

Μέρος Α

Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε τις 12. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int \sin 3x dx = \frac{1}{3} \mu 3\pi + C$

2. Να υπολογίσετε την τιμή του $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x + \eta \mu x} = \frac{1}{2}$

3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $y = x^2 + 2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x=1$ και $x=3$. $E = 12 \frac{2}{3} \tau \cdot \mu$

4. Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης «ΕΝΙΑΙΟ». Πόσοι από αυτούς έχουν τα «Ι» συνεχόμενα; $360, 120$

5. Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε η γραφική παράσταση της $y = ax^2 + \frac{\beta}{x}$ να έχει ακρότατο στο σημείο $(1,6)$ και να ορίσετε το είδος του ακροτάτου. $\alpha = 2, \beta = 4$

6. Να βρείτε τον όρο που είναι ανεξάρτητος του x στο ανάπτυγμα του $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^6$. $\underline{\underline{MINI}}$
(1215)

7. Δίνεται ο κύκλος $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$. Να βρείτε $R = 5, K(2, -3)$

(i) Το μήκος της ακτίνας του και τις συντεταγμένες του κέντρου του.

(ii) Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του $(-1,1)$.

$$-3x + 4y - 7 = 0$$

8. Αν A και B είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου και $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(B|A) = \frac{1}{6}$

και $P(A \cup B) = \frac{3}{8}$, να βρείτε τις πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(B')$ και να δείξετε ότι τα

$$\frac{1}{24}, \frac{5}{6}$$

ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

9. Εισαγωγέας αγοράζει από το εξωτερικό εμπόρευμα προς £400, πληρώνει εισαγωγικό δασμό 55% πάνω στην τιμή αγοράς και έχει έξοδα £55 για μεταφορά και αποθήκευση. Ακολούθως προσθέτει το κέρδος του στο συνολικό κόστος του εμπορεύματος και αναγράφει την τιμή που προκύπτει πάνω στο εμπόρευμα ως τιμή πώλησης. Ο αγοραστής καλείται να πληρώσει επίσης ΦΠΑ προς 10% πάνω στην τιμή πώλησης. Αν ο αγοραστής πλήρωσε συνολικά £1069,20, να υπολογίσετε το κέρδος του εισαγωγέα ως ποσοστό του συνολικού γι' αυτόν κόστους. $\underline{\underline{44\%}}$

10. Ο πιο κάτω πίνακας συχνοτήτων παρουσιάζει τους μισθούς των υπαλλήλων μιας εταιρείας.

Μισθός -€	Αρ. Υπαλλήλων
1800	1
1300	3
800	9
600	10
300	17

- Να υπολογίσετε: (α) το μέσο μισθό των υπαλλήλων της εταιρείας και (1600)
(β) την τυπική απόκλιση των μισθών με προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου. (346,4)

11. Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό $x=3(\eta\mu\theta+1)$, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να

υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $\int_3^9 \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2}} = \pi/6$.

12. Να βρείτε τους τρεις πρώτους μη μηδενικούς όρους του αναπτύγματος της συνάρτησης

$y = \ln \frac{1+2x}{(1-x)^2}$ σε σειρά Maclaurin και να δώσετε το διάστημα σύγκλισης της σειράς.
 $4x - x^2 + 10x^3/3, -1/2 < x \leq 1/2$

Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα αυτό να βρείτε την τιμή του ολοκληρώματος

$\int_0^{1/10} \ln \frac{1+2x}{(1-x)^2} dx$ με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων. = 0,02

13. Να δείξετε ότι τοξεφ $\frac{\alpha+x}{1-\alpha x}$ - τοξεφ $x = \text{τοξεφ } \alpha$ όπου $\alpha = \text{σταθερά}$ και $x \neq \frac{1}{\alpha}$.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι η

παράγωγος της συνάρτησης $y = \text{τοξεφ } \frac{\alpha+x}{1-\alpha x}$ είναι ανεξάρτητη του α . $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

14. Να βρείτε στη μορφή $y=f(x)$ τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης

$x \frac{dy}{dx} + 2x^2 y + y = 0$. $y = e^{-x^2} \cdot e^{\ln C/x} = C/x \cdot e^{-x^2}$

15. Η εφαπτομένη της υπερβολής $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ στο σημείο της $T(\alpha\epsilon\mu\theta, \beta\epsilon\phi\theta)$ συναντά τις

ασύμπτωτές της στα σημεία Α και Β. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να δείξετε ότι το γινόμενο ΟΑ·ΟΒ είναι ανεξάρτητο του θ . $OA \cdot OB = a^2 + b^2$

Μέρος Β

Από τις 6 ερωτήσεις να απαντήσετε τις 4. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

- (i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της, τις εξισώσεις των ασυμπτώτων της και τα διαστήματα μονοτονίας της.
- (ii) Να βρείτε τα ακρότατά της και να τα χαρακτηρίσετε.
- (iii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης.

