

Ενδεικτικές Λύσεις

Εισαγωγικών Εξετάσεων

Β Σειράς 2018

Μέρος Α



Οι παρακάτω ασκήσεις έχουν λυθεί σύμφωνα με την ύλη του Νέου Αναλυτικού προγράμματος και τις συνέπειες αυτού. Σε κάθε λύση γίνεται αναφορά στα αποτελέσματα που έχουν χρησιμοποιηθεί.

Οι λύσεις αυτές δεν συμβαδίζουν κατ'ανάγκη με τις οδηγίες λύσης του ΥΠΠ.

Σκοπός των λύσεων αυτών είναι ο έλεγχος των γνώσεων του εξεταζομένου και μπορεί να τις προσαρμόσει ο καθένας στις δικές του απαιτήσεις.

Οι ασκήσεις βρίσκονται επίσης λυμένες στο βιβλίο

‘ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ [Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ]’

ISBN 978-9925-7485-7-0 (χαρτόδετο) | 978-9925-7567-2-8 (σκληρόδετο)

το οποίο είναι διαθέσιμο προς δανεισμό στην ΚΥΠΡΙΑΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ (πλατεία Ελευθερίας/Λευκωσία)

Για σχόλια/παρατηρήσεις:

Ιωακείμ Ι.



yiannisioa@hotmail.com



/yiannisioak



Μαθηματικά 8-2018- Εισαγωγικές Εξετάσεις (B Σειρά)

Μέρος Α

1. Να υπολογίσετε το $\int (3x^2 - 12x + e^{-2x}) dx$

Λύση

Εκ της γραμμικότητας του αορίστου ολοκληρώματος,

$$\int (3x^2 - 12x + e^{-2x}) dx = \int 3x^2 dx - 6 \int 2x dx + \int e^{-2x} dx = x^3 - 6x^2 - \frac{e^{-2x}}{2} + c$$

για κάποια (αυθαίρετη πραγματική) σταθερά c .

2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{τοξεφ} x - x}{x}$.

Λύση

Λόγω της συνέχειας των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = \text{τοξεφ} x$ έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{τοξεφ} x - x) = \text{τοξεφ} 0 - 0 = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Το πεδίο ορισμού της $x \mapsto \text{τοξεφ}(x)$ είναι το $\mathbb{R}$ και όπως ξέρουμε, θα είναι $\text{τοξεφ}(x) \neq 0, \forall x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ και αρα, από Θεώρημα του DLH, έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{τοξεφ} x - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\text{τοξεφ} x - x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2} - 1}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x^2} - 1 \right) = \frac{1}{1+0^2} - 1 = 0$$

3. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(1 + \eta\mu\varphi, 2 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ κινείται σε κύκλο. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου αυτού και την ακτίνα του.

Λύση

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(1 + \eta\mu\varphi, 2 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ καθορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{cases} x = x(\varphi) = 1 + \eta\mu\varphi \\ y = y(\varphi) = 2 - \sigma\upsilon\nu\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Έχουμε

$$\begin{cases} x = 1 + \eta\mu\varphi \\ y = 2 - \sigma\upsilon\nu\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \eta\mu\varphi \\ y - 2 = -\sigma\upsilon\nu\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi) \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = \eta\mu^2\varphi \\ (y - 2)^2 = \sigma\upsilon\nu^2\varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Αλλά, για κάθε $\varphi \in [0, 2\pi)$

$$\begin{cases} x - 1 = \eta\mu\varphi \\ y - 2 = -\sigma\upsilon\nu\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - 1)^2 = \eta\mu^2\varphi \\ (y - 2)^2 = \sigma\upsilon\nu^2\varphi \end{cases} \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων $M(1 + \eta\mu\varphi, 2 - \sigma\upsilon\nu\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$ καθορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$\begin{cases} x - 1 = \eta\mu\varphi \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1 \end{cases}, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

και αρα το σημείο κινείται σε κύκλο (με κέντρο το σημείο $(1, 2)$ και ακτίνα $R = 1$).

4. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $[f(x)]^2 + x^2 = 1 + 2xf(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει ακρότατα.

