ΜΕΡΟΣ Α΄ Να απαντήσετε σε **12 μόνο** από τις 15 ερωτήσεις. Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 4x^3dx$. $= 1$

2. Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$. $K(2,-1)$ $R=2$

3. Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορώ να επιλέξω τρία διαφορετικά γράμματα από τη λέξη ΟΛΥΜΠΙΑ και να τα βάλω σε σειρά. (210)

4. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου καμπής της συνάρτησης $y = x^3 - 3x^2 + 6$. $ΣΚ(1,4)$

5. Για τα ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου δίνονται οι πιθανότητες $P(B)=\frac{2}{3}$, $P(A')=\frac{2}{3}$ και $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$. Να βρείτε τις πιθανότητες:

   (α) $P(A)$ $= 1/3$

   (β) $P(A\cup B)$. $= 5/6$

6. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ της συνάρτησης y=τοξεφ(x^2+1). $y' = \frac{2x}{1+(x^2+1)^2}$

7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης με παραμετρικές εξισώσεις $x = ημ2t$ και $y = συν3t$ στο σημείο για το οποίο $t = \frac{\pi}{6}$. $6x + 2y - 3\sqrt{3} = 0$

8. Ένα Γυμνάσιο έχει τμήματα με διαφορετικούς αριθμούς μαθητών, όπως φαίνεται στον πίνακα:

x (αριθμός μαθητών)	25	26	27	28	29	30
f (αριθμός τμημάτων που έχουν αυτό τον αριθμό μαθητών)	8	3	3	4	6	1

   Να βρείτε τον αριθμητικό μέσο και την τυπική απόκλιση της κατανομής δίνοντας την απάντηση με ακρίβεια τριών δεκαδικών ψηφίων. $\bar{x} = 27$ $σ = 1,697$

9. Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα Oy του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη y=lnx, τον άξονα Oy και τις ευθείες y=1 και y=2. $V = \pi/2\,(e^4 - e^2)$

10. Να βρείτε το ολοκλήρωμα $I=\int x^2e^{3x}dx$. $= \frac{x^2}{3}e^{3x} - \frac{2x\cdot e^{3x}}{9} + \frac{2}{27}e^{3x} + c$

11. Δίνεται η καμπύλη $y=e^{-x}$ και σημείο Ρ πάνω σ'αυτή με τετμημένη α, όπου α>0. Έστω Α η προβολή του Ρ πάνω στον άξονα Ox και Β η προβολή του σημείου Ρ πάνω στον άξονα Oy. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το εμβαδόν Ε του ορθογωνίου ΟΑΡΒ γίνεται ακρότατο και να προσδιορίσετε το είδος του ακροτάτου. $α=1$ (MAX).

12. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ και το σημείο της $P(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της εστίας Ε που βρίσκεται στο θετικό ημιάξονα. $E(1,0)$

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο Ρ. $\sqrt{2}x+2y-2\sqrt{2}=0$

(γ) Αν Α είναι το σημείο στο οποίο η εφαπτομένη στο Ρ συναντά τον άξονα των x, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΡ. $\sqrt{2}/4$

13. Δίνεται η ορίζουσα $f(x)=\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & x+\sigma\upsilon\nu x & x^2+\sqrt{3}\\ 1 & x+\eta\mu x & x^2+1\end{vmatrix}$. Να δείξετε ότι $-2\le f(x)\le 2$ για κάθε $x\in R$.

$2\,\sigma\upsilon\nu(x+60)^{\circ}$
$\Rightarrow -2\le f(x)\le 2$

14. Αν $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}$ και $f'(x)$ είναι η παράγωγός της,

(α) να βρείτε τα αθροίσματα $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\kappa)$ και $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f'(\kappa)$ $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f(\kappa)=1-\frac{1}{\nu+1}$ $\sum_{\kappa=1}^{\nu} f'(\kappa)=\frac{1}{(\nu+1)^2}-1$

(β) να αποδείξετε ότι οι σειρές $\sum_{\kappa=1}^{\infty} f(\kappa)$ και $\sum_{\kappa=1}^{\infty} f'(\kappa)$ συγκλίνουν και ότι $\sum_{\kappa=1}^{\infty} f(\kappa)+\sum_{\kappa=1}^{\infty} f'(\kappa)=0$.

