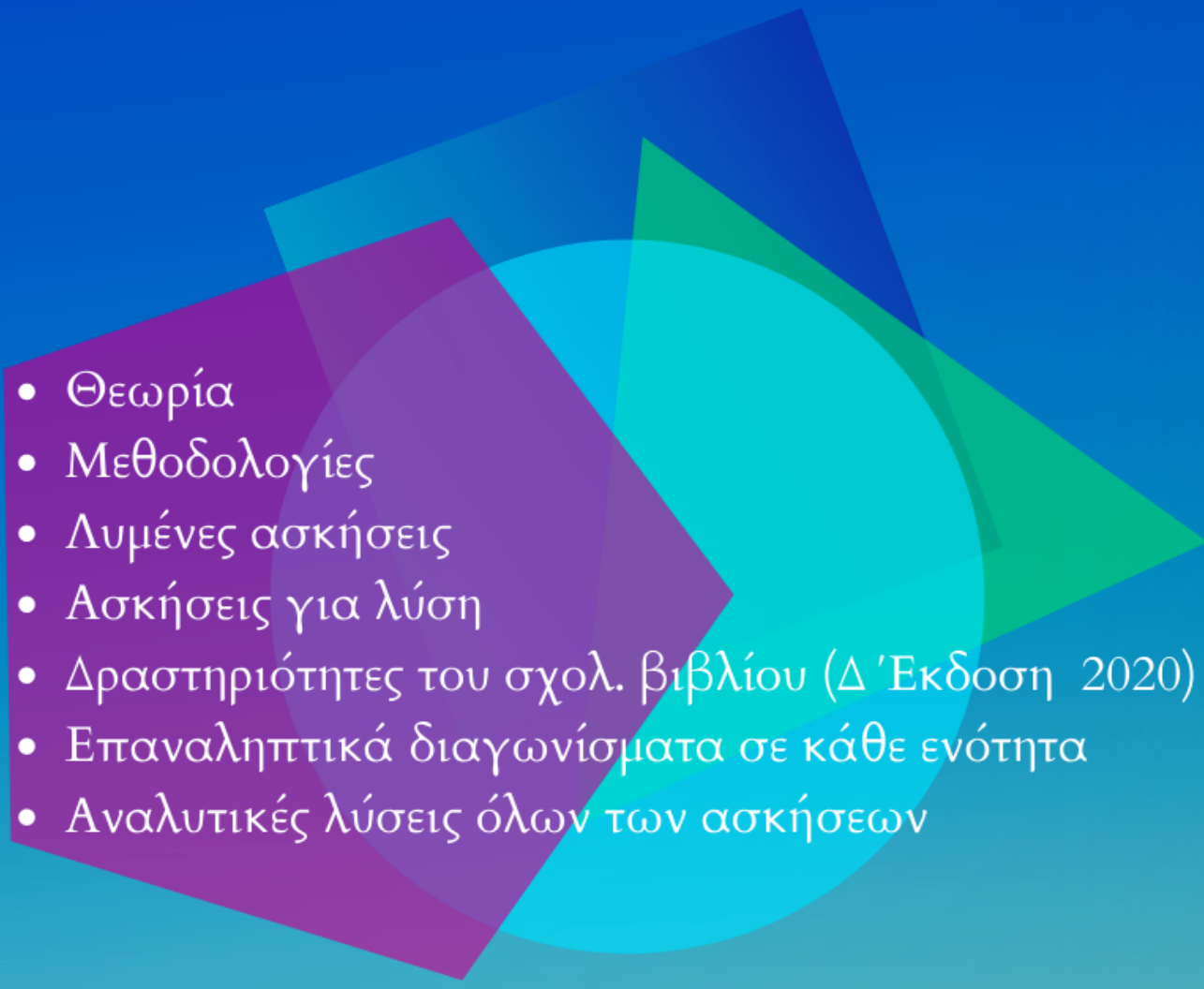


Χατζηιωαννίδης Γιώργος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Α' ΤΕΥΧΟΣ

- 
- Θεωρία
 - Μεθοδολογίες
 - Λυμένες ασκήσεις
 - Ασκήσεις για λύση
 - Δραστηριότητες του σχολ. βιβλίου (Δ' Έκδοση 2020)
 - Επαναληπτικά διαγωνίσματα σε κάθε ενότητα
 - Αναλυτικές λύσεις όλων των ασκήσεων

Γιώργος Χατζιωαννίδης

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου

Προσανατολισμού

Α΄ τεύχος

- ✓ Θεωρία
- ✓ Μεθοδολογίες
- ✓ Λυμένες ασκήσεις
- ✓ Ασκήσεις για λύση
- ✓ Δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου (Δ΄ έκδοση 2020)
- ✓ Επαναληπτικά διαγωνίσματα σε κάθε ενότητα
- ✓ Αναλυτικές λύσεις των ασκήσεων και των διαγωνισμάτων

Απαγορεύεται η
αναδημοσίευση και γενικά
η ολική, μερική ή
περιληπτική αναπαραγωγή
και μετάδοση έστω και
μιας σελίδας του παρόντος
βιβλίου κατά παράφραση ή
διασκευή, ή απόδοση του
περιεχομένου με
οποιοδήποτε τρόπο,
μηχανικό, ηλεκτρονικό,
φωτοτυπικό ή άλλο, χωρίς
τη γραπτή έγκριση ή άδεια
του συγγραφέα.

Μαθηματικά Α Λυκείου
Προσανατολισμού
Α΄ τεύχος

Χατζιωαννίδης Γιώργος
Τηλ: 96237943
email: gchatziioannidis@gmail.com

Σελίδες: 534 Σχήμα 21×28

ISBN: 978-9925-580-64-4

© Copyright 2020,

Χατζιωαννίδης Γιώργος

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με σκοπό να βοηθήσει το μαθητή στην καθημερινή του μελέτη. Κάθε κεφάλαιο είναι γραμμένο με τέτοιο τρόπο ώστε ο μαθητής να ξεκινά από τη θεωρία και απλές εφαρμογές της, να συνεχίζει με τις μεθοδολογίες των βασικών ασκήσεων και να φτάνει στο τέλος να λύνει πιο σύνθετα θέματα που συνδυάζουν τις απλές μεθοδολογίες.

Όλες οι ασκήσεις που δίνονται στο βιβλίο είναι λυμένες αναλυτικά στις σελίδες που ακολουθούν ώστε να μπορεί ο μαθητής να ελέγξει την ορθότητα του αποτελέσματος και της πορείας επίλυσης που ακολούθησε, αλλά και να βοηθηθεί σε περίπτωση που συναντήσει κάποια δυσκολία.

Μετά τη μελέτη κάθε κεφαλαίου ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση να λύνει μόνος του τις δραστηριότητες του αντίστοιχου κεφαλαίου του σχολικού βιβλίου. Οι αναλυτικές λύσεις των δραστηριοτήτων δίνονται με σκοπό να μπορεί να ελέγξει ο μαθητής την εργασία του.

Κάθε κεφάλαιο του βιβλίου περιλαμβάνει:

- Συνοπτική θεωρία και απλές εφαρμογές
- Μεθοδολογίες
- Λυμένες ασκήσεις αναλυτικά με επεξηγήσεις
- Ασκήσεις για λύση από το μαθητή
- Αναλυτικές λύσεις των ασκήσεων
- Δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου λυμένες αναλυτικά
- Επαναληπτικά διαγωνίσματα σε κάθε ενότητα
- Επαναληπτικά διαγωνίσματα σε όλη την ύλη του τετραμήνου.

Το παρόν βοήθημα συγγράφηκε και χωρίστηκε σε κεφάλαια με βάση την Δ΄ Έκδοση 2020 του σχολικού βιβλίου.

Γιώργος Α. Χατζιωαννίδης

Περιεχόμενα

Επανάληψη - Από το Γυμνάσιο στο Λύκειο	6
Πραγματικοί αριθμοί	24
1.1 Η έννοια της νιοστής ρίζας.....	24
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 24	36
1.2 Ιδιότητες νιοστής ρίζας.....	42
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 30	57
1.3 Δυνάμεις με ρητό εκθέτη.....	64
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 35	70
1.4 Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό	75
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 40	84
1.5 Διάταξη πραγματικών αριθμών	90
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 50	113
Επανάληψη στους Πραγματικούς αριθμούς.....	123
Δραστηριότητες Ενότητας σελ. 56.....	128
Δραστηριότητες Εμπλουτισμού σελ. 61.....	147
Τριγωνομετρία.....	165
2.1 Το ακτίδιο ως μονάδα μέτρησης γωνιών.....	165
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 69	167
2.2 Γωνία σε κανονική θέση.....	173
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 74	178
2.3 Τριγωνομετρικοί αριθμοί γωνίας σε κανονική θέση	184
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 79	190
2.4 Τριγωνομετρικός κύκλος.....	198
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 92	208
2.5 Τριγωνομετρικές συναρτήσεις – Σχέσεις μεταξύ τριγωνομετρικών αριθμών γωνιών που έχουν άθροισμα ή διαφορά 0° , 90° , 180° , 270° , 360°	213
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 108	236
2.6 Τριγωνομετρικές ταυτότητες.....	245
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 117	283
Επανάληψη στην Τριγωνομετρία	297
Δραστηριότητες ενότητας σχολικού βιβλίου σελ. 124.....	305
Δραστηριότητες εμπλουτισμού σχολικού βιβλίου σελ. 130	322

Κύκλος.....	337
3.1 Σχετική θέση δύο κύκλων	337
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 144	346
3.2 Εγγεγραμμένες – Επίκεντρες γωνίες	352
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 157	367
3.3 Θεώρημα Χορδής και Εφαπτομένης	372
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 163	386
Επανάληψη στον κύκλο	390
Δραστηριότητες ενότητας σελ. 171.....	396
Δραστηριότητες εμπλουτισμού σελ. 177	408
 Διανύσματα	 421
4.1 Η έννοια του διανύσματος.....	421
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 188	429
4.2 Πράξεις με διανύσματα	434
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 199	444
4.3 Διανυσματική ακτίνα σημείου – Διανύσματα σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων	448
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 211	472
Επανάληψη στα Διανύσματα.....	482
Δραστηριότητες Ενότητας σελ. 217	488
Δραστηριότητες εμπλουτισμού σελ. 222	496
 Επαναληπτικές ασκήσεις Α΄ τετραμήνου	 508
Επαναληπτικά διαγωνίσματα Α΄ τετραμήνου	515

Επανάληψη - Από το Γυμνάσιο στο Λύκειο

Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 8

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ και να δώσετε τις απαντήσεις σας στην πιο απλή μορφή.

