

Χατζηιωαννίδης Γιώργος

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Β΄ ΤΕΥΧΟΣ

- 
- Θεωρία
 - Μεθοδολογίες
 - Λυμένες ασκήσεις
 - Ασκήσεις για λύση
 - Δραστηριότητες του σχολ. βιβλίου (Δ΄ Έκδοση 2020)
 - Επαναληπτικά διαγωνίσματα σε κάθε ενότητα
 - Αναλυτικές λύσεις όλων των ασκήσεων

Γιώργος Χατζιωαννίδης

Μαθηματικά Α΄ Λυκείου

Προσανατολισμού

Β΄ τεύχος

- ✓ Θεωρία
- ✓ Μεθοδολογίες
- ✓ Λυμένες ασκήσεις
- ✓ Ασκήσεις για λύση
- ✓ Δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου (Δ΄ έκδοση 2020)
- ✓ Επαναληπτικά διαγωνίσματα σε κάθε ενότητα
- ✓ Αναλυτικές λύσεις των ασκήσεων και των διαγωνισμάτων

Απαγορεύεται η
αναδημοσίευση και γενικά
η ολική, μερική ή
περιληπτική αναπαραγωγή
και μετάδοση έστω και
μιας σελίδας του παρόντος
βιβλίου κατά παράφραση ή
διασκευή, ή απόδοση του
περιεχομένου με
οποιοδήποτε τρόπο,
μηχανικό, ηλεκτρονικό,
φωτοτυπικό ή άλλο, χωρίς
τη γραπτή έγκριση ή άδεια
του συγγραφέα.

Μαθηματικά Α Λυκείου

Προσανατολισμού

Β' τεύχος

Χατζιωαννίδης Γιώργος

Τηλ: 96237943

email: gchatziioannidis@gmail.com

Σελίδες: 596 Σχήμα 21×28

ISBN: 978-9925-580-65-1

© Copyright 2021

Χατζιωαννίδης Γιώργος

Πρόλογος

Το βιβλίο αυτό γράφτηκε με σκοπό να βοηθήσει το μαθητή στην καθημερινή του μελέτη. Κάθε κεφάλαιο είναι γραμμένο με τέτοιο τρόπο ώστε ο μαθητής να ξεκινά από τη θεωρία και απλές εφαρμογές της, να συνεχίζει με τις μεθοδολογίες των βασικών ασκήσεων και να φτάνει στο τέλος να λύνει πιο σύνθετα θέματα που συνδυάζουν τις απλές μεθοδολογίες.

Όλες οι ασκήσεις που δίνονται στο βιβλίο είναι λυμένες αναλυτικά στις σελίδες που ακολουθούν ώστε να μπορεί ο μαθητής να ελέγξει την ορθότητα του αποτελέσματος και της πορείας επίλυσης που ακολούθησε, αλλά και να βοηθηθεί σε περίπτωση που συναντήσει κάποια δυσκολία.

Μετά τη μελέτη κάθε κεφαλαίου ο μαθητής θα πρέπει να είναι σε θέση να λύνει μόνος του τις δραστηριότητες του αντίστοιχου κεφαλαίου του σχολικού βιβλίου. Οι αναλυτικές λύσεις των δραστηριοτήτων δίνονται με σκοπό να μπορεί να ελέγξει ο μαθητής την εργασία του.

Κάθε κεφάλαιο του βιβλίου περιλαμβάνει:

- Συνοπτική θεωρία και απλές εφαρμογές
- Μεθοδολογίες
- Λυμένες ασκήσεις αναλυτικά με επεξηγήσεις
- Ασκήσεις για λύση από το μαθητή
- Αναλυτικές λύσεις των ασκήσεων
- Δραστηριότητες του σχολικού βιβλίου λυμένες αναλυτικά
- Επαναληπτικά διαγωνίσματα σε κάθε ενότητα
- Επαναληπτικά διαγωνίσματα σε όλη την ύλη του τετραμήνου.

Το παρόν βοήθημα συγγράφηκε και χωρίστηκε σε κεφάλαια με βάση την Δ΄ Έκδοση 2020 του σχολικού βιβλίου.

Γιώργος Α. Χατζιωαννίδης

Περιεχόμενα

Ορίζουσες - Ευθεία	6
5.1 Ορίζουσες	6
5.1.1 Ορίζουσες 2×2	6
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 10	11
5.1.2 Ορίζουσες 3×3	14
Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 14	23
5.2 Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας	28
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 25	49
5.3 Γενική μορφή εξίσωσης ευθείας	61
Δραστηριότητες σελ. 31	76
5.4 Απόσταση σημείου από ευθεία – Εμβαδόν τριγώνου	87
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 41	108
Επαναληπτικές ασκήσεις στην ευθεία	115
Δραστηριότητες ενότητας σελ. 44	123
Δραστηριότητες εμπλουτισμού σελ. 48	138
 Θεώρημα Θαλή - Ομοιότητα	 150
6.1 Θεώρημα Θαλή	150
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 57	156
6.2 Όμοια ευθύγραμμα σχήματα	162
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελίδα 66	169
6.3 Όμοια τρίγωνα	174
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελίδα 76	194
6.4 Δύναμη σημείου ως προς κύκλο	208
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελίδα 88	219
Επανάληψη στο Θεώρημα Θαλή – Ομοιότητα	225
Δραστηριότητες Ενότητας σελ. 94	233
Δραστηριότητες εμπλουτισμού σελ. 99	244

Συνάρτηση $f(x)=ax^2+bx+\gamma$.....	268
7.1 Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=a(x+\kappa)^2+\lambda$	268
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 107	273
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 116	284
7.2 Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=ax^2+bx+\gamma$, $a\neq 0$	289
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 123	310
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 131	342
7.3 Πρόσημο τιμών τριωνύμου – Ανισώσεις δευτέρου βαθμού	359
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ 143	382
7.4 Ανισώσεις ανώτερου βαθμού – Κλασματικές ανισώσεις	400
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 151	424
Επαναληπτικές ασκήσεις στην συνάρτηση $f(x)=ax^2+bx+\gamma$	434
Δραστηριότητες Ενότητας σελ. 156.....	449
Δραστηριότητες Εμπλουτισμού σελ. 163.....	474
Στατιστική.....	502
8.1 Μέτρα θέσης και διασποράς.....	502
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 178	520
8.2 Τεταρτημόρια – Ενδοτεταρτημοριακό Εύρος.....	530
8.3 Παρουσίαση και ανάλυση δεδομένων με γραφήματα.....	532
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 188	536
8.3.2 Θηκόγραμμα.....	538
Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 194	547
Δραστηριότητες Ενότητας σελ. 198.....	551
Δραστηριότητες Εμπλουτισμού σελ. 203.....	560
Επαναληπτικά δοκίμια Β τετραμήνου	572

Ορίζουσες - Ευθεία

5.1 Ορίζουσες

5.1.1 Ορίζουσες 2×2

Κάθε διάταξη αριθμών σε ίσο αριθμό γραμμών και στηλών ονομάζεται **τετραγωνικός πίνακας** και συμβολίζεται συνήθως με κεφαλαία γράμματα.

Ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ αποτελείται από δύο γραμμές και δύο στήλες και

ονομάζεται **τετραγωνικός πίνακας 2×2**. Τα α , β , γ και δ ονομάζονται **στοιχεία του πίνακα**.

Η **ορίζουσα** είναι μια τιμή, η οποία σχετίζεται με ένα τετραγωνικό πίνακα και μας δίνει ορισμένες πληροφορίες για τον πίνακα αυτό.

Συμβολίζουμε με $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$ ή $|A|$ ή $\det(A)$

Υπολογισμός ορίζουσας 2×2: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma$

Εφαρμογή

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παρακάτω οριζουσών:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} \quad \beta) \begin{vmatrix} 2+\sqrt{7} & 4 \\ -1 & 2-\sqrt{7} \end{vmatrix} \quad \gamma) \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \kappa\alpha & \kappa\beta \end{vmatrix} \quad \delta) \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 4 & \alpha+1 \end{vmatrix}$$

Λύση

$$\alpha) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 5(-1) - 2(-4) = -5 + 8 = 3$$

$$\beta) \begin{vmatrix} 2+\sqrt{7} & 4 \\ -1 & 2-\sqrt{7} \end{vmatrix} = (2+\sqrt{7})(2-\sqrt{7}) - 4(-1) = 2^2 - \sqrt{7}^2 + 4 = 1$$

$$\gamma) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \kappa\alpha & \kappa\beta \end{vmatrix} = \alpha\kappa\beta - \beta\kappa\alpha = 0$$

$$\delta) \quad \begin{vmatrix} \alpha & 2 \\ 4 & \alpha+1 \end{vmatrix} = \alpha(\alpha+1) - 2 \cdot 4 = \alpha^2 + \alpha - 8$$

2. Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{vmatrix} x-3 & 9 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$

Λύση

$$\begin{vmatrix} x-3 & 9 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x(x-3) - 9 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-6)(x+3) = 0 \Leftrightarrow (x=6 \text{ ή } x=-3)$$

3. Αν $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \kappa$, να αποδείξετε ότι: $\begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 3\kappa$ και

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha+\gamma & \beta+\delta \end{vmatrix} = \kappa.$$

Λύση

Είναι: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \kappa \Leftrightarrow \alpha\delta - \beta\gamma = \kappa \quad (1)$

Επομένως έχουμε: $\begin{vmatrix} 3\alpha & 3\beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 3\alpha\delta - 3\beta\gamma = 3(\underbrace{\alpha\delta - \beta\gamma}_{=\kappa}) \stackrel{(1)}{=} 3\kappa$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha+\gamma & \beta+\delta \end{vmatrix} = \alpha(\beta+\delta) - \beta(\alpha+\gamma) = \cancel{\alpha\beta} + \alpha\delta - \cancel{\beta\alpha} - \beta\gamma = \alpha\delta - \beta\gamma \stackrel{(1)}{=} \kappa$$

Ασκήσεις για λύση

4. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\beta) \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} \sqrt{11}-3 & 2 \\ -1 & \sqrt{11}+3 \end{vmatrix}$$

$$\delta) \begin{vmatrix} \sqrt{5} & -1 \\ -4 & \sqrt{5} \end{vmatrix}$$

5. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες

$$\alpha) \begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & -x \end{vmatrix}$$

$$\beta) \begin{vmatrix} \sqrt{\alpha-1} & \alpha \\ -2 & \sqrt{\alpha-1} \end{vmatrix}$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} \omega-1 & -3 \\ -2 & \omega+1 \end{vmatrix}$$

$$\delta) \begin{vmatrix} \sqrt{\kappa}-1 & -3 \\ 1 & \sqrt{\kappa}+1 \end{vmatrix}$$

6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\alpha) \begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & x \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta) \begin{vmatrix} \alpha^2+1 & 13 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} 3 & -2\kappa \\ -1 & \kappa+5 \end{vmatrix} = 0$$

$$\delta) \begin{vmatrix} \mu+3 & 2\mu \\ -13 & 7 \end{vmatrix} = \mu-11$$

$$\epsilon) \begin{vmatrix} \beta & -3 \\ 9 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\sigma\tau) \begin{vmatrix} \sqrt[3]{x} & 5 \\ 2 & \sqrt[3]{x} \end{vmatrix} = -6$$

Λύσεις των ασκήσεων

4.

$$\alpha) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -10 & -4 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-4) - 2(-10) = -20 + 20 = 0$$

$$\beta) \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 8 \cdot 3 - (-4) \cdot (-7) = 24 - 28 = -4$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} \sqrt{11}-3 & 2 \\ -1 & \sqrt{11}+3 \end{vmatrix} = (\sqrt{11}-3) \cdot (\sqrt{11}+3) - 2(-1) = \sqrt{11}^2 - 3^2 + 2 = 4$$

$$\delta) \begin{vmatrix} \sqrt{5} & -1 \\ -4 & \sqrt{5} \end{vmatrix} = \sqrt{5}^2 - (-1)(-4) = 5 - 4 = 1$$

5.

$$\alpha) \begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & -x \end{vmatrix} = -x^2 - 2 \cdot 2 = -x^2 - 4$$

$$\beta) \begin{vmatrix} \sqrt{\alpha-1} & \alpha \\ -2 & \sqrt{\alpha-1} \end{vmatrix} = \sqrt{\alpha-1}^2 - \alpha(-2) = \alpha - 1 + 2\alpha = 3\alpha - 1$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} \omega-1 & -3 \\ -2 & \omega+1 \end{vmatrix} = (\omega-1)(\omega+1) - (-3)(-2) = \omega^2 - 1 - 6 = \omega^2 - 7$$

$$\delta) \begin{vmatrix} \sqrt{\kappa}-1 & -3 \\ 1 & \sqrt{\kappa}+1 \end{vmatrix} = (\sqrt{\kappa}-1)(\sqrt{\kappa}+1) - (-3) \cdot 1 = \sqrt{\kappa}^2 - 1^2 + 3 = \kappa + 2$$

6.

$$\alpha) \begin{vmatrix} x & 2 \\ 8 & x \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x^2 - 2 \cdot 8 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 16 \Leftrightarrow (x = 4 \text{ ή } x = -4)$$

$$\beta) \begin{vmatrix} \alpha^2 + 1 & 13 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (\alpha^2 + 1) \cdot 1 - 13 \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + 1 - 26 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 = 25 \Leftrightarrow \alpha = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow (\alpha = 5 \text{ ή } \alpha = -5)$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} 3 & -2\kappa \\ -1 & \kappa + 5 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3(\kappa + 5) - (-2\kappa)(-1) = 0 \Leftrightarrow 3\kappa + 15 - 2\kappa = 0 \Leftrightarrow \kappa = -15$$

$$\delta) \begin{vmatrix} \mu + 3 & 2\mu \\ -13 & 7 \end{vmatrix} = \mu - 11 \Leftrightarrow 7(\mu + 3) - 2\mu(-13) = \mu - 11 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7\mu + 21 + 26\mu = \mu - 11 \Leftrightarrow 33\mu - \mu = -11 - 21 \Leftrightarrow 32\mu = -32 \Leftrightarrow \mu = -1$$

$$\epsilon) \begin{vmatrix} \beta & -3 \\ 9 & \beta^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \beta \cdot \beta^2 - (-3) \cdot 9 = 0 \Leftrightarrow \beta^3 + 27 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^3 = -27 \Leftrightarrow \beta^3 = -\sqrt[3]{27} \Leftrightarrow \beta = -3$$

$$\sigma\tau) \begin{vmatrix} \sqrt[3]{x} & 5 \\ 2 & \sqrt[3]{x} \end{vmatrix} = -6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x} - 5 \cdot 2 = -6 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} - 10 = -6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{x^2} = -6 + 10 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{3}} = 4 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 4^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = \sqrt{4^3} \Leftrightarrow x = 8$$

Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 10

1. Να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

$$\begin{array}{lll}
 \alpha) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} & \beta) \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} \end{vmatrix} & \gamma) \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} \\
 \delta) \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda \\ \lambda & \lambda+2 \end{vmatrix} & \epsilon) \begin{vmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{vmatrix} & \sigma\tau) \begin{vmatrix} \alpha+\beta & 4\alpha \\ \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}
 \end{array}$$

Λύση

$$\alpha) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 9 - 3 \cdot 6 = 18 - 18 = 0$$

$$\beta) \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ \sqrt{6} & \sqrt{3} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - 2\sqrt{6} = \sqrt{6} - 2\sqrt{6} = -\sqrt{6}$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ 5 & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{1}{4} - 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

$$\delta) \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda \\ \lambda & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(\lambda+2) - \lambda^2 = \lambda^2 - 4 - \lambda^2 = -4$$

$$\epsilon) \begin{vmatrix} 0,8 & -0,6 \\ 0,6 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,8^2 - (-0,6) \cdot 0,6 = 0,64 + 0,36 = 1$$

$$\begin{aligned}
 \sigma\tau) \begin{vmatrix} \alpha+\beta & 4\alpha \\ \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix} &= (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha \cdot \beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \\
 &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2
 \end{aligned}$$

2. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	Υπάρχει τουλάχιστον ένας τετραγωνικός 2×2 πίνακας με ορίζουσα ίση με μηδέν.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $A = \begin{pmatrix} \kappa + \lambda & \kappa \\ \kappa & \kappa - \lambda \end{pmatrix}$, τότε $ A = 2\kappa^2 - \lambda^2$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\delta & -\gamma \\ -\beta & -\alpha \end{vmatrix}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Λύση

α) Σωστό (π.χ. ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ έχει ορίζουσα ίση με μηδέν)

β) Σωστό Είναι: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - (-2) \cdot 3 = 6 + 6 = 12$ και

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - (-2) \cdot 3 = 6 + 6 = 12$$

γ) Λάθος Είναι: $A = \begin{vmatrix} \kappa + \lambda & \kappa \\ \kappa & \kappa - \lambda \end{vmatrix} = (\kappa + \lambda)(\kappa - \lambda) - \kappa^2 =$
 $= \cancel{\kappa^2} - \lambda^2 - \cancel{\kappa^2} = -\lambda^2$

δ) Σωστό Είναι: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$ και

$$\begin{vmatrix} -\delta & -\gamma \\ -\beta & -\alpha \end{vmatrix} = (-\alpha)(-\delta) - (-\gamma)(-\beta) = \alpha\delta - \beta\gamma$$

3. Αν $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 10$, να υπολογίσετε τις ορίζουσες:

α) $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix}$

β) $\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}$

γ) $\begin{vmatrix} \alpha & 8\beta \\ \gamma & 8\delta \end{vmatrix}$

Τί παρατηρείτε;

Λύση

Είναι: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow \alpha\delta - \beta\gamma = 10 \quad (1)$

α) $\begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \stackrel{(1)}{=} 10$

β) $\begin{vmatrix} \gamma & \delta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \gamma\beta - \delta\alpha = -(\alpha\delta - \beta\gamma) \stackrel{(1)}{=} -10$

γ) $\begin{vmatrix} \alpha & 8\beta \\ \gamma & 8\delta \end{vmatrix} = 8\alpha\delta - 8\beta\gamma = 8(\alpha\delta - \beta\gamma) \stackrel{(1)}{=} 8 \cdot 10 = 80$

Παρατηρούμε ότι:

α) Αν σε ορίζουσα 2×2 εναλλάξουμε δύο διαγώνιους όρους, το αποτέλεσμα θα παραμείνει το ίδιο.

β) Αν σε μια ορίζουσα 2×2 εναλλάξουμε θέση δύο διαδοχικές γραμμές, η ορίζουσα θα αλλάξει πρόσημο (η ορίζουσα θα έχει την αντίθετη τιμή)

γ) Αν σε μια ορίζουσα 2×2 πολλαπλασιάσουμε μια στήλη με έναν αριθμό $\alpha \neq 0$, τότε η τιμή της ορίζουσας θα πολλαπλασιαστεί με τον ίδιο αριθμό α .

4. Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 9 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Λύση

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 9 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2-\lambda)(5-\lambda) - 2 \cdot 9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 - 2\lambda - 5\lambda + \lambda^2 - 18 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda - 8 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda - 8)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow (\lambda = 8 \text{ ή } \lambda = -1)$$

5.1.2 Ορίζουσες 3×3

Αν $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας 3×3 τότε η

ορίζουσά του συμβολίζεται με: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix}$ ή με $|A|$ ή με $\det(A)$.

▪ Ο υπολογισμός μιας ορίζουσας 3×3 μπορεί να γίνει με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία μιας **οποιασδήποτε γραμμής ή οποιασδήποτε στήλης** της.

▪ Στον υπολογισμό της ορίζουσας 3×3 λαμβάνουμε υπόψη τον **κανόνα**

προσήμου όπως φαίνεται στο σχήμα:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$$

Διαδικασία υπολογισμού ορίζουσας 3×3

1. Επιλέγουμε τη γραμμή ή στήλη ως προς την οποία θα αναπτύξουμε
2. Παίρνουμε το 1^ο στοιχείο της γραμμής ή στήλης που έχουμε επιλέξει και το γράφουμε με το αντίστοιχο πρόσημο μπροστά του (σύμφωνα με τον **κανόνα προσήμου**).
3. Στη συνέχεια διαγράφουμε νοητά τη γραμμή και τη στήλη που αντιστοιχούν στο στοιχείο αυτό και απομένει ένας πίνακας 2×2.
4. Με την ορίζουσα αυτού του πίνακα θα πολλαπλασιάσουμε το πρώτο στοιχείο που έχουμε ήδη γράψει στο αποτέλεσμα.
5. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για το 2^ο στοιχείο της γραμμής ή στήλης (βήματα 2 – 4) και ξανά για το 3^ο και τελευταίο στοιχείο.
6. Υπολογίζουμε τις ορίζουσες 2×2 που έχουμε εμφανίσει στο αποτέλεσμα και κρατάμε το αποτέλεσμα σε παρένθεση.
7. Κάνουμε τις πράξεις μέχρι να βρούμε την τιμή της ορίζουσας.

Εφαρμογή

Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{pmatrix}$

α) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα A με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής.

β) Να υπολογίσετε την ορίζουσα του πίνακα A με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία της 2^{ης} στήλης.

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} &= \alpha \cdot \begin{vmatrix} \varepsilon & \zeta \\ \theta & \iota \end{vmatrix} - \beta \cdot \begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + \gamma \cdot \begin{vmatrix} \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix} = \\ &= \alpha(\varepsilon\iota - \zeta\theta) - \beta(\delta\iota - \zeta\eta) + \gamma(\delta\theta - \varepsilon\eta) = \\ &= \alpha\varepsilon\iota - \alpha\zeta\theta - \beta\delta\iota + \beta\zeta\eta + \gamma\delta\theta - \gamma\varepsilon\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} &= -\beta \cdot \begin{vmatrix} \delta & \zeta \\ \eta & \iota \end{vmatrix} + \varepsilon \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \eta & \iota \end{vmatrix} - \theta \cdot \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \delta & \zeta \end{vmatrix} = \\ &= -\beta(\delta\iota - \zeta\eta) + \varepsilon(\alpha\iota - \gamma\eta) - \theta(\alpha\zeta - \gamma\delta) = \\ &= -\beta\delta\iota + \beta\zeta\eta + \varepsilon\alpha\iota - \varepsilon\gamma\eta - \theta\alpha\zeta + \theta\gamma\delta \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι όπως και να γίνει η ανάπτυξη το τελικό αποτέλεσμα της ορίζουσας θα είναι το ίδιο.

Παράδειγμα

1. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix}$ με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία: **α)** της 3^{ης} γραμμής και **β)** της 2^{ης} στήλης.

Λύση

α)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= 1(-3 \cdot 2 - 1 \cdot (-5)) - 6(2 \cdot 2 - 1(-4)) - 1(2 \cdot (-5) - (-3)(-4)) \\ &= 1(-6 + 5) - 6(4 + 4) - 1(-10 - 12) = \\ &= 1(-1) - 6(8) - 1(-22) = -1 - 48 + 22 = -27 \end{aligned}$$

β)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} &= -(-3) \cdot \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (-5) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot ((-4)(-1) - 2 \cdot 1) - 5 \cdot (2(-1) - 1 \cdot 1) - 6(2 \cdot 2 - 1(-4)) = \\ &= 3(4 - 2) - 5(-2 - 1) - 6(4 + 4) = \\ &= 3(2) - 5(-3) - 6(8) = 6 + 15 - 48 = -27 \end{aligned}$$

Κανόνας του Sarrus για υπολογισμό της ορίζουσας 3×3:

1) Γράφουμε ξανά τις δύο πρώτες στήλες στα δεξιά

2) Πολλαπλασιάζουμε ανά τρεις τους αριθμούς όπως δείχνουν τα βέλη και βάζουμε τα αντίστοιχα πρόσημα.

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \zeta \\ \eta & \theta & \iota \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon & \zeta & \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta & \iota & \eta & \theta \end{vmatrix} = \begin{matrix} + & + & + \\ \alpha & \beta & \gamma & \alpha & \beta \\ \delta & \varepsilon & \zeta & \delta & \varepsilon \\ \eta & \theta & \iota & \eta & \theta \\ - & - & - \end{matrix} = \\
 = \alpha\epsilon\iota + \beta\zeta\eta + \gamma\delta\theta - \eta\epsilon\gamma - \theta\zeta\alpha - \iota\delta\beta$$

Λυμένα παραδείγματα

2. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ με τον κανόνα του Sarrus.

Λύση

$$\begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6 & -1 \\ -4 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -4 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \\
 = 2 \cdot 0 \cdot 4 + 6 \cdot 3 \cdot 5 + (-1)(-4)(-2) - 5 \cdot 0(-1) - (-2) \cdot 3 \cdot 2 - 4(-4) \cdot 6 = \\
 = 0 + 90 - 8 + 0 + 12 + 96 = 190$$

3. Να υπολογίσετε την ορίζουσα: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

α) αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της 1ης γραμμής

β) αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της 3ης στήλης

γ) με τον κανόνα του Sarrus.

Λύση

α)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(5 \cdot 4 - 1 \cdot 0) + 1(-3 \cdot 4 - 1 \cdot 2) + 0 =$$

$$= 2 \cdot 20 + 1(-14) = 40 - 14 = 26$$

β)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 1 \cdot (0 - (-1)2) + 4 \cdot (2 \cdot 5 - (-1)(-3)) =$$

$$= -1 \cdot 2 + 4(10 - 3) = -2 + 28 = 26$$

γ)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 4 + (-1) \cdot 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) \cdot 0 - 2 \cdot 5 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-1) =$$

$$= 40 - 2 + 0 + 0 + 0 - 12 = 26$$

4. Να υπολογίσετε την τιμή των οριζουσών χρησιμοποιώντας την κατάλληλη γραμμή ή στήλη:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 5 & 19 & -1 \\ 3 & 46 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \beta) \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \quad \gamma) \begin{vmatrix} 2 & 5^{2020} & 20^{21} \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix}$$

Λύση

α) Αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της 3^{ης} γραμμής:

$$\begin{vmatrix} 5 & 19 & -1 \\ 3 & 46 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 19 & -1 \\ 46 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 46 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 2(5 \cdot 2 - (-1)3) + 0 = -2(10 + 3) = -26$$

Προτιμάμε να κάνουμε το ανάπτυγμα ως προς κάποια γραμμή ή στήλη που περιέχει πολλά μηδενικά ώστε να γίνουν ευκολότερα οι υπολογισμοί.

β) Αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της 2^{ης} στήλης:

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 1(5 \cdot 4 - 3 \cdot (-2)) + 0 = -1(20 + 6) = -26$$

γ) Αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της 2^{ης} γραμμής:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5^{2020} & 20^{21} \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5^{2020} & 20^{21} \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5^{2020} & 20^{21} \\ -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot ((-5)(-1) - 0(-4)) + 0 + 0 = 2 \cdot 5 = 10$$

5. Να λύσετε την εξίσωση:
$$\begin{vmatrix} 5 & \alpha & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ \alpha+2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε την ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 5 & \alpha & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ \alpha+2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & \alpha & -2 \\ 1 & 4 & 2 \\ \alpha+2 & 3 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 5 & \alpha \\ 1 & 4 \\ \alpha+2 & 3 \end{vmatrix} =$$

Παρατήρηση

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του Sarrus. Αν δεν διευκρινίζει η άσκηση μπορείτε να κάνετε τον υπολογισμό της ορίζουσας με όποιο τρόπο σας βολεύει.

$$= 5 \cdot 4 \cdot (-2) + \alpha \cdot 2 \cdot (\alpha+2) + (-2) \cdot 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 4 \cdot (\alpha+2) - 5 \cdot 2 \cdot 3 - \alpha \cdot 1 \cdot (-2) =$$

$$= -40 + 2\alpha^2 + 4\alpha - 6 + 8\alpha + 16 - 30 + 2\alpha = 2\alpha^2 + 14\alpha - 60$$

$$\text{Επομένως η εξίσωση γίνεται: } 2\alpha^2 + 14\alpha - 60 = 0 \Rightarrow 2(\alpha^2 + 7\alpha - 30) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 7\alpha - 30 = 0 \Rightarrow (\alpha+10)(\alpha-3) = 0 \Rightarrow (\alpha = -10 \text{ ή } \alpha = 3)$$

6. Να αποδείξετε ότι:
$$\begin{vmatrix} 2 & x & x+2 \\ x & 1 & 1+x \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Λύση

$$\begin{vmatrix} 2 & x & x+2 \\ x & 1 & 1+x \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & x & x+2 \\ x & 1 & 1+x \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & x \\ x & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (-2) + x(1+x)3 + (x+2)x(-5) - (x+2)1 \cdot 3 - 2(1+x)(-5) - x \cdot x(-2) =$$

$$= -4 + 3x + 3x^2 - 5x^2 - 10x - 3x - 6 + 10 + 10x + 2x^2 =$$

$$= -4 + \cancel{3x} + \cancel{3x^2} - \cancel{5x^2} - \cancel{10x} - \cancel{3x} - 6 + 10 + \cancel{10x} + \cancel{2x^2} = 0 = \text{B.M.}$$

Ασκήσεις για λύση

7. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\beta) \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 7 & -5 & 8 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix}$$

8. Αν $A = \begin{pmatrix} 20^{27} & 4 & 6^{12} \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ είναι ένας πίνακας 3×3 , να υπολογίσετε την

$|A|$, αφού πρώτα επιλέξετε «κατάλληλη» γραμμή ή στήλη για να την αναπτύξετε.

