 \quad (7 \text{ μονάδες})$$

- β) Αν $B = -3\alpha^2 + 24\alpha$, να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες $B = 0$.

(3 μονάδες)

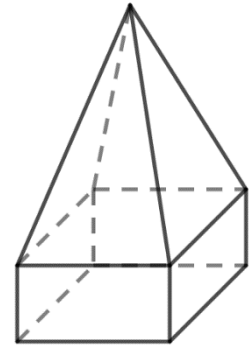
2. α) Αν $x \neq 0$ και $x \neq \pm 1$, να απλοποιήσετε το κλάσμα:

$$\frac{\frac{1}{x^2} - x^2}{\frac{1}{x} - x}$$

β) Αν η εξίσωση $(x - \kappa)^2 + 3(x - \kappa) = 10$ έχει ρίζα τον αριθμό 3, να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού κ , αν το κ είναι περιττός αριθμός.

3. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές $A(-2,-1)$, $B(1,-3)$, $\Gamma(4,-1)$ και $\Delta(1,1)$.
- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο είναι ρόμβος.
 - β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων του.
 - γ) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΓΔ.
 - δ) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΑΓ.

4. Η διπλανή κατασκευή αποτελείται από ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο και μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα. Το εμβαδόν βάσης της πυραμίδας είναι ίσο με 144 cm^2 και το παράπλευρο ύψος της ίσο με 10 cm . Αν το ύψος του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου ισούται με το $\frac{1}{3}$ της ακμής της βάσης της πυραμίδας, να υπολογίσετε:
- α) τον όγκο της κατασκευής
 - β) πόσα cm^2 διακοσμητικού χαρτιού χρειαζόμαστε για να περιτυλίξουμε την κατασκευή.



5. Σε τρίγωνο ΔEZ , φέρουμε την διάμεσό του ΔM και στην προέκτασή της παίρνουμε σημείο Θ έτσι ώστε $M\Theta = \Delta M$. Προεκτείνουμε την EZ προς το E κατά τμήμα $EA = EZ$ και προς το Z κατά τμήμα $Z\Gamma = EZ$. Να δείξετε ότι:
- α) τα τρίγωνα ΔAM και $M\Gamma\Theta$ είναι ίσα (5 μονάδες)
 - β) το τετράπλευρο $\Delta A\Theta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο (2,5 μονάδες)
 - γ) η διάμεσος EH του τριγώνου ΔEZ είναι ίση με το μισό της $A\Delta$ (2,5 μονάδες)

Οι Εισηγήτριες:

Υβόνη Μιχαήλ Β.Δ.

Φρόσω Μιχαήλ

Μαρία Χατζηπαρασκευά

Ο Διευθυντής

Ανδρέας Ματσάγκος

ΕΠΩΝΥΜΟ:	ΒΑΘΜΟΣ:
ΟΝΟΜΑ:.....	ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:
ΤΜΗΜΑ:.....ΑΡ.	ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ/ΤΡΙΑ:
	ΥΠΟΓΡΑΦΗ:

ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΝΕΑΠΟΛΗΣ ΛΕΜΕΣΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ
ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ: 2018-2019

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03/06/2019

ΤΑΞΗ: Γ'

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΓΡΑΠΤΟΥ: 2 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

(1) Να βρείτε τα αναπτύγματα, με χρήση ταυτότητας:

(α) $(x + 7)^2 =$

(β) $(x - 5)(x + 5) =$

(2) Να λύσετε το σύστημα:

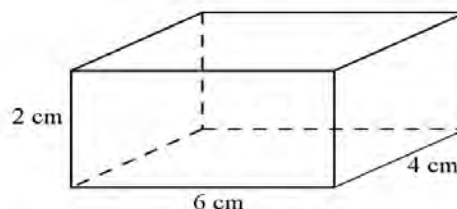
$$\begin{aligned} 3x + 5y &= 1 \\ 2x - 5y &= 9 \end{aligned}$$

(3) Ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει διαστάσεις $\alpha = 6\text{cm}$, $\beta = 4\text{cm}$ και $\gamma = 2\text{cm}$.

