

Θέματα και Λύσεις του Δοκιμίου Μαθηματικών
για τις Εξετάσεις Πρόσληψης στην Αστυνομία

Θέμα 1

Αν $\frac{33}{30} = 1,1$ τότε να υπολογισθούν τα πιο κάτω:

$$(\alpha) \frac{0,33}{0,03} = \quad (\beta) \frac{3,3}{0,3} + \frac{0,99}{0,09} + 5,2 = \quad (\gamma) \frac{0,33}{0,3} + \frac{4}{3} \times \left(\frac{0,99}{1,2} \right) =$$

$$(\delta) \frac{33}{300} + \left(\frac{0,33}{0,3} \right)^2 = \quad (\epsilon) (2,2) \times \left(\frac{30}{33} \right) =$$

Λύση Θέματος 1

$$(\alpha) \frac{0,33}{0,03} = \frac{33}{3} = 11$$

$$(\beta) \frac{3,3}{0,3} + \frac{0,99}{0,09} + 5,2 = \frac{33}{3} + \frac{0,33}{0,03} + 5,2 = 11 + 11 + 5,2 = 27,2$$

$$(\gamma) \frac{0,33}{0,3} + \frac{4}{3} \times \left(\frac{0,99}{1,2} \right) = \frac{33}{30} + \frac{0,33}{0,3} = 1,1 + \frac{33}{30} = 1,1 + 1,1 = 2,2$$

$$(\delta) \frac{33}{300} + \left(\frac{0,33}{0,3} \right)^2 = \frac{1}{10} \times \frac{33}{30} + \left(\frac{33}{30} \right)^2 = (0,1) \times (1,1) + (1,1)^2 = 0,11 + 1,21 = 1,32$$

$$(\epsilon) (2,2) \times \left(\frac{30}{33} \right) = (2,2) \times \frac{1}{1,1} = 2$$

Θέμα 2

Κάποιος αγόρασε μια συσκευή και αρχικά ο πωλητής του έκανε έκπτωση 20%. Μετά ο ιδιοκτήτης του καταστήματος του έκανε έκπτωση 10% στην τιμή που του πρόσφερε ο πωλητής.

(α) Να υπολογισθεί η έκπτωση στην αρχική τιμή.

(β) Ο αγοραστής αποφασίζει να αγοράσει ακόμη μια συσκευή, την ίδια με την πρώτη και το κατάστημα του την προσφέρει με έκπτωση 40%. Αν πλήρωσε και για τις δύο συσκευές 264 ευρώ, να βρεθεί η τιμή πώλησης της συσκευής.

Λύση Θέματος 2

(α) Αν X είναι η αρχική τιμή της συσκευής, τότε η τιμή αγοράς μετά την έκπτωση του πωλητή είναι $0,8X$. Μετά την έκπτωση και του ιδιοκτήτη, η τιμή αγοράς είναι $(0,9)(0,8X)$, δηλαδή $0,72X$. Άρα η συσκευή αγοράζεται με έκπτωση 28% πάνω στην αρχική τιμή.

(β) Για τη δεύτερη συσκευή ο αγοραστής πληρώνει $0,6X$. Επομένως και για τις δύο πληρώνει

$$0,72X + 0,6X = 1,32X.$$

Αφού $1,32X = 264$ ευρώ τότε $X = 200$ ευρώ.

Θέμα 3

Ισόπλευρο τρίγωνο και τετράγωνο έχουν τις ίδιες περιμέτρους.

(α) Αν η πλευρά του τετραγώνου αυξηθεί κατά 25%, πόσο πρέπει να αυξηθεί η πλευρά του τριγώνου ώστε τα δύο σχήματα να εξακολουθούν να έχουν την ίδια περίμετρο;

(β) Αν η πλευρά του τριγώνου είναι a , να υπολογισθεί το εμβαδόν του τριγώνου.

(γ) Να υπολογισθεί ο λόγος του εμβαδού του τριγώνου προς το εμβαδόν του τετραγώνου.