9. Να υπολογίσετε τις παρακάτω ορίζουσες:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 2 & \sqrt[9]{47} & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & x^{11} & 5 \end{vmatrix}$$

$$\beta) \begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 17 & -19 \\ 0 & 8 & -6 \end{vmatrix}$$

10. Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 2 & x+3 & -2 \\ 1 & x & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta) \begin{vmatrix} 3 & x+1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -3 & x & -2 \end{vmatrix} = 9$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} \alpha+1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & \alpha+2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -4 & \alpha & -2 \end{vmatrix}$$

11. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} 3 & 5 & x \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ είναι αδύνατη $\forall x \in \mathbb{R}$.

Λύσεις των ασκήσεων

$$\begin{aligned}
 7. \quad \alpha) \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & -2 \\ -3 & 1 & -4 \end{vmatrix} &= 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = \\
 &= 2(5(-4) - (-2)(-1)) - 0 - 3(4(-2) - 5 \cdot (-1)) = 2 \cdot (-18) - 3(-3) = -27
 \end{aligned}$$

β) Αναπτύσσουμε με τον κανόνα του Sarrus:

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 7 & -5 & 8 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 7 & -5 & 8 \\ 2 & 6 & -4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \\
 &= 1(-5)(-4) + 3 \cdot 8 \cdot 2 - 2 \cdot 7 \cdot 6 - (-2)(-5)2 - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 3 \cdot 7(-4) = \\
 &= 20 + 48 - 84 - 20 - 48 + 84 = 0
 \end{aligned}$$

8. Θα αναπτύξουμε κατά τα στοιχεία της 2^{ης} στήλης (που έχει 2 μηδενικά)

$$|A| = -4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 20^{27} & 6^{12} \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}_{=0} - 0 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 20^{27} & 6^{12} \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{=0} = -4(2 \cdot 3 - 1(-1)) = -28$$

9.

$$\begin{aligned}
 \alpha) \quad \begin{vmatrix} 2 & \sqrt[9]{47} & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & x^{11} & 5 \end{vmatrix} &= -0 \cdot \begin{vmatrix} \sqrt[9]{47} & -1 \\ x^{11} & 5 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & \sqrt[9]{47} \\ 1 & x^{11} \end{vmatrix} = \\
 &= 3(2 \cdot 5 - (-1) \cdot 1) = 3(10 + 1) = 33
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta) \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 & -3 \\ -4 & 17 & -19 \\ 0 & 8 & -6 \end{vmatrix} &= 0 \begin{vmatrix} 17 & -19 \\ 8 & -6 \end{vmatrix}^0 - (-4) \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 17 & -19 \end{vmatrix}^0 = \\
 &= 4(4(-6) - (-3)8) = 4(-24 + 24) = 4 \cdot 0 = 0
 \end{aligned}$$

10. Σε κάθε περίπτωση υπολογίζουμε αρχικά τις ορίζουσες:

$$\begin{aligned} \alpha) \quad \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 2 & x+3 & -2 \\ 1 & x & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & 5 & 4 \\ 2 & x+3 & -2 \\ 1 & x & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 2 & x+3 \\ 1 & x \end{vmatrix} = \\ &= 0 \cdot (x+3)(-2) + 5(-2)1 + 4 \cdot 2x - 4(x+3)1 - 0(-2)x - 5 \cdot 2(-2) = \\ &= 0 - 10 + 8x - 4x - 12 - 0 + 20 = 4x - 2 \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση γίνεται: $4x - 2 = 0 \Leftrightarrow 4x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \beta) \quad \begin{vmatrix} 3 & x+1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -3 & x & -2 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 3 & x+1 & -1 \\ 0 & 4 & 5 \\ -3 & x & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & x+1 \\ 0 & 4 \\ -3 & x \end{vmatrix} = \\ &= 3 \cdot 4(-2) + (x+1)5(-3) + (-1)0x - (-1) \cdot 4 \cdot (-3) - 3 \cdot 5x - (x+1)0(-2) = \\ &= -24 + (x+1) \cdot (-15) + 0 - 12 - 15x - 0 = -24 - 15x - 15 - 12 - 15x = \\ &= -30x - 51 \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση γίνεται:

$$-30x - 51 = 9 \Leftrightarrow -30x = 9 + 51 \Leftrightarrow -30x = 60 \Leftrightarrow x = -2$$

$$\gamma) \quad \text{Είναι: } \begin{vmatrix} \alpha+1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -4(\alpha+1) - 2(-3) = -4\alpha - 4 + 6 = -4\alpha + 2$$

$$\begin{aligned} \text{και} \quad \begin{vmatrix} 2 & \alpha+2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -4 & \alpha & -2 \end{vmatrix} &= 2 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ \alpha & -2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} \alpha+2 & -1 \\ \alpha & -2 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} \alpha+2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 2(4(-2) - 3\alpha) - 0 - 4((\alpha+2)3 - (-1)4) = 2(-8 - 3\alpha) - 4(3\alpha + 6 + 4) = \\ &= -16 - 6\alpha - 12\alpha - 24 - 16 = -18\alpha - 56 \end{aligned}$$

Επομένως η εξίσωση γίνεται:

$$-4\alpha + 2 = -18\alpha - 56 \Leftrightarrow 18\alpha - 4\alpha = -2 - 56 \Leftrightarrow 14\alpha = -58 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{29}{7}$$

$$11. \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 & x \\ 2 & -4 & -3 \\ 3 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 45 - \cancel{12x} + \cancel{12x} + 18 - 0 = 0x - 27$$

Η εξίσωση $0x - 27 = 0$ είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$, άρα **δεν υπάρχουν λύσεις**.

Δραστηριότητες σχολ. βιβλίου σελ. 14

1. α) Αν $A = \begin{pmatrix} 2 & 7 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ ένας τετραγωνικός 3×3 πίνακας, να

υπολογίσετε την τιμή της ορίζουσας της:

i. αναπτύσσοντας την κατά τα στοιχεία της 1^{ης} στήλης

ii. αναπτύσσοντας την κατά τα στοιχεία της 2^{ης} στήλης

β) Αν $B = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ ένας τετραγωνικός 3×3 πίνακας, να υπολογίσετε

την τιμή της ορίζουσάς του, αφού πρώτα επιλέξετε «κατάλληλη» γραμμή ή στήλη για να την αναπτύξετε.

Λύση

α i) $|A| = 2 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= 2(0 - 0) - (-14 - 0) + 3(7 \cdot 4 - 0) = 0 + 14 + 84 = 98$$

ii) $|A| = -7 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7(-2 - 12) = 98$

β) Επιλέγουμε τη γραμμή ή στήλη με τα περισσότερα μηδενικά, για ευκολότερο υπολογισμό.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -0 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 + 4(2 \cdot 5 - 3 \cdot 1) - 0 = 4 \cdot 7 = 28$$

2. Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

(α)	$\text{An } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, τότε η ορίζουσά του είναι $ A = 14$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$\text{An } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, τότε η ορίζουσά του είναι $ A = 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \varepsilon & \zeta \\ 0 & 0 & \iota \end{vmatrix} = \alpha\varepsilon\iota$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Λύση

α) **Σωστό** Είναι: $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 7 \cdot 3 \cdot 2 - 7 \cdot 4 \cdot 1 - 0 - 0 = 14$

β) **Λάθος** Είναι: $A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 5 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 20 \neq 0$

γ) **Σωστό** Είναι: $\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & \varepsilon & \zeta \\ 0 & 0 & \iota \end{vmatrix} =$
 $= \alpha \cdot \varepsilon \cdot \iota + \beta \cdot \zeta \cdot 0 + \gamma \cdot 0 \cdot 0 - \gamma \cdot \varepsilon \cdot 0 - \alpha \cdot \zeta \cdot 0 - \gamma \cdot 0 \cdot 0 = \alpha\varepsilon\iota$

δ) **Σωστό** Είναι:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \cancel{1 \cdot 2 \cdot 7} + \cancel{1 \cdot 6 \cdot 3} + 5 \cdot \cancel{2 \cdot 3} - \cancel{5 \cdot 2 \cdot 3} - \cancel{1 \cdot 6 \cdot 3} - \cancel{1 \cdot 2 \cdot 7} = 0$$

3. Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω οριζουσών:

$$\alpha) \begin{vmatrix} 9 & 7 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\beta) \begin{vmatrix} -19 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 11 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\gamma) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 11 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\delta) \begin{vmatrix} 3 & 2^{100} & 3^{200} \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Λύση

α) Αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της 3^{ης} γραμμής:

$$\begin{vmatrix} 9 & 7 & 1 \\ -3 & -1 & 5 \\ 11 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 11(7 \cdot 5 - 1(-1)) = 11 \cdot 36 = \mathbf{396}$$

β) Αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της 2^{ης} στήλης:

$$\begin{vmatrix} -19 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 11 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -0 + 0 - 0 = \mathbf{0}$$

γ) Αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της 3^{ης} στήλης:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 11 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= (4 - 2 \cdot 11) - 5(3 \cdot 2 - 2 \cdot 11) + 0 = -18 - 5 \cdot (-16) = \mathbf{62}$$

δ) Αναπτύσσουμε κατά τα στοιχεία της 1^{ης} γραμμής:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2^{100} & 3^{200} \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} - 0 + 0 = 3(-2(-5) - 0) = 3 \cdot 10 = \mathbf{30}$$

4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Λύση

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 2 & x & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = x \cdot x \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot x \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot x - 2 \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$= 2x^2 + 12 + 18 - 6x - 9x - 8 = 2x^2 - 15x + 22$$

Άρα θέλουμε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει: $2x^2 - 15x + 22 = 0$

$$\Delta = (-15)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 22 = 225 - 176 = 49$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-15) \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{15 \pm 7}{4} \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \begin{matrix} x_1 = \frac{15+7}{4} = \frac{22}{4} = \frac{11}{2} \\ x_2 = \frac{15-7}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{matrix}$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι $x = \frac{11}{2}$ ή $x = 2$.

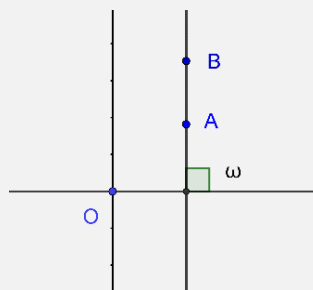
Ευθεία

5.2 Συντελεστής διεύθυνσης ευθείας

Η κλίση ή ο συντελεστής διεύθυνσης λ της ευθείας AB , όπου $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι:

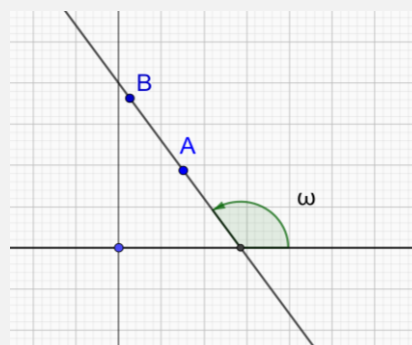
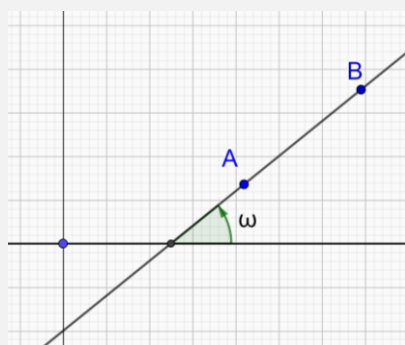
$$\lambda = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2$$

Αν είναι $x_1 = x_2$ τότε δεν ορίζεται κλίση.



$$\lambda = \varepsilon\varphi\omega, \quad \text{όταν } 0^\circ \leq \omega < 180^\circ, \quad \text{με } \omega \neq 90^\circ$$

Η κλίση είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα των x (με αρχική πλευρά τον άξονα των x και θετική φορά).



Εφαρμογή

1. Να βρείτε την κλίση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) διέρχεται από τα σημεία $A(-2, 1)$ και $B(1, 7)$
- β) σχηματίζει με τον άξονα των x γωνία $\omega = 120^\circ$

Λύση

α) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 1}{1 - (-2)} = \frac{6}{3} = 2$

β) Είναι $\lambda_\varepsilon = \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 120^\circ = -\sqrt{3}$

Εύρεση εξίσωσης ευθείας

Για να βρούμε την εξίσωση μιας ευθείας (ε) χρειαζόμαστε την κλίση της (λ) και ένα σημείο της $A(x_1, y_1)$.

Η εξίσωση της ευθείας δίνεται από τον τύπο: $(\varepsilon): y - y_1 = \lambda(x - x_1)$.

Παράδειγμα

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-1, 4)$ και έχει κλίση $\lambda = 2$.

Λύση

Η ευθεία θα έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y - y_A = \lambda(x - x_A) \Rightarrow y - 4 = 2(x - (-1)) \Rightarrow y - 4 = 2(x + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y - 4 = 2x + 2 \Rightarrow y = 2x + 6$$

Εύρεση εξίσωσης ευθείας από σημείο και γωνία με άξονα των x

Αν μας δίνουν τη γωνία ω που σχηματίζει η ζητούμενη ευθεία με τον άξονα των x (άξονας τετμημένων) τότε η κλίση είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω : $\lambda = \varepsilon\omega$

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από το σημείο $B(2, -5)$ και σχηματίζει γωνία $\frac{5\pi}{6}$ με τον άξονα των τετμημένων.

