ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2011 – Β΄ ΣΕΙΡΑ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Τετάρτη, 1/6/2011
15:30 – 18:30

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ
Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από δυο (2) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $\int\left(3\chi^2+\sigma\upsilon\nu 2\chi\right)d\chi$.

2. Να βρείτε την ακτίνα και το κέντρο του κύκλου: $\chi^2+\psi^2+4\chi-6\psi-3=0$.

3. Να βρείτε το $\lim\limits_{\chi\to 0}\dfrac{e^{2\chi}-\sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi+\sigma\upsilon\nu\chi-1}$.

4. Δίνεται ο πίνακας $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 3\end{pmatrix}$. Να βρείτε τον πίνακα A^3.

5. Παραβολή έχει εστία το σημείο $(2,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\chi=-2$.
   α) Βάση του ορισμού της παραβολής να δείξετε ότι η εξίσωση της είναι $\psi^2=8\chi$. [μονάδες 3]
   β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(2,4)$. [μονάδες 2]

6. Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η ευθεία $\psi=3\chi+\alpha$ να εφάπτεται του κύκλου $\chi^2+\psi^2=10$.

7. Να υπολογιστεί το εμβαδόν της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη $\psi=\chi^2+\chi-6$ και τον άξονα των $\psi=2\chi$.

8. Από ένα τμήμα με πέντε μαθητές και οκτώ μαθήτριες θα επιλεγεί μια επιτροπή που θα αποτελείται από δύο μαθητές και τρεις μαθήτριες.
   α) Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να σχηματιστεί η επιτροπή. [μονάδες 2]
   β) Να βρείτε την πιθανότητα μια συγκεκριμένη μαθήτρια να είναι στη επιτροπή. [μονάδες 3]

9. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = 3\chi - \chi^2$, τον άξονα των χ και τις ευθείες $\chi = 1$ και $\chi = 3$, στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των χ. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = \ln\chi$ και $0 < \alpha < \beta$. Να δικαιολογήσετε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και να δείξετε ότι: $\frac{1}{\beta} < \frac{\ln\beta - \ln\alpha}{\beta - \alpha} < \frac{1}{\alpha}$.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η καμπύλη (Κ) με παραμετρικές εξισώσεις: $\chi = \frac{2}{t^2+1}$ και $\psi = \frac{2t}{t^2+1}$, $t \in R$.
   α) Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωσή της καμπύλης (Κ) και να την αναγνωρίσετε. [μονάδες 2]
   β) Αν $f(t)$ είναι το τετράγωνο της απόστασης τυχαίου σημείου της καμπύλης (Κ) από το σημείο $A(1,-1)$, να δείξετε ότι: $f(t) = \frac{2(t+1)^2}{t^2+1}$, $t \in R$, και [μονάδες 2]
   γ) Να παραστήσετε γραφικά την $\psi = \frac{2(\chi+1)^2}{\chi^2+1}$, $\chi \in R$. [μονάδες 6]

2. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $\chi\psi = c^2$.
   α) Να δείξετε ότι η κάθετη της ισοσκελούς υπερβολής στο σημείο $A\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ έχει εξίσωση $t^3\chi - t\psi = ct^4 - c$. [μονάδες 3]
   β) Αν η κάθετη αυτή τέμνει την υπερβολή και στο σημείο Β, να βρείτε της συντεταγμένες του Β. [μονάδες 4]
   γ) Αν Γ είναι το συμμετρικό του Α ως προς την αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι η γωνία ΑΓΒ είναι ορθή. [μονάδες 3]

3. (α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $t=\chi^2$ να δείξετε ότι: $\int_0^{\alpha}\chi^3 f(\chi^2)d\chi=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha^2}\chi f(\chi)d\chi$ $(\alpha>0)$ [μονάδες 4]

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}\chi^3 \eta\mu(\chi^2)d\chi$ [μονάδες 6]

4. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου δίδονται οι πιθανότητες: $P(A-B)=\frac{1}{5}$, $P(B)=\frac{1}{4}$ και $P(B/A)=\frac{1}{2}$. Να βρείτε τις πιθανότητες:

α) $P(A\cap B)$ β) $P(A)$ γ) $P(A/B)$ δ) $P(A\cup B)$ ε) $P(A'\cap B')$.

[Από 2 μονάδες το καθένα]

5. Δίνεται η έλλειψη $(K_1):\chi^2+\frac{\psi^2}{\rho^2}=1$, $0<\rho<1$ και τυχαίο σημείο της $P(\sigma\upsilon\nu\theta,\rho\eta\mu\theta)$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο Ρ είναι: $\psi\eta\mu\theta+\chi\rho\sigma\upsilon\nu\theta=\rho$ [μονάδες 3]

β) Από την αρχή των αξόνων Ο φέρνουμε ευθεία κάθετη στην εφαπτομένη και ονομάζουμε Α το σημείο που τέμνει την εφαπτομένη. Στη συνέχεια από το σημείο Ρ φέρνουμε ευθεία κάθετη στον άξονα Οχ που συναντά την ευθεία ΟΑ στο Μ. Να δείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι η έλλειψη $(K_2):\chi^2+\rho^2\psi^2=1$. [μονάδες 4]

γ) Αν E_1 είναι μια εστία της K_1 και E_2 μια εστία της K_2 να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου E_1E_2O. [μονάδες 3]