

ΜΕΡΟΣ Α'

Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε στις 12.
Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το $\int_0^{\pi} \sin x dx = 1/2$

2. Να βρείτε πόσοι είναι οι αναγραμματισμοί της λέξης **ΑΓΓΛΙΑ**. (180)

3. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$. Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών, τις συντεταγμένες των εστίων, την εκκεντρότητα και τις εξισώσεις των διευθετούσών της.

$A(13,0) A'(-13,0) E(12,0) E'(-12,0) E = 12/13 \quad \sigma = \pm \frac{169}{12}$
 $B(5,0) B'(-5,0)$

4. Στο ανάπτυγμα του $\left(x - \frac{3}{x}\right)^8$ να βρείτε το συντελεστή του x^2 .

5. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \eta \mu ax}{e^x - \sin x} = 3$ να βρείτε την τιμή του a . 2

6. Να βρείτε το συνημίτονο της γωνιάς θ των διανυσμάτων $\vec{\alpha} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ και $\vec{\beta} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$.

7. Κάποιος προσελήφθη ως πωλητής σε μια εταιρεία με τη συμφωνία να παίρνει βασικό εβδομαδιαίο μισθό £60 και επιπλέον προμήθεια επί των πωλήσεων ως εξής: «για τις πρώτες £120 να μην παίρνει προμήθεια ενώ για το υπόλοιπο ποσό πέραν των £120 να παίρνει προμήθεια 10%».

Να υπολογίσετε το συνολικό μισθό του για μια εβδομάδα κατά την οποία οι εισπράξεις από τις πωλήσεις ήταν £880.

£136

8. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε τον πίνακα $A \cdot B^{-1}$. $\begin{pmatrix} -9 & 4 \\ -17 & 7 \end{pmatrix}$

9. Η συνάρτηση $y = f(x)$ επαληθεύει τη διαφορική εξίσωση $\frac{dy}{dx} = 2x - 4$ και έχει ελάχιστη τιμή $y_{el} = 2$. Να βρείτε την εξίσωσή της.

$f(x) = x^2 - 4x + 6$

10. Δίνεται η ορίζουσα

$$\alpha_v = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & v & v^2 \end{vmatrix}$$

Να βρείτε το άθροισμα $\sum_{v=1}^{10} \alpha_v = \underline{\underline{285}}$

11. Ο πίνακας $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ορίζει μετασχηματισμό φ .

(α) Να βρείτε την εικόνα της έλλειψης $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ στο μετασχηματισμό φ .
 $x^2 + y^2 = 1$

(β) Να εξηγήσετε π σχήμα είναι η εικόνα αυτή και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

12. Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου, δίνονται οι πιθανότητες

$$P(A'/B') = \frac{3}{4}, \quad P(B) = \frac{3}{7} \quad \text{και} \quad P(B/A) = \frac{1}{2}.$$

Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ : Να μη συμβεί κανένα από τα ενδεχόμενα A και B . $3/7$

Δ : Να μη συμβεί το A . $5/7$

E : Να συμβεί τουλάχιστον το ένα από τα ενδεχόμενα A και B . $4/7$

13. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από το σημείο $A(-1, 2)$, έχει το κέντρο του στην ευθεία $x = -3y$ και τέμνει ορθογώνια τον κύκλο $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 9 = 0$.

$$x^2 + y^2 + 6x - 2y + 5 = 0$$

14. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \sin \theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta < 0$, να βρείτε το

ολοκλήρωμα $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^4} dx, \quad -1 \leq x < 0.$ $I = -\frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \right)^3 + C$

15. Σφαίρα είναι εγγεγραμμένη σε κώνο. Αν V_1 είναι ο όγκος του κώνου και E_1 το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας, V_2 ο όγκος της σφαίρας και E_2 το εμβαδόν της επιφάνειάς της, να δείξετε ότι:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{E_1}{E_2}$$

ΜΕΡΟΣ Β'

Από τις 6 ερωτήσεις να απαντήσετε στις 4.
Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

(α) Να βρείτε τη γενική της λύση.