Λύση

$$\text{Είναι: } \lambda = \varepsilon\omega = \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{Επομένως θα έχει εξίσωση:}$$

$$(\varepsilon): y - y_B = \lambda(x - x_B) \Rightarrow y - (-5) = -\frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(y + 5) = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \Rightarrow 3y + 15 = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3}x + 3y = 2\sqrt{3} - 15$$

Εξίσωση εξίσωσης ευθείας που διέρχεται από δύο σημεία

Η ευθεία AB με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ έχει εξίσωση:

α) $AB: y - y_1 = \lambda(x - x_1)$, όπου λ είναι η κλίση της ευθείας AB

β) $AB: x = x_1$, αν $x_1 = x_2$ (δεν ορίζεται κλίση)

Παράδειγμα

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) περνάει από τα σημεία $A(-5, 4)$ και $B(0, -1)$

β) διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(-8, 3)$ και $\Delta(17, 3)$

γ) διέρχεται από τα σημεία $E(2, 7)$ και $Z(2, -3)$

Λύση

α) Είναι $\lambda_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 4}{0 - (-5)} = \frac{-5}{5} = -1$ Επομένως

$$(AB): y - y_A = \lambda(x - x_A) \Leftrightarrow y - 4 = -1(x - (-5)) \Leftrightarrow y - 4 = -(x + 5) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y - 4 = -x - 5 \Leftrightarrow y = -x - 1$$

β) Είναι $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{y_\Delta - y_\Gamma}{x_\Delta - x_\Gamma} = \frac{3 - 3}{17 - (-8)} = \frac{0}{25} = 0$ Επομένως

$$(\Gamma\Delta): y - y_\Gamma = \lambda(x - x_\Gamma) \Rightarrow y - 3 = 0(x - (-8)) \Rightarrow y - 3 = 0 \Rightarrow y = 3$$

Παρατήρηση: Αν είναι $\lambda=0$, και η ευθεία περνάει από κάποιο σημείο $\Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma)$, τότε η ευθεία θα είναι της μορφής $y = y_\Gamma$ και θα είναι παράλληλη με τον άξονα των x , δηλαδή οριζόντια ευθεία.

γ) Παρατηρούμε ότι $x_E = x_Z = 2$ και επομένως δεν ορίζεται κλίση (επειδή θα μηδενίζεται ο παρονομαστής). Άρα η ευθεία έχει εξίσωση $x = 2$

(θα είναι παράλληλη με τον άξονα των y , δηλαδή κατακόρυφη ευθεία).

Υπενθύμιση: Υπολογισμός κλίσης ευθείας από την εξίσωσή της

- Η ευθεία $y = \alpha x + \beta$ έχει κλίση ίση με α ($\lambda = \alpha$)

Π.χ. Η ευθεία $y = -3x + 51$ έχει κλίση $\lambda = -3$

- Αν η ευθεία δεν είναι στη μορφή $y = \alpha x + \beta$, τότε τη φέρνουμε σε αυτή τη μορφή λύνοντας την εξίσωση ως προς y

Π.χ. Για την ευθεία $3x + 5y - 7 = 0$ έχουμε:

$$3x + 5y - 7 = 0 \Leftrightarrow 5y = -3x + 7 \stackrel{:5}{\Leftrightarrow} y = -\frac{3}{5}x + \frac{7}{5}, \text{ άρα } \lambda = -\frac{3}{5}$$

Εύρεση εξίσωσης ευθείας από παραλληλία ή καθετότητα

- Δύο ευθείες είναι παράλληλες, αν έχουν ίσες κλίσεις

$$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

- Δύο ευθείες είναι κάθετες, αν οι κλίσεις τους έχουν γινόμενο -1

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$$

Παραδείγματα

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

α) περνάει από το $K(-3, 5)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία

$$\delta: y = 3x - 17$$

β) περνάει από το $\Lambda(2, 7)$ και είναι κάθετη στην $\zeta: 2x - 4y + 1 = 0$.

Λύση

α) $\varepsilon // \delta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\delta = 3$ Επομένως η εξίσωση της (ε) είναι:

$$(\varepsilon): y - 5 = 3(x - (-3)) \Leftrightarrow y - 5 = 3(x + 3) \Leftrightarrow y = 3x + 14$$

β) $\zeta: 2x - 4y + 1 = 0 \Leftrightarrow -4y = -2x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{-2}{-4}x - \frac{1}{-4}$ άρα $\lambda_\zeta = \frac{1}{2}$

$$\text{Είναι: } \varepsilon \perp \zeta \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\zeta = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = -2$$

$$(\varepsilon): y - 7 = -2(x - 2) \Leftrightarrow y - 7 = -2x + 4 \Leftrightarrow y = -2x + 11$$

6. Να υπολογίσετε την τιμή του α , ώστε οι ευθείες:
 $(\varepsilon_1): y - \alpha x = 5$ και $(\varepsilon_2): \alpha x + (\alpha + 6)y - 7 = 0$ να είναι κάθετες.

Λύση

Αρχικά υπολογίζουμε τις κλίσεις των δύο ευθειών:

$$(\varepsilon_1): y - \alpha x = 5 \Rightarrow y = \alpha x + 5 \quad \text{άρα } \lambda_1 = \alpha \quad \text{και}$$

$$(\varepsilon_2): \alpha x + (\alpha + 6)y - 7 = 0 \Rightarrow (\alpha + 6)y = -\alpha x + 7 \Rightarrow y = -\frac{\alpha}{\alpha + 6}x + \frac{7}{\alpha + 6}$$

$$\text{άρα θα είναι } \lambda_2 = -\frac{\alpha}{\alpha + 6}$$

$$\text{Έχουμε: } \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Rightarrow \alpha \cdot \left(-\frac{\alpha}{\alpha + 6}\right) = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\alpha^2 = -1(\alpha + 6) \Rightarrow -\alpha^2 = -\alpha - 6 \Rightarrow \alpha^2 - \alpha - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha - 3)(\alpha + 2) = 0 \Rightarrow (\alpha = 3 \text{ ή } \alpha = -2)$$

Ύψος τριγώνου

Κάθε ύψος σε ένα τρίγωνο διέρχεται από μια κορυφή του τριγώνου και είναι **κάθετο** στην απέναντι πλευρά του τριγώνου.

Επομένως όποτε μας ζητούν (ή μας δίνουν ως δεδομένο) ύψος ενός τριγώνου εργαζόμαστε με τη **συνθήκη καθετότητας**.

Εφαρμογή

7. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $A(1, -5)$, $B(3, 1)$ και $\Gamma(-5, -2)$. Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΒΔ.

Λύση

$$\text{Η πλευρά ΑΓ έχει κλίση: } \lambda_{\text{ΑΓ}} = \frac{-2 - (-5)}{-5 - 1} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}$$

Το ύψος ΒΔ διέρχεται από το Β και είναι κάθετο στην πλευρά ΑΓ.

$$\text{Άρα: } \text{ΒΔ} \perp \text{ΑΓ} \Rightarrow \lambda_{\text{ΒΔ}} \cdot \lambda_{\text{ΑΓ}} = -1 \Rightarrow \lambda_{\text{ΒΔ}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \Rightarrow \lambda_{\text{ΒΔ}} = 2$$

Επομένως το ύψος ΒΔ έχει εξίσωση:

$$\text{ΒΔ: } y - 1 = 2(x - 3) \Rightarrow y - 1 = 2x - 6 \Rightarrow y = 2x - 5$$

Μεσοκάθετος ευθύγραμμου τμήματος

Η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος AB, είναι η ευθεία (μ) που διέρχεται από το μέσο M του AB και είναι κάθετη σε αυτό.

Για να βρούμε μεσοκάθετο τμήματος AB, με $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$:

- Βρίσκουμε το μέσο M του AB: $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$ και $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$.
- Βρίσκουμε την κλίση της μεσοκαθέτου: $\mu \perp AB \Rightarrow \lambda_\mu \cdot \lambda_{AB} = -1$
- Βρίσκουμε την εξίσωση της μεσοκαθέτου, εφόσον έχουμε σημείο (M) και την κλίση της λ_μ .

Παράδειγμα

8. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB, όταν $A(5, -2)$ και $B(-3, 4)$.

Λύση

$$\text{Είναι } x_M = \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{και } y_M = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Άρα το μέσο του AB είναι το σημείο $M(1,1)$.

$$\lambda_{AB} = \frac{4-(-2)}{-3-5} = \frac{6}{-8} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Είναι } \mu \perp AB \Rightarrow \lambda_\mu \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_\mu \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -1 \Rightarrow \lambda_\mu = \frac{4}{3}$$

Επομένως η μεσοκάθετος έχει εξίσωση:

$$(\mu): y-1 = \frac{4}{3}(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(y-1) = 4(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3y-3 = 4x-4 \Rightarrow 4x-3y-1=0$$

Βρίσκουμε το μέσο M του τμήματος AB

Η μεσοκάθετος είναι κάθετη στο τμήμα AB, οπότε βρίσκουμε την κλίση της μεσοκαθέτου με τη συνθήκη καθετότητας.

Για την μεσοκάθετο έχουμε σημείο (M) και κλίση λ_μ και επομένως μπορούμε να βρούμε την εξίσωσή της.

Συμμετρικό σημείου ως προς ευθεία

Δύο σημεία A και A' λέγονται συμμετρικά ως προς μια ευθεία (ε) αν:

- βρίσκονται εκατέρωθεν της ευθείας (ε)
- η ευθεία AA' είναι κάθετη στην ευθεία (ε) και
- ισαπέχουν από την ευθεία (ε)
(ουσιαστικά η (ε) είναι μεσοκάθετη του τμήματος AA')

Μεθοδολογία

Για να βρούμε το συμμετρικό σημείο A' ενός σημείου A ως προς ευθεία (ε) :

- Βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας AA' , που διέρχεται από το A και είναι κάθετη στην (ε)
- Βρίσκουμε το σημείο τομής (M) της ευθείας (ε) με την ευθεία AA'
- Το M θα είναι μέσο του τμήματος AA'

Παράδειγμα

9. Δίνεται η ευθεία (ε) : $2y = x + 10$ και το σημείο $A(5,5)$. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου A ως προς την ευθεία (ε) .

Λύση

Βρίσκουμε την ευθεία AA' που θα είναι κάθετη στην (ε) .

$$\text{Είναι } (\varepsilon): 2y = x + 10 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 5 \text{ άρα } \lambda_{\varepsilon} = \frac{1}{2}$$

$$AA' \perp \varepsilon \Rightarrow \lambda_{AA'} \cdot \lambda_{\varepsilon} = -1 \Rightarrow \lambda_{AA'} = -2$$

$$AA': y - 5 = -2(x - 5) \Rightarrow y = -2x + 15$$

Βρίσκουμε το σημείο τομής των δύο ευθειών ε και AA' :

$$\begin{cases} y = -2x + 15 \\ 2y = x + 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 15 \\ 2(-2x + 15) = x + 10 \end{cases} \Rightarrow$$

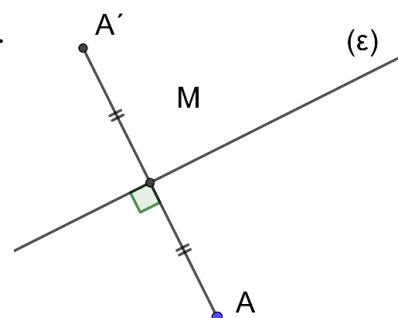
$$\Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 15 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 7 \\ x = 4 \end{cases}$$

Επομένως το $M(4,7)$ είναι το μέσο του AA'

$$\text{Είναι } x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow 4 = \frac{5 + x_{A'}}{2} \Rightarrow 8 = 5 + x_{A'} \Rightarrow x_{A'} = 3$$

$$\text{και } y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow 7 = \frac{5 + y_{A'}}{2} \Rightarrow 14 = 5 + y_{A'} \Rightarrow y_{A'} = 9$$

Επομένως το συμμετρικό του A ως προς την (ε) είναι το σημείο $A'(3,9)$.



Υπενθύμιση

Για να βρούμε το σημείο τομής δύο ευθειών, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους.

Γωνία δύο ευθειών

Δύο ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ τέμνονται στο σημείο Α.

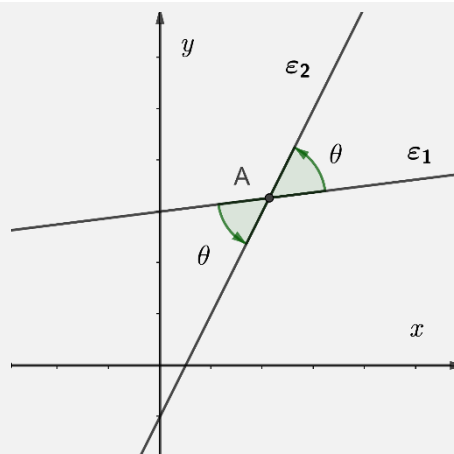
Η θετική κυρτή γωνία με αρχική πλευρά την ευθεία ε_1 και τελική πλευρά την ευθεία ε_2 ονομάζεται **γωνία** των δύο ευθειών και συμβολίζεται με $\gamma\omega\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 συμπίπτουν, ορίζουμε $\gamma\omega\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0^\circ$.

Άρα $0^\circ \leq \gamma\omega\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) < 180^\circ$

Για την γωνία θ των ευθειών ε_1 και ε_2 ($\gamma\omega\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$) με κλίσεις λ_1 και λ_2

ισχύει:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2}$$


Εφαρμογή

10. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι ευθείες

(δ): $y = -\frac{1}{3}x + 5$ και (ε): $y = -2x + 11$.

Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας θ .

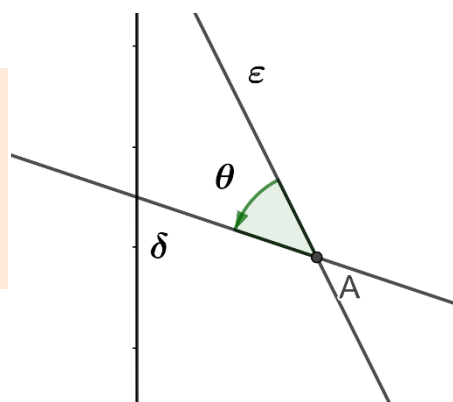
Λύση

Η γωνία θ είναι σχεδιασμένη με τη θετική φορά και ξεκινάει από την (ε) και καταλήγει στην (δ).

Επομένως θα πάρουμε $\lambda_1 = \lambda_\varepsilon = -2$ και $\lambda_2 = \lambda_\delta = -\frac{1}{3}$.

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2} = \frac{-\frac{1}{3} - (-2)}{1 + \left(-\frac{1}{3}\right)(-2)} = \frac{-\frac{1}{3} + 2}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}} = 1$$

Επομένως η γωνία θ είναι ίση με 45° .

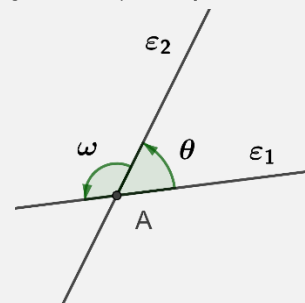


Παρατήρηση:

Ως λ_1 στον τύπο βάζουμε την κλίση της αρχικής ευθείας και ως λ_2 την κλίση της τελικής ευθείας της γωνίας, όταν η γωνία έχει τη θετική φορά (αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού).