Λύση

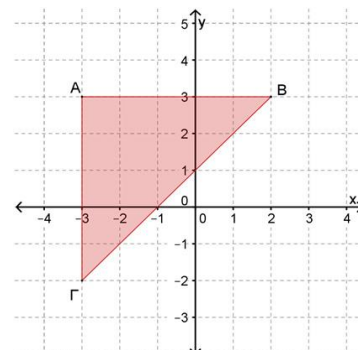
Τα σημεία έχουν συντεταγμένες: Α(-3,3),

Β(2,3), Γ(-3,-2).

$$(AB) = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (3 - 3)^2} = \sqrt{5^2} = 5\mu.$$

$$(AG) = \sqrt{(-3 - (-3))^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{5^2} = 5\mu.$$

$$(BG) = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{2 \cdot 25} = 5\sqrt{2}\mu.$$



Η απόσταση δύο σημείων $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ δίνεται από τον τύπο:

$$(AB) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

2. Να τοποθετήσετε σε αριθμητική γραμμή τους πιο κάτω αριθμούς:

$$\sqrt{5}, \sqrt[3]{5}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{29}, \sqrt{29}$$

Λύση

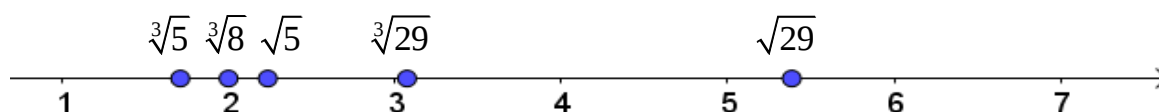
Θα υπολογίσουμε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραπάνω αριθμοί, συγκρίνοντάς τους με γνωστές ρίζες ίδιου βαθμού.

$$\text{Είναι: } \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \Rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3, \quad \sqrt[3]{1} < \sqrt[3]{5} < \sqrt[3]{8} \Rightarrow 1 < \sqrt[3]{5} < 2$$

$$\sqrt[3]{8} = 2, \quad \sqrt[3]{27} < \sqrt[3]{29} < \sqrt[3]{64} \Rightarrow 3 < \sqrt[3]{29} < 4 \Rightarrow$$

$$\sqrt{25} < \sqrt{29} < \sqrt{36} \Rightarrow 5 < \sqrt{29} < 6$$

Επομένως οι αριθμοί τοποθετούνται στην ευθεία των πραγματικών αριθμών όπως φαίνεται παρακάτω:



3. Η οργανωτική επιτροπή μιας συναυλίας θέλει να τοποθετήσει 900 καθίσματα σε ένα κλειστό γήπεδο. Τα καθίσματα θα τοποθετηθούν σε τετράγωνη διάταξη. Πόσα καθίσματα θα τοποθετήσουν σε κάθε σειρά;

Λύση

Αν τοποθετήσουμε n καθίσματα σε κάθε σειρά και θέλουμε να έχουμε τετραγωνική διάταξη, πρέπει να σχηματίσουμε n σειρές και συνολικά θα έχουμε $n \times n = n^2$ καθίσματα.

Επομένως είναι $n^2 = 900 \Rightarrow n = \sqrt{900} \Rightarrow n = 30$ καθίσματα

4. Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν ενός κυκλικού χαλιού που έχει διάμετρο 10m.

Λύση

Η διάμετρος είναι διπλάσια της ακτίνας, άρα $R = \frac{d}{2} = \frac{10}{2} = 5\text{m}$

$$\Pi_{\text{κύκλου}} = \Gamma = 2\pi R = 2 \cdot \pi \cdot 5 = 10\pi\text{m}$$

$$E_{\text{κύκλου}} = \pi R^2 = \pi \cdot 5^2 = 25\pi\text{m}^2$$

5. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α) $2x - 6 = 4x - 2$

β) $3(x - 4) = 2x - 5$

γ) $5(x + 3) = 5x + 3$

δ) $\frac{\alpha - 1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{6}$

Λύση

α) $2x - 6 = 4x - 2 \Rightarrow 2x - 4x = 6 - 2 \Rightarrow -2x = 4 \Rightarrow x = -2$

β) $3(x - 4) = 2x - 5 \Rightarrow 3x - 12 = 2x - 5 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 3x - 2x = 12 - 5 \Rightarrow x = 7$

γ) $5(x + 3) = 5x + 3 \Rightarrow 5x + 15 = 5x + 3 \Rightarrow 5x - 5x = 3 - 15 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0x = -12 \quad (\text{αδύνατη εξίσωση})$$

$$\delta) \quad \frac{\alpha-1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{\alpha}{3} + \frac{1}{6} \xrightarrow{\cdot 6} 6 \cdot \frac{\alpha-1}{3} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 6 \cdot \frac{\alpha}{3} + 6 \cdot \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \frac{\alpha-1}{1} + \frac{6}{1} = 2 \cdot \frac{\alpha}{1} + \frac{1}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(\alpha-1) + 6 = 2\alpha + 1 \Rightarrow 2\alpha - 2 + 6 = 2\alpha + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\alpha - 2\alpha = 2 - 6 + 1 \Rightarrow 0 \cdot \alpha = 0 \quad (\text{αόριστη εξίσωση})$$

Υπενθύμιση

Οι εξισώσεις της μορφής
 $0x = 0$ ονομάζονται
αόριστες και έχουν
 άπειρες λύσεις.

Οι εξισώσεις της μορφής
 $0x = \beta, \beta \neq 0$
 ονομάζονται **αδύνατες**
 και δεν έχουν λύσεις.

6. Να προσδιορίσετε τον αριθμό λ σε καθεμιά από τις πιο κάτω εξισώσεις, έτσι ώστε οι εξισώσεις να είναι αδύνατες.

α) $(\lambda - 3)x = 7$

β) $3x + \lambda x + 6 = 15 - 6x$

Λύση

α) Οι αδύνατες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις της μορφής $0x = \alpha, \alpha \neq 0$.

Επομένως πρέπει $\lambda - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

β) Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $ax = \beta$:

$$3x + \lambda x + 6 = 15 - 6x \Rightarrow 3x + \lambda x + 6x = 15 - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (9 + \lambda)x = 9 \quad \text{άρα πρέπει } 9 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -9$$

7. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α σε καθεμιά από τις πιο κάτω εξισώσεις, έτσι ώστε οι εξισώσεις να είναι αόριστες.

α) $(\alpha + 3)x = 0$

β) $\alpha x = 6x$

Λύση

Οι αόριστες εξισώσεις είναι οι εξισώσεις της μορφής $0x = 0$

α) Άρα πρέπει $\alpha + 3 = 0 \Rightarrow \alpha = -3$

β) Φέρνουμε την εξίσωση στη μορφή $\alpha x = \beta$:

$$\alpha x = 6x \Rightarrow \alpha x - 6x = 0 \Rightarrow (\alpha - 6)x = 0$$

Άρα για να είναι αόριστη πρέπει να είναι: $\alpha - 6 = 0 \Rightarrow \alpha = 6$

8. Να εξετάσετε για ποιες πραγματικές τιμές του x ορίζεται η καθεμιά από τις παραστάσεις:

$$A = \sqrt{3x - 2}$$

$$B = \sqrt{20 - 5x}$$

Λύση

Για να έχει νόημα η τετραγωνική ρίζα ενός αριθμού, πρέπει η υπόρριζη ποσότητα να είναι μη-αρνητική ($\sqrt{A} \Rightarrow A \geq 0$)

$$\text{Για το A: } 3x - 2 \geq 0 \Rightarrow 3x \geq 2 \Rightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

$$\text{Για το B: } 20 - 5x \geq 0 \Rightarrow -5x \geq -20 \xRightarrow{*} \frac{-5x}{-5} \leq \frac{-20}{-5} \Rightarrow x \leq 4$$

** (όταν διαιρούμε μια ανίσωση με αρνητικό αριθμό, αλλάζει η φορά)*

9. Δίνονται οι ανισώσεις $3x - 4 \geq x - 2$ και $2x + 3 < 13$.

α) Να βρείτε τις λύσεις της κάθε ανίσωσης.

β) Να παραστήσετε τη κοινή λύση των δύο ανισώσεων στην ευθεία των πραγματικών αριθμών.

γ) Ποια είναι η μικρότερη τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις;

δ) Να βρείτε 4 άλλες λύσεις που ικανοποιούν και τις δύο ανισώσεις.

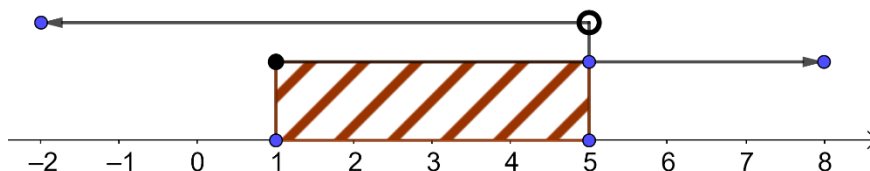
ε) Να βρείτε τη μεγαλύτερη ακέραια τιμή του x που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις.

Λύση

$$\text{α)} \quad 3x - 4 \geq x - 2 \Rightarrow 3x - x \geq 4 - 2 \Rightarrow 2x \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$$

$$2x + 3 < 13 \Rightarrow 2x < 13 - 3 \Rightarrow 2x < 10 \Rightarrow x < 5$$

β)



Οι κοινές λύσεις των δύο ανισώσεων είναι: $1 \leq x < 5$.

γ) μικρότερη κοινή λύση είναι το 1

δ) Άλλες 4 κοινές λύσεις είναι οι: $\left\{ \frac{3}{2}, 2, 3, 4, \right\}$

ε) η μεγαλύτερη ακέραια τιμή που ικανοποιεί και τις δύο ανισώσεις είναι το 4, αφού το 5 δεν ανήκει στις κοινές λύσεις.

10. Να υπολογίσετε τις κλίσεις των πιο κάτω ευθειών και να τις παραστήσετε γραφικά:

α) $y = x + 2$

β) $y = 2x$

γ) $y = 3x - 2$

δ) $y + 3x = 1$

ε) $y = 2$

στ) $x = 3$

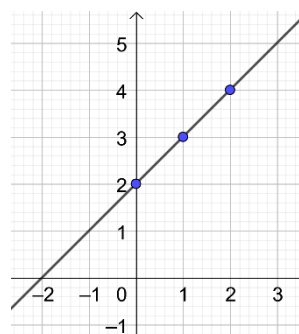
Λύση

Για να παραστήσουμε γραφικά τις ευθείες χρησιμοποιούμε σε κάθε περίπτωση ένα πίνακα αντίστοιχων τιμών.