(β) Να βρείτε την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης, της οποίας το ανάπτυγμα κατά Maclaurin (μέχρι και τον όρο που περιέχει x^2) είναι

$$y = 2 - 3x + \frac{5}{2}x^2 \dots$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{4(x-1)}{x^2 - 2x + 2}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα ακρότατα, τις ασύμπτωτες και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης, του άξονα των x και της ευθείας $x = \alpha + 1$, $\alpha > 0$ έχει εμβαδόν $E = 2$ τ.μ. Να βρείτε την τιμή του α .

$$\alpha = \sqrt{e-1}$$

3. Δίνεται η υπερβολή $xy = 36$ και το σημείο $P(9, 4)$ αυτής. Η εφαπτομένη της υπερβολής στο σημείο P τέμνει τον άξονα Ox στο σημείο $N(\alpha, 0)$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της υπερβολής στο σημείο P .

(β) Να βρείτε την τιμή του α . $\alpha = 1 \frac{1}{2}$

(γ) Το χωρίο που περικλείεται από την υπερβολή, το ευθύγραμμο τμήμα PN και την ευθεία $x = \alpha$, στρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα των x . Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

$$24\pi \text{ κμ.}$$

4. Να βρείτε:

- (α) Μια διανυσματική εξίσωση (στη μορφή $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$) του επιπέδου που περνά από τα σημεία $A(1, 0, 0)$, $B\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ και $\Gamma\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$.
- (β) Μια διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ε) που περνά από την αρχή O των αξόνων και είναι κάθετη στο επίπεδο $AB\Gamma$.
- (γ) Τη διανυσματική ακτίνα του ίχνους Δ της ευθείας (ε) πάνω στο επίπεδο $AB\Gamma$.
- (δ) Τα διευθύνοντα συνημίτονα της ευθείας OD .
- (ε) Τη διανυσματική ακτίνα $\vec{OE}$ του σημείου E πάνω στην προέκταση του ευθυγράμμου τμήματος OD το οποίο διαιρεί το OD εξωτερικά σε λόγο $3:1$.

(στ) Τον όγκο του τετραέδρου $AB\Gamma E$.

5. Πάνω σ' ένα τραπέζι υπάρχουν 5 επιστολές οι οποίες απευθύνονται σε 5 διαφορετικά πρόσωπα και οι αντίστοιχοι φάκελοι με τις διευθύνσεις των 5 προσώπων. Αν σε κάθε φάκελο τοποθετήσουμε μια επιστολή τυχαία, να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A : Μόνο 2 από τις επιστολές να μπουν στο δικό τους φάκελο. $1/6$

B : Τουλάχιστον 3 από τις επιστολές να μπουν στο δικό τους φάκελο. $11/120$.

6. Δίνεται η καμπύλη $y = x^2 - 1$, το σημείο $\Lambda(0, 1)$ και $P(x, y)$ μεταβλητό σημείο της καμπύλης.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων P_1 και P_2 της καμπύλης για τα οποία η απόσταση ΛP γίνεται ελάχιστη και να δείξετε ότι η ελάχιστη αυτή απόσταση είναι ίση με $\frac{\sqrt{7}}{2}$. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

(β) Με κέντρο το σημείο $\Lambda(0, 1)$ και ακτίνα $R = \frac{\sqrt{7}}{2}$ γράφουμε κύκλο (K) που τέμνει το θετικό ημιάξονα των y στο σημείο Γ . Από το σημείο Γ φέρνουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τον άξονα των x και ονομάζουμε Ω το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = x^2 - 1$ και την ευθεία (ε). Το χωρίο Ω στρέφεται κατά π ακτίνα γύρω από τον άξονα των y . Να βρείτε τον όγκο V του στερεού που παράγεται από το μέρος του χωρίου Ω που βρίσκεται έξω από τον κύκλο (K).

$$V = \frac{23\pi}{8} - \frac{\sqrt{7}}{6}\pi$$