Παρατηρήσεις

- Αν είναι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 + 1 = 0$ τότε οι ευθείες είναι κάθετες (σχηματίζουν γωνία 90° και δεν ορίζεται εφαπτομένη)
- Αν η μια από τις δύο είναι παράλληλη με τον άξονα των y , τότε για τη γωνία θ των δύο ευθειών ισχύει: $\varepsilon\phi\theta = \frac{1}{\lambda_1}$.
- Δύο ευθείες σχηματίζουν δύο γωνίες μία οξεία (θ) και μια αμβλεία (ω), οι οποίες είναι μεταξύ τους παραπληρωματικές ($\omega = 180^\circ - \theta$).



Οξεία και αμβλεία γωνία δύο ευθειών

- Αν μας ζητάνε να βρούμε την **οξεία γωνία** δύο ευθειών, τότε επειδή γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη της θα είναι θετική, παίρνουμε τον τύπο μέσα σε

απόλυτη τιμή:

$$\varepsilon\phi\theta = \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2} \right|$$

Σε όποια θέση και αν βάλουμε τις κλίσεις, το αποτέλεσμα θα είναι σωστό.

- Αν μας ζητείται να βρούμε την **αμβλεία γωνία** των δύο ευθειών, τότε αυτή θα είναι η **παραπληρωματική της οξείας γωνίας** των δύο ευθειών.

Εφαρμογή

11. Να βρείτε με προσέγγιση δεκάτου την οξεία γωνία (θ) και την αμβλεία γωνία (ω) που σχηματίζουν οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = x - 15$ και $(\varepsilon_2): y = -5x + 23$.

Λύση

Παίρνουμε $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = -5$ και έχουμε:

$$\varepsilon\phi\theta = \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2} \right| = \left| \frac{-5 - 1}{1 + 1 \cdot (-5)} \right| = \left| \frac{-6}{-4} \right| = \frac{3}{2}$$

Επομένως η οξεία γωνία των δύο ευθειών είναι $\theta = 56,3^\circ$. Η αμβλεία γωνία θα είναι παραπληρωματική της θ , άρα $\omega = 180^\circ - 56,3^\circ = 123,7^\circ$.

Εύρεση γωνιών ενός τριγώνου

- Για να βρούμε τις γωνίες ενός τριγώνου, αρχικά υπολογίζουμε όλες τις κλίσεις των πλευρών του
- Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις οξείες γωνίες των πλευρών του
- Αν το άθροισμα των οξείων γωνιών δεν είναι 180° , τότε υπάρχει μια αμβλεία. Αυτή θα είναι η παραπληρωματική της μεγαλύτερης οξείας.

Παράδειγμα

12. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1,3)$, $B(2,-1)$ και $\Gamma(4,5)$ με προσέγγιση δεκάτου.

Λύση

Αρχικά βρίσκουμε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου.

$$\lambda_{AB} = \frac{-1-3}{2-(-1)} = \frac{-4}{3}, \quad \lambda_{B\Gamma} = \frac{5-(-1)}{4-2} = \frac{6}{2} = 3 \quad \text{και} \quad \lambda_{A\Gamma} = \frac{5-3}{4-(-1)} = \frac{2}{5}$$

Η γωνία A σχηματίζεται από τις πλευρές AB και $A\Gamma$, οπότε:

$$\varepsilon\varphi\hat{A} = \left| \frac{\lambda_{AB} - \lambda_{A\Gamma}}{1 + \lambda_{A\Gamma} \cdot \lambda_{AB}} \right| = \left| \frac{-\frac{4}{3} - \frac{2}{5}}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{2}{5}} \right| = \left| \frac{-\frac{26}{15}}{1 - \frac{8}{15}} \right| = \left| \frac{-\frac{26}{15}}{\frac{7}{15}} \right| = \frac{26}{7} \Rightarrow \hat{A} \approx 74,9^\circ$$

Η γωνία B σχηματίζεται από τις ευθείες των AB και $B\Gamma$:

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \left| \frac{\lambda_{AB} - \lambda_{B\Gamma}}{1 + \lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_{AB}} \right| = \left| \frac{-\frac{4}{3} - 3}{1 + \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot 3} \right| = \left| \frac{-\frac{13}{3}}{1 - 4} \right| = \left| \frac{-\frac{13}{3}}{-3} \right| = \frac{13}{9} \Rightarrow \hat{B} \approx 53,3^\circ$$

$$\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \left| \frac{\lambda_{A\Gamma} - \lambda_{B\Gamma}}{1 + \lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_{A\Gamma}} \right| = \left| \frac{\frac{2}{5} - 3}{1 + \frac{2}{5} \cdot (3)} \right| = \left| \frac{-\frac{13}{5}}{1 + \frac{6}{5}} \right| = \left| \frac{-\frac{13}{5}}{\frac{11}{5}} \right| = \frac{13}{11} \Rightarrow \hat{\Gamma} \approx 49,8^\circ$$

Είναι $\hat{A} = 74,9^\circ$, $\hat{B} = 53,3^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 49,8^\circ$ και παρατηρούμε ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ άρα είναι οι σωστές.

Ασκήσεις για λύση

Εύρεση εξίσωσης ευθείας

13. Να υπολογίσετε τον συντελεστή διεύθυνσης:

- α) της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(7,0)$ και $B(-2,-18)$
- β) της ευθείας που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα των x
- γ) της ευθείας που σχηματίζει γωνία 0° με τον άξονα των x
- δ) της ευθείας που είναι κάθετη στον άξονα των x .

14. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) διέρχεται από το σημείο $A(7,-4)$ και έχει κλίση $\lambda = -5$.
- β) διέρχεται από το $B(-5,11)$ και είναι παράλληλη με τον άξονα των x
- γ) περνάει από το $\Gamma(-3,8)$ και είναι παράλληλη με τον άξονα των y
- δ) περνάει από το $\Delta(-4,3)$ και σχηματίζει γωνία $\omega = 60^\circ$ με τον $x'x$.

15. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο

$E(-3,1)$ και σχηματίζει γωνία $\frac{3\pi}{4}$ με τον άξονα των τετμημένων.

16. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) η οποία:

- α) διέρχεται από το $Z(3,-2)$ και είναι παράλληλη στην (δ): $3x - 4y = 0$
- β) περνάει από το $H(0,7)$ και είναι κάθετη στην (ζ): $5x + 6y + 3 = 0$

17. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) διέρχεται από τα σημεία $A(4,-5)$ και $B(-5,1)$
- β) διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(-8,17)$ και $\Delta(-8,-1)$
- γ) διέρχεται από τα σημεία $E(-2,4)$ και $Z(2,4)$.

18. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A(3,7)$, $B(3,-1)$ και $\Gamma(-2,-1)$.

- α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$.
- β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει κάθε ευθεία με τον άξονα των x
- γ) Να βρείτε το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.

19. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που έχει κλίση $\lambda = -2$ και διέρχεται από το σημείο τομής (Δ) των ευθειών $y = x + 5$ και $2x + 3y = 0$.

Γωνία δύο ευθειών

20. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες:

α) (ε_1): $y = 2x + 19$ και (ε_2): $3x + y + 4 = 0$.

β) (ε_1): $8x - 2y + 1 = 0$ και (ε_2): $3x - 5y = 7$

γ) (ε_1): $y = 2\sqrt{3}x$ και (ε_2): $\sqrt{3}x - 7y - 5 = 0$

δ) (ε_1): $y = \frac{1}{4}x + 6$ και (ε_2): $y = 8$

ε) (ε_1): $3y + x = 2$ και (ε_2): $x = 5$

21. Να υπολογίσετε την αμβλεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες:

(ε): $5x - 2y + 8 = 0$ και (δ): $7x + 3y = 9$.

22. Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma}$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $A(-5, 2)$, $B(0, 0)$ και $\Gamma(2, 5)$

β) $A(0, 2)$, $B(1, -4)$ και $\Gamma(7, -2)$

γ) $A(4, -3)$, $B(0, 1)$ και $\Gamma(3, 7)$

23. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ αν:

α) $A(6, 0)$, $B(1, -5)$ και $\Gamma(0, 3)$.

β) $A(0, 5)$, $B(6, 4)$ και $\Gamma(2, 3)$.

Συνθήκη καθετότητας

24. Να εξετάσετε αν οι παρακάτω ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους:

α) (ε_1): $y = 3x - 1$ και (ε_2): $4x + 12y + 5 = 0$.

β) (ε_1): $5x - y + 1 = 0$ και (ε_2): $2x - 10y = 0$

25. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο $A(-4, 1)$ και είναι κάθετη στην ευθεία: (δ): $2x - 7y + 1 = 0$.

- 26.** Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες οι ευθείες $(\varepsilon_1): (\kappa - 4)x + (\kappa - 1)y + 1 = 0$ και $(\varepsilon_2): (7 - 3\kappa)x + (4 - \kappa)y - 4 = 0$, είναι κάθετες.
- 27.** Να υπολογίσετε την τιμή του α ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1): 2x + y - 9 = 0$ και $(\varepsilon_2): (5 - 2\alpha)x - \alpha y + 3 = 0$ να είναι κάθετες.
- 28.** Να υπολογίσετε την τιμή του μ , ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \frac{\mu}{\mu - 1} \cdot x$ και $(\varepsilon_2): (\mu - 1)x + (9 - 2\mu)y - 3 = 0$, $\mu \neq 1$ να είναι κάθετες.
- 29.** Να υπολογίσετε την τιμή του κ , ώστε οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = -\frac{1}{7}x + 5$ και $(\varepsilon_2): (\kappa^4 + 5)x - 3y - 4 = 0$ να είναι κάθετες.
- 30.** Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$, με $A(5, 2)$, $B(1, 3)$ και $\Gamma(8, -4)$.
α) Να δείξετε ότι το ύψος AD έχει εξίσωση: $y = x - 3$
β) Να βρείτε το ορθόκεντρο Z του τριγώνου.
- 31.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $A(7, 7)$, $B\Gamma: y = -x + 2$ και το ύψος BE έχει εξίσωση: $BE: x + 5y = 18$.
α) Να δείξετε ότι η κορυφή B έχει συντεταγμένες $B(-2, 4)$.
β) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AG
γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .
- 32.** Να βρείτε τη μεσοκάθετο του τμήματος AB , με $A(-7, 6)$ και $B(5, 0)$.
- 33.** Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB με άκρα $A(3, -2)$ και $B(-1, 6)$.
Να βρείτε:
α) το μήκος του AB ,
β) την εξίσωση της μεσοκάθετης του AB .
- 34.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (δ) που περνά από το σημείο $A(3, 4)$ και είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): x + 3y = 5$. Στη συνέχεια να βρείτε το συμμετρικό σημείο A' του A ως προς την ευθεία (ε) .

Λύσεις των ασκήσεων

$$13. \quad \alpha) \quad \lambda_{AB} = \frac{-18-0}{-2-7} = 2$$

$$\beta) \quad \lambda = \varepsilon\varphi 45^\circ = 1$$

$$\gamma) \quad \lambda = \varepsilon\varphi 0^\circ = 0$$

$$\delta) \quad \text{δεν ορίζεται κλίση}$$

14. Παρόμοια με τις 2 και 3

$$\alpha) \quad \varepsilon: y - (-4) = -5(x - 7) \Rightarrow y + 4 = -5x + 35 \Rightarrow y = -5x + 31$$

$$\beta) \quad y = 11$$

$$\gamma) \quad x = -3$$

$$\delta) \quad \lambda = \varepsilon\varphi 60^\circ = \sqrt{3}, \text{ άρα } y - 3 = \sqrt{3}(x + 4) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + 4\sqrt{3} + 3$$

$$15. \quad \lambda = \varepsilon\varphi \frac{3\pi}{4} = -1, \text{ άρα } y - 1 = -1(x + 3) \Rightarrow y - 1 = -x - 3 \Rightarrow y = -x - 2$$

$$16. \quad \alpha) \quad (\delta): 3x - 4y = 0 \Rightarrow -4y = -3x \Rightarrow y = \frac{3}{4}x, \text{ άρα } \lambda_\delta = \frac{3}{4}$$

$$\varepsilon // \delta \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \lambda_\delta = \frac{3}{4}, \text{ άρα η ευθεία } (\varepsilon) \text{ έχει εξίσωση:}$$

$$(\varepsilon): y + 2 = \frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow 4y + 8 = 3x - 9 \Rightarrow 3x - 4y - 17 = 0$$

$$\beta) \quad (\zeta): 5x + 6y + 3 = 0 \Rightarrow 6y = -5x - 3 \Rightarrow y = -\frac{5}{6}x - \frac{3}{6}, \text{ άρα } \lambda_\zeta = -\frac{5}{6}$$

$$\varepsilon \perp \delta \Rightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \left(-\frac{5}{6}\right) = -1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon = \frac{6}{5}, \text{ άρα έχουμε:}$$

$$(\varepsilon): y - 7 = \frac{6}{5}(x - 0) \Leftrightarrow 5y - 35 = 6x - 0 \Leftrightarrow 6x - 5y + 35 = 0$$

17. Παρόμοια με την 4

$$\alpha) \quad \lambda_{AB} = \frac{1 - (-5)}{-5 - 4} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}, \text{ άρα η ευθεία AB έχει εξίσωση:}$$

$$AB: y + 5 = -\frac{2}{3}(x - 4) \Rightarrow 3y + 15 = -2x + 8 \Rightarrow 2x + 3y + 7 = 0$$

β) Παρατηρούμε ότι $x_{\Gamma} = x_{\Delta} = -8$, επομένως δεν ορίζεται κλίση και η ευθεία έχει εξίσωση $\Gamma\Delta: x = -8$ (παράλληλη με τον άξονα των τεταγμένων)

$$\gamma) \lambda_{EZ} = \frac{4-4}{2-(-2)} = \frac{0}{4} = 0, \quad EZ: y-4 = 0(x+2)^0 \Rightarrow y=4$$

$$18. \quad \alpha) \quad x_A = x_B = 3 \quad \text{άρα είναι} \quad AB: x = 3, \quad \lambda_{AG} = \frac{-1-7}{-2-3} = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

$$\text{επομένως: } AG: y-7 = \frac{8}{5}(x-3) \Rightarrow 5y-35 = 8x-24 \Rightarrow 8x-5y+11=0$$

$$\lambda_{BG} = \frac{-1-(-1)}{-2-3} = \frac{0}{-5} = 0, \quad \text{άρα είναι: } BG: y+1 = 0(x-3) \Rightarrow y=-1$$

β) Η AB είναι παράλληλη με τον άξονα των y, άρα σχηματίζει γωνία 90° με τον άξονα των x (κατακόρυφη ευθεία).

$$\lambda_{AG} = \frac{8}{5} \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{8}{5} \Rightarrow 58^\circ, \quad \lambda_{BG} = 0 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = 0 \Rightarrow \omega = 0^\circ \text{ (η ευθεία AG}$$

είναι παράλληλη με τον άξονα των x, άρα οριζόντια ευθεία)