α) $y = x + 2$

Έχει κλίση $\lambda = 1$,

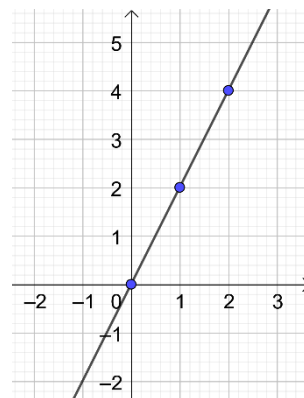
x	0	1	2
y	2	3	4



β) $y = 2x$

Έχει κλίση $\lambda = 2$,

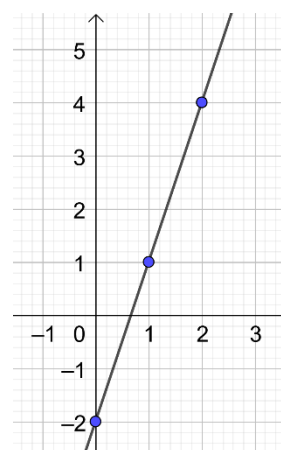
x	0	1	2
y	0	2	4



γ) $y = 3x - 2$

Έχει κλίση $\lambda = 3$

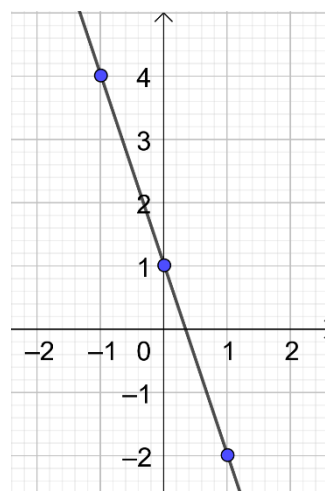
x	0	1	2
y	-2	1	4



δ) $y + 3x = 1$

η ευθεία γράφεται: $y = -3x + 1$, άρα $\lambda = -3$

x	-1	0	1
y	4	1	-2

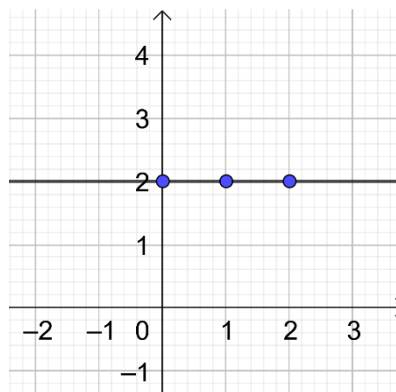


ε) $y = 2$

οι ευθείες της μορφής $y = a$ έχουν κλίση ίση με μηδέν

x	0	1	2
y	2	2	2

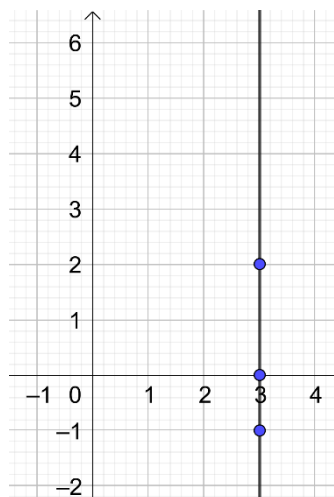
(η γραφική παράσταση κάθε ευθείας της μορφής $y = a$ είναι μια οριζόντια ευθεία)



στ) $x = 3$

για τις ευθείες της μορφής $x = a$ δεν ορίζεται κλίση.

(η γραφική παράσταση κάθε ευθείας της μορφής $x = a$ είναι μια κατακόρυφη ευθεία)



11. Η ευθεία $y = ax$ περνά από το σημείο $A(-1, 3)$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του a .

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες δύο σημείων που ανήκουν στην ευθεία $y = ax$.

Λύση

α) Επειδή η ευθεία περνά από το σημείο A , οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

$$\text{Άρα } 3 = a(-1) \Rightarrow 3 = -a \Rightarrow a = -3$$

β) Έχουμε την ευθεία $y = -3x$

Υπενθύμιση

Αν μια ευθεία περνάει από ένα σημείο, τότε οι συντεταγμένες του σημείου θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

Για να βρούμε σημεία της ευθείας δίνουμε τυχαίες τιμές στο x :

για $x = 0$ είναι $y = -3 \cdot 0 = 0$ άρα το σημείο $O(0,0)$

για $x = 1$ είναι $y = -3 \cdot 1 = -3$ άρα το σημείο $B(1,-3)$.

12. Η γραφική παράσταση της ευθείας $y = -2x + \beta$ περνά από το σημείο $A(-2,6)$. Να υπολογίσετε την τιμή του β .

Λύση

Οι συντεταγμένες του σημείου θα επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.

$$\text{Άρα: } 6 = -2(-2) + \beta \Rightarrow 6 = 4 + \beta \Rightarrow \beta = 2$$

13. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία:

α) $(0,1)$ και $(2,4)$ **β)** $(0,4)$ και $(1,4)$

Λύση

α) Έστω $\varepsilon: y = ax + \beta$ η ζητούμενη ευθεία.

Περνάει από το $(0,1)$, άρα θα είναι $\beta = 1$

$$\text{Έχει κλίση } \lambda = \frac{4-1}{2-0} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Άρα έχει εξίσωση: } \varepsilon: y = \frac{3}{2}x + 1$$

β) Έστω $\varepsilon: y = ax + \beta$ η εξίσωση.

Περνάει από το $(0,4)$, άρα θα είναι $\beta = 4$

$$\lambda = \frac{4-4}{1-0} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{άρα θα είναι η ευθεία } \varepsilon: y = 4$$

Υπενθύμιση

Η ευθεία $y = ax + \beta$ τέμνει τον άξονα των y στο $(0, \beta)$.

Η κλίση της ευθείας που περνάει από τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$

$$\text{έχει τιμή: } \lambda = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

14. Να λύσετε τα πιο κάτω συστήματα εξισώσεων:

α)
$$\begin{aligned} y &= 3 + x \\ x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

β)
$$\begin{aligned} y - 2x &= 0 \\ 2x + y &= 3 \end{aligned}$$

Λύση

α) Αντικαθιστούμε την 1^η εξίσωση στη 2^η και έχουμε:

$$x + 2(3 + x) = 6 \Rightarrow x + 6 + 2x = 6 \Rightarrow 3x = 6 - 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{0}{3} \Rightarrow x = 0$$

Επομένως αντικαθιστώντας στην 1^η: $y = 3 + 0 \Rightarrow y = 3$

Άρα η λύση του συστήματος είναι: $(x, y) = (0, 3)$

β)
$$\left\{ \begin{array}{l} y - 2x = 0 \\ 2x + y = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x + y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{array} \right\} \quad (+) \quad (\text{προσθέτουμε κατά μέλη})$$

$$\cancel{0x} + 2y = 3 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$$

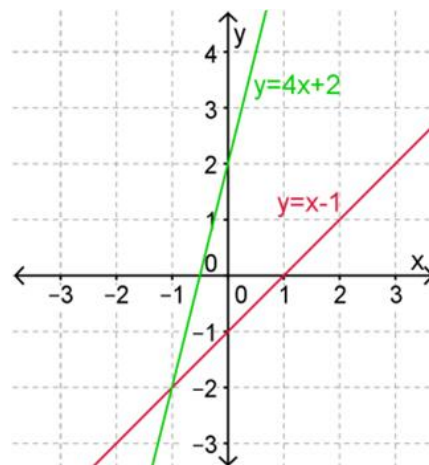
Αντικαθιστούμε στην 1^η και έχουμε: $\frac{3}{2} - 2x = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} = 2x \Rightarrow x = \frac{3}{4}$

Άρα η λύση του συστήματος είναι: $(x, y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right)$.

15. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των ευθειών

$\varepsilon_1 : y = x - 1$ και $\varepsilon_2 : y = 4x + 2$.

Να λύσετε γραφικά το σύστημα:
$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$



Λύση

Για να λύσουμε γραφικά ένα σύστημα εξισώσεων δύο ευθειών, τοποθετούμε τις δύο ευθείες σε σύστημα συντεταγμένων.

Η λύση του συστήματος είναι το σημείο τομής των δύο ευθειών, άρα σε αυτό το παράδειγμα η λύση είναι το σημείο $(-1, -2)$.

16. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

α) $(x+2)^2$

β) $(2x-3y)^2$

γ) $\left(\frac{x}{2}-2\right)^2$

δ) $(x-3)(x+3)$

ε) $(x+4)^3$

στ) $(2x-1)(2x+1)$

Λύση

α) $(x+2)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2 = x^2 + 4x + 4$

β) $(2x-3y)^2 = (2x)^2 - 2 \cdot (2x) \cdot (3y) + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

γ) $\left(\frac{x}{2}-2\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot 2 + 2^2 = \frac{x^2}{4} - 2x + 4$

δ) $(x-3)(x+3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

ε) $(x+4)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 4 + 3 \cdot x \cdot 4^2 + 4^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

στ) $(2x-1)(2x+1) = (2x)^2 - 1^2 = 4x^2 - 1$

17. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha+1)^2 - (\alpha+1)(\alpha-1) = 2(\alpha+1)$

Λύση

$$\begin{aligned} \text{Α.Μ.} &= (\alpha+1)^2 - (\alpha+1)(\alpha-1) = \\ &= \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot 1 + 1^2 - (\alpha^2 - 1^2) = \alpha^2 + 2\alpha + 1 - \alpha^2 + 1 = \\ &= 2\alpha + 2 = 2(\alpha+1) = \text{Β.Μ.} \end{aligned}$$

Υπενθύμιση

Για να αποδείξουμε μια ταυτότητα, ξεκινάμε από το μέλος με τις πιο πολλές πράξεις και κάνουμε πράξεις και απλοποιήσεις μέχρι να φτάσουμε στο άλλο μέλος.

18. Αν $\alpha + \beta = -\frac{1}{3}$ και $\alpha\beta = -\frac{7}{3}$, να αποδείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{43}{9}$

β) $(3\alpha + 1)^2 + (3\beta + 1)^2 + 10(\alpha + \beta) = \frac{119}{3}$

γ) $\alpha^3 + \beta^3 = -\frac{64}{27}$

Λύση

α) Κάνουμε χρήση των ταυτοτήτων:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\left(-\frac{7}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} - 2\left(-\frac{7}{3}\right) = \alpha^2 + \beta^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{9} + \frac{14}{3} \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = \frac{43}{9}$$

β) A.M. = $(3\alpha)^2 + 2 \cdot 3\alpha \cdot 1 + 1^2 + (3\beta)^2 + 2 \cdot 3\beta \cdot 1 + 1^2 + 10\left(-\frac{1}{3}\right) =$

$$= 9\alpha^2 + 6\alpha + 1 + 9\beta^2 + 6\beta + 1 - \frac{10}{3} = \cancel{9} \cdot \frac{43}{\cancel{9}} + \cancel{6}^2 \left(-\frac{1}{\cancel{3}}\right) + 2 - \frac{10}{3} =$$

$$= 43 - \cancel{2} + \cancel{2} - \frac{10}{3} = \frac{119}{3}$$

γ) $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = -\frac{1}{3}\left(\frac{43}{9} - \left(-\frac{7}{3}\right)\right) =$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{43}{9} + \frac{7}{3}\right) = -\frac{43}{27} - \frac{7}{9} = -\frac{43}{27} - \frac{21}{27} = -\frac{64}{27}$$

Υπενθύμιση

Μπορούμε να αποδείξουμε μια σχέση ως εξής:
Ξεκινάμε από μια γνωστή σχέση (συνήθως κάποια από τις γνωστές ταυτότητες) και προχωράμε με συνεπαγωγές μέχρι να καταλήξουμε στη ζητούμενη σχέση.