Λύση

Αφού η f είναι παντού παραγωγίσιμη, παραγωγίζουμε αμφότερα μέλη της δοθείσας σχέσης: , $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} [f(x)]^2 + x^2 = 1 + 2xf(x) &\Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + 2x = 2f(x) + 2xf'(x) \\ &\Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) - 2xf'(x) = 2f(x) - 2x \\ &\Leftrightarrow f'(x) \cdot (f(x) - x) - (f(x) - x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (f'(x) - 1) \cdot (f(x) - x) = 0 \end{aligned}$$

Αν λοιπόν η f λάμβανε ακρότατο σε κάποιο σημείο έστω με $x = x_0$, τότε είτε $f'(x_0) = 1 > 0$, άτοπο (αφού είναι τοπικό ακρότατο μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης) είτε $f(x_0) = x_0$, άτοπο από την αρχική μας συνθήκη: θα είχαμε $0 = 1$, άτοπο.

Σημείωση: η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$ ικανοποιεί τη συνθήκη που μας δίνεται. Ιδιαίτερα, μπορούμε να αποδείξουμε ότι η f (δεδομένης της συνθήκης) δεν μπορεί να είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln(\sin x)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένα $\xi \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$.

Λύση

Ας παρατηρήσουμε πρώτα ότι η συνάρτηση έχει νόημα (είναι καλά ορισμένη) στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ αφού $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ είναι $\sin x > 0$. Επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα αυτό (ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων) με

$$f'(x) = -\frac{\eta\mu x}{\sin x} = -\epsilon\phi x$$

και αρα

$$f'(x) = 0, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \epsilon\phi x = 0, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow x = 0$$

6. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) = \frac{1}{4}, \quad P(A \cup B) = \frac{1}{3} \quad \text{και} \quad P(B) = \alpha.$$

Να βρεθεί η τιμή του $\alpha \in [0,1]$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:

(α) τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα

(β) τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

Λύση

(α) τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα $\Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$, δηλ. $P(A \cap B) = 0$. Έχουμε

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = \frac{1}{4} + \alpha - \frac{1}{3}$$

και αρα

$$P(A \cap B) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \alpha - \frac{1}{3} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{12}$$

(β) Τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα $\Leftrightarrow P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

Έχουμε

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot \alpha = \frac{1}{4} + \alpha - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4} = \alpha - \frac{1}{12} \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{9}$$

7. Ένας παρουσιαστής τηλεοπτικής εκπομπής κάλεσε για συζήτηση στην εκπομπή του τρεις βουλευτές, ένα δημοσιογράφο και δύο πολίτες. Για τη συζήτηση στήθηκε ένα ημικυκλικό τραπέζι, στο οποίο ο παρουσιαστής κάθεται στη μέση.

(α) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι τηλεοπτικοί καλεσμένοι.

(β) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να καθίσουν οι τηλεοπτικοί καλεσμένοι αν στη μια πλευρά του παρουσιαστή καθίσει ο δημοσιογράφος και στην άλλη ένας από τους βουλευτές.

Λύση

(α) **Βήμα 1. Επιλογή θέσης παρουσιαστή**

Ο παρουσιαστής θα καθίσει σε συγκεκριμένη θέση $\Rightarrow$ 1 τρόπος.

Βήμα 2. Επιλογή θέσεων καλεσμένων

Οι 6 καλεσμένοι μπορούν να καθίσουν με $6! = 720$ τρόπους (μεταθέσεις αυτών)

Από την **πολλαπλασιαστική αρχή** έχουμε συνολικά $6! \cdot 1 = 720$ τρόπους που μπορούν να καθίσουν οι τηλεοπτικοί καλεσμένοι.

(β) **Βήμα 1. Επιλογή θέσης παρουσιαστή**

Ο παρουσιαστής θα καθίσει σε συγκεκριμένη θέση $\Rightarrow$ 1 τρόπος.

Βήμα 2. Επιλογή θέσης του δημοσιογράφου

Ο δημοσιογράφος μπορεί να καθίσει καθίσει με δύο τρόπους (είτε στη μία είτε στην άλλη πλευρά του παρουσιαστή)

Βήμα 3. Επιλογή θέσεων των τηλεοπτικών καλεσμένων

Ένας βουλευτής θα καθίσει στη μια πλευρά του παρουσιαστή $\Rightarrow$ 3 τρόποι

Οι υπόλοιποι 4 καλεσμένοι μπορούν να καθίσουν με $4! = 24$ τρόπους (μεταθέσεις αυτών)

Από την **πολλαπλασιαστική αρχή** έχουμε συνολικά $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4! = 2 \cdot 3 \cdot 24 = 144$ τρόπους που μπορούν να καθίσουν οι τηλεοπτικοί καλεσμένοι.

