

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΛΕΥΚΩΣΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2008

(ΓΙΑ ΑΠΟΛΥΣΗ)

Β' ΣΕΙΡΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΧΡΟΝΟΣ : 3 ώρες

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 02 Ιουνίου 2008

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ : 3:30 μ.μ.

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α' και το ΜΕΡΟΣ Β'.
- Το ΜΕΡΟΣ Α' περιλαμβάνει 10 θέματα και το ΜΕΡΟΣ Β' περιλαμβάνει 5 θέματα.
- Κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Α' βαθμολογείται με 5 μονάδες ενώ κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Β' βαθμολογείται με 10 μονάδες και οι υποψήφιοι πρέπει να λύσουν και τα 15 θέματα.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων να γίνονται στο ειδικό φύλλο χαρτιού που δίνεται στο τετράδιο απαντήσεων.
- Να γράφετε καθαρά και επιμελημένα.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Η δολίευση τιμωρείται αυστηρά.
- Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο Μαθηματικών.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int (2x^4 - \sqrt{x}) dx$.
- 2) Δίνεται κύκλος με εξίσωση $x^2 + y^2 - 5x + 4y - 7 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του και το μήκος της ακτίνας του.
- 3) Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών, των εστιών και την εκκεντρότητα της έλλειψης.
- 4) (α) Να αναφέρετε το θεώρημα της μέσης τιμής.
(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + x + 3$ στο διάστημα $[-2, 4]$.
Να βρείτε τον αριθμό $\xi \in (-2, 4)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματός της μέσης τιμής.
- 5) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης $y = \frac{3x^2 - 2x + 4}{x - 5}$.
- 6) Δίνεται η λέξη «ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ»
(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
(β) Να βρείτε πόσοι από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς αρχίζουν από Ι και τελειώνουν σε Ι και έχουν όλα τα σύμφωνα συνεχόμενα.
- 7) Αν $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ να βρεθεί ο πίνακας:
$$X = 4 \cdot A \cdot B^{-1} + 2 \cdot B^2.$$
- 8) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int \frac{(2 \ln x + 3)^3}{x} dx$.
- 9) Δίνονται δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός πειράματος τύχης με $P(A) = \frac{2}{7}$, $P(B) = \frac{2}{3}$ και $P(A \cap B) = \frac{4}{21}$. Να υπολογίσετε τις πιθανότητες:
(α) $P(B)$, (β) $P(A \cup B)$, (γ) $P(A' \cap B)$, (δ) $P[(A \cap B)' \cup (A' \cap B)]$.
- 10) Δίνεται η παραβολή $y^2 = -6x$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής που είναι κάθετη στην ευθεία $2x - y + 5 = 0$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{(x-1)^2}{x^2+2x+1}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, διαστήματα μονοτονίας, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να την παραστήσετε γραφικά.
2. Σε ένα διαγώνισμα δόθηκαν 10 ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής και σε κάθε ερώτηση υπήρχαν τρεις απαντήσεις (μία σωστή και δύο λανθασμένες). Ένας μαθητής απάντησε τυχαία σε όλες τις ερωτήσεις. Να βρείτε την πιθανότητα:
(α) Να έχει απαντήσει σωστά και στις 10 ερωτήσεις.
(β) Να έχει απαντήσει λάθος και στις 10 ερωτήσεις.
(γ) Να έχει απαντήσει σωστά σε μία τουλάχιστον ερώτηση.
3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \ln^3 x \, dx$.
4. Δίνεται η έλλειψη $(c_1): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ και η εξίσωση $(c_2): (x-1)^2 + (y+1)^2 = \ln a, \, a > 0$.
(α) Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες η εξίσωση (c_2) παριστάνει κύκλο.
(β) Να βρείτε την τιμή του $a, \, a > 1$, έτσι ώστε ο κύκλος (c_2) να περνά από το σημείο $(-1,0)$.
(γ) Να αποδείξετε ότι το σημείο $M(x_0, y_0)$, όπου $x_0 = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x + e^x)$ και $y_0 = \int_1^e \frac{3 \ln x}{x} dx$ ανήκει στην έλλειψη (c_1) .
(δ) Να βρείτε την τιμή του a ώστε η εφαπτομένη της έλλειψης (c_1) στο σημείο της $M(x_0, y_0)$, να εφάπτεται και του κύκλου (c_2) .
5. Δίνονται τα σημεία $A(0,1)$ και $B(0,2)$. Να βρείτε σημείο $M(x, -1), \, x > 0$, της ευθείας με εξίσωση $y = -1$, έτσι ώστε η γωνία $\widehat{AMB}$ να είναι μέγιστη.