

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ – Β ΣΕΙΡΑ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τετάρτη 2/6/2010
15:30 – 18:30

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από δύο (2) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int (8x^3 - 6x + 5) dx$
- 2) Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης που το κέντρο της είναι η αρχή των αξόνων και έχει εστία $E(3,0)$ και κορυφή $B(0,4)$.
- 3) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta \mu x}{e^x - x - 1}$.
- 4) Το σημείο $(1,2)$ είναι τοπικό ακρότατο της συνάρτησης $\psi = \alpha x + \frac{\beta}{x}$. Να βρείτε τα α και β και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης.
- 5) Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι:
 - α) $A^2 + I = O$, όπου I ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας και O ο μηδενικός 2×2 πίνακας.
 - β) $A^{2010} + A^{2008} + A^{125} = A$.

- 6) Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω για τα οποία ισχύει $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B') = \frac{2}{3}$ και $P(B \cap A') = \frac{1}{4}$, να βρείτε τις πιθανότητες: $P(B)$, $P(A \cap B)$ και $P(A \cup B)$.
- 7) Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 8x$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $A(2,4)$.
 - Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραβολή, την εφαπτομένη της στο σημείο A και τον άξονα των x .
- 8) Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = x(2 + \ln x)$, $x \in [1, e]$. Να βρείτε τον αριθμό $\xi \in (1, e)$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής.
- 9) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης «ΧΡΟΝΟΜΕΤΡΟ» που δεν έχουν δυο «Ο» συνεχόμενα.
- 10) Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $\sqrt{x^2 + 1} = u$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int_0^1 x^3 \sqrt{x^2 + 1} dx$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 1}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής της με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατά της και τις ασύμπτωτές της, να την παραστήσετε γραφικά.
- Ένα ορθογώνιο φύλλο χαρτιού έχει εμβαδόν 400 cm^2 . Να βρείτε τις διαστάσεις του φύλλου ώστε η διαγώνιος του να έχει ελάχιστο μήκος.
- Ένα δοχείο περιέχει 9 μπάλες, 2 μαύρες και 3 άσπρες, 4 κόκκινες. Δύο μπάλες επιλέγονται τυχαία η μια μετά την άλλη με τον εξής περιορισμό: αν επιλεγεί μαύρη μπάλα πρώτη τότε επιλέγεται αυτόματα άσπρη μπάλα σαν δεύτερη. Για τις άλλες μπάλες δεν υπάρχει περιορισμός.
 - Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου Δ «τουλάχιστον η μία μπάλα που έχει επιλεγεί είναι άσπρη».
 - Δεδομένου ότι έχει επιλεγεί τουλάχιστον η μία άσπρη μπάλα να βρείτε την πιθανότητα η άλλη μπάλα να μη είναι η μαύρη.

4) Κύκλος με κέντρο $K(\alpha, \beta)$ και ακτίνα R εφάπτεται εξωτερικά των δυο κύκλων $\chi^2 + \psi^2 = 4$ και $\chi^2 + \psi^2 - 6\chi + 8 = 0$. Να δείξετε ότι:

α) η τετμημένη του κέντρου K είναι: $\alpha = \frac{R+6}{3}$.

β) η εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου K είναι: $\psi^2 = 8(\chi - 1)(\chi - 2)$

5) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και $\kappa \in \mathbb{R}$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $t = \kappa - \chi$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να αποδείξετε ότι:

$$\int_a^\beta f(\chi) d\chi = \int_{\kappa-\beta}^{\kappa-a} f(\kappa - \chi) d\chi$$

Με τη βοήθεια της πιο πάνω σχέσης να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int_0^3 \chi^2 (2 - \chi)^5 d\chi.$$

----- Τ Ε Λ Ο Σ -----

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