8. Δίνεται η έλλειψη

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

όπου $a > b > 0$. Σε τυχαίο σημείο M της έλλειψης φέρουμε εφαπτομένη η οποία τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο σημείο P . Οι ευθείες $A'M$ και AM όπου A' και A τα άκρα του μεγάλου άξονα της έλλειψης, τέμνουν τον άξονα των συντεταγμένων στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το σημείο P είναι το μέσον του $\Gamma\Delta$.

Λύση

Εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης στο σημείο M

Παραγωγίζοντας πεπλεγμένα την εξίσωση της καμπύλης, έχουμε

$$\frac{2}{a^2}x + \frac{2}{b^2}y \frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y}$$

και στο σημείο $M \left(\frac{a \sin \theta}{x(\theta)}, \frac{b \eta \mu \theta}{y(\theta)} \right)$ είναι

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{a \sin \theta}{b \eta \mu \theta} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \theta}{\eta \mu \theta}$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης στο M είναι

$$y - b \eta \mu \theta = -\frac{b}{a} \cdot \frac{\sin \theta}{\eta \mu \theta} (x - a \sin \theta) \Leftrightarrow a \eta \mu \theta (y - b \eta \mu \theta) = -b \sin \theta (x - a \sin \theta)$$

$$\Leftrightarrow (a \eta \mu \theta) y - a b \eta \mu^2 \theta = -(b \sin \theta) x + a b \sin^2 \theta$$

$$\Leftrightarrow (a \eta \mu \theta) y + (b \sin \theta) x = a b (\sin^2 \theta + \eta \mu^2 \theta)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha \eta \mu \theta) y + (\beta \sigma \nu \theta) x = \alpha \beta$$

Θέτοντας στην εξίσωση της εφαπτομένης $x = 0$, βρίσκουμε το σημείο $P: P\left(0, \frac{\beta}{\eta \mu \theta}\right) \equiv P(0, \beta \sigma \tau \epsilon \mu \theta)$

Εύρεση της εξίσωσης της ευθείας AM :

$$\lambda_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} = \frac{\beta \eta \mu \theta - 0}{\alpha \sigma \nu \theta - \alpha} = \frac{\beta \eta \mu \theta}{\alpha(\sigma \nu \theta - 1)}$$

και αρα

$$AM: y = \frac{\beta \eta \mu \theta}{\alpha(\sigma \nu \theta - 1)}(x - \alpha)$$

Θέτοντας $x = 0$ βρίσκουμε το σημείο $\Delta: \Delta\left(0, -\frac{\beta \eta \mu \theta}{\sigma \nu \theta - 1}\right)$

Ομοίως, βρίσκουμε την εξίσωση της ευθείας AM' :

$$AM': y = \frac{\beta \eta \mu \theta}{\alpha(\sigma \nu \theta + 1)}(x + \alpha)$$

Θέτοντας $x = 0$ βρίσκουμε το σημείο $\Gamma: \Gamma\left(0, \frac{\beta \eta \mu \theta}{\sigma \nu \theta + 1}\right)$

Άρα,

$$\frac{y_\Delta + y_\Gamma}{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{\beta \eta \mu \theta}{\sigma \nu \theta - 1} + \frac{\beta \eta \mu \theta}{\sigma \nu \theta + 1} \right) = \frac{\beta \eta \mu \theta}{2} \left(\frac{1}{\sigma \nu \theta + 1} - \frac{1}{\sigma \nu \theta - 1} \right) = \frac{\beta \eta \mu \theta}{2} \cdot \frac{2}{(\sigma \nu \theta + 1)(\sigma \nu \theta - 1)}$$

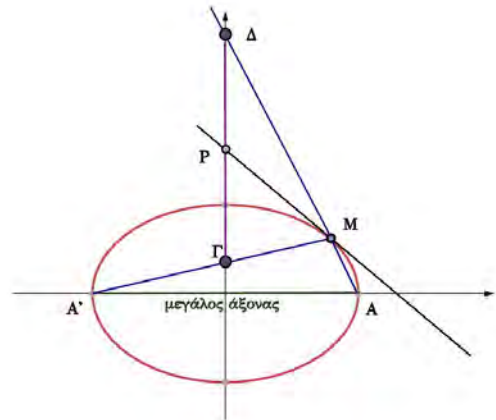
$$= \frac{\beta \eta \mu \theta}{\sigma \nu^2 \theta - 1} = \frac{\beta \eta \mu \theta}{\eta \mu^2 \theta} = \frac{\beta}{\eta \mu \theta} = y_P$$

Επίσης,

$$x_P = 0 = \frac{x_\Delta + x_\Gamma}{2}$$

Έτσι, το σημείο P είναι το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος $\Gamma\Delta$.

