ΕΠΙΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΠΕΡΙΟΔΟΥ 1983-2001

ΖΗΤΗΜΑ 1ο

Η συνάρτηση f ορισμένη και συνεχής στο κλειστό διάστημα [α,β] έχει παράγωγο στο ανοικτό διάστημα (α,β) και f(α)=f(β)=0.Να αποδειχθεί:

α) Ότι για τη συνάρτηση: $F(x)=\frac{f(x)}{x-c}$ όπου $c\notin[\alpha,\beta]$ υπάρχει $c_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $F'(c_0)=0$.

β) Αν $c\notin[\alpha,\beta]$, ότι υπάρχει $c_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στο σημείο $(c_0,f(c_0))$ της γραμμής με εξίσωση y=f(x) διέρχεται από το σημείο (c,0).

ΖΗΤΗΜΑ 2ο

Α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε x>0 ισχύει η σχέση $\log x\le|x-1|$

Β) Έστω η συνάρτηση f ορισμένη στο διάστημα $[0,+\infty)$ με $f(x)=\begin{cases}\frac{x\log x}{1-x}, & 0<x\neq 1\\ 0 & x=0\\ -1 & x=1\end{cases}$

Να αποδειχθεί ότι:

i) Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

ii) Είναι φθίνουσα στο διάστημα (0,1)

iii) $f'(1)=-\frac{1}{2}$

ΖΗΤΗΜΑ 3ο

Α. Να αποδειχθεί ότι αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και για κάθε $x\in\Delta$ είναι $f'(x)=0$ τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή στο Δ.

Β. Έστω f,g συναρτήσεις με πεδίο ορισμού ένα διάστημα Δ για τις οποίες υποθέτουμε ότι:

i) είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο Δ

ii) $f''=g''$ και

iii) $0\in\Delta$ και $f(0)=g(0)$

Να δειχθεί ότι:

α) Για κάθε $x\in\Delta,\ f(x)-g(x)=cx$ όπου $c\in R$

β) Αν η f(x)=0 έχει δυο ρίζες ετερόσημες ρ_1,ρ_2 τότε η g(x)=0 έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο κλειστό διάστημα $[\rho_1,\rho_2]$.

ΖΗΤΗΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\eta\mu\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ και πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $x_0=\frac{\pi}{8}$.

β) Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη, τη γραφική παράσταση της f και τους θετικούς ημιάξονες Ox,Oy.

ΖΗΤΗΜΑ 5ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=3x+\frac{1}{2x^2}$

Α. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

Β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f της ευθείας με εξίσωση y=3x και των ευθειών με εξισώσεις x=1 και x=α με α>1.

Γ. Να υπολογίσετε το όριο του εμβαδού Ε(α) του ανωτέρου χωρίου όταν το α τείνει στο άπειρο.

ΖΗΤΗΜΑ 6ο

Αν $\omega=\frac{z+\alpha i}{iz+\alpha}$, με $\alpha\in R^*$ και $z\neq \alpha i$ τότε να αποδειχθεί ότι:

α) Ο ω είναι φανταστικός αριθμός αν και μόνον αν ο z είναι φανταστικός αριθμός.

β) Ισχύει $|\omega|=1$ αν και μόνον αν ο z είναι πραγματικός αριθμός.

ΖΗΤΗΜΑ 7ο

Α. Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίζεται στο $x_0\in\Delta$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0).$$

Β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f με $f(x)=\sqrt{x+3}+x-3,\ x\geq -3$ στο σημείο $x_0=-3$.

ΖΗΤΗΜΑ 8ο

Α. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g οι οποίες έχουν τις εξής ιδιότητες:

α) Είναι συνεχείς στο [α,β] και παραγωγίσιμες στο (α,β)

β) Για κάθε x∈[α,β] και $g(x)\neq 0$ και για κάθε x∈(α,β) είναι $g'(x)\neq 0$ και γ) $f(\beta)g(\alpha)-f(\alpha)g(\beta)=0$

Να αποδείξετε ότι:

1. Για την συνάρτηση F με $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ εφαρμόζεται το θεώρημα του Rolle στο [α,β].

2. Υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}=\frac{f(x_0)}{g(x_0)}$.