γ) Οι πλευρές AB και AG είναι μεταξύ τους κάθετες, άρα η γωνία $B\hat{A}G$ που σχηματίζουν είναι ορθή. Επομένως το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

$$19. \quad \begin{cases} y = x + 5 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ 2x + 3(x + 5) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ 2x + 3x + 15 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x + 5 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = -3 \end{cases} \Rightarrow \Delta(-3, 2)$$

Για να βρούμε το σημείο τομής δύο ευθειών, λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους (με όποιο τρόπο μας βολεύει)

Επομένως η ευθεία (ε) έχει εξίσωση:

$$(ε): y-2 = -2(x+3) \Rightarrow y-2 = -2x-6 \Rightarrow y = -2x-4$$

$$20. \quad \alpha) \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -3 \quad \text{άρα}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \left| \frac{-3-2}{1+2 \cdot (-3)} \right| = \left| \frac{-5}{1-6} \right| = \left| \frac{-5}{-5} \right| = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$\beta) \lambda_1 = 4, \lambda_2 = \frac{3}{5} \quad \text{άρα} \quad \varepsilon\varphi\theta = \left| \frac{\frac{3}{5} - 4}{1 + 4 \cdot \frac{3}{5}} \right| = \left| \frac{-\frac{17}{5}}{\frac{17}{5}} \right| = |-1| = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$\gamma) \lambda_1 = 2\sqrt{3}, \lambda_2 = \frac{\sqrt{3}}{7}, \quad \varepsilon\varphi\theta = \left| \frac{\frac{\sqrt{3}}{7} - 2\sqrt{3}}{1 + 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{7}} \right| = \left| \frac{\frac{\sqrt{3} - 14\sqrt{3}}{7}}{\frac{7 + 2 \cdot 3}{7}} \right| = \left| \frac{-13\sqrt{3}}{13} \right| = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\delta) \lambda_1 = \frac{1}{4}, \lambda_2 = 0 \quad \text{άρα} \quad \varepsilon\varphi\theta = \left| \frac{0 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4} \cdot 0} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{4}}{1} \right| = \frac{1}{4} \Rightarrow \theta = 14^\circ$$

$$\varepsilon) \lambda_1 = -3, \text{ δεν ορίζεται κλίση για την } (\varepsilon_2). \quad \varepsilon\varphi\theta = \left| \frac{1}{\lambda_1} \right| = \left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 18,4^\circ$$

21. Υπολογίζουμε αρχικά την οξεία γωνία. Είναι: $\lambda_1 = \frac{5}{2}, \lambda_2 = -\frac{7}{3}$ άρα

$$\varepsilon\varphi\theta = \left| \frac{-\frac{7}{3} - \frac{5}{2}}{1 + \left(-\frac{5}{2}\right) \cdot \left(-\frac{7}{3}\right)} \right| = \left| \frac{-\frac{29}{6}}{\frac{41}{6}} \right| = \left| \frac{29}{41} \right| = \frac{29}{41} \Rightarrow \theta = 35,3^\circ$$

Επομένως η αμβλεία γωνία των δύο ευθειών θα είναι: $180^\circ - 35,3^\circ = 144,7^\circ$

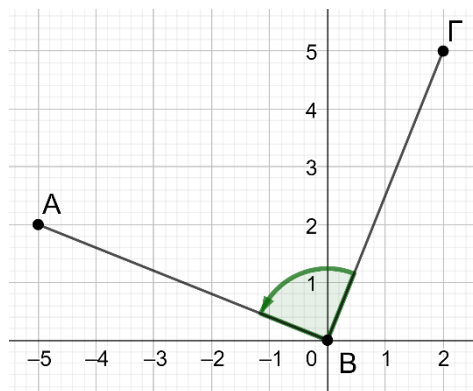
22. Τοποθετούμε τα σημεία σε άξονες και σημειώνουμε τη ζητούμενη γωνία με τη θετική φορά (αντίθετα από το τους δείκτες του ρολογιού). Η αρχική πλευρά δίνει την λ_1 και η τελική πλευρά την λ_2 .

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε τον τύπο της εφαπτομένης (εκτός αν είναι κάθετες και δεν ορίζεται κλίση).

$$\alpha) \text{ Είναι } \lambda_1 = \lambda_{\Gamma B} = \frac{5-0}{2-0} = \frac{5}{2} \text{ και}$$

$$\lambda_2 = \lambda_{BA} = \frac{2-0}{-5-0} = -\frac{2}{5}$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, άρα οι ευθείες είναι κάθετες, άρα $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ$.

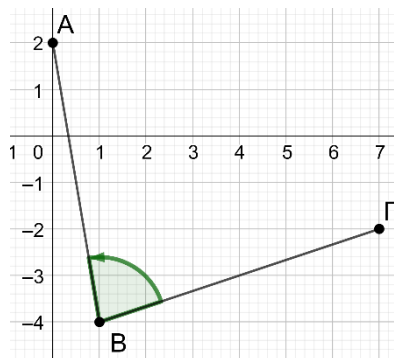


$$\beta) \quad \lambda_1 = \lambda_{\Gamma B} = \frac{-4 - (-2)}{1 - 7} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} \quad \text{και}$$

$$\lambda_2 = \lambda_{BA} = \frac{2 - (-4)}{0 - 1} = \frac{6}{-1} = -6$$

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{\lambda_{BA} - \lambda_{\Gamma B}}{1 + \lambda_{\Gamma B} \cdot \lambda_{BA}} = \frac{-6 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3} \cdot (-6)} = \frac{-\frac{19}{3}}{-1} = \frac{19}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} \approx 81^\circ$$

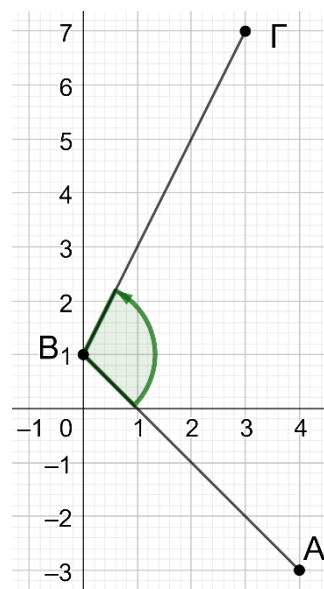


$$\gamma) \quad \lambda_1 = \lambda_{AB} = \frac{1 - (-3)}{0 - 4} = \frac{4}{-4} = -1$$

$$\lambda_2 = \lambda_{B\Gamma} = \frac{7 - 1}{3 - 0} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \frac{\lambda_{B\Gamma} - \lambda_{AB}}{1 + \lambda_{AB} \cdot \lambda_{B\Gamma}} = \frac{2 - (-1)}{1 + (-1) \cdot 2} = \frac{3}{-1} = -3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} \approx 108,4^\circ$$



$$23. \quad \alpha) \quad \lambda_{AB} = 1, \quad \lambda_{B\Gamma} = -8 \quad \text{και} \quad \lambda_{A\Gamma} = -\frac{1}{2}, \quad \text{άρα}$$

$$\varepsilon\varphi\hat{A} = \left| \frac{\lambda_{AB} - \lambda_{A\Gamma}}{1 + \lambda_{A\Gamma} \cdot \lambda_{AB}} \right| = \left| \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 1} \right| = \left| \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} \right| = 3 \Rightarrow \hat{A} \approx 72^\circ$$

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \left| \frac{\lambda_{AB} - \lambda_{B\Gamma}}{1 + \lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_{AB}} \right| = \left| \frac{1 - (-8)}{1 + (-8) \cdot 1} \right| = \left| \frac{9}{-7} \right| = \frac{9}{7} \Rightarrow \hat{B} \approx 52^\circ$$

$$\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \left| \frac{\lambda_{A\Gamma} - \lambda_{B\Gamma}}{1 + \lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_{A\Gamma}} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{2} - (-8)}{1 + (-8) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \right| = \left| \frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{2}} \right| = \frac{3}{2} \Rightarrow \hat{\Gamma} \approx 56^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ \quad \text{άρα οι γωνίες που βρήκαμε είναι οι σωστές.}$$

$$\beta) \quad \lambda_{AB} = -\frac{1}{6}, \quad \lambda_{BG} = \frac{1}{4} \quad \text{και} \quad \lambda_{AG} = -1, \quad \text{άρα}$$

$$\varepsilon\varphi\hat{A} = \left| \frac{\lambda_{AB} - \lambda_{AG}}{1 + \lambda_{AG} \cdot \lambda_{AB}} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{6} - (-1)}{1 + (-1) \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)} \right| = \left| \frac{\frac{5}{6}}{\frac{7}{6}} \right| = \frac{5}{7} \Rightarrow \hat{A} \approx 35,5^\circ$$

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \left| \frac{\lambda_{AB} - \lambda_{BG}}{1 + \lambda_{BG} \cdot \lambda_{AB}} \right| = \left| \frac{-\frac{1}{6} - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)} \right| = \left| \frac{-\frac{10}{24}}{\frac{23}{24}} \right| = \frac{10}{23} \Rightarrow \hat{B} \approx 23,5^\circ$$

$$\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \left| \frac{\lambda_{AG} - \lambda_{BG}}{1 + \lambda_{BG} \cdot \lambda_{AG}} \right| = \left| \frac{-1 - \frac{1}{4}}{1 + \frac{1}{4} \cdot (-1)} \right| = \left| \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}} \right| = \frac{5}{3} \Rightarrow \hat{\Gamma} \approx 59^\circ$$

Επειδή $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} \neq 180^\circ$, οι γωνίες που βρήκαμε δεν είναι οι σωστές. Μία από αυτές είναι αμβλεία. Αυτή θα είναι η παραπληρωματική της μεγαλύτερης οξείας, άρα της $\hat{\Gamma}$. Επομένως η $\hat{\Gamma}$ γωνία θα είναι ίση με $180^\circ - 59^\circ = 121^\circ$. Πράγματι για $\hat{A} = 35,5^\circ$, $\hat{B} = 23,5^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 121^\circ$ είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$.

24. α) Είναι $\lambda_1 = 3$ και

$$4x + 12y + 5 = 0 \Rightarrow 12y = -4x - 5 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{12}$$

Επομένως $\lambda_2 = -\frac{1}{3}$, άρα $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$, οπότε οι ευθείες είναι κάθετες.

$$\beta) \quad 5x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 5x + 1 \quad \text{και} \quad 2x - 10y = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{5}x$$

Επομένως είναι $\lambda_1 = 5$ και $\lambda_2 = \frac{1}{5}$, άρα $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq -1$, άρα δεν είναι κάθετες.

$$\mathbf{25.} \quad \text{Είναι } (\delta): 2x - 7y + 1 = 0 \Rightarrow -7y = -2x - 1 \Rightarrow y = \frac{2}{7}x + \frac{1}{7}, \quad \text{άρα}$$

$$\lambda_\delta = \frac{2}{7}. \quad \text{Είναι } \varepsilon \perp \delta \Rightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1 \Rightarrow \lambda_\varepsilon = -\frac{7}{2} \quad \text{και επομένως έχουμε:}$$

$$(\varepsilon): y - 1 = -\frac{7}{2}(x - (-4)) \Rightarrow 2y - 2 = -7x - 28 \Rightarrow 7x + 2y + 26 = 0$$

$$26. \quad \lambda_1 = \frac{4-\kappa}{\kappa-1}, \quad \lambda_2 = \frac{3\kappa-7}{4-\kappa}, \quad (\text{για } \kappa=1 \text{ και } \kappa=4 \text{ δεν ορίζεται κλίση})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 &\Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Rightarrow -\frac{\kappa-4}{\kappa-1} \cdot \frac{3\kappa-7}{4-\kappa} = -1 \Rightarrow \frac{\cancel{\kappa-4}}{\kappa-1} \cdot \frac{3\kappa-7}{\cancel{4-\kappa}} = -1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -\frac{3\kappa-7}{\kappa-1} = -1 \Rightarrow 3\kappa-7 = -\kappa+1 \Rightarrow \kappa=2 \end{aligned}$$

Θα ελέγξουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις $\kappa=1$ και $\kappa=4$:

- Για $\kappa=1$ παίρνουμε $(\varepsilon_1): -3x+1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$ και $(\varepsilon_2): x+3y-4=0$,

άρα δεν είναι κάθετες ευθείες.

- Για $\kappa=4$ παίρνουμε: $(\varepsilon_1): 3y+1=0 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}$ και $(\varepsilon_2): x=4$ και

επομένως για $\kappa=4$ είναι $\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$.

Άρα οι δύο ευθείες είναι κάθετες για $\kappa=4$ ή $\kappa=2$.

$$27. \quad (\varepsilon_1): 2x+y-9=0 \Rightarrow y=-2x+9 \quad \text{και}$$

$$(\varepsilon_2): (5-2\alpha)x-\alpha y+3=0 \Rightarrow y=-\frac{5-2\alpha}{-\alpha}x-\frac{3}{\alpha}$$

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Rightarrow (-2) \cdot \frac{5-2\alpha}{\alpha} = -1 \Rightarrow -10+4\alpha = -\alpha \Rightarrow \alpha=2$$

$$28. \quad \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Rightarrow \frac{\mu}{\mu-1} \cdot \frac{1-\mu}{9-2\mu} = -1 \Rightarrow \frac{\mu-\mu^2}{9\mu-2\mu^2-9+2\mu} = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu-\mu^2 = -9\mu+2\mu^2+9-2\mu \Rightarrow 3\mu^2-12\mu+9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3(\mu^2-4\mu+3)=0 \Rightarrow (\mu-3)(\mu-1)=0 \Rightarrow (\mu=3 \text{ ή } \mu=1)$$

Η λύση $\mu=3$ είναι δεκτή, ενώ η λύση $\mu=1$ απορρίπτεται.

$$29. \quad (\varepsilon_2): (\kappa^4+5)x-3y-4=0 \Rightarrow y=\frac{\kappa^4+5}{3}x-\frac{4}{3}, \quad \text{άρα } \lambda_2=\frac{\kappa^4+5}{3}$$

$$\text{Είναι } \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Rightarrow \left(-\frac{1}{7}\right) \cdot \lambda_2 = -1 \Rightarrow \lambda_2 = 7 \quad \text{άρα θα είναι:}$$

$$\frac{\kappa^4+5}{3} = 7 \Rightarrow \kappa^4 = 16 \Rightarrow \kappa = \pm\sqrt[4]{16} \Rightarrow \kappa = \pm 2$$

30. α) Το ύψος ΑΔ διέρχεται από την κορυφή Α του τριγώνου και είναι

κάθετο στην απέναντι πλευρά ΒΓ. Είναι $\lambda_{\text{BG}} = \frac{-4-3}{8-1} = -1$ και επομένως

$$\text{ΑΔ} \perp \text{ΒΓ} \Rightarrow \lambda_{\text{ΑΔ}} \cdot \lambda_{\text{BG}} = -1 \Rightarrow \lambda_{\text{ΑΔ}} \cdot (-1) = -1 \Rightarrow \lambda_{\text{ΑΔ}} = 1$$

Επομένως η ΑΔ έχει εξίσωση: $\text{ΑΔ}: y - 2 = 1(x - 5) \Rightarrow y = x - 3$.