19. Να αναλύσετε σε γινόμενο πρώτων παραγόντων τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $2x^3 - 2x$

β) $y^2 - x^2 - 10y + 25$

γ) $\alpha^3 x^3 - \beta^3 x^3 + \alpha^3 - \beta^3$

δ) $(x-2y)^2 - (x+3y)^2$

Λύση

α) $2x^3 - 2x = 2x(x^2 - 1) = 2x(x-1)(x+1)$

β) $y^2 - x^2 - 10y + 25 = y^2 - 10y + 25 - x^2 = (y-5)^2 - x^2 =$
 $= (y-5-x)(y-5+x)$

γ) $\alpha^3 x^3 - \beta^3 x^3 + \alpha^3 - \beta^3 = x^3(\alpha^3 - \beta^3) + (\alpha^3 - \beta^3) =$
 $= (\alpha^3 - \beta^3)(x^3 + 1) = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)(x+1)(x^2 - x + 1)$

δ) $(x-2y)^2 - (x+3y)^2 = (x-2y+(x+3y))(x-2y-(x+3y)) =$
 $= (x-2y+x+3y)(x-2y-x-3y) =$
 $= (2x+y)(-5y) = -5y(2x+y)$

20. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $3x^2 - 15x = 0$

β) $x^2 + x = 6$

γ) $(\alpha-2)(2\alpha+8) = -10$

δ) $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Λύση

α) $3x^2 - 15x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-5) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x=0 \text{ ή } x-5=0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=5$

Μεθοδολογία

Για να λύσουμε εξισώσεις β' βαθμού:

- Πηγαίνουμε όλους τους όρους στο ένα μέλος
- Παραγοντοποιούμε
- Βρίσκουμε τις τιμές του αγνώστου που μηδενίζουν κάθε παράγοντα ξεχωριστά.

$A \cdot B = 0 \Leftrightarrow (A = 0 \text{ ή } B = 0)$

$$\begin{aligned}\beta) \quad x^2 + x = 6 &\Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x+3=0 \text{ ή } x-2=0) \Leftrightarrow (x=-3 \text{ ή } x=2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma) \quad (\alpha-2)(2\alpha+8) &= -10 \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 8\alpha - 4\alpha - 16 + 10 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 4\alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow 2(\alpha^2 + 2\alpha - 3) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha+3)(\alpha-1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha+3=0 \text{ ή } \alpha-1=0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (\alpha=-3 \text{ ή } \alpha=1)\end{aligned}$$

$$\delta) \quad 3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\begin{aligned}x_{1,2} &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} \begin{array}{l} \nearrow \\ \searrow \end{array} \begin{array}{l} x_1 = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{array}\end{aligned}$$

Μεθοδολογία

Οι εξισώσεις β' βαθμού της μορφής $ax^2 + bx + \gamma = 0$:

Έχουν λύσεις τους αριθμούς

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\gamma}}{2a}$$

(αρκεί να είναι $b^2 - 4a\gamma \geq 0$)

21. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$a) \quad \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2}$$

$$\beta) \quad \frac{(\alpha+1)(\alpha-2)^2 - 4(\alpha+1)}{\alpha^3 + \alpha^2}$$

Λύση

$$a) \quad \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3x + 2} = \frac{\cancel{x}(\cancel{x+2})}{(\cancel{x+2})(x+1)} = \frac{x}{x+1}$$

$$\beta) \quad \frac{(\alpha+1)(\alpha-2)^2 - 4(\alpha+1)}{\alpha^3 + \alpha^2} = \frac{(\cancel{\alpha+1})((\alpha-2)^2 - 4)}{\alpha^2(\cancel{\alpha+1})} =$$

$$= \frac{((\alpha-2)^2 - 2^2)}{\alpha^2} = \frac{(\alpha-2-2)(\alpha-2+2)}{\alpha^2} = \frac{(\alpha-4) \cdot \cancel{\alpha}}{\alpha^{\cancel{2}}} = \frac{\alpha-4}{\alpha}$$

22. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 0$

β) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x+3}$

γ) $\frac{2x-19}{x^2+x-6} - \frac{x}{2-x} = \frac{5}{x+3}$

Λύση

α) $\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4}{x^2-1} = 0 \Rightarrow$

$$\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x-1} - \frac{4}{(x-1)(x+1)} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{\overset{x-1}{\cancel{1}}}{x+1} + \frac{\overset{x+1}{\cancel{2}}}{x-1} - \frac{\overset{1}{\cancel{4}}}{(x-1)(x+1)} = 0 \Rightarrow$$

$$x-1+2(x+1)-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x-1+2x+2-4=0 \Rightarrow 3x=1-2+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=\frac{3}{3} \Rightarrow x=1 \text{ (απορρίπτεται, και επομένως δεν έχει λύσεις)}$$

$$\text{Ε.κ.π.} = (x-1)(x+1)$$

Περιορισμοί:

$$(x-1)(x+1) \neq 0 \Rightarrow$$

$$x \neq 1, x \neq -1$$

β) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x-3} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x+3} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x+3)} + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x+2}{x+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1+(x+3)(x+1) = (x-1)(x+2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1+x^2+x+3x+3 = x^2+2x-x-2 \Rightarrow$$

$$\text{Ε.κ.π.} = (x-1)(x+3)$$

Περιορισμοί:

$$(x-1)(x+3) \neq 0 \Rightarrow$$

$$x \neq 1, x \neq -3$$

$$\Rightarrow x^2 + \cancel{2x} + 1 + \cancel{x^2} + x + 3x + 3 = \cancel{x^2} + \cancel{2x} - x - 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Rightarrow (x+2)(x+3) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = -2, \quad \cancel{x = -3} \text{ απορρίπτεται. Επομένως έχουμε μία λύση, την } x = -2.$$

$$\gamma) \frac{2x-19}{x^2+x-6} - \frac{x}{2-x} = \frac{5}{x+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2x-19}{(x+3)(x-2)} + \frac{x}{x-2} = \frac{5}{x+3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-19 + (x+3)x = 5(x-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-19 + x^2 + 3x = 5x-10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x-19 + x^2 + 3x - 5x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+3) = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ή } \cancel{x = -3} \text{ (απορ.)}$$

Επομένως έχουμε μία λύση, την $x = 3$.

$$\text{Ε.κ.π.} = (x-2)(x+3)$$

Περιορισμοί:

$$(x-2)(x+3) \neq 0 \Rightarrow$$

$$x \neq 2, \quad x \neq -3$$

23. Να βρείτε δύο διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που τα τετράγωνα τους έχουν άθροισμα 145.

Λύση

Έστω x ο ένας αριθμός, τότε ο επόμενος φυσικός είναι ο $x+1$.

$$\text{Θέλουμε } x^2 + (x+1)^2 = 145 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 - 145 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 144 = 0 \Rightarrow 2(x^2 + x - 72) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(x+9)(x-8) = 0 \Rightarrow \cancel{x = -9} \text{ ή } x = 8$$

Αν είναι $x = 8$ τότε $x+1 = 9$, επομένως οι δύο αριθμοί είναι οι 8 και 9.

(Το $x = -9$ απορρίπτεται επειδή δεν είναι φυσικός αριθμός).

24. Να δείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν από τη βάση του.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $\Delta Z = EH$

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle AZ\Delta$ και $\triangle BHE$:

Είναι: $\hat{Z} = \hat{H} = 90^\circ$ (ΔZ και EH αποστάσεις)

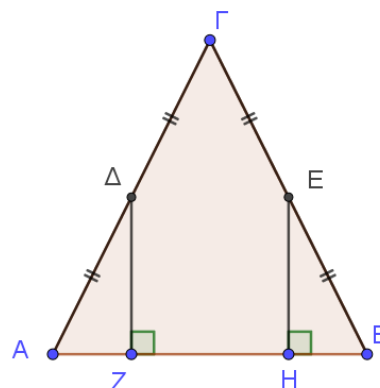
$\hat{A} = \hat{B}$ (παρά τη βάση ισοσκελούς γωνίες)

$AZ = BE$ (ως μισές ίσων πλευρών)

Επομένως έχουμε ορθογώνια με 1 πλευρά και μια γωνία αντίστοιχα ίσες.

Άρα είναι: $\triangle AZ\Delta = \triangle BHE$

και επομένως $\Delta Z = EH$ ως αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων.



25. Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις της $B\Gamma$

παίρνουμε τα σημεία E, Z έτσι ώστε $BE = \Gamma Z$. Να δείξετε ότι το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.

Λύση

Αρκεί να δείξουμε ότι $AE = AZ$.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle AEB$ και $\triangle AZ\Gamma$.

Είναι: $EB = \Gamma Z$ (δεδομένο)

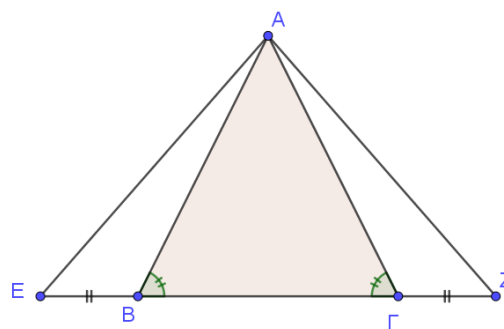
$AB = A\Gamma$ (δεδομένο)

$\hat{AEB} = \hat{AZ\Gamma}$ (ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών)

Επομένως τα δύο τρίγωνα έχουν 2 πλευρές και την περιεχόμενη γωνία τους ίσες ($\Pi - \Gamma - \Pi$) και άρα είναι ίσα.

Άρα είναι $AE = AZ$ ως αντίστοιχες πλευρές ίσων τριγώνων.

Επομένως το τρίγωνο AEZ είναι ισοσκελές.



26. Με βάση το πιο κάτω σχήμα, να βρείτε:

(α) ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της $\hat{A}$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$

(β) ποιος τριγωνομετρικός αριθμός της $\hat{\Gamma}$ είναι ίσος με $\frac{4}{5}$.