2. Ένα ντεπόζιτο νερού πρόκειται να κατασκευαστεί ώστε να έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπipedου με βάση τετράγωνο, να είναι ανοικτό στο άνω μέρος και να έχει χωρητικότητα 18 m^3 . Αν το κόστος κατασκευής της βάσης είναι $\text{€}40 / \text{m}^2$ ενώ το κόστος για τις άλλες έδρες είναι $\text{€}30 / \text{m}^2$, να βρείτε τις διαστάσεις του ντεποζιτου ώστε το κόστος να είναι το χαμηλότερο δυνατόν. $(3 \text{ m}, 3 \text{ m}, 2 \text{ m})$

3. Δίνεται η διαφορική εξίσωση $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 8e^{-2x}$.

- (i) Να βρείτε τη γενική λύση της. $y = A \cos 2x + B \sin 2x + e^{-2x}$
- (ii) Να βρείτε την ειδική λύση $y=f(x)$ για την οποία $y=1$ και $\frac{dy}{dx} = -2$ όταν $x=0$.
 $y = e^{-2x}$
- (iii) Για τη λύση που βρέθηκε στο (ii) να βρείτε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \frac{1}{e^2 - 1}$

4. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της παραβολής $y^2=4x$ στο σημείο της $T(t^2, 2t)$, $t>0$, είναι η $x-ty+t^2=0$. Αν η εφαπτομένη αυτή συναντά τους άξονες Ox και Oy στα σημεία B και A αντίστοιχα και το εμβαδόν του τριγώνου OAB είναι 4 τετ. μονάδες

- (i) να δείξετε ότι $t=2$ και να δώσετε τις συντεταγμένες του μέσου M του AB . $M(-2, 1)$
- (ii) να βρείτε την εξίσωση της δεύτερης εφαπτομένης της παραβολής από το M και να δώσετε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής Σ της εφαπτομένης αυτής με την παραβολή. Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του μέσου Δ του $T\Sigma$ είναι $(\frac{5}{2}, 1)$.
- (iii) αν επιπλέον $P(p^2, 2p)$ είναι τυχαίο σημείο πάνω στην παραβολή $y^2=4x$ και K το άλλο άκρο του ευθύγραμμου τμήματος KP που έχει το Δ ως μέσο, να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης πάνω στην οποία βρίσκεται το σημείο K καθώς το P κινείται πάνω στη δοθείσα παραβολή. $4x + y^2 - 4y - 16 = 0$

5. (i) Να δείξετε ότι με το μετασχηματισμό $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, όπου $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, η καμπύλη

A: $17y^2 + 32xy + 16x^2 - 64 = 0$ μετασχηματίζεται στην έλλειψη με εξίσωση E: $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(ii) Να επαληθεύσετε ότι με τον πίνακα M_1^{-1} η έλλειψη E μετασχηματίζεται στην καμπύλη A.

(iii) Να βρείτε τον πίνακα μετασχηματισμού M_2 με τον οποίο οι κορυφές της έλλειψης E που βρίσκονται πάνω στο θετικό ημιάξονα των x και στο θετικό ημιάξονα των y απεικονίζονται στα σημεία (4,0) και (0,4) αντίστοιχα. Στη συνέχεια να δείξετε ότι με πίνακα μετασχηματισμού το M_2 η έλλειψη E μετασχηματίζεται σε κύκλο B.

(iii) Να δώσετε την εξίσωση του σχήματος στο οποίο μετασχηματίζεται ο κύκλος B με

πίνακα μετασχηματισμού το M_2^{-1} . $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$

6. Στο τετράεδρο ABΓΔ οι ακμές $AB=AG=AD=2\sqrt{3}$ cm και οι έδρες ABΓ, AΓΔ και AΒΔ

βρίσκονται αντίστοιχα πάνω στα επίπεδα με εξισώσεις $\vec{r} \cdot (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) = 0$,

$\vec{r} \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) = 6$ και $\vec{r} \cdot (\vec{i} - \vec{j}) = 2$.

(i) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής A είναι (3,1,2).

(ii) Να δείξετε ότι οι γωνίες των εδρών στην κορυφή A είναι ορθές.

(iii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας πάνω στην οποία βρίσκεται η ακμή AB είτε σε καρτεσιανή μορφή είτε σε διανυσματική μορφή.

(iv) Να υπολογίσετε τον όγκο του τετραέδρου.

$V = 4\sqrt{3} \text{ cm}^3$

$x-3 = y-1 = z-2$
 $\vec{r} = (3,1,2) + \lambda(1,1,1)$

———— ΤΕΛΟΣ ————