β) Θα βρούμε την εξίσωση του ύψους ΒΕ.

$$\text{Είναι } \lambda_{\text{AG}} = \frac{-4-2}{8-5} = -2, \text{ άρα } \text{ΑΔ} \perp \text{ΒΓ} \Rightarrow \lambda_{\text{BE}} \cdot \lambda_{\text{AG}} = -1 \Rightarrow \lambda_{\text{BE}} = \frac{1}{2}$$

Άρα το ύψος ΒΕ έχει εξίσωση:

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x - 1) \Rightarrow x - 2y + 5 = 0.$$

Για να βρούμε το σημείο τομής δύο ευθειών λύνουμε το σύστημα των εξισώσεών τους:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x - 3 \\ x - 2y + 5 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x - 2(x - 3) + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x - 2x + 6 + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x - 3 \\ x = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 8 \\ x = 11 \end{cases} \Rightarrow \text{H}(11, 8) \end{aligned}$$

Το ορθόκεντρο είναι το σημείο τομής των υψών του τριγώνου. Επομένως αρκεί να βρούμε το σημείο τομής των υψών ΑΔ και ΒΕ (δεν χρειαζόμαστε το 3^ο ύψος).

Επομένως το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ είναι το σημείο Η(11,8).

31. α) Η κορυφή Β είναι το σημείο τομής της ΒΓ με την ΒΕ (σύστημα)

$$\begin{cases} y = -x + 2 \\ x + 5y = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ x + 5(-x + 2) = 18 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \text{B}(-2, 4)$$

β) Η ΑΓ διέρχεται από το Α και είναι κάθετη στο ύψος ΒΕ.

$$\lambda_{\text{BE}} = -\frac{1}{5}, \text{ άρα } \text{ΑΓ} \perp \text{ΒΕ} \Rightarrow \lambda_{\text{AG}} \cdot \lambda_{\text{BE}} = -1 \Rightarrow \lambda_{\text{AG}} \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) = -1 \Rightarrow \lambda_{\text{AG}} = 5$$

$$\text{ΑΓ}: y - 7 = 5(x - 7) \Rightarrow y = 5x - 28$$

γ) Το σημείο Γ είναι σημείο της πλευράς ΑΓ και της πλευράς ΒΓ. Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των δύο ευθειών βρίσκουμε $\Gamma(5, -3)$.

$$32. \quad x_M = \frac{-7+5}{2} = -1, \quad y_M = \frac{6+0}{2} = 3, \quad \text{άρα } M(-1,3) \text{ το μέσο του } AB$$

$$\lambda_{AB} = \frac{0-6}{5-(-7)} = \frac{-6}{12} = -\frac{1}{2}, \quad \text{άρα } \mu \perp AB \Rightarrow \lambda_\mu \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_\mu = 2$$

$$\text{άρα η μεσοκάθετος έχει εξίσωση: } (\mu): y-3=2(x-(-1)) \Leftrightarrow y=2x+5$$

$$33. \quad \alpha) \quad (AB) = \sqrt{(-1-3)^2 + (6-(-2))^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \mu.$$

$$\beta) \quad M(1,2), \quad \lambda_{AB} = -2 \Rightarrow \lambda_\mu = \frac{1}{2}, \quad \mu: y-2 = \frac{1}{2}(x-1) \Rightarrow x-2y+3=0$$

$$34. \quad \lambda_\varepsilon = -\frac{A}{B} = -\frac{1}{3} \quad \varepsilon \perp \delta \Rightarrow \lambda_\varepsilon \cdot \lambda_\delta = -1 \Rightarrow \lambda_\delta = 3$$

$$\text{Επομένως: } \delta: y-4=3(x-3) \Rightarrow y=3x-5$$

Θα βρούμε το σημείο τομής Μ της κάθετης (δ) με τον άξονα συμμετρίας (ε):

$$\begin{cases} y=3x-5 \\ x+3y=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x-5 \\ x+3(3x-5)=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=3x-5 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow M(2,1)$$

Το Μ θα είναι το μέσο των σημείων Α και Α'. Επομένως είναι:

$$x_M = \frac{x_A + x_{A'}}{2} \Rightarrow 2 = \frac{3 + x_{A'}}{2} \Rightarrow 4 = 3 + x_{A'} \Rightarrow x_{A'} = 1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_{A'}}{2} \Rightarrow 1 = \frac{4 + y_{A'}}{2} \Rightarrow 2 = 4 + y_{A'} \Rightarrow y_{A'} = -2$$

Άρα το συμμετρικό του Α είναι το σημείο Α'(1,-2).

Δραστηριότητες σχολικού βιβλίου σελ. 25

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:

- α)** διέρχεται από τα σημεία $A(-1,3)$ και $B(1,0)$
- β)** διέρχεται από τα σημεία $\Gamma(-2,3)$ και $\Delta(-2,6)$
- γ)** διέρχεται από τα σημεία $E(-4,3)$ και $Z(5,3)$

Λύση

α) $\lambda_{AB} = \frac{0-3}{1-(-1)} = \frac{-3}{2}$. Άρα η ευθεία έχει εξίσωση:

$$y - 0 = -\frac{3}{2}(x - 1) \Leftrightarrow 2y = -3x + 3 \Leftrightarrow 3x + 2y = 3$$

β) Είναι $\lambda_{\Gamma\Delta} = \frac{6-3}{-2-(-2)} = \frac{3}{0}$ άρα δεν ορίζεται κλίση.

Σε αυτή την περίπτωση η ευθεία είναι της μορφής $x = \alpha$.

Άρα η ευθεία $\Gamma\Delta$ έχει εξίσωση: $\Gamma\Delta: x = -2$.

γ) Είναι: $\lambda_{EZ} = \frac{3-3}{5-(-4)} = \frac{0}{9} = 0$. Επειδή η κλίση είναι 0, η ευθεία είναι της μορφής $y = \alpha$. Άρα θα έχει εξίσωση: $EZ: y = 3$.

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,2)$ και σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{6}$ με τον άξονα των τετμημένων.

Λύση

Είναι $\lambda = \tan \varphi = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Άρα η ευθεία έχει εξίσωση:

$$(\varepsilon): y - 2 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - (-2)) \Leftrightarrow 3y - 6 = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \sqrt{3}x - 3y + 6 + 2\sqrt{3} = 0$$

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(-2,5)$ και:

- α)** έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$.
- β)** σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα των τετμημένων
- γ)** είναι παράλληλη προς την ευθεία $y = 5x - 2$.

Λύση

α) εξισ. ευθ: $y - 5 = -3(x + 2) \Leftrightarrow y - 5 = -3x - 6 \Leftrightarrow y = -3x - 1$

β) $\lambda = \varepsilon\phi 135^\circ = -1$

Άρα εξισ. ευθ: $y - 5 = -1(x + 2) \Leftrightarrow y - 5 = -x - 2 \Leftrightarrow y = -x + 3$

γ) Οι παράλληλες ευθείες έχουν ίσες κλίσεις, άρα $\lambda = 5$

Άρα εξισ. ευθ: $y - 5 = 5(x + 2) \Leftrightarrow y - 5 = 5x + 10 \Leftrightarrow y = 5x + 15$

4. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:

α) διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$ και είναι κάθετη στην ευθεία

$$2x + 3y = 1$$

β) διέρχεται από το σημείο $B(1, 0)$ και είναι παράλληλη με την ευθεία

$$3x - 5y = 10.$$

Λύση

α) Η δοσμένη ευθεία γράφεται: $3y = -2x + 1 \Leftrightarrow y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{3}{2}$$

Άρα εξισ. ευθ: $y - 3 = \frac{3}{2}(x + 1) \Leftrightarrow 2y - 6 = 3x + 3 \Leftrightarrow 3x - 2y + 9 = 0$

β) Η ευθεία που δίνεται γράφεται:

$$3x - 5y = 10 \Leftrightarrow -5y = -3x + 10 \Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x - 2 \quad \text{άρα} \quad \lambda_2 = \frac{3}{5}$$

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{3}{5}$$

Άρα εξισ. ευθ: $y - 0 = \frac{3}{5}(x - 1) \Leftrightarrow 5y = 3x - 3 \Leftrightarrow 3x - 5y - 3 = 0$

5. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB , όταν $A(0, 9)$ και $B(2, -3)$.

Λύση

Η μεσοκάθετος του AB είναι μια ευθεία (μ) η οποία διέρχεται από το μέσο M του ευθύγραμμου τμήματος AB, και είναι κάθετη σε αυτό.

Βρίσκουμε το μέσο M του AB:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{0+2}{2} = 1 \Rightarrow x_M = 1$$

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{9+(-3)}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow y_M = 3$$

Επομένως το μέσο M του AB έχει συντεταγμένες $M(1,3)$.

Για την καθετότητα θα χρειαστούμε την κλίση του AB:

$$\lambda_{AB} = \frac{-3-9}{2-0} = \frac{-12}{2} = -6$$

$$\text{Επομένως: } \mu \perp AB \Rightarrow \lambda_M \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_M(-6) = -1 \Rightarrow \lambda_M = \frac{1}{6}$$

Άρα η εξίσωση της μεσοκαθέτου θα είναι:

$$\mu: y-3 = \frac{1}{6}(x-1) \Rightarrow 6y-18 = x-1 \Rightarrow x-6y+17=0$$

6. Δίνονται τα σημεία $A(1,3)$, $B(2,7)$ και $\Gamma(2,3)$.

α) Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών AB, AΓ και BΓ.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η καθεμία από τις πιο πάνω ευθείες με τον άξονα των τετμημένων.

Λύση

$$\text{α) } \lambda_{AB} = \frac{7-3}{2-1} = \frac{4}{1} = 4 \text{ άρα η εξίσωση της AB είναι:}$$

$$AB: y-3 = 4(x-1) \Leftrightarrow y-3 = 4x-4 \Leftrightarrow y = 4x-1$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{3-7}{2-2} = \frac{-4}{0} \text{ άρα για την BΓ δεν ορίζεται κλίση.}$$

Επομένως είναι η ευθεία με εξίσωση: BΓ: $x=2$

$$\lambda_{\text{ΑΓ}} = \frac{3-3}{2-1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \text{άρα} \quad \text{ΑΓ}: y-3=0(x-1) \Leftrightarrow y=3$$

$$\beta) \lambda_{\text{AB}} = 4 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = 4 \Rightarrow \omega = 75,96^\circ$$

Η ευθεία ΒΓ είναι κατακόρυφη, επομένως σχηματίζει γωνία **90°** με τον άξονα των τετμημένων.

Η ευθεία ΑΓ είναι οριζόντια, επομένως σχηματίζει γωνία **0°** με τον άξονα των τετμημένων (είναι παράλληλη με τον άξονα των x).

7. Να εξετάσετε κατά πόσο οι ευθείες $\varepsilon_1: y=4x-1$ και $\varepsilon_2: 8y+2x-1=0$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

Λύση

Είναι $\lambda_1 = 4$

Για να βρούμε την κλίση της ε_2 θα λύσουμε την εξίσωσή της ως προς y:

$$\varepsilon_2: 8y+2x-1=0 \Rightarrow 8y=-2x+1 \Rightarrow y=-\frac{2}{8}x+\frac{1}{8} \Rightarrow \lambda_2 = -\frac{1}{4}$$

$$\text{Επομένως } \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 4 \left(-\frac{1}{4} \right) = -1 \Rightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \quad (\text{είναι κάθετες μεταξύ τους})$$

8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο Α(5,0) και είναι κάθετη στην ευθεία $4x+3y-2=0$.

Λύση

Η εξίσωση της (ε_2): $4x+3y-2=0$ γίνεται:

$$4x+3y-2=0 \Leftrightarrow 3y=-4x+2 \Leftrightarrow y=-\frac{4}{3}x+\frac{2}{3} \Leftrightarrow \lambda_2 = -\frac{4}{3}$$

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \left(-\frac{4}{3} \right) = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{3}{4}$$

$$\text{Επομένως η εξίσωση της } \varepsilon_1 \text{ θα είναι: } \varepsilon_1: y-0 = \frac{3}{4}(x-5) \Leftrightarrow y = \frac{3}{4}x - \frac{15}{4} \Leftrightarrow$$

$$\text{άρα η ευθεία } \varepsilon_1 \text{ θα έχει εξίσωση: } \varepsilon_1: 3x-4y-15=0.$$

9. Να υπολογίσετε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε οι ευθείες:
 $(\varepsilon_1): (\kappa+1)x - \kappa y - 4 = 0$ και $(\varepsilon_2): 2\kappa x + (\kappa+4)y + 1 = 0$ να είναι κάθετες.

Λύση

$$(\varepsilon_1): (\kappa+1)x - \kappa y - 4 = 0 \Rightarrow \kappa y = (\kappa+1)x - 4 \Rightarrow y = \frac{\kappa+1}{\kappa}x - \frac{4}{\kappa}$$

Άρα η κλίση της (ε_1) είναι $\lambda_1 = \frac{\kappa+1}{\kappa}, \quad \kappa \neq 0$

$$(\varepsilon_2): 2\kappa x + (\kappa+4)y + 1 = 0 \Leftrightarrow (\kappa+4)y = -2\kappa x - 1 \Leftrightarrow y = \frac{-2\kappa}{\kappa+4}x - \frac{1}{\kappa+4}$$

Άρα η κλίση της (ε_2) είναι $\lambda_2 = -\frac{2\kappa}{\kappa+4}, \quad \kappa \neq -4$

Για $\kappa \neq 0$ και $\kappa \neq -4$, οι ευθείες είναι κάθετες αν ισχύει: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1$. Άρα

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{\kappa+1}{\kappa} \cdot \left(-\frac{2\kappa}{\kappa+4}\right) = -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\kappa(\kappa+1) = -\kappa(\kappa+4) \stackrel{\div \kappa \neq 0}{\Leftrightarrow} -2(\kappa+1) = -(\kappa+4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2\kappa - 2 = -\kappa - 4 \Leftrightarrow \kappa = 2$$

Θα εξετάσουμε ξεχωριστά τι συμβαίνει στην περίπτωση που $\kappa = 0$ και $\kappa = -4$

- Για $\kappa = 0$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1): x - 4 = 0$ και
 $(\varepsilon_2): -8y + 1 = 0$, επομένως οι ευθείες είναι κάθετες μεταξύ τους,
 επειδή η (ε_1) είναι της μορφής $x = \alpha$, άρα “κατακόρυφη”, ενώ η (ε_2)
 είναι της μορφής $y = \alpha$ άρα οριζόντια.
- Για $\kappa = -4$ οι ευθείες έχουν εξισώσεις: $(\varepsilon_1): -3x + 4y - 4 = 0$ και
 $(\varepsilon_2): 4y + 1 = 0$, επομένως η (ε_1) έχει κλίση $\lambda = \frac{3}{4}$, ενώ η (ε_2) έχει
 κλίση 0 και επομένως δεν είναι κάθετες μεταξύ τους.

