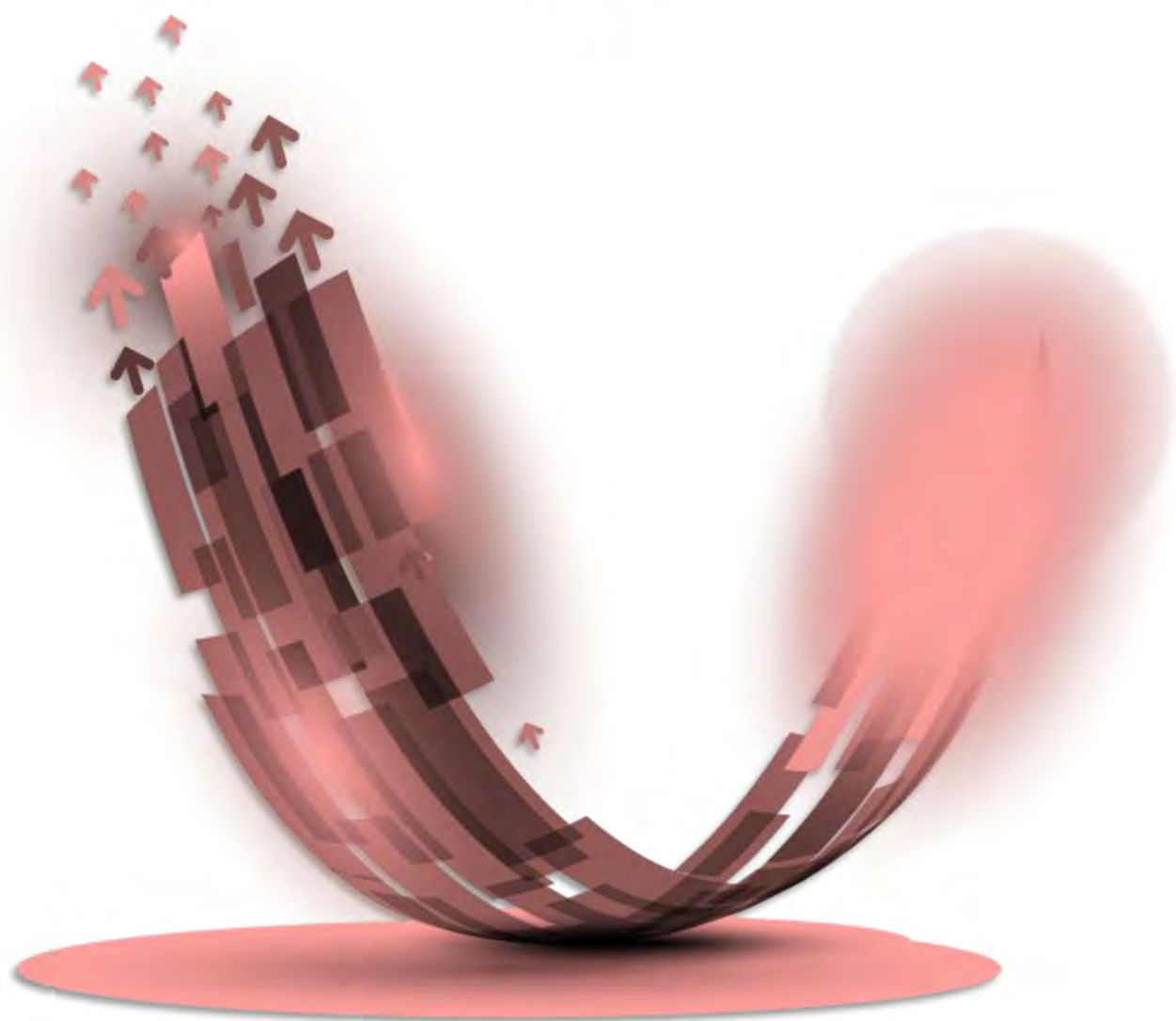


Ενδεικτικές Λύσεις

Εισαγωγικών Εξετάσεων

B Σειράς 2018

Μέρος **B**



Οι παρακάτω ασκήσεις έχουν λυθεί σύμφωνα με την ύλη του Νέου Αναλυτικού προγράμματος και τις συνέπειες αυτού. Σε κάθε λύση γίνεται αναφορά στα αποτελέσματα που έχουν χρησιμοποιηθεί.