Λύση Θέματος 3

(α) Αν a είναι η πλευρά του τριγώνου και b η πλευρά του τετραγώνου ισχύει ότι $3a = 4b$. Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι αν το b αυξηθεί κατά 25%, δηλαδή η πλευρά του τετραγώνου γίνει $1,25b$, για να διατηρηθεί η ισότητα των δύο περιμέτρων, πρέπει και το a να αυξηθεί κατά 25%.

(β) Αν ν είναι το ύψος του τριγώνου, τότε $\frac{\nu}{a} = \eta\mu 60^\circ = 0,9$ (η προσεγγιστική τιμή που δίνεται στο τυπολόγιο) και επομένως $\nu = 0,9a$.

Άρα το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E = \frac{1}{2} \times a \times \nu = \frac{1}{2} \times a \times (0,9)a = 0,45a^2$.

(γ) Από το (β) έχουμε ότι $E_{\tau\rho} = 0,45a^2$. Επίσης αν b είναι η πλευρά του τετραγώνου τότε $E_{\tau\epsilon\tau\rho} = b^2$. Τότε:

$$\frac{E_{\tau\rho}}{E_{\tau\epsilon\tau\rho}} = \frac{0,45a^2}{b^2}. \quad (*)$$

Όμως, αφού $3a = 4b$, τότε $\frac{a}{b} = \frac{4}{3}$. Αντικαθιστώντας στην (*), βρίσκουμε ότι

$$\frac{E_{\tau\rho}}{E_{\tau\epsilon\tau\rho}} = \frac{0,45a^2}{b^2} = 0,45 \times \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 0,45 \times \frac{16}{9} = (0,05) \times 16 = 0,8.$$

Θέμα 4

Κλειστό ντεπόζιτο, το ντεπόζιτο Α, έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μήκος βάσης διπλάσιο από το πλάτος της και ύψος τριπλάσιο από το πλάτος της βάσης. Το ντεπόζιτο είναι γεμάτο με νερό. Το νερό μεταφέρεται σε κλειστό κυβικό δοχείο, το ντεπόζιτο Β, με ακμή που έχει μήκος διπλάσιο από το πλάτος της βάσης του ντεπόζιτου Α. Η ολική επιφάνεια του ντεπόζιτου Β είναι κατά 72 τετραγωνικά εκατοστά μεγαλύτερη από την ολική επιφάνεια του ντεπόζιτου Α.

(α) Να υπολογισθούν οι διαστάσεις του ντεπόζιτου Α.

(β) Να υπολογισθεί το ύψος του νερού στο ντεπόζιτο Β.

(γ) Στο ντεπόζιτο Α που έχει αδειάσει, τοποθετούνται K όμοιοι κύβοι άσπρου χρώματος και το ντεπόζιτο γεμίζει πλήρως και ακριβώς (δηλαδή χωρίς να υπάρχει καθόλου κενός χώρος). Στη συνέχεια οι κύβοι αφαιρούνται και το ντεπόζιτο γεμίζει πλήρως και ακριβώς με όμοιους κύβους κίτρινου χρώματος αλλά με ακμή που είναι ίση με τη μισή της ακμής των άσπρων κύβων. Να υπολογισθεί ο αριθμός των κίτρινων κύβων.

Λύση Θέματος 4

Έστω a το πλάτος της βάσης του ντεπόζιτου Α. Τότε το μήκος της βάσης του είναι $2a$ και το ύψος $3a$. Επίσης η ακμή του ντεπόζιτου Β είναι $2a$.

(α) Η ολική επιφάνεια του ντεπόζιτου Α είναι:

$$E_{ολ}^{(A)} = 2(a \times 2a + a \times 3a + 2a \times 3a) = 22a^2.$$

Η ολική επιφάνεια του ντεπόζιτου Β είναι:

$$E_{ολ}^{(B)} = 6(2a)^2 = 24a^2.$$

Επειδή $E_{ολ}^{(B)} = E_{ολ}^{(A)} + 72$ τότε $24a^2 = 22a^2 + 72$, δηλαδή $2a^2 = 72$ και επομένως $a = 6$.

