

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2014 (ΓΙΑ ΑΠΟΛΥΣΗ)

Β' ΣΕΙΡΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΧΡΟΝΟΣ : 3 ώρες
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : Τρίτη, 3 Ιουνίου 2014
ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ : 3:30 μ.μ.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α' και το ΜΕΡΟΣ Β'. Το ΜΕΡΟΣ Α' περιλαμβάνει 10 θέματα και το ΜΕΡΟΣ Β' περιλαμβάνει 5 θέματα. Κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Α' βαθμολογείται με 5 μονάδες ενώ κάθε θέμα του ΜΕΡΟΥΣ Β' βαθμολογείται με 10 μονάδες και οι υποψήφιοι πρέπει να λύσουν και τα 15 θέματα.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Οι γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων να γίνονται στο ειδικό φύλλο χαρτιού που δίνεται στο τετράδιο απαντήσεων.
- Να γράφετε καθαρά και επιμελημένα.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Η δολίευση τιμωρείται αυστηρά.
- Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- Δίνεται τυπολόγιο Μαθηματικών δύο (2) σελίδων το οποίο επισυνάπτεται μετά το τέλος του εξεταστικού δοκιμίου. Στο τυπολόγιο δεν επιτρέπεται η αναγραφή οποιωνδήποτε σημειώσεων.

ΜΕΡΟΣ Α'. Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να απαντήσετε και στις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + e^x}{x^2 + 2x}$$

2. Το συμβούλιο του συνδέσμου γονέων ενός σχολείου αποτελείται από τον πρόεδρο, δύο αντιπροέδρους, τον γραμματέα, τον ταμία και 15 μέλη. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορεί να επιλεγεί μια πενταμελής αντιπροσωπεία για να συμμετέχει στην Παγκύπρια συνδιάσκεψη γονέων, αν στην αντιπροσωπεία πρέπει υποχρεωτικά να συμμετέχει ο πρόεδρος, ο γραμματέας και ένας εκ των δύο αντιπροέδρων.

3. α) Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ο πίνακας A , όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1+2\alpha \\ 1 & \alpha^2 \end{bmatrix} \text{ δεν έχει αντίστροφο.}$$

β) Για την τιμή $\alpha = 2$ να αποδείξετε ότι: $A^2 - 4A^{-1} = \begin{bmatrix} -12 & 27 \\ 9 & 15 \end{bmatrix}$

4. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = 3\epsilon\mu\theta$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ να υπολογίσετε

ολοκλήρωμα $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} dx$.

5. Δίνεται η έλλειψη με εξίσωση $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $\alpha > \beta$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο σημείο της

$M(x_1, y_1)$ δίνεται από της εξίσωση (ε): $\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} = 1$.

β) Αν η (ε) τέμνει τους άξονες των x και y στα σημεία $\Gamma(\kappa, 0)$ και

$\Delta(0, \lambda)$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\frac{\alpha^2}{\kappa^2} + \frac{\beta^2}{\lambda^2} = 1$.

6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

Να βρείτε

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β) Τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^4 + \beta x^2 + (\gamma - 2)x$ με $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει σημείο καμπής για $x = 1$ και η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο με $x = 0$ είναι ίση με 2.

Αν επιπλέον ισχύει ότι $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{10}$, να υπολογίσετε τις τιμές των α, β και γ .

8. Δίνονται οι παραβολές με εξισώσεις $\psi = 2x^2$ και $\psi^2 = 4x$. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται κατά την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x , του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των δύο παραβολών.

9. Δίνεται ο κύκλος $K: x^2 + \psi^2 = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων που βρίσκονται στο α' τεταρτημόριο του ορθογωνίου συστήματος αξόνων και εφάπτονται εξωτερικά στον κύκλο K και στον άξονα των $\psi\psi'$.

10. Έστω A, B δύο ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τέτοια ώστε :

$$P(A) \cdot P(A') = P(A') + P^2(B)$$

Να αποδείξετε ότι το A είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το B αδύνατο ενδεχόμενο.