Οι λύσεις αυτές δεν συμβαδίζουν κατ'ανάγκη με τις οδηγίες λύσης του ΥΠΠ.

Σκοπός των λύσεων αυτών είναι ο έλεγχος των γνώσεων του εξεταζομένου και μπορεί να τις προσαρμόσει ο καθένας στις δικές του απαιτήσεις.

Οι ασκήσεις βρίσκονται επίσης λυμένες στο βιβλίο

‘ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ [Γ’ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ]’

ISBN 978-9925-7485-7-0 (χαρτόδετο) | 978-9925-7567-2-8 (σκληρόδετο)

το οποίο είναι διαθέσιμο προς δανεισμό στην ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ (πλατεία Ελευθερίας/Λευκωσία)

Για σχόλια/παρατηρήσεις:

Ιωακείμ Ι.



yiannisioa@hotmail.com



/yiannisioak



Μέρος Β

[Άσκηση 1]

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = (x-2)^2 e^x$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτές της, αν υπάρχουν, να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

Λύση

(α) Εύρεση πεδίου ορισμού:

Η συνάρτηση f γράφεται ως $h \cdot g$ όπου h και g οι συναρτήσεις με τύπους $h(x) = (x-2)^2$ και $g(x) = e^x$ αντίστοιχα. Κατα συνέπεια.

$$D(f) = D(g) \cap D(h)$$

Αλλά, $D(g) = \mathbb{R} = D(h)$ και άρα $D(f) = \mathbb{R}$

Εύρεση σημείων τομής με άξονες: Είναι $f(x) \geq 0, \forall x \in D(f) = \mathbb{R}$ και

$f(0) = 4 \rightarrow (0,4)$ και αφού $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \rightarrow (2,0)$$

Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας και Τ.Α.: Η συνάρτηση είναι δις παραγωγίσιμη με συνεχή δεύτερη παράγωγο. Είναι $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}, f'(x) = x(x-2)e^x$. Είναι $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, 2$. Έτσι, η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(2, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(0, 2)$. Παρουσιάζει δε τοπικό μέγιστο στο $(0, f(0)) = (0, 4)$ και τοπικό ελάχιστο στο $(2, f(2)) = (2, 0)$.

Κυρτότητα συνάρτησης: Είναι $\forall x \in D(f) = \mathbb{R}, f''(x) = (x^2 - 2)e^{1-x}$. Εύκολα βρίσκουμε ότι και $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f'	+	-	+	
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	
	max		min	

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	$+\sqrt{2}$	$+\infty$
f''	+	-	+	
f				
	Σ.Κ.		Σ.Κ.	

Έτσι, η f είναι κυρτή στα διαστήματα $(-\infty, -\sqrt{2})$ και $(\sqrt{2}, +\infty)$ και κοίλη στο $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Παρουσιάζει δε Σ.Κ. στα $(-\sqrt{2}, 2e^{-\sqrt{2}}(3+2\sqrt{2}))$ και $(\sqrt{2}, 2e^{\sqrt{2}}(3-2\sqrt{2}))$