Σημείωση: Προφανώς θα πρέπει το σημείο M να μην ταυτίζεται με κάποια από τις κορυφές του μεγάλου άξονα της έλλειψης. Εξού και το ότι $\eta \mu \theta \neq 0$, για όλες τις τιμές της παραμέτρου θ .



9. (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \ln x, x > 0$. Έστω $x \in (0, 1)$ σταθεροποιημένο. Τότε, ορίζεται το διάστημα $[x, 1]$. Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ στο διάστημα αυτό: υπάρχει $\xi \in (x, 1)$ τέτοιο ώστε

$$\frac{1}{\xi} < \frac{1}{x} \text{ και αρα}$$

$$\frac{1}{x} > \frac{1}{\xi} = \frac{\ln x}{x-1} \Rightarrow \frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{x} \stackrel{x-1 < 0}{\implies} \ln x > \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$$

Αν $1 < x$, τότε ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και επαληθεύουμε την ανίσωση. Η ανίσωση ισχύει ως ισότητα μόνο για $x = 1$. Δείξαμε ότι

$$\ln x \geq 1 - \frac{1}{x}, \forall x \geq 1$$

δηλ.

$$1 - \ln x \leq \frac{1}{x}, \forall x \geq 1$$

(β) Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο Π.Ο. της με

$$f'(x) = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{\ln x}{(x-1)^2} = \frac{x-1-\ln x}{x(x-1)^2}, x > 1 \quad (*)$$

Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $x-1-\ln x < 0, \forall x > 1$ και αρα από την $(*)$ έχουμε ότι

$$f'(x) < 0, \forall x > 1$$

και αρα η f είναι γνησίως φθίνουσα παντού στο π.ο. της.

10. Δίνεται το ολοκλήρωμα

$$I_v = \int_0^4 x^v \sqrt{4-x} dx, \quad v \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

(α) Να δείξετε ότι $I_v = \frac{8v}{2v+3} \cdot I_{v-1}, \forall v \in \mathbb{N}$.

(β) Αν ισχύει ότι $\int_0^4 \sqrt{4-x} dx = \frac{16}{3}$, με τη βοήθεια του αποτελέσματός σας στο ερώτημα (α), ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^4 x^2 \sqrt{4-x} dx$.

Λύση

(α) Καταρχάς, έχουμε $I_0 = \int_0^4 \sqrt{4-x} dx = \left[-\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^4 = \frac{16}{3}$
ότι

Έστω τώρα $v \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Είναι

$$\begin{aligned} I_v &= \int_0^4 x^v \sqrt{4-x} dx = \int_0^4 \left(-\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}} \right)' x^v dx = \underbrace{\left[-\frac{2}{3}(4-x)^{\frac{3}{2}} x^v \right]_0^4}_0 + \frac{2v}{3} \int_0^4 x^{v-1} (4-x)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \frac{2v}{3} \int_0^4 (4x^{v-1} \sqrt{4-x} - x^v \sqrt{4-x}) dx = \frac{8v}{3} \underbrace{\int_0^4 x^{v-1} \sqrt{4-x} dx}_{I_{v-1}} - \frac{2v}{3} \underbrace{\int_0^4 x^v \sqrt{4-x} dx}_{I_v} \\ \Rightarrow I_v + \frac{2v}{3} I_v &= \frac{8v}{3} I_{v-1} \Rightarrow \frac{2v+3}{3} I_v = \frac{8v}{3} I_{v-1} \Rightarrow I_v = \frac{8v}{2v+3} I_{v-1} \end{aligned}$$

Διαφορετικά, $I_v = \int_0^4 x^v \sqrt{4-x} dx = \int_0^4 (4-x)^v \sqrt{x} dx$ και προχωράμε όπως πριν.

(β) Τώρα,

$$\int_0^4 x^2 \sqrt{4-x} dx = I_2 = \frac{8 \cdot 2}{2 \cdot 2 + 3} \cdot I_{2-1} = \frac{16}{7} \cdot I_1 = \frac{16}{7} \cdot \left(\frac{8 \cdot 1}{2 \cdot 1 + 3} \cdot I_0 \right) = \frac{16}{7} \cdot \frac{8}{5} \cdot \frac{16}{3} = \frac{2048}{105}$$

Ακολουθεί το Β' Μέρος

