

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2013 (ΓΙΑ ΑΠΟΛΥΣΗ)

Β΄ ΣΕΙΡΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΧΡΟΝΟΣ : 3 ώρες
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : Παρασκευή, 31 Μαΐου 2013
ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ : 3:30 μ.μ.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α΄ και το ΜΕΡΟΣ Β΄. Το ΜΕΡΟΣ Α΄ περιλαμβάνει 10 θέματα και το ΜΕΡΟΣ Β΄ περιλαμβάνει 5 θέματα. Κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Α΄ βαθμολογείται με 5 μονάδες ενώ κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Β΄ βαθμολογείται με 10 μονάδες και οι υποψήφιοι πρέπει να λύσουν και τα 15 θέματα.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων να γίνονται στο ειδικό φύλλο χαρτιού που δίνεται στο τετράδιο απαντήσεων.
- Να γράφετε καθαρά και επιμελημένα.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Η δολίευση τιμωρείται αυστηρά.
- Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- Δίνεται τυπολόγιο Μαθηματικών δύο (2) σελίδων το οποίο επισυνάπτεται μετά το τέλος του εξεταστικού δοκιμίου. Στο τυπολόγιο δεν επιτρέπεται η αναγραφή οποιωνδήποτε σημειώσεων.

ΜΕΡΟΣ Α΄. Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να απαντήσετε και στις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε όλους τους αναγραμματισμούς της λέξης ΕΥΤΥΧΙΑ. Να βρείτε πόσοι από αυτούς τους αναγραμματισμούς έχουν τα φωνήεντα μαζί;
2. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 2x$. Να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.
3. Δίνεται ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$. Να δείξετε ότι ισχύει: $A^2 + A = I$, όπου I είναι ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας.
4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2x - \eta\mu 2x}$.
5. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int \frac{x+3}{x^2-1} dx$.
6. Αν $x = \text{Τοξημ}t$ και $\psi = \sqrt{1-t^2}$, να δείξετε ότι $\frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi = 0$.
7. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της χορδής του κύκλου $x^2 + \psi^2 = 5$ που έχει το μέσο της στο σημείο $M\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ είναι η $x - \psi - 1 = 0$ και στη συνέχεια να βρείτε τα σημεία τομής της με τον κύκλο.
8. Η εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{16} + \frac{\psi^2}{9} = 1$ στο σημείο της $\Gamma(4\sigma\upsilon\nu\theta, 3\eta\mu\theta)$, (Γ στο α' τεταρτημόριο) τέμνει τους άξονες ox και $o\psi$ στα σημεία A και B αντίστοιχα. Αν O η αρχή των αξόνων και $\frac{OA}{OB} = \frac{4}{3}$ να υπολογίσετε τη γωνία θ .
9. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int e^{-2x} \eta\mu x dx$.
10. Πάνω στις πλευρές ενός τριγώνου παίρνουμε, 7 σημεία στην μια πλευρά, 11 σημεία στην άλλη και 19 σημεία στην τρίτη πλευρά (όλα διαφορετικά από τις κορυφές του). Να βρείτε πόσα τρίγωνα μπορούμε να σχηματίσουμε με κορυφές αυτά τα σημεία.

ΜΕΡΟΣ Β΄. Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να απαντήσετε και στις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $\psi = \frac{2x^2}{x-1}$.
 - α) Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα τοπικά ακρότατα και τις ασύμπτωτες, να την παραστήσετε γραφικά.
 - β) Στη συνέχεια, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=2$ και $x=3$.

2. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{2x^2}{x^2+4} dx$. Στη συνέχεια με τη βοήθεια της αντικατάστασης $\sqrt{x-4}=t$, $x>4$ ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \frac{\sqrt{x-4}}{x} dx$.
3. α) Δίνεται η καμπύλη $\psi = 10 - x^2$. Η ευθεία $x = \kappa$, $0 < \kappa < \sqrt{10}$, τέμνει τον άξονα των x στο σημείο Α και την καμπύλη στο σημείο Β. Παράλληλη ευθεία προς τον άξονα των x που περνά από το σημείο Β τέμνει τον άξονα των ψ στο σημείο Γ. Το ορθογώνιο ΟΑΒΓ (όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων) περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των x και παράγει κύλινδρο όγκου V . Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου κ έτσι ώστε ο όγκος V να είναι μέγιστος.
- β) Η ευθεία $\psi = 9$ τέμνει την καμπύλη $\psi = 10 - x^2$ στα σημεία Κ και Λ. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x της επιφάνειας που περικλείεται από την καμπύλη και το ευθύγραμμο τμήμα ΚΛ.
4. α) Σε ένα δειγματικό χώρο τα Α και Β είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Να αποδείξετε ότι τα Α και Β' είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα.
- β) Δίνονται δυο κύβοι ο K_1 και ο K_2 . Οι έδρες του K_1 είναι αριθμημένες με 2, 2, 3, 4, 5, 5 και του K_2 με 2, 2, 2, 3, 3, 4. Ρίχνουμε τους δυο κύβους από μια φορά τον καθένα και παρατηρούμε την ένδειξη της πάνω έδρας του καθενός. Θεωρούμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα:
 Α: ο K_1 φέρνει άρτια ένδειξη
 Β: ο K_2 φέρνει άρτια ένδειξη
 Γ: τουλάχιστο ο ένας κύβος φέρνει άρτια ένδειξη
 Δ: μόνο ο K_1 φέρνει άρτια ένδειξη
 Ε: μόνο ο ένας από τους δυο κύβους φέρνει άρτια ένδειξη.
- i) Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων Α, Β, Γ, Δ και Ε.
- ii) Δοθέντος ότι παρουσιάστηκε μόνο μια άρτια ένδειξη, ποια η πιθανότητα να είναι η ένδειξη του κύβου K_1 .
5. α) Δίνεται η παραβολή $\psi^2 = 4\alpha x$ και $A(\alpha t_1^2, 2\alpha t_1)$, $B(\alpha t_2^2, 2\alpha t_2)$ δυο σημεία της. Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της παραβολής στα σημεία Α και Β τέμνονται στο σημείο $K(\alpha t_1 t_2, \alpha(t_1 + t_2))$.
- β) Από τυχαίο σημείο $M(\alpha t^2, 2\alpha t)$ της παραβολής $\psi^2 = 4\alpha x$ φέρουμε δυο ευθείες ΜΓ και ΜΔ με συντελεστές κατεύθυνσης 1 και -1 αντίστοιχα που συναντούν την παραβολή (για δεύτερη φορά) στα σημεία $\Gamma(\alpha t_3^2, 2\alpha t_3)$ και $\Delta(\alpha t_4^2, 2\alpha t_4)$. Να βρείτε την εξίσωση του σχήματος στο οποίο ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου τομής Τ των εφαπτομένων της παραβολής στα σημεία Γ και Δ όταν το σημείο Μ διαγράφει την παραβολή.

.....Τ Ε Λ Ο Σ