ΜΕΡΟΣ Β'. Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να απαντήσετε και στις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-x}$.

Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της, τα σημεία τομής με τους άξονες, τα διαστήματα μονοτονίας, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτές της, να κάνετε την γραφική της παράσταση.

β) Στο ίδιο σύστημα ορθογωνίων αξόνων να φέρετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = e^{-x}$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται μόνο σ' ένα σημείο και να βρείτε τις συντεταγμένες του.

γ) Αν οι γραφικές παραστάσεις των f και g τέμνονται στο σημείο με $x = 1$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τον άξονα των $\psi\psi$.

2. Μια ασφαλιστική εταιρεία που ασφαλίζει αυτοκίνητα στην Κύπρο έχει στο πελατολόγιό της κάποιους οδηγούς που είναι ασφαλείς στην οδήγηση, κάποιους οδηγούς που είναι μέτριοι και κάποιους που είναι κακοί οδηγοί. Η πιθανότητα να είναι κάποιος οδηγός ασφαλής στην οδήγηση, είναι $\frac{3}{10}$, η πιθανότητα να είναι κάποιος οδηγός μέτριος, είναι $\frac{9}{20}$ και η πιθανότητα να είναι κάποιος οδηγός κακός, είναι $\frac{5}{20}$. Αν γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα να προκαλέσει κάποιο ατύχημα κατά την διάρκεια ενός έτους ένας ασφαλής οδηγός είναι $\frac{1}{20}$, ένας μέτριος οδηγός είναι $\frac{3}{20}$ και ένας κακός οδηγός είναι $\frac{3}{10}$, να βρείτε τις πιθανότητες των παρακάτω ενδεχομένων:

Δ: «κάποιος οδηγός να προκαλέσει κάποιο ατύχημα κατά την διάρκεια ενός έτους»

Π: «κάποιος οδηγός να μην είναι μέτριος και να μην προκαλέσει κάποιο ατύχημα κατά την διάρκεια ενός έτους»

Τ: «να είναι κάποιος ασφαλής οδηγός αν δεν έχει προκαλέσει κανένα ατύχημα κατά την διάρκεια ενός έτους»

3. Δίνεται η ισοσκελής υπερβολή $x\psi = 2$ και το σημείο της $M\left(t, \frac{2}{t}\right)$, $t > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) στο M είναι $\psi t^2 + 2x = 4t$.

β) Από το σημείο $O(0,0)$ φέρουμε κάθετη προς την εφαπτομένη (ϵ) η οποία την τέμνει στο σημείο Γ . Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου Γ όταν το M κινείται πάνω στην υπερβολή είναι $(\kappa) : (x^2 + \psi^2)^2 = 8x\psi$.

γ) Η εφαπτομένη (ϵ) της υπερβολής στο σημείο M τέμνει τους άξονες των $x x'$ και $\psi \psi'$ στα σημεία A και B αντίστοιχα. Να βρείτε για ποια τιμή του t , $t > 0$, το άθροισμα $S = (OA) + (OB)$ γίνεται ελάχιστο, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

4. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(a-x) + f(a+x) = \frac{\mu}{2}, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ όπου } a, \mu \in \mathbb{R}.$$

- α) Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x = 2a - u$ να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2a} f(x) dx = \int_0^{2a} f(2a-x) dx$$

- β) Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x = a - u$ να αποδείξετε ότι

$$2 \int_0^{2a} f(x) dx = a\mu$$

- γ) Χρησιμοποιώντας τα προηγούμενα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^4 \frac{3 + e^{2-x}}{1 + e^{2-x}} dx$$

5. Δίνεται η συνάρτηση με $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3 - \eta\mu^2 x}}$ με $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- α) Να βρείτε τα ακρότατα της f στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και να προσδιορίσετε την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα αυτό.
β) Να αποδείξετε ότι

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{6} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

- γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \sigma\upsilon\nu x \cdot f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι ισχύει $\sqrt{3 - \eta\mu^2 x} \geq \sqrt{3} \cdot \sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

.....ΤΕΛΟΣ