

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2007 (ΓΙΑ ΑΠΟΛΥΣΗ)

Β' ΣΕΙΡΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΧΡΟΝΟΣ : 3 ώρες

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 30 Μαΐου 2007

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ : 3:30 μ.μ.

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α' και το ΜΕΡΟΣ Β'. Το ΜΕΡΟΣ Α' περιλαμβάνει 10 θέματα και το ΜΕΡΟΣ Β' περιλαμβάνει 5 θέματα. Κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Α' βαθμολογείται με 5 μονάδες ενώ κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Β' βαθμολογείται με 10 μονάδες και οι υποψήφιοι πρέπει να λύσουν και τα 15 θέματα.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων να γίνονται στο ειδικό φύλλο χαρτιού που δίνεται στο τετράδιο απαντήσεων.
- Να γράφετε καθαρά και επιμελημένα.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Η δολίευση τιμωρείται αυστηρά.
- Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- Θα δοθεί τυπολόγιο Μαθηματικών το οποίο θα επιστραφεί μετά το τέλος της εξέτασης. Στο τυπολόγιο δεν επιτρέπεται η αναγραφή οποιωνδήποτε σημειώσεων.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$y = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - x - 2}.$$

2) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int (7x + 9\sqrt{x}) dx$

3) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 = 16$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του και να υπολογίσετε την ακτίνα του.

4) Να υπολογίσετε την παράσταση: $y = \eta\mu \left[\text{τοξεφ} \frac{3}{4} \right]$

5) Αν $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, να δείξετε ότι $A^{-1} = -A$, όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2×2 .

6) Δίνεται η λέξη «Π Α Γ Κ Υ Π Ρ Ι Ε Σ».

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(β) Να βρείτε πόσοι αναγραμματισμοί της πιο πάνω λέξης αρχίζουν με Π και τελειώνουν σε Π.

7) Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου ενός πειράματος τύχης και $P(A) = P(A \cup B)$ και $P(B) = P(A' \cap B)$, να δείξετε ότι $P(A) + P(B) = 1$

8) Αν $x = e^{-t}$ και $y = t^2$, να δείξετε ότι: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 2$.

9) Δίνεται η έλλειψη $5x^2 + 9y^2 = 180$. Να βρείτε:

(α) Τις συντεταγμένες των εστιών της.

(β) Την εκκεντρότητά της.

(γ) Αν $P(6 \text{ συνθ}, \sqrt{20} \text{ ημθ})$ ένα σημείο της έλλειψης, να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο σημείο αυτό.

10) Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που είναι εγγεγραμμένα σε κύκλο με ακτίνα 6 cm, να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου που έχει μέγιστο εμβαδόν.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Δίνεται η συνάρτηση $y = (x - 2) \cdot e^x$.

(α) Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της πιο πάνω συνάρτησης, τα σημεία τομής της με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να την παραστήσετε γραφικά.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την καμπύλη και τους άξονες των συντεταγμένων.

2) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = \tan x$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να

υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{4 + 5 \sin^2 x}$

3) Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $xy = c^2$ και τα σημεία της $A\left(ct, \frac{c}{t}\right)$, $B\left(ck, \frac{c}{k}\right)$. Αν η ευθεία $y = 2x$ είναι κάθετη στην AB , να δείξετε ότι $t \cdot k = 2$.

Από το B φέρουμε ευθεία BE παράλληλη προς τον άξονα των y . Η εφαπτομένη στο A τέμνει την BE στο M . Να βρείτε την εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M .

4) Τα σημεία $T(at^2, 2at)$ και $P(ap^2, 2ap)$ είναι δύο σημεία της παραβολής $y^2 = 4ax$.

Αν η προέκταση της TP περνά από το σημείο $\Delta(-a, 0)$.

(α) Να δείξετε ότι $tp = 1$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M της TP .

5) Τρία άτομα A, B, Γ , τοποθετούνται τυχαία σε τρία συνεχόμενα καθίσματα:

(i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο.

(ii) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

α) M : Ο A είναι δίπλα στον B ,

β) N : Ο A δεν είναι δίπλα στον Γ .