Άρα οι διαστάσεις του ντεπόζιτου Α είναι 6, 12, 18 (εκατοστά).

(β) Αφού το ντεπόζιτο Α ήταν γεμάτο με νερό, ο όγκος του νερού είναι $a \times (2a) \times (3a) = 6a^3$.

Έστω ν το ύψος του νερού στο ντεπόζιτο Β. Τότε θα πρέπει: $(2a) \times (2a) \times \nu = 6a^3$.

Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $\nu = \frac{3}{2}a$.

(γ) Αφού ένας κίτρινος κύβος έχει ακμή που είναι η μισή της ακμής του άσπρου κύβου, τότε για να καλυφθεί ο χώρος που καταλαμβάνει ένας άσπρος κύβος χρειάζονται 8 κίτρινοι. Επομένως για να καλυφθεί ο χώρος του ντεπόζιτου Α χρειάζονται 8K κίτρινοι κύβοι.

Θέμα 5

Σε κυκλική πίστα μήκους 800 μέτρων ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο δύο αυτοκίνητα με σταθερή αλλά διαφορετική ταχύτητα το καθένα. Όταν κινούνται στην ίδια κατεύθυνση, συναντώνται κάθε 40 δευτερόλεπτα, ενώ όταν κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση συναντώνται κάθε 10 δευτερόλεπτα.

(α) Να υπολογισθούν οι ταχύτητες των δύο αυτοκινήτων.

(β) Τα δύο αυτοκίνητα ξεκινούν ταυτόχρονα από το ίδιο σημείο, το καθένα με σταθερή ταχύτητα, αλλά αυξημένη κατά δέκα μέτρα το δευτερόλεπτο από την ταχύτητα που έχει υπολογισθεί για το καθένα στο (α). Να βρεθεί σε πόσο χρόνο θα συναντηθούν για πρώτη φορά αν (i) κινούνται στην ίδια κατεύθυνση, (ii) κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Λύση Θέματος 5

(α) Έστω V_1 και V_2 οι ταχύτητες των δύο αυτοκινήτων με V_1 να συμβολίζει την ταχύτητα του ταχύτερου αυτοκινήτου. Όταν κινούνται στην ίδια κατεύθυνση, μόλις συναντηθούν το ένα έχει καλύψει απόσταση $40V_1$ και το άλλο $40V_2$ και η διαφορά των δύο αποστάσεων είναι το μήκος της πίστας (αφού το ταχύτερο θα έχει καλύψει το μήκος της πίστας συν την απόσταση που έχει καλύψει το άλλο αυτοκίνητο), δηλαδή $40V_1 - 40V_2 = 800$ και επομένως

$$V_1 - V_2 = 20 \quad (1)$$

Όταν κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση, μόλις συναντηθούν το ένα έχει καλύψει απόσταση $10V_1$ και το άλλο απόσταση $10V_2$ και το άθροισμα των δύο αποστάσεων είναι το μήκος της πίστας, δηλαδή $10V_1 + 10V_2 = 800$ και επομένως

$$V_1 + V_2 = 80 \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι $V_1 = 50 \text{ m/sec}$ και $V_2 = 30 \text{ m/sec}$.

(β) Οι ταχύτητες των δύο αυτοκινήτων γίνονται 60 m/sec και 40 m/sec αντίστοιχα.

(i) Έστω ότι κινούνται στην ίδια κατεύθυνση. Τότε, λόγω σταθερότητας της ταχύτητας, θα συναντηθούν σε 40 δευτερόλεπτα, όπως και πριν.