15. Να δώσετε τον ορισμό της παραβολής και να δείξετε ότι, με βάση τον ορισμό αυτό, η καρτεσιανή εξίσωση της παραβολής με εστία Ε(α,0) και διευθετούσα x = -α είναι η $y^2=4\alpha x$.

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να απαντήσετε σε **4 μόνο** από τις 6 ερωτήσεις. Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$.

(α) Να βρείτε το πεδίον ορισμού, τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων, τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση είναι αύξουσα και τα διαστήματα στα οποία είναι φθίνουσα, τα ακρότατα και τις ασύμπτωτες της συνάρτησης.

(β) Να κάμετε τη γραφική παράσταση της y=f(x).

(γ) Στους ίδιους άξονες να κάμετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y=|f(x)|$.

2. (α) Χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό x = 4ημθ, ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^{2\sqrt{3}}\sqrt{16-x^2}\,dx$. $=4\pi/3$

(β) Δίνονται ο κύκλος $x^2+y^2=16$ και η υπερβολή $xy=4\sqrt{3}$. Να βρείτε τα σημεία τομής τους και να σχεδιάσετε τις δύο καμπύλες σε κοινό σύστημα αξόνων. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ των δύο καμπύλων και βρίσκεται στο τεταρτημόριο που αντιστοιχεί στους δύο θετικούς ημιάξονες.

ΣΤ. $(2,2\sqrt{3})$, $(-2,-2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3},2)$, $(-2\sqrt{3},-2)$. $E=\frac{4\pi}{3}-2\sqrt{3}\ln 3$.

3. (α) Να αποδείξετε ότι $\sum_{\kappa=1}^{\nu}\kappa^2 = \frac{1}{6}\nu(\nu+1)(2\nu+1)$.

(β) Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\frac{1-\sigma\upsilon\nu\kappa x}{x^2}$, $\kappa \geq 1$. $\left(\kappa^2/2\right)$

(γ) Να βρείτε το $\lim_{x\to 0}\sum_{\kappa=1}^{10}\frac{1-\sigma\upsilon\nu\kappa x}{x^2}$. $=\frac{385}{2}$

4. Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν τρεις μηχανές που παράγουν ηλεκτρικούς λαμπτήρες. Το 50% της παραγωγής προέρχεται από τη μηχανή Α, το 30% από τη μηχανή Β και το 20% από τη μηχανή Γ. Το 10% των λαμπτήρων που παράγονται από την μηχανή Α είναι ελαττωματικό, όπως είναι και το 20% από τη μηχανή Β και το 5% από τη μηχανή Γ.

(α) Αν πάρω ένα λαμπτήρα στην τύχη από την παραγωγή του εργοστασίου, ποια η πιθανότητα να είναι ελαττωματικός; (12/100)

(β) Αν ένας λαμπτήρας που επιλέγηκε τυχαία είναι ελαττωματικός ποια η πιθανότητα να προέρχεται από τη μηχανή Α; (5/12)

5. Δίνονται οι πίνακες $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ και $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

(α) Να αποδείξετε ότι $A^2 = 3A - 2I$

(β) Χρησιμοποιώντας το (α), η με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι $A^3 = 7A - 6I$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\left(A^2\right)^{-1} = \frac{3}{2}A^{-1} - \frac{1}{2}I$.

(A^{-1} είναι ο αντίστροφος του Α και I είναι ο μοναδιαίος πίνακας 2Χ2).

6. Η κάθετος της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$, α>β, στο σημείο Ρ(ασυνθ, βημθ) τέμνει τον άξονα των x στο Α. Η κάθετος στον άξονα των x από το Α συναντά την ΟΡ στο Β.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της κάθετης της έλλειψης στο Ρ είναι η

αημθx - βσυνθy = $(\alpha^2-\beta^2)$ημθσυνθ.

(β) Να βρείτε το Γ.Τ. του σημείου Β. $\frac{\alpha^2 x^2}{(\alpha^2-\beta^2)^2}+\frac{\alpha^4 y^2}{\beta^2(\alpha^2-\beta^2)^2}=1$

——————ΤΕΛΟΣ——————