Άρα συνολικά οι δύο ευθείες είναι κάθετες αν $\kappa = 0$ ή $\kappa = 2$.

10. Να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η ευθεία $ax - 3y = 10$ να είναι κάθετη στην ευθεία $y = 2x - 1$.

Λύση

$$ax - 3y = 10 \Rightarrow 3y = ax - 10 \Rightarrow y = \frac{\alpha}{3}x - \frac{10}{3} \quad \text{άρα} \quad \lambda_1 = \frac{\alpha}{3}$$

$$\text{και} \quad \lambda_2 = 2$$

Από τη συνθήκη καθετότητας έχουμε:

$$\varepsilon_1 \perp \varepsilon_2 \Leftrightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{3} \cdot 2 = -1 \Leftrightarrow 2\alpha = -3 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$$

11. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1, 2)$, $B(4, 5)$ και $\Gamma(6, -1)$.

Λύση

Αρχικά βρίσκουμε τις κλίσεις των πλευρών του τριγώνου.

$$\lambda_{AB} = \frac{5-2}{4-(-1)} = \frac{3}{5}, \quad \lambda_{B\Gamma} = \frac{-1-5}{6-4} = \frac{-6}{2} = -3 \quad \text{και} \quad \lambda_{A\Gamma} = \frac{-1-2}{6-(-1)} = -\frac{3}{7}$$

Η γωνία A σχηματίζεται από τις πλευρές AB και $A\Gamma$, οπότε θα χρησιμοποιήσουμε τις κλίσεις τους.

$$\varepsilon\varphi\hat{A} = \left| \frac{\lambda_{AB} - \lambda_{A\Gamma}}{1 + \lambda_{A\Gamma} \cdot \lambda_{AB}} \right| = \left| \frac{\frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{7}\right)}{1 + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)} \right| = \left| \frac{\frac{36}{35}}{\frac{26}{35}} \right| = \left| \frac{36}{26} \right| = \frac{18}{13} \Rightarrow \hat{A} = 54,16^\circ$$

Η γωνία B σχηματίζεται από τις ευθείες των AB και $B\Gamma$.

$$\varepsilon\varphi\hat{B} = \left| \frac{\lambda_{AB} - \lambda_{B\Gamma}}{1 + \lambda_{B\Gamma} \cdot \lambda_{AB}} \right| = \left| \frac{\frac{3}{5} - (-3)}{1 + (-3) \cdot \frac{3}{5}} \right| = \left| \frac{\frac{18}{5}}{-\frac{4}{5}} \right| = \left| -\frac{9}{2} \right| = 4,5 \Rightarrow \hat{B} = 77,47^\circ$$

$$\varepsilon\phi\hat{\Gamma} = \left| \frac{\lambda_{\text{ΑΓ}} - \lambda_{\text{ΒΓ}}}{1 + \lambda_{\text{ΒΓ}} \cdot \lambda_{\text{ΑΓ}}} \right| = \left| \frac{-\frac{3}{7} - (-3)}{1 + (-3) \cdot \left(-\frac{3}{7}\right)} \right| = \left| \frac{\frac{18}{7}}{\frac{16}{7}} \right| = \frac{9}{8} \Rightarrow \hat{\Gamma} = 48,37^\circ$$

Είναι $\hat{A} = 54,16^\circ$, $\hat{B} = 77,47^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 48,37^\circ$ και παρατηρούμε ότι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$ άρα είναι οι σωστές γωνίες.

Παρατήρηση: Αν το άθροισμα δεν έβγαине ίσο με 180° , θα σήμαινε ότι το τρίγωνο δεν είναι οξυγώνιο και θα έπρεπε να βρούμε ποια από τις γωνίες είναι αμβλεία.

Εναλλακτικά μπορούμε να λύσουμε την άσκηση με τη βοήθεια σχήματος, ώστε να βάλουμε τις τιμές των λ_2 και λ_1 με τη σωστή σειρά και να προκύψει η σωστή τιμή της γωνίας.

12. Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες:

α) $\varepsilon_1: y = 3x + 1$ και $\varepsilon_2: y = -2x + 1$ β) $\varepsilon_1: y = 3x + 1$ και $\varepsilon_2: y = 3$

γ) $\varepsilon_1: y = 3x + 1$ και $\varepsilon_2: x = -2$ δ) $\varepsilon_1: y = -3x + 1$ και $\varepsilon_2: 2x - y = 6$

Λύση

α) Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο: $\varepsilon\phi\theta = \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2} \right|$

$$\varepsilon\phi\theta = \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2} \right| = \left| \frac{-2 - 3}{1 + 3 \cdot (-2)} \right| = \left| \frac{-5}{1 - 6} \right| = \left| \frac{-5}{-5} \right| = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

$$\beta) \varepsilon\phi\theta = \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2} \right| = \left| \frac{0 - 3}{1 + 3 \cdot 0} \right| = \left| \frac{3}{1} \right| = 3 \Rightarrow 71,57^\circ$$

γ) Από την παρατήρηση του βιβλίου σελ. 114, επειδή η ευθεία $x = -2$ είναι παράλληλη στον άξονα των τεταγμένων, για την γωνία θ των δύο ευθειών θα

$$\text{ισχύει: } \varepsilon\phi\theta = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 18,43^\circ$$

δ) Είναι $\lambda_1 = -3$ και $\varepsilon_2: 2x - y = 6 \Rightarrow y = 2x - 6 \Rightarrow \lambda_2 = 2$

$$\varepsilon\phi\theta = \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{1 + \lambda_1 \cdot \lambda_2} \right| = \left| \frac{2 - (-3)}{1 + (-3) \cdot 2} \right| = \left| \frac{2 + 3}{1 - 6} \right| = \left| \frac{5}{-5} \right| = |-1| = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$

13. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = -2x + 2$ και $(\varepsilon_2): y = \frac{1}{2}x - 4$.

α) Να αποδείξετε ότι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται κάθετα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και είναι κάθετη στην ευθεία (ε_1) .

Λύση

α) $\lambda_1 = -2$ και $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ Είναι: $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -2 \left(+\frac{1}{2} \right) = -\frac{2}{2} = -1 \Rightarrow \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$

β) Ονομάζουμε ε_3 τη ζητούμενη ευθεία.

$$\varepsilon_3 \perp \varepsilon_1 \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_3 = -1 \Rightarrow -2\lambda_3 = -1 \Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{2}$$

Άρα θα είναι: $\varepsilon_3: y - 2 = \frac{1}{2}(x - 1) \Leftrightarrow 2y - 4 = x - 1 \Leftrightarrow \mathbf{x - 2y + 3 = 0}$

14. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, η κορυφή A έχει συντεταγμένες $(1, 4)$ και δύο ύψη του

έχουν εξισώσεις $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ και $y = -x + 2$.

α) Να υπολογίσετε τις εξισώσεις των πλευρών $A\Gamma$ και AB του τριγώνου $AB\Gamma$

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ .

Λύση

Αρχικά εξετάζουμε αν το A ανήκει σε κάποιο από τα δοσμένα ύψη:

$$4 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{3}{2} \Rightarrow 4 = 2 \text{ ψευδής, άρα δεν ανήκει στο 1}^\circ \text{ ύψος}$$

$$4 = -1 + 2 \Rightarrow 4 = 1 \text{ ψευδής, άρα δεν ανήκει ούτε στο 2}^\circ \text{ ύψος}$$

Ονομάζουμε $v_B: y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ και $v_\Gamma: y = -x + 2$

Το ύψος από το B είναι κάθετο στην $A\Gamma$. Επομένως:

$$\lambda_{v_B} \cdot \lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \lambda_{A\Gamma} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{A\Gamma} = -2$$

Και επειδή η $A\Gamma$ περνάει από το σημείο $A(1, 4)$, θα έχει εξίσωση:

$$ΑΓ: y-4=-2(x-1) \Leftrightarrow y-4=-2x+2 \Leftrightarrow y=-2x+6$$

Ομοίως το ύψος από το Γ είναι κάθετο στην ΑΒ. Επομένως:

$$\lambda_{v_{\Gamma}} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow (-1)\lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{AB} = 1$$

Και επειδή η ΑΒ περνάει από το σημείο Α, θα έχει εξίσωση:

$$ΑΒ: y-4=1(x-1) \Leftrightarrow y=x+3$$

Το σημείο Β είναι το σημείο τομής της ΑΒ με το ύψος από το Β (v_B).

$$\left. \begin{array}{l} y = x + 3 \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow x + 3 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \Rightarrow 2x + 6 = x + 3 \Rightarrow x = -3$$

και $y = -3 + 3 \Rightarrow y = 0$ άρα το Β έχει συντεταγμένες **$B(-3,0)$** .

Το σημείο Γ είναι το σημείο τομής της ΑΓ με το ύψος από το Γ (v_{Γ}).

$$\left. \begin{array}{l} y = -2x + 6 \\ y = -x + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow -2x + 6 = -x + 2 \Rightarrow -x = -4 \Rightarrow x = 4$$

και $y = -4 + 2 \Rightarrow y = -2$ άρα το Γ έχει συντεταγμένες **$\Gamma(4,-2)$** .

Από τα σημεία Β και Γ μπορούμε να βρούμε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ:

$$\lambda_{BG} = \frac{-2-0}{4-(-3)} = \frac{-2}{4+3} = -\frac{2}{7} \quad \text{Άρα η πλευρά ΒΓ έχει εξίσωση:}$$

$$ΒΓ: y-0=-\frac{2}{7}(x-(-3)) \Leftrightarrow 7y=-2x-6 \Leftrightarrow 2x+7y=-6$$

15. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του ορθόκεντρου H του τριγώνου $AB\Gamma$, όταν $A(0,3)$, $B(1,0)$ και $\Gamma(2,-2)$.

Λύση

Ορθόκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των υψών του.

Αρκεί να βρούμε τις εξισώσεις δύο υψών του και να υπολογίσουμε το σημείο τομής τους.

Το ύψος από την κορυφή A (u_A), είναι κάθετο στην πλευρά $B\Gamma$ και διέρχεται από το A .

$$\text{Είναι } \lambda_{B\Gamma} = \frac{-2-0}{2-1} = -2$$

$$u_A \perp B\Gamma \Rightarrow \lambda_{u_A} \cdot \lambda_{B\Gamma} = -1 \Rightarrow \lambda_{u_A} \cdot (-2) = -1 \Rightarrow \lambda_{u_A} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } u_A : y - 3 = \frac{1}{2}(x - 0) \Leftrightarrow 2y - 6 = x \Leftrightarrow x - 2y = -6$$

Το ύψος από την κορυφή Γ (u_Γ), είναι κάθετο στην πλευρά AB και διέρχεται από το Γ .

$$\text{Είναι } \lambda_{AB} = \frac{0-3}{1-0} = -3$$

$$u_\Gamma \perp AB \Rightarrow \lambda_{u_\Gamma} \cdot \lambda_{AB} = -1 \Rightarrow \lambda_{u_\Gamma} \cdot (-3) = -1 \Rightarrow \lambda_{u_\Gamma} = \frac{1}{3}$$

$$\text{Άρα } u_\Gamma : y - (-2) = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow 3y + 6 = x - 2 \Rightarrow x - 3y = 8$$

Το ορθόκεντρο είναι το σημείο τομής των υψών u_A και u_Γ .

Για να το βρούμε λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων των δύο υψών:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = -6 \\ x - 3y = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y = -6 \\ x - 3y = 8 \end{array} \right| \begin{array}{l} -1 \\ 1 \end{array} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -x + 2y = 6 \\ x - 3y = 8 \end{array} \right| + \\ \hline -y = 14 \Rightarrow y = -14$$

και επομένως αντικαθιστώντας στην 1η εξίσωση έχουμε:

$$x - 2 \cdot (-14) = -6 \Rightarrow x + 28 = -6 \Rightarrow x = -28 - 6 \Rightarrow x = -34$$

Άρα το ορθόκεντρο του τριγώνου είναι το σημείο $H(-34, -14)$.

16. Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon_1): y = 2x - 1$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία είναι:

α) συμμετρική της (ε_1) ως προς τον άξονα των τετμημένων

β) συμμετρική της (ε_1) ως προς τον άξονα των τεταγμένων

Λύση

α) Για να βρούμε τη συμμετρική ευθεία της (ε_1) ως προς τον άξονα των τετμημένων ($y = 0$), αρκεί να βρούμε δύο σημεία της ζητούμενης ευθείας. Παίρνουμε δύο σημεία της ευθείας (ε_1) και θα υπολογίσουμε τα συμμετρικά τους ως προς τον άξονα των τετμημένων.

Για $x = 0$ παίρνουμε το σημείο $A(0, -1)$, ενώ για $y = 0$ είναι $0 = 2x - 1$ παίρνουμε το σημείο $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Τα αντίστοιχα συμμετρικά των A και B ως προς τον άξονα των τετμημένων είναι τα $A'(0, 1)$ και $B'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A' και B' έχει κλίση $\lambda_2 = \frac{0-1}{\frac{1}{2}-0} = -2$ και $\beta_2 = 1$. Επομένως η ευθεία έχει εξίσωση $y = -2x + 1$.

β) Ομοίως για να βρούμε τη συμμετρική ευθεία της (ε_1) ως προς τον άξονα των τεταγμένων ($x = 0$), αρκεί να πάρουμε δύο σημεία της ευθείας (ε_1) και να υπολογίσουμε τα συμμετρικά τους ως προς τον άξονα των τεταγμένων.

Θα χρησιμοποιήσουμε τα ίδια σημεία $A(0, -1)$ και $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Τα συμμετρικά τους ως προς τον άξονα των τεταγμένων είναι τα $A'(0, -1)$ και $B'\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Η συμμετρική ευθεία θα έχει κλίση $\lambda_3 = \frac{0-(-1)}{-\frac{1}{2}-0} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$ και $\beta_2 = -1$.

Επομένως η ευθεία έχει εξίσωση $y = -2x - 1$.