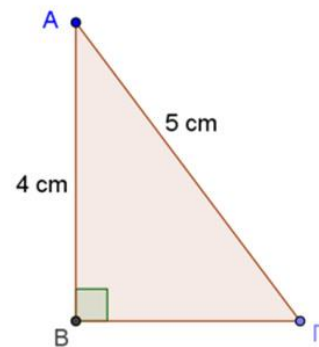
Λύση

α) Για τη γωνία $\hat{A}$ η πλευρά που είναι ίση με 4 είναι η προσκείμενή της, ενώ η πλευρά που είναι ίση με 5 είναι η υποτείνουσα. Ο τριγωνομετρικός αριθμός που συνδέει προσκείμενη με υποτείνουσα είναι το συνημίτονο, άρα:

$$\text{συν}\hat{A} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{4}{5}$$

β) Ομοίως για τη γωνία $\hat{\Gamma}$ η πλευρά που είναι ίση με 4 είναι η απέναντί της, ενώ η πλευρά που είναι ίση με 5 είναι η υποτείνουσα. Ο τριγωνομετρικός αριθμός που συνδέει απέναντι με

υποτείνουσα είναι το ημίτονο, άρα: $\eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} = \frac{4}{5}$



Υπενθύμιση

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{συν}\omega = \frac{\text{προσκείμενη}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\epsilon\phi\omega = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκείμενη}}$$

27. Να υπολογίσετε το συνθ και την εφθ οξείας γωνίας $\hat{\theta}$ ενός ορθογωνίου τριγώνου, όταν γνωρίζουμε ότι $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$.

Λύση

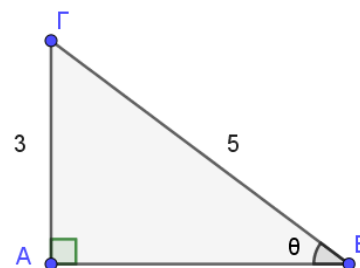
Υπολογίζουμε την πλευρά AB με το Πυθαγόρειο Θεώρημα:

$$(B\Gamma)^2 = (AB)^2 + (A\Gamma)^2 \Rightarrow$$

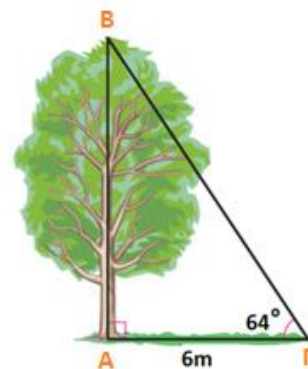
$$5^2 = x^2 + 3^2 \Rightarrow x^2 = 25 - 9 \Rightarrow$$

$$x^2 = 16 \Rightarrow x = \sqrt{16} \Rightarrow x = 4$$

$$\text{Άρα: } \text{συν}\theta = \frac{AB}{B\Gamma} = \frac{4}{5} \text{ και } \epsilon\phi\theta = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{3}{4}$$



28. Ο κύριος Αβραάμ θέλει να υπολογίσει το ύψος του δέντρου στον κήπο του. Τοποθέτησε τον εξάντα σε απόσταση 6 m από τον κορμό του δέντρου και υπολόγισε ότι το μέγεθος της γωνίας προς την κορυφή του δέντρου ήταν 64° . Να υπολογίσετε το ύψος του δέντρου. (Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί να υπολογιστούν κατά προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων).



Λύση

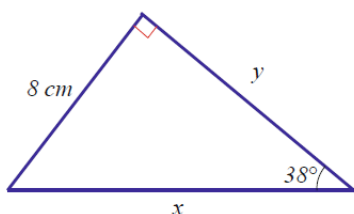
Θέλουμε να βρούμε την απέναντι πλευρά της γωνίας Γ, ενώ γνωρίζουμε την προσκείμενη. Ο τριγωνομετρικός αριθμός που συνδέει την απέναντι με την προσκείμενη πλευρά μιας γωνίας είναι η εφαπτομένη.

$$\varepsilon\phi\hat{\Gamma} = \frac{\text{απέναντι}}{\text{προσκείμενη}} \Rightarrow \varepsilon\phi 64^\circ = \frac{AB}{6} \Rightarrow 2,05 = \frac{AB}{6} \Rightarrow$$

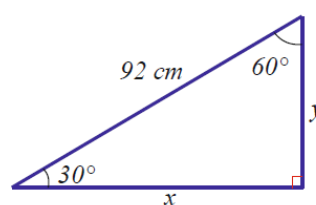
$$\Rightarrow AB = 2,05 \cdot 6 \Rightarrow AB = 12,30 \text{ m}$$

29. Να υπολογίσετε τους άγνωστους x και y στις πιο κάτω περιπτώσεις:

α)



β)



Λύση

$$\alpha) \quad \eta\mu 38^\circ = \frac{8}{x} \Rightarrow 0,616 = \frac{8}{x} \Rightarrow x = \frac{8}{0,616} \Rightarrow x = 12,99 \text{ cm}$$

$$\varepsilon\phi 38^\circ = \frac{8}{y} \Rightarrow 0,781 = \frac{8}{y} \Rightarrow y = \frac{8}{0,781} \Rightarrow y = 10,24 \text{ cm}$$

$$\beta) \quad \text{θεώρημα των } 30^\circ : y = \frac{92}{2} = 46 \text{ cm}$$

$$\sigma\upsilon\nu 30^\circ = \frac{x}{92} \Rightarrow 0,866 = \frac{x}{92} \Rightarrow x = 92 \cdot 0,866 \Rightarrow x = 79,67 \text{ cm}$$

Πραγματικοί αριθμοί

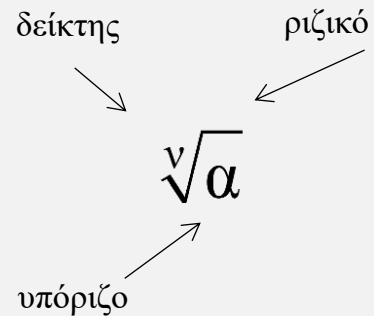
1.1 Η έννοια της νιοστής ρίζας

Ορισμός

Η **νιοστή ρίζα** ενός μη αρνητικού αριθμού α , όπου n θετικός ακέραιος, είναι ο μη αρνητικός αριθμός β ο οποίος, όταν υψωθεί σε δύναμη με εκθέτη n , δίνει τον αριθμό α .

Συμβολίζεται με $\sqrt[n]{\alpha}$ και ισχύει ότι:

$$\sqrt[n]{\alpha} = \beta \Leftrightarrow \beta^n = \alpha \quad (\alpha \geq 0 \text{ και } \beta \geq 0, n \in \mathbb{N})$$



Παρατηρήσεις

Από τον ορισμό προκύπτουν τα εξής:

- $\sqrt[n]{\alpha} = \alpha$
- $\sqrt[n]{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$
- $\sqrt[n]{1} = 1$
- $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$

Απλοποίηση παραστάσεων

1. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

α) $\sqrt[7]{2^7}$

β) $\sqrt[10]{125 \cdot 25 \cdot 5^5}$

γ) $\sqrt[6]{32 + 2^5}$

δ) $\sqrt[5]{27 \cdot x^5 \cdot 9}, \quad x \geq 0$

Λύση

α) $\sqrt[7]{2^7} = 2$

β) $\sqrt[10]{125 \cdot 25 \cdot 5^5} = \sqrt[10]{5^3 \cdot 5^2 \cdot 5^5} = \sqrt[10]{5^{3+2+5}} = \sqrt[10]{5^{10}} = 5$

γ) $\sqrt[6]{32 + 2^5} = \sqrt[6]{2^5 + 2^5} = \sqrt[6]{2 \cdot 2^5} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

$$\delta) \sqrt[5]{27 \cdot x^5 \cdot 9} = \sqrt[5]{3^3 \cdot x^5 \cdot 3^2} = \sqrt[5]{3^5 \cdot x^5} = \sqrt[5]{3^5} \cdot \sqrt[5]{x^5} = 3x$$

Επίλυση εξίσωσης $x^v = a$, $v \in \mathbb{N}$

$\alpha > 0$	Αν v περιττός τότε $x^v = a \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{a}$ (μία λύση)
	Αν v άρτιος , έχουμε δύο λύσεις $x^v = a \Leftrightarrow x = \sqrt[v]{a}$ ή $x = -\sqrt[v]{a}$
$\alpha < 0$	Αν v περιττός τότε $x^v = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[v]{ a }$ (μία λύση)
	Αν v άρτιος τότε η εξίσωση $x^v = a$ είναι αδύνατη
$\alpha = 0$	έχουμε μοναδική λύση την $x = 0$

Παραδείγματα

2. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $x^3 = 27$

β) $x^4 = 16$

γ) $x^3 = -125$

δ) $x^2 = -4$

ε) $x^{16} = 0$

στ) $(2x)^2 = 36$

Λύση

α) $x^3 = 27 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} \Rightarrow x = 3$

β) $x^4 = 16 \Rightarrow (x = \sqrt[4]{16} \text{ ή } x = -\sqrt[4]{16}) \Rightarrow (x = 2 \text{ ή } x = -2)$

γ) $x^3 = -125 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{125} \Rightarrow x = -5$

δ) $x^2 = -4$ (η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού $x^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$)

ε) $x^{16} = 0 \Rightarrow x = 0$

στ) $5x^2 - 30 = 150 \Rightarrow 5x^2 = 180 \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6$

Αν ο άγνωστος δεν είναι μόνος στο ένα μέλος, κάνουμε πράξεις για να τον απομονώσουμε.

