

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΛΕΥΚΩΣΙΑ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2009
(ΓΙΑ ΑΠΟΛΥΣΗ)

Β' ΣΕΙΡΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΧΡΟΝΟΣ : 3 ώρες

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 02 Ιουνίου 2009

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ : 3:30 μ.μ.

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α' και το ΜΕΡΟΣ Β'. Το ΜΕΡΟΣ Α' περιλαμβάνει 10 θέματα και το ΜΕΡΟΣ Β' περιλαμβάνει 5 θέματα. Κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Α' βαθμολογείται με 5 μονάδες ενώ κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Β' βαθμολογείται με 10 μονάδες και οι υποψήφιοι πρέπει να λύσουν και τα 15 θέματα.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων να γίνονται στο ειδικό φύλλο χαρτιού που δίνεται στο τετράδιο απαντήσεων.
- Να γράφετε καθαρά και επιμελημένα.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Η δολίευση τιμωρείται αυστηρά.
- Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο Μαθηματικών . Στο τυπολόγιο δεν επιτρέπεται η αναγραφή οποιασδήποτε σημείωσης.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^3 (2x+3)dx$

2) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{\eta\mu 3x}$

3) Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του και να υπολογίσετε την ακτίνα του.

4) Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, να δείξετε ότι : $A^{-1} \cdot B = I$, όπου I είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2×2 .

5) Τα A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει :

$$P(A) = \frac{3}{8}, \quad P(B) = \frac{5}{8} \quad \text{και} \quad P(A \cup B) = \frac{3}{4}.$$

Να βρείτε τις πιθανότητες α) $P(A \cap B)$ β) $P(B/A)$ γ) $P(A' \cap B)$.

6) Πόσοι αναγραμματισμοί της λέξης ΚΑΤΑΣΤΑΣΗ υπάρχουν; Πόσοι από αυτούς έχουν τα τρία A συνεχόμενα ;

7) Να υπολογίσετε το εμβαδό μεταξύ της καμπύλης $y = -x^2 + 4x$ και της ευθείας $y = x$

8) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = \varepsilon\phi \frac{x}{2}$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο ,

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int \frac{dx}{2 + 2\sin x - \eta\mu x}$

9) Αν $x = e^t \eta\mu t$ και $y = e^{-t} \sigma\upsilon\nu t$, να δείξετε ότι : $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2e^{-3t}}{\sigma\upsilon\nu t + \eta\mu t}$.

- 10) Η παραβολή $y^2 = 4ax$ ($a > 0$) και η υπερβολή $xy = 2a^2$ τέμνονται στο Α. Η εφαπτομένη της παραβολής στο Α τέμνει την υπερβολή στο Β. Να βρεθεί η εξίσωση του Γεωμετρικού Τόπου των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $MA=MB$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $f(x) = \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 4}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων και τις εξισώσεις των ασύμπτωτων της.
β) Να βρείτε τα ακρότατα της και να τα χαρακτηρίσετε.
γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της.

2. Η πιθανότητα να λύσουν σωστά μια άσκηση, τρεις μαθητές Α, Β, Γ είναι $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{3}{5}$ αντίστοιχα.

- α) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου δύο μόνο μαθητές να λύσουν σωστά την άσκηση.
β) Δεδομένου ότι δύο μόνο μαθητές έχουν λύσει σωστά την άσκηση, να βρείτε την πιθανότητα η λανθασμένη απάντηση, να δόθηκε από τον Γ.

3. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται αν το χωρίο που περικλείεται από τους άξονες την καμπύλη $y = \ln x$ και την ευθεία $y = 2$ στραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x .

4. Από σημείο $M(x, y)$ της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ φέρουμε εφαπτομένη η οποία τέμνει τους άξονες OX και OY στα σημεία Α και Β. Να βρείτε τις συντεταγμένες των Α και Β ώστε το τρίγωνο OAB να έχει ελάχιστο εμβαδόν. (Ο το κέντρο της έλλειψης).

5. (α) Να δείξετε ότι: $\int_0^a x^3 f(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x f(x) dx, a > 0$

- (β) Με την χρήση του πιο πάνω αποτελέσματος, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος: $\int_0^2 x^3 e^{x^2} dx$