(ii) Έστω ότι κινούνται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Έστω t ο χρόνος συνάντησής τους. Η απόσταση που καλύπτει το ένα όταν συναντηθούν είναι $60t$ και το άλλο $40t$. Αλλά το άθροισμα των αποστάσεων είναι το μήκος της πίστας, δηλαδή,

$$60t + 40t = 800$$

και επομένως $t = 8 \text{ sec}$.

Θέμα 6

Ο Αρχηγός Αστυνομίας θέλει να μελετήσει το χρόνο απουσίας των αστυνομικών από την εργασία τους με άδεια ασθενείας κατά τη διάρκεια ενός έτους. Για ένα τυχαίο δείγμα 19 αστυνομικών της Αστυνομικής Διεύθυνσης Λεμεσού ο αριθμητικός μέσος είναι 5,1 μέρες, η διάμεσος 4 μέρες και η επικρατούσα τιμή 0 μέρες. Για ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους 31 αστυνομικών της Αστυνομικής Διεύθυνσης Λευκωσίας ο αριθμητικός μέσος ήταν 7,1 μέρες, η διάμεσος 4 μέρες και η επικρατούσα τιμή 2 μέρες.

(α) Ο Αρχηγός Αστυνομίας μελετώντας τα στοιχεία και θεωρώντας τα αντιπροσωπευτικά, έχει την άποψη ότι και για τις δύο αστυνομικές διευθύνσεις, είναι πιο σύνθητες φαινόμενο κατά τη διάρκεια ενός έτους κάποιος αστυνομικός να απουσιάσει με άδεια ασθενείας (έστω και μια μέρα) παρά να μην απουσιάσει. Είναι ορθή η άποψη του Αρχηγού; Να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

(β) Ο Αρχηγός δεν ενδιαφέρεται για τις δύο αστυνομικές διευθύνσεις ξεχωριστά αλλά και για τις δύο μαζί. Έτσι τα δύο δείγματα ενώνονται και αποτελούν ένα ενιαίο δείγμα.

(i) Να βρεθεί ο αριθμητικός μέσος του ενιαίου δείγματος. Αν δεν μπορεί να υπολογισθεί, να δικαιολογηθεί η απάντησή σας.

(ii) Να βρεθεί η επικρατούσα τιμή του ενιαίου δείγματος. Αν δεν μπορεί να υπολογισθεί να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

(iii) Να βρεθεί η διάμεσος του ενιαίου δείγματος. Αν δεν μπορεί να υπολογισθεί να δικαιολογηθεί πλήρως η απάντησή σας.

Λύση Θέματος 6

(α) Από τη στιγμή που η διάμεσος είναι και για τις δύο αστυνομικές διευθύνσεις 4 μέρες σημαίνει ότι αν τα δείγματα είναι αντιπροσωπευτικά, το ποσοστό αυτών που απουσιάζουν με μηδέν μέρες, δηλαδή δεν απουσιάζουν καθόλου με άδεια ασθενείας, είναι μικρότερο από το 50%. Συνεπώς το συμπέρασμα του Αρχηγού είναι ορθό.

(β)

(i) Ο αριθμητικός μέσος του ενιαίου δείγματος είναι $\frac{19 \times (5,1) + 31 \times (7,1)}{19 + 31} = 6,34$.

(ii) Η επικρατούσα τιμή του ενιαίου δείγματος δεν μπορεί να υπολογισθεί αφού γι' αυτό θα χρειαζόταν να έχουμε τις συχνότητες των παρατηρήσεων των δύο δειγμάτων.

(iii) Το ενιαίο δείγμα αποτελείται από 50 παρατηρήσεις και συνεπώς η διάμεσος είναι ο μέσος όρος της 25^{ης} και 26^{ης} παρατήρησης. Από τη στιγμή που το μέγεθος του κάθε δείγματος είναι περιττός αριθμός, σημαίνει ότι η τιμή 4 είναι η μεσαία παρατήρηση και για τα δύο δείγματα. Άρα η 25^η και η 26^η παρατήρηση είναι ίσες με την τιμή 4. Συνεπώς η διάμεσος του ενιαίου δείγματος είναι 4.