

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΚΑΙ ΑΝΩΤΑΤΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2012 – Β' ΣΕΙΡΑ

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: Παρασκευή, 1/6/2012
15:30 – 18:30

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ
Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο
που αποτελείται από δυο (2) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Κύκλος έχει κέντρο $K(0, -1)$ και ακτίνα $R = 2$. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου.
2. Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - \eta\mu x}{x + \eta\mu x}$.
3. Να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε: $\int_{\kappa}^3 (2x + 1) dx = 6$.
4. Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4\chi$. Να δείξετε ότι εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής στο σημείο της $A(9, 6)$, είναι $\chi - 3\psi + 9 = 0$.
5. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τον πίνακα X για τον οποίον $A \cdot X = B$.
6. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $\chi\psi = c^2$. Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο $P\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ τέμνει τους άξονες των χ και ψ στα σημεία A και B , αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το P είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB .

7. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $\psi = x^2 - 2x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 3$ και τον άξονα των x , περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.
8. Δίνεται η λέξη «ΕΛΛΗΝΙΚΕΣ».
- Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.
 - Να βρείτε σε πόσους αναγραμματισμούς της πιο πάνω λέξης το Ν προηγείται του Ι, το Ι προηγείται του Κ και το Κ προηγείται του Η. π.χ. «ΕΛΛΕΣΙΛΚΕΗΛ» και «ΝΕΣΙΛΚΕΗΛ» είναι δυο τέτοιοι αναγραμματισμοί.
9. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: $\psi = \frac{2x^3 - x^2 - 5x - 1}{x^2 - x - 2}$.
10. Δίνονται οι καμπύλες: $\psi = \sin x$ και $\psi = \eta \mu x$. Να βρείτε:
- το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες και τον ημιάξονα των $O\psi$.
 - τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το πιο πάνω χωρίο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα των x .

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση με εξίσωση: $\psi = \frac{2x+1}{x^2-1}$.
- Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να την παραστήσετε γραφικά.
 - Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 2$ και $x = 4$.
2. Σε ορθογώνιο καρτεσιανό σύστημα αξόνων, δίνεται η καμπύλη $x^2 + 4\psi^2 = 4$ και το σημείο της $M(x_0, \psi_0)$ στο Α΄ τεταρτημόριο. Αν η εφαπτόμενη της καμπύλης στο σημείο M τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο K και τον άξονα $\psi\psi'$ στο σημείο L , να βρεθεί η θέση του σημείου M έτσι, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου OKL να είναι ελάχιστο.

3. Δίνονται τα ολοκληρώματα:

$$A = \int_0^6 \frac{e^x}{e^x + e^{6-x}} dx \text{ και } B = \int_0^6 \frac{e^{6-x}}{e^x + e^{6-x}} dx.$$

α) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό: $u = 6 - x$, να δείξετε ότι $A = B$.

β) Με τη βοήθεια του πιο πάνω ή με άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα B.

4. Με τη βοήθεια των βασικών ιδιοτήτων των πιθανοτήτων, να δείξετε ότι:

$$\alpha) P(A' \cup B') = P[(A \cap B)']$$

$$\beta) P(A' \cap B') = P[(A \cup B)'] \text{ και}$$

$$\gamma) P[(A \cap B') / \Gamma] = P(A / \Gamma) - P[(A \cap B) / \Gamma].$$

5. Δίνονται οι κύκλοι $(K): x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$ και $(\Lambda): x^2 + y^2 = 9$.

α) Να δείξετε ότι γεωμετρικός τόπος των σημείων $\Sigma(x, y)$ του επιπέδου με $\Delta_K(\Sigma) + \mu \Delta_\Lambda(\Sigma) = 0$, είναι κύκλος, για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού μ με $\mu \neq -1$. Συμβολίζουμε τον κύκλο αυτό με (K_μ) .

β) Να βρείτε την τιμή του μ ώστε ο κύκλος (K_μ) να περνά από το σημείο $\Sigma(7, 5)$.

γ) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου αυτού.

-----ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ-----

