

ΜΕΡΟΣ Α

Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε στις 12.
Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης $y = \text{Τοξεφ}3x$.
2. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \cdot \eta\mu x + x}{\sin x + 2x - 1} = 1$ $y' = \frac{3}{1+9x^2}$
3. Αγόρασε κάποιος ένα οικόπεδο και ακολούθως το πούλησε προς £37800 κερδίζοντας έτσι 8%. Να βρείτε πόσα αγόρασε το οικόπεδο.
(£35000)
4. Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = 0$.
 $y = Ae^{2x} + Be^{-3x}$
5. Να βρείτε τη γωνιά που σχηματίζει η ευθεία (ε): $\frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{2} = z$
με το επίπεδο (Π): $5x+4y-3z+2=0$. $\theta = 45^\circ$
6. Δίνονται οι πίνακες $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ και $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ 1 & 11 \end{pmatrix}$
(α) Να βρείτε τον πίνακα A^{-1} . $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
(β) Αν X είναι πίνακας 2×2 και ισχύει $AX=B$, να βρείτε τον πίνακα X .
 $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$
7. Στο ανάπτυγμα του $(x + \frac{\alpha}{x})^{10}$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$, ο συντελεστής του x^6 είναι εννιάπλάσιος του συντελεστή του x^8 . Να βρείτε την τιμή του α . $\alpha = 2$
8. Ο πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς που πήραν οι 30 μαθητές μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά.

Βαθμός x_i	3	5	7	9	11	13	15
Αριθμός μαθητών f_i	2	5	10	6	4	2	1

Να βρείτε:

- (α) Τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων. (8)
(β) Την τυπική απόκλιση σ των παρατηρήσεων. (2)

-2-

9. Δίνεται η σειρά $\frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$

$$a_k = \frac{1}{(k+2)(k+3)}$$

(α) Να γράψετε το νιοστό όρο της.

(β) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων όρων της. $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}$

(γ) Να βρείτε το άθροισμα των απείρων όρων της. $S_\infty = \frac{1}{3}$

10. Δίνεται η παραβολή $y^2 = 4ax$. Η εφαπτομένη της παραβολής στο σημείο $T(at^2, 2at)$ τέμνει τον άξονα των y στο σημείο Σ και η κάθετη της παραβολής στο σημείο T τέμνει τον άξονα των x στο σημείο P .

Να βρείτε την εξίσωση της γραμμής πάνω στην οποία βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του κέντρου βάρους του τριγώνου TSP . (κέντρο βάρους ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των διαμέσων του). $y^2 = \frac{3x}{2} \left(x - \frac{2}{3}a\right)$

11. Ένα κουτί περιέχει σφαίρες οι οποίες είναι αριθμημένες από το 1 μέχρι το $6k+2$, $k \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε τυχαία μια σφαίρα από το κουτί και η πιθανότητα ο αριθμός που αναγράφεται πάνω σ' αυτή να διαιρείται με το 6 είναι $\frac{5}{31}$. Να βρείτε πόσες σφαίρες έχει το κουτί. (62)

12. Κανονική τριγωνική πυραμίδα $KAB\Gamma$ έχει βάση το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ πλευράς $2a$ cm και η παράπλευρη ακμή της σχηματίζει με τη βάση της γωνιά 60° . Να βρείτε:

(α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας. $2\sqrt{3} + \sqrt{3}$

(β) Τον όγκο της πυραμίδας. $2\sqrt{3}/3$

13. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $x+1=2e^{\phi}$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 5)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x+1}{4\sqrt{x^2+2x+5}} + C$$

14. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου που περνά από το σημείο $A(4,2)$ και εφάπτεται της ευθείας $y=x$ στο σημείο $B(1,1)$. $x^2 + y^2 - 7x + 3y + 2 = 0$

15. Ο γραμμικός μετασχηματισμός T απεικονίζει κάθε σημείο $A(x,y)$ του επιπέδου στην ορθή προβολή του πάνω στην ευθεία $3y=4x$. Να βρείτε τον πίνακα του μετασχηματισμού.

$$T = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$$

ΜΕΡΟΣ Β

Από τις 6 ερωτήσεις να απαντήσετε στις 4.

Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = (x-2) \cdot e^x$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, το ακρότατο, το σημείο καμπής, την ασύμπτωτη της συνάρτησης και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να βρείτε, συναρτήσει του e , το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της ευθείας $x=1$, της καμπύλης με εξίσωση $y = (x-2) \cdot e^x$ και της καμπύλης με εξίσωση $y=e^x$. $(e^3 - 3e)$

2. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $\frac{1}{y^5} \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2y^4 x} = 5x^2$ (i)

Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $\omega = \frac{1}{y^4}$, όπου ω είναι

συνάρτηση του x , να δείξετε ότι η διαφορική εξίσωση (i)

μετασχηματίζεται στη διαφορική εξίσωση $\frac{d\omega}{dx} + \frac{2}{x}\omega = -20x^2$ (ii)

Στη συνέχεια, αφού λύσετε τη διαφορική εξίσωση (ii) να βρείτε

(α) τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης (i) $y^4 = \frac{x^2}{C - 4x^5}$

(β) την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης (i) για την οποία είναι

$$y = \frac{1}{2}, \text{ όταν } x=1. \quad y^4 = \frac{x^2}{20 - 4x^5}$$

3. Ευθεία (ε) περνά από τα σημεία $A(1, -2, 1)$ και $B(3, -1, -1)$.

(α) Να βρείτε μια διανυσματική εξίσωση της ευθείας (ε).

(β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου $N(2, 1, 3)$ από την ευθεία (ε).

(γ) Να δείξετε ότι η ευθεία (ζ) με διανυσματική εξίσωση

$$\vec{r} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} + \mu(-5\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k})$$

τέμνει την ευθεία (ε) σε ένα σημείο M και να βρείτε τις συντεταγμένες του M .

(δ) Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του επιπέδου (Π) που περνά από την ευθεία $x=y=z$ και είναι παράλληλο προς την ευθεία (ε).

-4-

4. Δίνεται η υπερβολή $xy=9$ και το σημείο της $P(3t, \frac{3}{t})$.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της υπερβολής στο σημείο P είναι $x + t^2y = 6t$. $ty = t^3x - 3t^4 + 3$

(β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης (κ) της υπερβολής στο σημείο P.

(γ) Η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον άξονα των x στο σημείο T και τον άξονα των y στο σημείο T', ενώ η κάθετη (κ) τέμνει τον άξονα των x στο σημείο N και τον άξονα των y στο σημείο N'. Αν E είναι το εμβαδό του τριγώνου PTN και E' το εμβαδό του τριγώνου PT'N', να δείξετε ότι ισχύει:

$$\frac{1}{E} + \frac{1}{E'} = \frac{2}{9}$$

5. Στο ασανσέρ μιας πολυκατοικίας με 10 ορόφους μπαίνουν 6 άτομα. Να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων:

A: Να κατεβούν όλοι σε διαφορετικούς ορόφους.

B: Να κατεβούν όλοι σε ένα όροφο.

Γ: Να κατεβούν όλοι σε δύο ακριβώς ορόφους.

$$\begin{array}{r} 139 \text{ } / 1250 \\ 1 \text{ } / 100000 \\ 279 \text{ } / 100000 \end{array}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ x & 4 & x \\ 0 & 1 & x \end{vmatrix}$, $0 \leq x \leq 6$.

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x-3=3\eta\mu\theta$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, ή με

οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \sqrt{f(x)} dx$

$$\frac{9}{2} \log_2 \mu \frac{x-3}{3} + \frac{x-3}{2} \sqrt{6x-x^2} + C$$