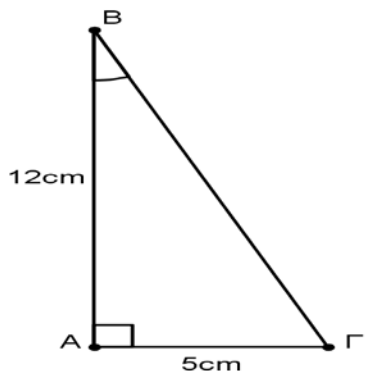
Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και

(β) τον όγκο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου



- (4) Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$). Αν ΑΒ=12cm και ΑΓ=5cm, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας Β.



- (5) Να λύσετε τις εξισώσεις:

(MON 2/3)

(α) $(x - 2)(x + 4) = 0$

(β) $5x^2 - 6x + 1 = 0$

- (6) Να χαρακτηρίσετε με «Σωστό» ή «Λάθος» τις πιο κάτω προτάσεις:

(α) Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, αν έχει μόνο τις δύο απέναντι πλευρές του παράλληλες.		Σωστό/Λάθος
(β) Η πλευρά ΑΒ στο διπλανό σχήμα είναι: $AB = 2 MN$		Σωστό/Λάθος
(γ) Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.		Σωστό/Λάθος
(δ) Η πλευρά x στο διπλανό τρίγωνο είναι: $x = 5m$		Σωστό/Λάθος

(7) Να παραγοντοποιήσετε πλήρως τις πιο κάτω παραστάσεις:

(MON 1/1/1/2)

(α) $x^2 - 36 =$

(β) $7x\psi + 7x\omega =$

(γ) $x^2 - 5x + 6 =$

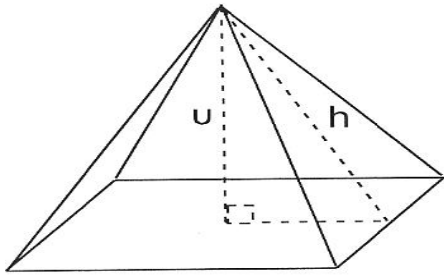
(δ) $\alpha x + \alpha \psi + \beta x + \beta \psi =$

(8) Να κάνετε τις πράξεις:

$$\left(\frac{x+1}{x^2-16} + \frac{2}{x-4} \right) : \frac{x+3}{x^2-7x+12} =$$

(9) Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας $60cm^2$ και εμβαδόν βάσης $36cm^2$. Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και (β) τον όγκο της πυραμίδας (MON 1/4)



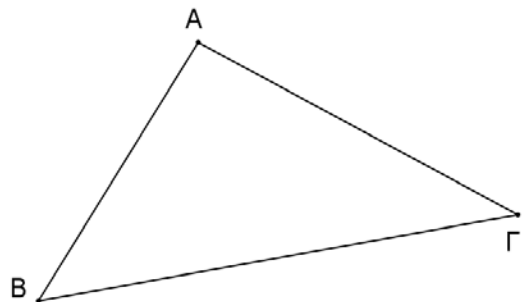
(10) Δίνεται τυχαίο τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΑΓ και ΒΓ παίρνουμε τμήματα ΓΔ και ΓΕ αντίστοιχα, έτσι ώστε $ΓΔ = ΓΕ$. Αν Ζ είναι τυχαίο σημείο της διχοτόμου ΓΗ να δείξετε ότι:

(α) $ΖΔ = ΖΕ$

(β) οι αποστάσεις του Ζ από τις πλευρές ΑΓ και ΒΓ είναι ίσες.