Ασύμπτωτική συμπεριφορά της συνάρτησης καθώς $x \rightarrow \pm\infty$

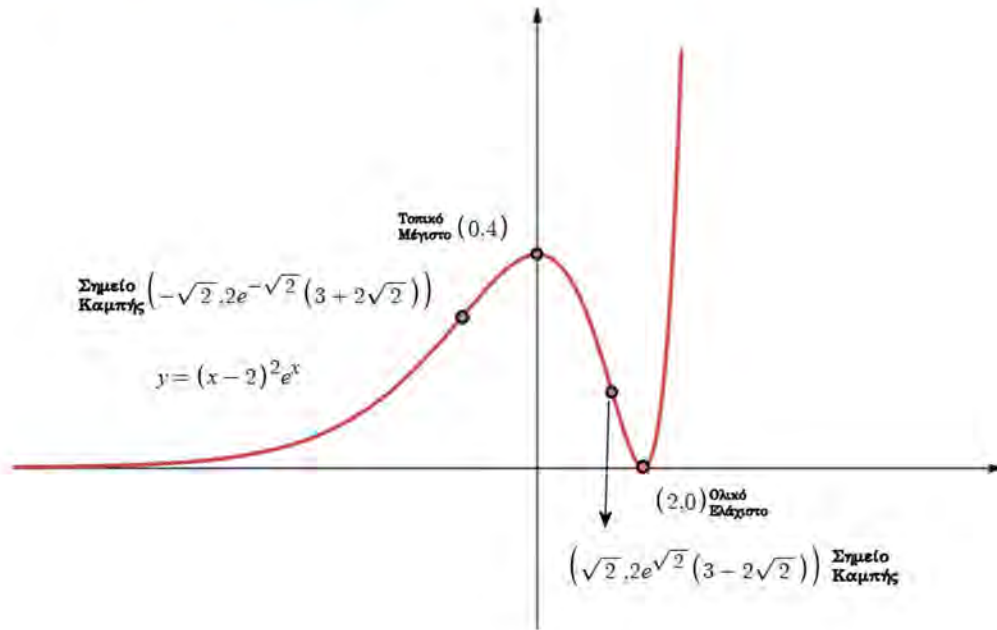
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2)^2 e^x = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

Επίσης

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2)^2 e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x-2)^2}{e^{-x}} = 0$$

(εφαρμόσαμε 2 φορές κανόνα του deL'Hospital) και άρα ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια ασύμπτωτη της συνάρτησης στο $-\infty$.

Εύκολα βλέπουμε επίσης ότι το σημείο τοπικού ελαχίστου είναι και σημείο ολικού ελαχίστου για το γράφημα της συνάρτησης.

**[Άσκηση 2]**

Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$ όπου $a > 0$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της παραβολής στο σημείο $P(a\rho^2, 2a\rho)$, $\rho \neq 0$ είναι η

$$y + \rho x = 2a\rho + a\rho^3$$

Οι κάθετες της παραβολής στα σημεία $P(a\rho^2, 2a\rho)$ και $T(at^2, 2at)$, όπου $t \neq \rho$ τέμνονται στο σημείο B .

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου B συναρτήσει των t και ρ .

Τα σημεία P και T μεταβάλλονται έτσι ώστε να ισχύει πάντα η σχέση $\rho t = 3$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση του γεωμετρικού τόπου του σημείου B στη μορφή $y^2 = f(x)$.

Λύση

(α) Βρίσκουμε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο P : είναι

$$y^2 = 4ax \Rightarrow 2yy' = 4a \Rightarrow y' = \frac{2a}{y}$$

και αρα $\lambda_{\epsilon\varphi.} = \frac{2a}{2a\rho} = \frac{1}{\rho}$. Αλλά, $\lambda_{\epsilon\varphi.} \cdot \lambda_{καθ.} = -1 \Rightarrow \lambda_{καθ.} = -\rho$. Συνεπώς, η εξίσωση της καθέτου είναι η

$$y - 2a\rho = -\rho(x - a\rho^2)$$

δηλ. η $y + \rho x = 2a\rho + a\rho^3$.