Σύνθετες εξισώσεις που καταλήγουν στη μορφή $x^y = a$

3. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες αληθεύουν οι εξισώσεις:

α) $(x + 7)^5 = -32$

β) $(2x - 1)^4 - 81 = 0$

γ) $(x^2 - 4)(x^7 + 1) = 0$

δ) $x^5 - 16x = 0$

Λύση

α) (τη θέση του x μπορεί να πάρει οποιαδήποτε παράσταση του x)

$$(x + 7)^5 = -32 \Rightarrow x + 7 = -\sqrt[5]{32} \Rightarrow x + 7 = -2 \Rightarrow x = -9$$

$$\begin{aligned} \text{β)} \quad (2x - 1)^4 - 81 &= 0 \Rightarrow (2x - 1)^4 = 81 \Rightarrow 2x - 1 = \pm \sqrt[4]{81} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2x - 1 = \pm 3 \Rightarrow 2x = 1 \pm 3 \Rightarrow (2x = 1 + 3 \text{ ή } 2x = 1 - 3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (2x = 4 \text{ ή } 2x = -2) \Rightarrow (x = 2 \text{ ή } x = -1) \end{aligned}$$

γ) Γνωρίζουμε από τη Γ' Γυμνασίου ότι $\alpha \cdot \beta = 0 \Rightarrow (\alpha = 0 \text{ ή } \beta = 0)$

$$\begin{aligned} (x^2 - 4)(x^7 + 1) &= 0 \Rightarrow (x^2 - 4 = 0 \text{ ή } x^7 + 1 = 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x^2 = 4 \text{ ή } x^7 = -1) \Rightarrow (x = \pm \sqrt{4} \text{ ή } x = -\sqrt[7]{1}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x = 2 \text{ ή } x = -2 \text{ ή } x = -1) \end{aligned}$$

δ) Αν έχουμε εξίσωση μεγαλύτερου βαθμού και δεν καταλήγει στη μορφή $x^y = a$, τότε πηγαίνουμε όλους τους όρους στο ένα μέλος και παραγοντοποιούμε:

$$\begin{aligned} x^5 - 16x &= 0 \Rightarrow x(x^4 - 16) = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ ή } x^4 - 16 = 0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x = 0 \text{ ή } x^4 = 16) \Rightarrow (x = 0 \text{ ή } x = \pm \sqrt[4]{16}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (x = 0 \text{ ή } x = 2 \text{ ή } x = -2) \end{aligned}$$

Επίλυση εξισώσεων που ο άγνωστος είναι στο υπόριζο

- Αρχικά, αν δεν δίνεται περιορισμός, πρέπει να βρούμε για ποιες τιμές του αγνώστου έχει νόημα η εξίσωση. Πρέπει η υπόριζη ποσότητα να είναι αριθμός μεγαλύτερος ή ίσος από το μηδέν.
- Απομονώνουμε το ριζικό στο ένα μέλος της ισότητας.
- Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης σε δύναμη ίση με το δείκτη του ριζικού, ώστε να απαλείψουμε τη ρίζα.
- Λύνουμε την εξίσωση που προκύπτει και ελέγχουμε το αποτέλεσμα.

4. Αφού προσδιορίσετε τις τιμές του x για τις οποίες έχουν νόημα οι εξισώσεις, να τις λύσετε:

α) $\sqrt{x-3}=4$ β) $\sqrt[3]{5x+2}-2=1$ γ) $\sqrt{x^2+64}=10$
δ) $\sqrt[4]{x^3-11}=2$ ε) $\sqrt{x^3+7}=-4$ στ) $\sqrt{3x-5}=3-x$

Λύση

α) Για να έχει πραγματική λύση η εξίσωση, πρέπει: $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$.

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στη δεύτερη δύναμη και έχουμε:

$$\sqrt{x-3}=4 \Rightarrow \sqrt{x-3}^2=4^2 \Rightarrow x-3=16 \Rightarrow x=19$$

Είναι $x=19 \geq 3$ και επομένως είναι **δεκτή** λύση.

β) Αν η ρίζα δεν είναι μόνη της στο ένα μέλος, την απομονώνουμε και στη συνέχεια υψώνουμε στην αντίστοιχη δύναμη:

$$\text{Για να έχει πραγματική λύση η εξίσωση, πρέπει: } 5x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{2}{5}.$$

Υψώνουμε και τα δύο μέλη στην 3η δύναμη για να φύγει η ρίζα:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{5x+2}-2=1 &\Rightarrow \sqrt[3]{5x+2}=1+2 \Rightarrow \sqrt[3]{5x+2}^3=3^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 5x+2=27 \Rightarrow 5x=27-2 \Rightarrow 5x=25 \Rightarrow x=5 \end{aligned}$$

Είναι $5 \geq -\frac{2}{5}$ και επομένως η λύση είναι **δεκτή**.

$$\gamma) \sqrt{x^2 + 64} = 10 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 64}^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 + 64 = 100 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 = 100 - 64 \Rightarrow x^2 = 36 \Rightarrow x = \pm\sqrt{36} \Rightarrow x = \pm 6 \text{ (δεκτές)}$$

$$\delta) \sqrt[4]{x^3 - 11} = 2 \Rightarrow \sqrt[4]{x^3 - 11}^4 = 2^4 \Rightarrow x^3 - 11 = 16 \Rightarrow \\ \Rightarrow x^3 = 16 + 11 \Rightarrow x^3 = 27 \Rightarrow x = \sqrt[3]{27} \Rightarrow x = 3 \text{ (δεκτή)}$$

ε) Η ρίζα οποιουδήποτε αριθμού είναι πάντοτε μη αρνητικός αριθμός

Είναι $\sqrt{x^3 + 7} \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ και $-4 < 0$ άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.

$$\sigma\tau) \text{ Για να έχει λύση πρέπει: } 3x - 5 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{5}{3} \text{ και } 3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3$$

$$\sqrt{3x - 5} = 3 - x \xrightarrow{(*)} \sqrt{3x - 5}^2 = (3 - x)^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 3x - 5 = 3^2 - 6x + x^2 \Rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x - 2)(x - 7) = 0 \Rightarrow (x = 2 \text{ ή } x = 7)$$

(*) Το Β' Μέλος έχει 2 όρους, οπότε για να το υψώσουμε στη δευτέρα βάζουμε παρένθεση.

η λύση $x = 2$ είναι **δεκτή**, ενώ η λύση $x = 7$ **απορρίπτεται**, επειδή θέλουμε να είναι $x \leq 3$.

Ειδική περίπτωση εξίσωσης

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0 \Leftrightarrow (a = 0 \text{ και } b = 0)$$

5. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{\kappa - 2} + \sqrt{4 - \kappa^2} = 0$

Λύση

$$\text{Πρέπει } (\kappa - 2 = 0 \text{ και } 4 - \kappa^2 = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\kappa = 2 \text{ και } \kappa = \pm 2) \Rightarrow \kappa = 2$$

για να ισχύουν και οι δύο σχέσεις ταυτόχρονα.

Αν έχουμε εξίσωση της μορφής $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 0$, τότε θα είναι αναγκαστικά:

$$a = 0 \text{ και } b = 0.$$

• Είναι $\sqrt{a} \geq 0$ και $\sqrt{b} \geq 0$, άρα προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0$ και η ισότητα ισχύει μόνο αν $a = 0$ και $b = 0$ **ταυτόχρονα**.

Ασκήσεις για λύση

Ορισμός – Απλοποιήσεις

6. Να υπολογίσετε τις ρίζες:

α) $\sqrt{81}$

β) $\sqrt[9]{1}$

γ) $\sqrt[4]{16}$

δ) $\sqrt{-4}$

ε) $\sqrt{400}$

στ) $\sqrt[3]{27000}$

ζ) $\sqrt[7]{6^7}$

η) $\sqrt[7]{128}$

θ) $\sqrt[6]{64}$

7. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $\sqrt[9]{3^9}$

β) $\sqrt[4]{\frac{5^4}{81}}$

γ) $\sqrt[3]{64\beta^{12}}$

δ) $\sqrt[9]{8 \cdot \alpha^9 \cdot 16 \cdot 4}$

ε) $\sqrt[5]{\frac{16 \cdot 4^3}{x^{20}}}$

στ) $\sqrt[7]{2 \cdot 81 \cdot 3^2 + 3^6}$

Εξισώσεις

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^2 = 144$

β) $x^3 - 125 = 0$

γ) $x^3 = -1000$

δ) $x^4 = -16$

ε) $x^{2019} = 1$

στ) $x^3 = \frac{8}{27}$

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{15-x} = 5$

β) $\sqrt{3x} - 6 = 0$

γ) $\sqrt{x+7} = -8$

δ) $\sqrt[3]{4x-5} = 3$

ε) $\sqrt[4]{2x+41} = 3$

στ) $\sqrt{25-x^2} - 4 = 0$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $x^6(x^3 - 8) = 0$

β) $(x^2 - 4)(x^3 + 27) = 0$

γ) $x^5(x^2 + 3)(x^6 - 64) = 0$

δ) $(x^3 + 8)(x^4 - 1) = 0$

ε) $x^4 - 125x = 0$

στ) $(x - 4)^4 + 125(x - 4) = 0$

ζ) $(2x + 1)^5 - 16(2x + 1) = 0$

η) $\frac{1}{3}x^4 - 27 = 0$

θ) $x^3 = 36x$

ι) $x^2(x - 1) = 4(x - 1)$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(x^2 - 3)^2 = 36$

β) $(2x - 1)^3 - 27 = 0$

γ) $(x - 3)^3 = -125$

δ) $(x^5 - 1)^{2000} = 0$

12. Αφού προσδιορίσετε για ποιά x έχουν νόημα οι ρίζες, να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $\sqrt{x} = 7$

β) $\sqrt[3]{x} - 2 = 0$

γ) $\sqrt{x-1} = 5$

δ) $2 \cdot \sqrt[4]{x-5} - 1 = 3$

13. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

α) $5\sqrt{x} = x - 6, \quad x \geq 6$

β) $2\sqrt{x} - x + 15 = 0, \quad x \geq 15$

γ) $\sqrt{2x} + 4 - x = 0, \quad x > 4$

δ) $x - 7 - \sqrt{x-1} = 0, \quad x \geq 7$

6. Παρόμοια με την 1

α) $\sqrt{81} = 9$

β) $\sqrt[9]{1} = 1$

γ) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

δ) $\sqrt{-4}$ δεν ορίζεται

ε) $\sqrt{400} = \sqrt{4 \cdot 100} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{100} = 2 \cdot 10 = 20$

στ) $\sqrt[3]{27000} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{1000} = 3 \cdot 10 = 30$ ζ) $\sqrt[7]{6^7} = 6$

η) $\sqrt[7]{128} = \sqrt[7]{2^7} = 2$

θ) $\sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

7. Παρόμοια με την 1

Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

α) $\sqrt[9]{3^9} = 3$

β) $\sqrt[4]{\frac{5^4}{81}} = \sqrt[4]{\frac{5^4}{3^4}} = \sqrt[4]{\left(\frac{5}{3}\right)^4} = \frac{5}{3}$

γ) $\sqrt[3]{64\beta^{12}} = \sqrt[3]{4^3(\beta^4)^3} = \sqrt[3]{(4\beta^4)^3} = 4\beta^4$

δ) $\sqrt[9]{8 \cdot \alpha^9 \cdot 16 \cdot 4} = \sqrt[9]{2^3 \cdot \alpha^9 \cdot 2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[9]{2^{3+4+2} \cdot \alpha^9} = \sqrt[9]{2^9 \cdot \alpha^9} = \sqrt[9]{(2\alpha)^9} = 2\alpha$

ε) $\sqrt[5]{\frac{16 \cdot 4^3}{x^{20}}} = \sqrt[5]{\frac{4^2 \cdot 4^3}{(x^4)^5}} = \sqrt[5]{\frac{4^5}{(x^4)^5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{4}{x^4}\right)^5} = \frac{4}{x^4}$

