ΜΕΡΟΣ Α΄

Από τις 15 ερωτήσεις να **απαντήσετε στις 12.**
Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το $\int_0^1 6x^2dx$ = 2

2. Μια τηλεόραση πωλείται προς 400 λίρες. Πόσα θα πληρώσει κάποιος για να την αγοράσει, αν θα πρέπει να πληρώσει επιπλέον φόρο προστιθέμενης αξίας (Φ.Π.Α.) 8%. £432

3. Δίνεται το διάνυσμα $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 12\vec{k}$.

   (α) Να βρείτε το μέτρο του

   (β) Να γράψετε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$ που έχει την ίδια διεύθυνση και την ίδια φορά με το $\vec{a}$

4. Δίνεται το διώνυμο $(2x + \frac{1}{x^2})^{12}$. Στο ανάπτυγμα του διωνύμου, να βρείτε τον όρο του που είναι ανεξάρτητος του x.

5. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου δίνονται οι πιθανότητες $P(A) = \frac{1}{3}, P(A \cup B) = \frac{5}{6}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.
   Να βρείτε τις πιθανότητες α) $P(B)$ β) $P(A/B)$.
   2/3 1/4

6. Δίνεται η υπερβολή $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$. Να βρείτε την εκκεντρότητα, τις συντεταγμένες των εστιών, τις εξισώσεις των διευθετουσών και τις εξισώσεις των ασυμπτώτων. $\varepsilon = 5/4$, $E(10,0)$ $E'(-10,0)$
   $\delta = \pm 32/5$ $y = \pm 3/4\, x$

7. Να βρείτε το $\lim_{x \to 0} \frac{\ln \sigma \upsilon \nu x}{x^2}$ = 1/2

8. Πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης ΜΑΘΗΜΑ. Αν πάρουμε στην τύχη ένα από τους αναγραμματισμούς αυτούς, ποια είναι η πιθανότητα τα δυο ακραία γράμματα να είναι τα Θ και Η. 180
   1/15

/2..

9. Να βρείτε τη λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+6y=0 \quad \text{για την οποία είναι } y=2 \text{ και } \frac{dy}{dx}=3, \text{ όταν } x=0.$$

10. Δίνονται τα σημεία $A(2,4,-3)$, $B(3,7,-1)$ και $\Gamma(4,3,0)$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που περνά από τα σημεία Α και Β, σε καρτεσιανή μορφή.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ στο οποίο η ευθεία (ε) συναντά το επίπεδο yOz.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που ορίζουν τα σημεία Α, Β και Γ σε καρτεσιανή μορφή.

11. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $x=5\text{τεμ}\varphi$ να βρείτε το

$$\int \frac{\sqrt{x^2-25}}{x}\,dx, \quad x>5$$ $\sqrt{x^2-25} - 5\,\text{τοξσυν}\frac{5}{x} + K$

12. Δίνεται το τετράγωνο ΟΑΒΓ, όπου $O(0,0)$, $A(1,0)$ και $B(1,1)$. Να βρείτε το γραμμικό μετασχηματισμό, φ, που απεικονίζει το ΟΑΒΓ στο παραλληλόγραμμο ΟΑΒ΄Γ΄ όπου $B'(3,1)$. $M=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

13. Μια υπάλληλος προσλήφθηκε σε μια νέα εργασία την 1η Ιανουαρίου 1998. Ο ετήσιος μισθός της θα αυξηθεί κατά 8% την 1η Ιανουαρίου 1999 και θα συνεχίσει να αυξάνεται με το ίδιο ποσοστό κάθε 1η Ιανουαρίου κάθε επόμενου έτους. Να βρείτε με προσέγγιση μιας λίρας (£1):

μισθός 16000

(α) τον ετήσιο μισθό για τα έτη 1999 και 2000, 16480 16998

(β) το σύνολο των απολαβών της στα δέκα (10) πρώτα χρόνια της υπηρεσίας της. 186919

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x \\ 1+\text{συν}x & \text{συν}x & 2\text{συν}x \end{vmatrix}$

Να βρείτε το ανάπτυγμα της, κατά Maclaurin, μέχρι τον όρο x^5.

15. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y = e^x$. Ας είναι R το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη, τον ημιάξονα Oy και την ευθεία $y = e$. Το χωρίο R περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα Ox και παράγει στερεό όγκου V_x Το ίδιο χωρίο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα Oy και παράγει στερεό όγκου V_y. Να βρείτε το λόγο V_x / V_y.

$$\frac{V_x}{V_y} = \frac{e^2+1}{2(e-2)}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄

Από τις 6 ερωτήσεις να **απαντήσετε στις 4.**
Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

(α) Να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες, τα ακρότατα, τα σημεία τομής με τους άξονες, το πεδίον ορισμού, το πεδίον τιμών και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται μεταξύ της καμπύλης, της ευθείας $y = x + 2$ και των ευθειών $x = 2$ και $x = e^{1998} + 1$.

$E = 1998$

2. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4x$. Τα σημεία $P(p^2, 2p)$, $T(t^2, 2t)$ ορίζουν χορδή η οποία περνά από την εστία της. Οι εφαπτόμενες της παραβολής στα P και T τέμνονται στο Σ.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της χορδής PT είναι
$$2x - (p + t)y + 2pt = 0$$

(β) Να δείξετε ότι $pt=-1$

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων βάρους (κοινών σημείων των διαμέσων) των τριγώνων PTΣ. $y^2 = 3x - 1$

3. Ένας ορθός κυκλικός κώνος είναι εγγεγραμμένος σε σφαίρα ακτίνας R (η κορυφή του κώνου να είναι σημείο της σφαιρικής επιφάνειας και η βάση του μικρός κύκλος αυτής). Να αποδείξετε ότι ο μέγιστος όγκος του είναι τα $\dfrac{8}{27}$ του όγκου της σφαίρας.

/4..

4. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ και $B=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 1 & 2\end{pmatrix}$. Να βρείτε:

(α) τη διαφορά $A-B^{-1}$ $=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$

(β) δυο πίνακες Κ και Λ ώστε να ισχύουν οι σχέσεις:

(i) $AKB=5I$ (ii) $A\Lambda=\Lambda+B$, όπου I ο μοναδιαίος, 2x2, πίνακας.

(γ) Να δείξετε ότι αν ένας 2x2 πίνακας $M=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ ικανοποιεί τη σχέση

$M^{-1}AM=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ τότε $\gamma=2\alpha$ και $\delta=-\beta$ όπου $\alpha,\beta\in R-\{0\}$

5. Σε τρισορθογώνιο σύστημα αξόνων Ox, Oy, Oz, δίνονται τα σημεία O(0,0,0), A(8,0,0), Γ(0,8,0), E(0,0,8), Z(8,0,8), H(8,8,8). Τα σημεία Β και Θ είναι τέτοια ώστε ΟΑΒΓ και ΕΖΗΘ να είναι τετράγωνα. Το σημείο Κ ανήκει στην ακμή ΖΗ και είναι τέτοιο ώστε $\overrightarrow{ZK}=3\,\overrightarrow{KH}$ και το σημείο Λ είναι το μέσο της ακμής ΘΓ. Να βρείτε:

(α) Το συνημίτονο της γωνίας ΚΑΛ.

(β) Τη γωνιά των επιπέδων ΚΑΛ και xOy.

(γ) Την απόσταση του σημείου Ο από το επίπεδο ΑΚΛ.

6. Ένα μικρό παιδί παίζει με 10 χρωματιστούς βώλους και 3 άδεια κουτιά. Αν το παιδί έβαλε τυχαία όλους τους βώλους στα κουτιά, ώστε σε κάθε κουτί να υπάρχει τουλάχιστο ένας βώλος, ποια είναι η πιθανότητα να έβαλε 3 βώλους στο ένα, 3 βώλους στο άλλο και 4 βώλους στο τρίτο κουτί; 70/311

------------------ ΤΕΛΟΣ ------------------