(β) Ομοίως, η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο T : είναι η $y + tx = 2at + at^3$. Αφού $t \neq \rho \neq 0$ αυτές τέμνονται. Αφαιρώντας τις κατά μέλη, έχουμε

$$\rho x - tx = 2a\rho + a\rho^3 - 2at - at^3$$

δηλ.

$$(\rho - t)x = a(\rho^3 - t^3) + 2a(\rho - t)$$

δηλ.

$$(\rho - t)x = a(\rho - t)(\rho^2 + \rho t + t^2) + 2a(\rho - t)$$

δηλ.

$$(\rho - t)x = \alpha(\rho - t)[(\rho^2 + \rho t + t^2) + 2]$$

δηλ.

$$x_B = \alpha(\rho^2 + \rho t + t^2 + 2)$$

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή σε κάποια από τις 2 εξισώσεις, ευρίσκουμε:

$$y_B = -\rho t \alpha(\rho + t)$$

(γ) Αν $\rho t = 3$, τότε

$$\begin{cases} y_B = -3\alpha(\rho + t) \\ x_B = \alpha(\rho^2 + t^2 + 5) \end{cases}$$

Έχουμε

$$y_B^2 = 9\alpha^2(\rho + t)^2 = 9\alpha^2(\rho^2 + t^2 + 2\rho t) = 9\alpha^2(\rho^2 + t^2 + 6)$$

και αρα

$$y^2 - 9\alpha^2 = \rho^2 + t^2 + 5$$

Από τις πιο πάνω, έχουμε τελικά ότι

$$y^2 - 9\alpha^2 = \frac{x}{\alpha}$$

δηλ.

$$y^2 = \frac{x}{\alpha} + 9\alpha^2$$

[Άσκηση 3]

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = 1 - e^x$ οι γραφικές παραστάσεις των οποίων τέμνονται στο σημείο B .

(α) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του γραφήματος της f παραβολής στο σημείο $A(1, f(1))$ περνά από την αρχή των αξόνων.

(β) Να υπολογίσετε το Εμβαδόν E του μικτόγραμμου χωρίου OAB .

(γ) Αν το χωρίο E περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα των τετμημένων, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

Λύση

Κατ'αρχάς, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g τέμνονται σε ένα και μόνο σημείο αφού

$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = -\ln 2$$

Το B λοιπόν είναι το $B\left(-\ln 2, \frac{1}{2}\right)$

(α) Εύρεση εξίσωσης της εφαπτομένης του γραφήματος της f παραβολής στο σημείο $A(1, f(1)) = (1, 1 - e)$

$$f'(x) = f(x) = e^x \Rightarrow \lambda_{\text{εφ.}} = f'(1) = e$$

και αρα η εξίσωση που ψάχνουμε είναι η

$$y - e = e(x - 1),$$

δηλ. η $y = E(x) = ex$, η οποία προφανώς περνά από την αρχή των αξόνων.

(β) Βρίσκουμε το πρόσημο της συνάρτησης της διαφοράς των δυο συναρτήσεων:

$$h(x) = f(x) - g(x) = 2e^x - 1$$

και $h(x) < 0, \forall x \in (-\infty, -\ln 2)$, $h(x) > 0, \forall x \in (-\ln 2, +\infty)$ και $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\ln 2$.

Επιπλέον, εύκολα βλέπουμε ότι

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \geq E(x) \geq 0, \forall x \in (-\ln 2, 0) \\ f(x) = E(x) \Leftrightarrow x = -\ln 2, e \\ f(x) \geq E(x) \geq g(x) \geq 0, \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