στ) $\sqrt[7]{2 \cdot 81 \cdot 3^2 + 3^6} = \sqrt[7]{2 \cdot 3^4 \cdot 3^2 + 3^6} = \sqrt[7]{2 \cdot 3^6 + 3^6} = \sqrt[7]{3 \cdot 3^6} = \sqrt[7]{3^7} = 3$

8. Παρόμοια με την 2

α) $x^2 = 144 \Rightarrow x = \pm\sqrt{144} \Rightarrow x = \pm 12$

β) $x^3 - 125 = 0 \Rightarrow x^3 = 125 \Rightarrow x = \sqrt[3]{125} \Rightarrow x = 5$

$$\gamma) \quad x^3 = -1000 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{1000} \Rightarrow x = -10$$

$$\delta) \quad x^4 = -16 \quad \text{αδύνατη εξίσωση}$$

$$\epsilon) \quad x^{2019} = 1 \Rightarrow x = \sqrt[2019]{1} \Rightarrow x = 1$$

$$\sigma\tau) \quad x^3 = \frac{8}{27} \Rightarrow x = \sqrt[3]{\frac{8}{27}} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

9. Παρόμοια με την 4

$$\alpha) \quad \sqrt{15-x} = 5 \Rightarrow \sqrt{15-x}^2 = 5^2 \Rightarrow 15-x = 25 \Rightarrow x = -10$$

$$\beta) \quad \sqrt{3x} - 6 = 0 \Rightarrow \sqrt{3x} = 6 \Rightarrow \sqrt{3x}^2 = 6^2 \Rightarrow 3x = 36 \Rightarrow x = 12$$

$$\gamma) \quad \sqrt{x+7} = -8 \quad (\text{αδύνατη εξίσωση})$$

$$\delta) \quad \sqrt[3]{4x-5} = 3 \Rightarrow \sqrt[3]{4x-5}^3 = 3^3 \Rightarrow 4x-5 = 27 \Rightarrow x = 8$$

$$\epsilon) \quad \sqrt[4]{2x+41} = 3 \Rightarrow \sqrt[4]{2x+41}^4 = 3^4 \Rightarrow 2x+41 = 81 \Rightarrow x = 20$$

$$\sigma\tau) \quad \sqrt{25-x^2} - 4 = 0 \Rightarrow \sqrt{25-x^2} = 4 \Rightarrow \sqrt{25-x^2}^2 = 4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25-x^2 = 16 \Rightarrow 25-x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$$

Αν μας ζητηθεί
παίρνουμε και
περιορισμούς και
ελέγχουμε το
αποτέλεσμα.

10. Παρόμοια με την 3

$$\alpha) \quad x^6(x^3-8) = 0 \Rightarrow (x^6 = 0 \text{ ή } x^3-8=0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x=0 \text{ ή } x^3=8) \Rightarrow (x=0 \text{ ή } x=\sqrt[3]{8}) \Rightarrow (x=0 \text{ ή } x=2)$$

$$\beta) \quad (x^2-4)(x^3+27) = 0 \Rightarrow (x^2-4=0 \text{ ή } x^3+27=0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2=4 \text{ ή } x^3=-27) \Rightarrow (x=\pm 2 \text{ ή } x=-3)$$

$$\gamma) \quad x^5(x^2+3)(x^6-64)=0 \Rightarrow (x^5=0 \text{ ή } x^2+3=0 \text{ ή } x^6-64=0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x=0 \text{ ή } \underbrace{x^2=-3}_{\text{αδύνατη}} \text{ ή } x^6=64 \right) \Rightarrow (x=0 \text{ ή } x=\pm 2)$$

$$\delta) \quad (x^3+8)(x^4-1)=0 \Rightarrow (x^3+8=0 \text{ ή } x^4-1=0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^3=-8 \text{ ή } x^4=1) \Rightarrow (x=-\sqrt[3]{8} \text{ ή } x^4=1) \Rightarrow (x=-2 \text{ ή } x=\pm 1)$$

$$\epsilon) \quad x^4-125x=0 \Rightarrow x(x^3-125)=0 \Rightarrow (x=0 \text{ ή } x^3-125=0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x=0 \text{ ή } x^3=125) \Rightarrow (x=0 \text{ ή } x=5)$$

$$\sigma\tau) \quad (x-4)^4+125(x-4)=0 \Rightarrow (x-4)\left[(x-4)^3+125\right]=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4=0 \text{ ή } (x-4)^3+125=0) \Rightarrow (x=4 \text{ ή } (x-4)^3=-125) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x=4 \text{ ή } x-4=-5) \Rightarrow (x=4 \text{ ή } x=-1)$$

$$\zeta) \quad (2x+1)^5-16(2x+1)=0 \Rightarrow (2x+1)\left[(2x+1)^4-16\right]=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x+1=0 \text{ ή } (2x+1)^4-16=0) \Rightarrow \left(x=-\frac{1}{2} \text{ ή } 2x+1=\pm\sqrt[4]{16}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x=-\frac{1}{2} \text{ ή } 2x+1=\pm 2\right) \Rightarrow \left(x=-\frac{1}{2} \text{ ή } x=\frac{+2-1}{2} \text{ ή } x=\frac{-2-1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x=-\frac{1}{2} \text{ ή } x=\frac{1}{2} \text{ ή } x=-\frac{3}{2}\right)$$

$$\eta) \quad \frac{1}{3}\alpha^4-27=0 \Rightarrow \frac{1}{3}\alpha^4=27 \Rightarrow \alpha^4=81 \Rightarrow \alpha=\pm 3$$

$$\theta) \quad x^3 = 36x \Rightarrow x^3 - 36x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 36) = 0 \Rightarrow (x = 0 \text{ ή } x^2 - 36 = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x = 0 \text{ ή } x^2 = 36) \Rightarrow (x = 0 \text{ ή } x = \pm\sqrt{36}) \Rightarrow (x = 0 \text{ ή } x = \pm 6)$$

$$\iota) \quad x^2(x-1) = 4(x-1) \Rightarrow x^2(x-1) - 4(x-1) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2-4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1=0 \text{ ή } x^2-4=0) \Rightarrow (x=1 \text{ ή } x^2=4) \Rightarrow (x=1 \text{ ή } x=\pm 2)$$

11. Παρόμοια με την 3

$$\alpha) \quad (x^2 - 3)^2 = 36 \Rightarrow x^2 - 3 = \pm 6 \Rightarrow (x^2 - 3 = 6 \text{ ή } x^2 - 3 = -6) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x^2 = 9 \text{ ή } \underbrace{x^2 = -3}_{\text{αδύνατη}} \right) \Rightarrow x = \pm 3$$

$$\beta) \quad (2x-1)^3 - 27 = 0 \Rightarrow (2x-1)^3 = 27 \Rightarrow 2x-1 = 3 \Rightarrow x = 2$$

$$\gamma) \quad (x-3)^3 = -125 \Rightarrow x-3 = -\sqrt[3]{125} \Rightarrow x-3 = -5 \Rightarrow x = -2$$

$$\delta) \quad (x^5 - 1)^{2000} = 0 \Rightarrow x^5 - 1 = 0 \Rightarrow x^5 = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$12. \quad \alpha) \quad \text{Πρέπει να είναι } x \geq 0. \quad \sqrt{x} = 7 \Rightarrow \sqrt{x}^2 = 7^2 \Rightarrow x = 7^2 \Rightarrow x = 49$$

$$\beta) \quad \text{Πρέπει να είναι } x \geq 0. \quad \sqrt[3]{x} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{x}^3 = 2^3 \Rightarrow x = 8$$

$$\gamma) \quad \text{Πρέπει: } x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1. \quad \sqrt{x-1} = 5 \Rightarrow \sqrt{x-1}^2 = 5^2 \Rightarrow x-1 = 25 \Rightarrow x = 26$$

$$\delta) \quad \text{Πρέπει: } x-5 \geq 0 \Rightarrow x \geq 5 \quad 2 \cdot \sqrt[4]{x-5} - 1 = 3 \Rightarrow 2 \cdot \sqrt[4]{x-5} = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt[4]{x-5} = 2 \Rightarrow \sqrt[4]{x-5}^4 = 2^4 \Rightarrow x-5 = 16 \Rightarrow x = 21$$

13. Παρόμοια με την 4

$$\alpha) \quad 5\sqrt{x} = x - 6 \Rightarrow (5\sqrt{x})^2 = (x - 6)^2 \Rightarrow 25x = x^2 - 12x + 36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 37x + 36 = 0 \Rightarrow (x - 36)(x - 1) = 0 \Rightarrow (x = 36 \text{ ή } x = 1)$$

Θέλουμε $x \geq 6$, άρα η λύση $x = 36$ είναι δεκτή, ενώ η λύση $x = 1$ απορρίπτεται.

$$\beta) \quad 2\sqrt{x} - x + 15 = 0 \Rightarrow 2\sqrt{x} = x - 15 \Rightarrow (2\sqrt{x})^2 = (x - 15)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x = x^2 - 30x + 225 \Rightarrow x^2 - 34x + 225 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - 9)(x - 25) = 0 \Rightarrow (x = 9 \text{ ή } x = 25)$$

Θέλουμε $x \geq 15$, άρα η λύση $x = 9$ απορρίπτεται, ενώ η λύση $x = 25$ είναι δεκτή.

$$\gamma) \quad \sqrt{2x} + 4 - x = 0 \Rightarrow \sqrt{2x} = x - 4 \Rightarrow (\sqrt{2x})^2 = (x - 4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x = x^2 - 8x + 16 \Rightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Rightarrow (x - 8)(x - 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x = 8 \text{ ή } x = 2) \quad \text{δεκτή η } x = 8, \text{ απορρίπτεται η } x = 2.$$

$$\delta) \quad x - 7 - \sqrt{x - 1} = 0 \Rightarrow x - 7 = \sqrt{x - 1} \Rightarrow (x - 7)^2 = \sqrt{x - 1}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 14x + 49 = x - 1 \Rightarrow x^2 - 15x + 50 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x - 10) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x = 5 \text{ ή } x = 10) \quad \text{δεκτή η } x = 10, \text{ απορρίπτεται η } x = 5.$$

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

α) $\sqrt{100}$ β) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$ γ) $\sqrt[4]{81} - \sqrt{81}$ δ) $\sqrt[5]{0,00032}$

Λύση

α) $\sqrt{100} = 10$ β) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{2}{3}$

γ) $\sqrt[4]{81} - \sqrt{81} = 3 - 9 = -6$

δ) $\sqrt[5]{0,00032} = \sqrt[5]{\frac{32}{10000}} = \frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt[5]{10^5}} = \frac{2}{10} = 0,2$

2. α) Να εξηγήσετε γιατί ο αριθμός $\sqrt[3]{25}$ δεν είναι ακέραιος αριθμός και να αναφέρετε τον μικρότερο ακέραιο αριθμό ο οποίος να είναι μεγαλύτερος του.

