

ΜΕΡΟΣ Α'

Από τις 15 ερωτήσεις να απαντήσετε **μόνο στις 12**.
Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **5 μονάδες**.

- Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων:
 (α) $y = x^3 - \sqrt{x}$ $y' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$
 (β) $y = x^2 \cdot e^{3x}$ $y' = 2x e^{3x} (2 + 3x)$
- Το έτος 2001 ο πληθυσμός μιας πόλης αυξήθηκε κατά 8% σε σύγκριση με το έτος 2000 και έγινε 133920 κάτοικοι. Να βρείτε πόσος ήταν ο πληθυσμός της πόλης το έτος 2000. $(124,000)$
- Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x - \epsilon\phi 3x}{\eta\mu 3x - \epsilon\phi 2x} = 2$
- Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΔΙΑΤΑΞΗ. Πόσοι από αυτούς αρχίζουν με Α και τελειώνουν με Η; $(2520) - (120)$
- Στο ανάπτυγμα του $\left(2x^3 + \frac{a}{x}\right)^8$ ο όρος ο ανεξάρτητος του x είναι 7168. Να βρείτε τις τιμές του α. $(a = \pm 2)$
- Ο κύκλος (κ) περνά από τα σημεία A(2,5), B(0,1) και Γ(0,4).
 (α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (κ). $x^2 + y^2 - 4x - 5y + 4 = 0$
 (β) Να δείξετε ότι ο κύκλος (κ) εφάπτεται του άξονα των x.
- Για τα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου ισχύουν:
 $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{9}{10}$ και $P(A \cap B) = \frac{9}{20}$.
 (α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(B)$, $P(B-A)$ και $P(A/B)$
 $\frac{3}{5}$ $\frac{3}{20}$ $\frac{3}{4}$
 (β) Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα.

/2..

- 2 -

8. Να δείξετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, ότι:

$$4\text{Τοξεφ}\frac{1}{2} + \text{Τοξεφ}\frac{24}{7} = \pi$$

9. Το χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη $y = \ln x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $y = 1$ κάμνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των x .
Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται. $(\pi \text{ κμ})$

10. Να δείξετε ότι η ευθεία $x + y + 1 = 0$ είναι κοινή εφαπτομένη της

$$\text{παραβολής } y^2 = 4x \text{ και της υπερβολής } xy = \frac{1}{4}.$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει τα δυο σημεία επαφής. $\left(3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

11. Από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα που έχουν τις δυο κορυφές τους πάνω στον άξονα των x και τις άλλες δυο κορυφές πάνω στην καμπύλη $y = 9 - x^2$ να βρείτε τις διαστάσεις εκείνου του ορθογωνίου που έχει μέγιστο εμβαδόν. Να υπολογίσετε αυτό το μέγιστο εμβαδόν.

$$2\sqrt{3}, 6 \text{ και } E = 12\sqrt{3} \text{ Τμ.}$$

12. Δίνεται η διαφορική εξίσωση

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 + 5$$

- (α) Να βρείτε τη γενική της λύση.

$$y = x^3 + Cx^2 - 5/2$$

- (β) Να βρείτε την ειδική της λύση για την οποία είναι $y = \frac{3}{4}$ όταν $x = 1$.

$$y = x^3 + \frac{9x^2}{4} - 5/2$$

13. Ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $(AB) = a$ cm κάμνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από άξονα $x \Gamma y$ κάθετο στη ΒΓ.

Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

$$E = 2\pi a^2(1 + \sqrt{2}) \text{ cm}^2.$$

14. Δίνεται η σειρά: $\frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{4 \cdot 6} + \dots$

- (α) Να γράψετε το νιοστό όρο της. $u_v = \frac{2}{(v+1)(v+3)}$

- (β) Να βρείτε το άθροισμα των n πρώτων όρων της. $\sum v = \frac{5}{6} - \frac{1}{v+2} - \frac{1}{v+3}$

- (γ) Να βρείτε το άθροισμα των απείρων όρων της.

$$\sum D = 5/6 \quad 13..$$

- 3 -

15. Να βρείτε τα ολοκληρώματα :

$$(α) \int_0^{\frac{\pi}{3}} x \cdot \eta\mu 3x \, dx = \pi/9$$

$$(β) \int_0^2 \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$$

ΜΕΡΟΣ Β'

Από τις 6 ερωτήσεις να απαντήσετε μόνο στις 4.

Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = \frac{(x+1)^2}{x+2}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης και να κάμετε τη γραφική της παράσταση.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $y = \frac{(x+1)^2}{x+2}$, την ευθεία $x = -1$, τον άξονα των y και την πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης.

$$E = \ln 2 \, \text{T.μ.}$$

2. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = 3\eta\mu\theta$, $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, να βρείτε

$$\text{το } \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx = \frac{9}{2} \arcsin \frac{x}{3} - \frac{1}{2} x \sqrt{9-x^2} + C$$

3. Δίνεται η υπερβολή $xy = 9$ και τα σημεία της $P\left(3p, \frac{3}{p}\right)$ και $Q\left(3q, \frac{3}{q}\right)$.

(α) Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες της υπερβολής στα σημεία P και Q τέμνονται στο σημείο T με συντεταγμένες:

$$x = \frac{6pq}{p+q} \quad \text{και} \quad y = \frac{6}{p+q}.$$

(β) Να βρείτε την καρτεσιανή εξίσωση του σχήματος πάνω στο οποίο βρίσκεται ο γεωμετρικός τόπος του σημείου T όταν τα P και Q κινούνται πάνω στην υπερβολή ώστε να πληρούται η συνθήκη $p^2 + q^2 = 2$.

$$y^2 + xy = 13$$

/4..

- 4 -

4. Δίνονται οι ευθείες :

$$\varepsilon_1: \frac{x-1}{4} = \frac{y}{6} = \frac{z+1}{2}.$$

$$\varepsilon_2: \frac{x-3}{6} = \frac{y-3}{9} = \frac{z}{5}.$$

(α) Να δείξετε ότι οι ευθείες ε_1 και ε_2 τέμνονται και να βρείτε το σημείο τομής τους. $A(3, 3, 0)$

(β) Να βρείτε στη μορφή $\vec{r} \cdot \vec{n} = d$ την εξίσωση του επιπέδου (Π) το οποίο περιέχει τις ευθείες ε_1 και ε_2 . $\vec{r} \cdot (3\vec{i} - 2\vec{j}) = 3$

5. Δίνεται η διαφορική εξίσωση :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = 5\eta\mu 2x$$

(α) Αν η συνάρτηση $\varphi(x) = \kappa\eta\mu 2x + \lambda\sigma\upsilon\nu 2x$ είναι μια λύση της διαφορικής εξίσωσης, να βρείτε τις τιμές των κ και λ . $\kappa = -7/13$
 $\lambda = -4/13$

(β) Να βρείτε τη γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

$$y = Ae^x + Be^{-3x} - \frac{7}{13}\eta\mu 2x - \frac{4}{13}\sigma\upsilon\nu 2x.$$

6. Ρίχνουμε στην τύχη σφαιρίδια σε v κάλπες μέχρις ότου για πρώτη φορά ένα σφαιρίδιο τοποθετηθεί σε κάλπη στην οποία υπάρχει ήδη ένα άλλο σφαιρίδιο.

Να βρείτε την πιθανότητα να συμβεί αυτό κατά την k ρίψη.

$$P(E) = \frac{v! \cdot (k-1)}{(v-k+1)! \cdot k}$$

_____ ΤΕΛΟΣ _____