(δες και παρατηρήσεις μετά το πέρας του Β Μέρους). Συνεπώς,

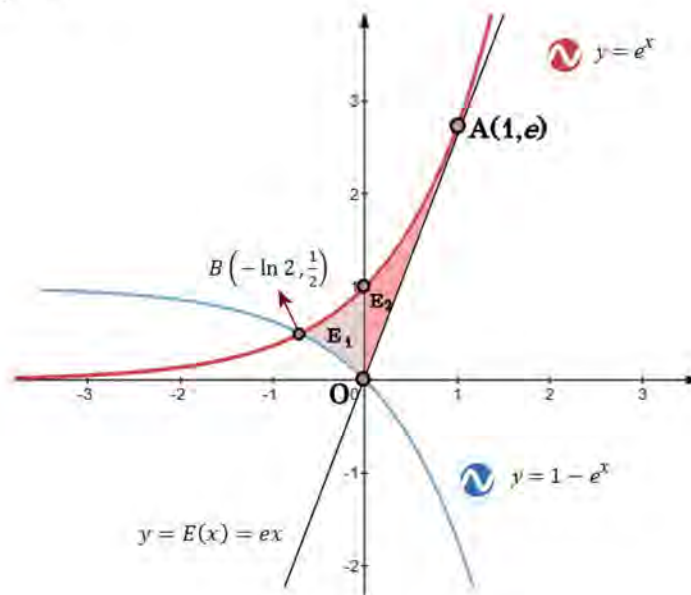
$$E = E_1 + E_2 = \int_{-\ln 2}^0 [f(x) - g(x)] dx + \int_0^1 [f(x) - E(x)] dx = \int_{-\ln 2}^0 (2e^x - 1) dx + \int_0^1 (e^x - ex) dx$$

$$= \dots = 1 - \ln 2 + \frac{e}{2} - 1 = \frac{e}{2} - \ln 2 \quad \tau. \mu.$$

(γ) Έχουμε:

$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_{-\ln 2}^0 (2e^x - 1)^2 dx + \pi \int_0^1 (e^x - ex)^2 dx = \dots = \pi \left(\ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{5}{6}e^2 - 2e - \frac{1}{2} \right)$$

$$= \pi \left(\ln 2 - \frac{1}{4} + \frac{5}{6}e^2 - 2e \right) \quad \kappa. \mu.$$



[Άσκηση 4]

Όταν ένα άτομο χρειάζεται ταξί καλεί μια από τις εταιρείες Α, Β ή Γ. Από τις απαντήσεις στις κλήσεις, το 40% προέρχεται από την εταιρεία Α, το 50% από τη Β και το υπόλοιπο 10% από τη Γ. Τα ταξί που προέρχονται από την εταιρεία Α καθυστερούν σε ποσοστό 9%, ενώ τα αντίστοιχα ποσοστά για τις άλλες εταιρείες είναι 6% για τη Β και 20% για τη Γ.

(α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα το επόμενο ταξί που παρουσιασθεί:

- Να προέρχεται από την εταιρεία Α και να μην καθυστερεί.
- Να καθυστερεί.

(β) Με δεδομένο ότι σε μια κλήση για ταξί αυτό ήρθε με καθυστέρηση, να βρείτε την πιθανότητα να προέρχεται από την εταιρεία Α.

Λύση

Θεωρούμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα

A: "το ταξί που κλήθηκε να έρθει από την εταιρεία A"

B: "το ταξί που κλήθηκε να έρθει από την εταιρεία B"

Γ: "το ταξί που κλήθηκε να έρθει από την εταιρεία Γ"

K: "το ταξί που κλήθηκε να έρθει με καθυστέρηση" (σαφώς, άσχετα από την εταιρεία που αυτό προήλθε)

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$P(A) = 0.4, \quad P(B) = 0.5, \quad P(K) = 0.1$$

Επίσης, από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$P(K|A) = 0.09, \quad P(K|B) = 0.06, \quad P(K|Γ) = 0.2$$

(α) i.

$$P(A \cap K') = P(K'|A) \cdot P(A) = [1 - P(K|A)] \cdot P(A) = [1 - 0.09] \cdot 0.4 = 0.364$$

ii. Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας, έχουμε

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K|A) \cdot P(A) + P(K|B) \cdot P(B) + P(K|Γ) \cdot P(Γ) = 0.09 \cdot 0.4 + 0.06 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.2 \\ &= 0.036 + 0.03 + 0.02 = 0.086 \end{aligned}$$