β) Δίνεται ότι $x = \sqrt[3]{25}$ και $y = \sqrt{8}$. Χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, να υπολογίσετε τους αριθμούς x^3 , x^6 , y^2 και y^6 .

γ) Με βάση το (β) να συγκρίνετε τα x και y .

Λύση

α) **Α' τρόπος:** Πρέπει να βρούμε έναν ακέραιο αριθμό, που όταν υψωθεί στην 3^η δύναμη να μας δίνει 25. Όμως δεν υπάρχει τέτοιος ακέραιος αριθμός και επομένως ο αριθμός $\sqrt[3]{25}$ δεν είναι ακέραιος.

Β' τρόπος: Είναι $\sqrt[3]{8} = 2$ και $\sqrt[3]{27} = 3$. Επειδή όμως είναι $8 < 25 < 27 \Leftrightarrow \sqrt[3]{8} < \sqrt[3]{25} < \sqrt[3]{27} \Leftrightarrow 2 < \sqrt[3]{25} < 3$

Επομένως ο αριθμός $\sqrt[3]{25}$ βρίσκεται μεταξύ των διαδοχικών ακεραίων 2 και 3 και άρα δεν μπορεί να είναι ακέραιος.

Επίσης επειδή είναι $2 < \sqrt[3]{25} < 3$, ο μικρότερος ακέραιος που είναι μεγαλύτερος του $\sqrt[3]{25}$ θα είναι ο 3.

$$\beta) \quad x^3 = \left(\sqrt[3]{25}\right)^3 = \sqrt[3]{25^3} = 25$$

$$x^6 = \left(\sqrt[3]{25}\right)^6 = \left(\sqrt[3]{25}\right)^{3 \cdot 2} = \left(\left(\sqrt[3]{25}\right)^3\right)^2 \stackrel{(a)}{=} 25^2 = 625$$

$$y^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 = \sqrt{8^2} = 8$$

$$y^6 = \sqrt{8}^6 = \sqrt{8}^{2 \cdot 3} = \left(\sqrt{8^2}\right)^3 = 8^3 = 512.$$

γ) Από το (β) ερώτημα είναι $x^6 > y^6 \Leftrightarrow x > y$

3. Ένας αριθμός όταν υψωθεί στην 5^η δύναμη, μας δίνει 10.

α) Να δώσετε τον κατάλληλο συμβολισμό για αυτόν τον αριθμό.

β) Με χρήση της υπολογιστικής μηχανής, να γράψετε τον αριθμό κατά προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων.

Λύση

α) Έστω x ο αριθμός. Τότε από την εκφώνηση θα έχουμε:

$$x^5 = 10 \Rightarrow x = \sqrt[5]{10}$$

β) Είναι: $x = \sqrt[5]{10} \Rightarrow x \approx 1,585$

4. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες, δίνοντας την απάντησή σας σε μορφή δύναμης:

$$\alpha) \sqrt[3]{5^{36}} \quad \beta) \sqrt{3^7 \cdot 3^4 \cdot 3^{19}} \quad \gamma) \sqrt[4]{2^{31} + 2^{31}} \quad \delta) \sqrt[6]{\sqrt[3]{7^{90}}}$$

Λύση

$$\alpha) \sqrt[3]{5^{36}} = \sqrt[3]{5^{12 \cdot 3}} = \sqrt[3]{\left(5^{12}\right)^3} = 5^{12}$$

$$\beta) \sqrt{3^7 \cdot 3^4 \cdot 3^{19}} = \sqrt{3^{7+4+19}} = \sqrt{3^{30}} = \sqrt{3^{15 \cdot 2}} = \sqrt{(3^{15})^2} = 3^{15}$$

$$\gamma) \sqrt[4]{2^{31} + 2^{31}} = \sqrt[4]{2 \cdot 2^{31}} = \sqrt[4]{2^{32}} = \sqrt[4]{2^{8 \cdot 4}} = \sqrt[4]{(2^8)^4} = 2^8$$

$$\delta) \sqrt[6]{\sqrt[3]{7^{90}}} = \sqrt[6]{\sqrt[3]{7^{30 \cdot 3}}} = \sqrt[6]{\sqrt[3]{(7^{30})^3}} = \sqrt[6]{7^{30}} = \sqrt[6]{7^{5 \cdot 6}} = \sqrt[6]{(7^5)^6} = 7^5$$

5. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

$$\alpha) \sqrt{3^{12}} \quad \beta) \sqrt[3]{6^{60}} \quad \gamma) \sqrt[5]{\frac{32}{x^{20}}} \quad \delta) \sqrt[6]{\frac{\beta^{18}}{1000000}}, \beta \geq 0$$

Λύση

$$\alpha) \sqrt{3^{12}} = \sqrt{3^{6 \cdot 2}} = \sqrt{(3^6)^2} = 3^6$$

$$\beta) \sqrt[3]{6^{60}} = \sqrt[3]{6^{20 \cdot 3}} = \sqrt[3]{(6^{20})^3} = 6^{20}$$

$$\gamma) \sqrt[5]{\frac{32}{x^{20}}} = \sqrt[5]{\frac{2^5}{x^{4 \cdot 5}}} = \sqrt[5]{\frac{2^5}{(x^4)^5}} = \sqrt[5]{\left(\frac{2}{x^4}\right)^5} = \frac{2}{x^4}$$

$$\delta) \sqrt[6]{\frac{\beta^{18}}{1000000}} = \sqrt[6]{\frac{\beta^{3 \cdot 6}}{10^6}} = \sqrt[6]{\frac{(\beta^3)^6}{10^6}} = \sqrt[6]{\left(\frac{\beta^3}{10}\right)^6} = \frac{\beta^3}{10}$$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$\alpha) x^4 = 16 \quad \beta) 2x^3 = -54 \quad \gamma) 3x^7 - 1 = 383$$

Λύση

$$\alpha) x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} \Rightarrow x = \pm 2$$

$$\beta) 2x^3 = -54 \xrightarrow{\div 2} x^3 = -27 \Rightarrow x = -\sqrt[3]{27} \Rightarrow x = -3$$

$$\gamma) 3x^7 - 1 = 383 \Rightarrow 3x^7 = 384 \Rightarrow x^7 = 128 \Rightarrow x = \sqrt[7]{128} \Rightarrow x = 2$$

7. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α) $x^6 = 1000000$ **β)** $x^4 = -16$ **γ)** $1 - 2x^6 = \frac{31}{32}$

Λύση

α) $x^6 = 1000000 \Rightarrow x = \pm \sqrt[6]{1000000} \Rightarrow x = \pm \sqrt[6]{10^6} \Rightarrow x = \pm 10$

β) $x^4 = -16$ (είναι αδύνατη, επειδή $x^4 \geq 0$ και $-16 < 0$)

γ) $1 - 2x^6 = \frac{31}{32} \Rightarrow -2x^6 = \frac{31}{32} - 1 \Rightarrow -2x^6 = -\frac{1}{32} \xrightarrow{\div(-2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x^6 = \frac{1}{64} \Rightarrow x = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{64}} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{2}$

8. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α) $x^3 = 2$ **β)** $3x^4 + 5 = 11$ **γ)** $x^5 + 20 = 10$

Λύση

α) $x^3 = 2 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

β) $3x^4 + 5 = 11 \Rightarrow 3x^4 = 11 - 5 \Rightarrow 3x^4 = 6 \Rightarrow x^4 = 2 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{2}$

γ) $x^5 + 20 = 10 \Rightarrow x^5 = 10 - 20 \Rightarrow x^5 = -10 \Rightarrow x = -\sqrt[5]{10}$

9. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α) $(x+2)^4 = 81$ **β)** $(1-x)^5 = -1024$ **γ)** $2x^3 + 1 = 129$

Λύση

α) $(x+2)^4 = 81 \Rightarrow x+2 = \pm \sqrt[4]{81} \Rightarrow x+2 = \pm 3 \Rightarrow x = -2 \pm 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x = -2 - 3 \text{ ή } x = -2 + 3) \Rightarrow (x = -5 \text{ ή } x = 1)$

$$\beta) (1-x)^5 = -1024 \Rightarrow 1-x = -\sqrt[5]{1024} \Rightarrow 1-x = -4 \Rightarrow \\ \Rightarrow -x = -5 \Rightarrow x = 5$$

$$\gamma) 2x^3 + 1 = 129 \Rightarrow 2x^3 = 128 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[3]{64} \Rightarrow x = 4$$

10. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \sqrt{2x+3} = 5 \qquad \beta) \sqrt[3]{3x} = 6 \qquad \gamma) 3\sqrt[4]{x} - 2 = 7$$

Λύση

$$\alpha) \text{ Για να έχει πραγματική λύση πρέπει να είναι: } 2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$$

$$\sqrt{2x+3} = 5 \Rightarrow (\sqrt{2x+3})^2 = 5^2 \Rightarrow 2x+3 = 25 \Rightarrow 2x = 22 \Rightarrow x = 11$$

Είναι **δεκτή**, επειδή θέλουμε $x \geq -\frac{3}{2}$ και για τη λύση που βρήκαμε ισχύει.

$$\beta) \text{ Για να έχει πραγματική λύση πρέπει να είναι: } 3x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0.$$

$$\sqrt[3]{3x} = 6 \Rightarrow (\sqrt[3]{3x})^3 = 6^3 \Rightarrow 3x = 216 \Rightarrow x = 72 \text{ δεκτή, } (x \geq 0)$$

$$\gamma) \text{ Για να έχει πραγματική λύση πρέπει να είναι: } x \geq 0.$$

$$3\sqrt[4]{x} - 2 = 7 \Rightarrow 3\sqrt[4]{x} = 9 \Rightarrow \sqrt[4]{x} = 3 \Rightarrow (\sqrt[4]{x})^4 = 3^4 \Rightarrow x = 81 \text{ δεκτή } (x \geq 0)$$

11. Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος ελαττωμένος κατά 2, έχει κυβική ρίζα ίση με 10.

Λύση

$$\text{Έστω } x \text{ ο αριθμός. Θέλουμε να ισχύει: } \sqrt[3]{x-2} = 10$$

$$\text{Για να έχει πραγματική λύση πρέπει να είναι: } x-2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2.$$

$$\sqrt[3]{x-2} = 10 \Rightarrow (\sqrt[3]{x-2})^3 = 10^3 \Rightarrow x-2 = 1000 \Rightarrow x = 1002 \text{ (δεκτή)}$$