(Δεδομένα – Ζητούμενα – Σχήμα - Απόδειξη)

Δεδομένα	Ζητούμενα



ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

(1) Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$4(\chi - 2\psi) + 3\psi - 5\chi = 30$$

$$\frac{3\chi + 7\psi}{4} - \frac{\chi + 9\psi}{6} = \frac{7}{6}$$

(2) (α) Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση:

(MON 6)

$$\frac{2\chi + 4}{\chi + 3} - \frac{x + 1}{\chi - 1} = \frac{8}{\chi^2 + 2x - 3}$$

(β) Να αναλύσετε σε γινόμενο παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

(MON 4)

(i) $\chi^2 - \psi^2 - 3\chi + 3\psi =$

(ii) $\chi\psi + 5\psi - (\chi^2 + 2\chi - 15) =$

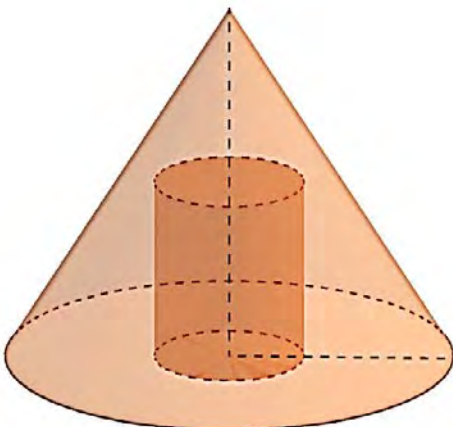
(3) Μια σφηκοπαγίδα είναι ένα στερεό που αποτελείται από ένα κώνο, που εσωτερικά έχει κενό χώρο σε σχήμα κυλίνδρου, όπως φαίνεται στο σχήμα. Ο κώνος έχει ακτίνα βάσης 20cm και γενέτειρα 25cm, ενώ ο κύλινδρος έχει ακτίνα 8cm και ύψος 10cm.

(α) Να βρείτε τον όγκο της σφηκοπαγίδας **(Οι απαντήσεις σας μπορούν να δοθούν συναρτήσει του π).**

(β) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου ως προς την κυρτή

επιφάνεια του κώνου είναι $\frac{8}{25}$

(MON 7/3)



(4) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-5, 6)$, $B(-3, 2)$ και $\Gamma(1, 4)$

(α) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές

(β) να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $A\Gamma$

(γ) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_1 που περνά από το σημείο Γ και είναι παράλληλη με τη πλευρά AB

(δ) να υπολογίσετε την τιμή του κ αν η ευθεία $\varepsilon_2 : \psi = \left(\frac{2\kappa-5}{3}\right)\chi - 7$ είναι κάθετη με την ευθεία $\varepsilon_3 : \psi = -3\chi - 1$

(MON 3/2/3/2)

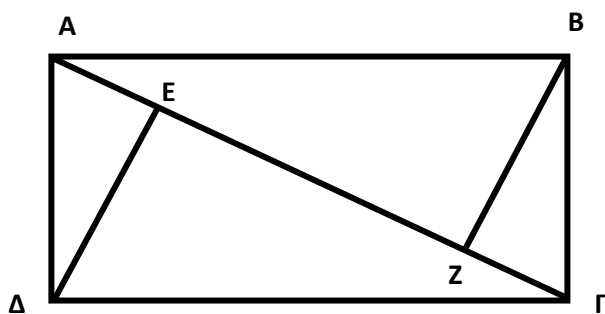
(5) Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Φέρουμε τις διαγώνιους $A\Gamma$ και $B\Delta$ και ονομάζουμε O το σημείο τομής τους. Αν BZ και ΔE είναι οι αποστάσεις των κορυφών B και Δ από τη διαγώνιο $A\Gamma$, να δείξετε:

(α) ότι τα τρίγωνα ΔEO και BZO είναι ίσα

(β) ότι το $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο

(γ) αν $\hat{\Delta AE} = 60^\circ$ και $AE = 5\text{cm}$, να βρείτε το μήκος της $A\Delta$.

(MON 4/3/3)



Η Διευθύντρια

Γαλάζη Μαρία