(β) Από τον τύπο του Bayes, έχουμε

$$P(A|K) = \frac{P(K \cap A)}{P(K)} = \frac{P(K|A) \cdot P(A)}{P(K)} = \frac{0.036}{0.086} = 0.4186$$

[Άσκηση 5]

Δίνεται συνεχής και άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

(α) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = -t$, να αποδείξετε ότι

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + \beta^x} dx = \int_0^a f(x) dx, \text{ όπου } a, \beta > 0.$$

(β) Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2 + 1)(1 + e^x)} dx$$

Λύση

(α) Έχουμε κατ'αρχάς ότι

$$\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1 + \beta^x} dx = \int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1 + \beta^x} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1 + \beta^x} dx.$$

Για το $\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1 + \beta^x} dx$: Θεωρούμε το μετασχηματισμό $t: [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ με $t(x) = -x$ ο οποίος είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού του και μάλιστα γνησίως φθίνουσα συνάρτηση ($\frac{dt}{dx} = -1 < 0, \forall x \in [-a, a]$). Έτσι,

$$\int_{-a}^0 \frac{f(x)}{1 + \beta^x} dx = - \int_{t(-a)}^{t(0)} \frac{f(-t)}{1 + \beta^{-t}} dt = - \int_a^0 \frac{f(-t)}{1 + \beta^{-t}} du = \int_0^a \frac{f(-t)}{1 + \beta^{-t}} = \int_0^a \frac{\beta^t f(t)}{1 + \beta^t} dt \equiv \int_0^a \frac{\beta^x f(x)}{1 + \beta^x} dx$$

(αφού η f άρτια έπεται ότι $f(-x) = f(x), \forall x \in [-a, a]$) και αρα

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a \frac{\beta^x f(x)}{1 + \beta^x} dx + \int_0^a \frac{f(x)}{1 + \beta^x} dx = \int_0^a \frac{f(x) + \beta^x f(x)}{1 + \beta^x} dx = \int_0^a \frac{f(x)(1 + \beta^x)}{1 + \beta^x} dx = \int_0^a f(x) dx$$

(β) Θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο για $\alpha = 1 > 0, \beta = e > 0$ $f: [-\alpha, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Έχουμε:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(x^2+1)(1+e^x)} dx = \int_{-1}^1 \frac{\frac{1}{x^2+1}}{1+e^x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx = [\text{τοξεφ}x]_0^1 = \text{τοξεφ}1 - \text{τοξεφ}0 = \frac{\pi}{4}$$

Παρατήρηση

Στην άσκηση 3/Μέρος Β βρήκαμε τη σχετική θέση των καμπύλων που οριοθετούν το χωρίο που μελετάμε. Η διαδικασία αυτή **πρέπει** να γίνεται και εμπίπτει στην ύλη του 1ου κεφαλαίου. Ιδιαίτερα, μπορεί να αποδειχθεί (δες π.χ. 'Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός' σελ. 458-460) ότι

Έστωσαν $f, g: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Τότε, το εμβαδόν του χωρίου S που περικλείεται κάτω από το γράφημα της συνάρτησης $y = f(x)$, πάνω από το γράφημα της συνάρτησης $y = g(x)$, αριστερά της ευθείας $x = \beta$ και δεξιά της ευθείας $x = \alpha$ δίνεται από την

$$\text{Εμβαδόν}(S) = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x) - g(x)| dx$$

- Στο κοινό πεδίο ορισμού των f, g άλλοτε μπορεί να είναι $f \geq g$ ενώ άλλοτε $f < g$. Η υπόθεση ότι η $h = f - g$ έχει μόνο αριθμήσιμο πλήθος ριζών είναι κατακρίβειαν περιττή, όπως φαίνεται από το πιο πάνω.