Β.α) Δίνεται η συνάρτηση f με f(x)>0 ,x∈ϒ. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης F με $F(x)=[f(x)]^x, x\in R$

β) Έστω α>0. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g με $g(x)=\alpha^{\sqrt{x^2+1}},\ x\in R$

ΖΗΤΗΜΑ 9ο

Α. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της:

$f:[0,\frac{\pi}{2}]\to R$ με $f(x)=\eta\mu^2x-\sqrt{2}\eta\mu x+2\sqrt{2}$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\begin{cases} e^x-e, & x<1\\ \frac{\ln x}{x}, & x\geq 1\end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής και να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου το οποίο περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=0 και x=e.

ΖΗΤΗΜΑ 10ο

Α.α) Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ με τιμές στο $(0,+\infty)$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση g με $g(x)=\ln f(x),\ x\in\Delta$ στρέφει τα κοίλα άνω αν και μόνο αν ισχύει η σχέση $f(x)\cdot f''(x)\geq\left[f'(x)\right]^2,\ \forall x\in\Delta$.

β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x)=\ln\left(x^2+2\right)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

Β.α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα κοίλα η συνάρτηση f με $f(x)=\alpha^x-x,\ x\in R$ και 0<α<1.

β) Να βρεθούν οι πραγματικές τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η ισότητα $\alpha^{\lambda^2-4}-\alpha^{\lambda-2}=\left(\lambda^2-4\right)-\left(\lambda-2\right)$ όπου 0<α<1.

ΖΗΤΗΜΑ 11ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\left(x+4\right)e^{-x},\ x\in R$. Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x,y) με $-1\leq x\leq 1,\ 0\leq y\leq f(x)$.

Β.α) Να αποδειχθεί ότι μια συνάρτηση f ορισμένη στο R έχει την ιδιότητα $f'=f$ αν και μόνο αν $f(x)=ce^x$ όπου c πραγματική σταθερά.

β) Να βρεθεί η συνάρτηση g ορισμένη στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις $g'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x+g(x)\cdot\eta\mu x=g(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$ και $g(0)=1992$

ΖΗΤΗΜΑ 12ο

Α. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο [α,β] τότε

α) Υπάρχουν $m,M\in R$ τέτοια ώστε $m\left(\beta-\alpha\right)\leq\int_\alpha^\beta f(x)dx\leq M\left(\beta-\alpha\right)$.

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left[\alpha,\beta\right]$ τέτοιο ώστε $\int_\alpha^\beta f(x)dx=f(\xi)\left(\beta-\alpha\right)$.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}+4$ με $x>0$

α) Να εξετάσετε την μονοτονία της συνάρτησης f

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}f(t)dt$

ΖΗΤΗΜΑ 13ο

Α. Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ μήκους 10 m του οποίου τα άκρα Α και Β ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox αντιστοίχως. Το σημείο Β κινείται με σταθερή ταχύτητα v=2 m/sec και η θέση του πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση s(t)=vt, $t\in[0,5]$ όπου t ο χρόνος (σε δευτερόλεπτα)

α. Να βρεθεί το εμβαδόν Ε(t) του τριγώνου ΑΟΒ ως συνάρτηση του χρόνου.

β. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε(t) τη στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος ΟΑ είναι 6m;

Β. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση $f: R \to R$ για την οποία ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{x} e^{-t} f(t)dt = e^{-x} - e^{-\alpha} - e^{-x} f(x),\ \ x, \alpha \in R$$

ΖΗΤΗΜΑ 14ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 3x + \mu$, x,μ∈$\in R$. Να δείξετε ότι η εξίσωση f(x)=0 δεν μπορεί να έχει δυο διαφορετικές ρίζες στο διάστημα (1,2)

Β. Αν η συνάρτηση g(x) έχει συνεχή παράγωγο στο [0,1] και ικανοποιεί την σχέση $\int_0^1 xg'(x)dx = 1993 - \int_0^1 g(x)dx$ να βρείτε το g(1).

ΖΗΤΗΜΑ 15ο

Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα από ένα προϊόν με κόστος που δίνεται από την συνάρτηση $K(x) = \frac{\alpha x^3}{4}$ όπου x>0 και $\alpha \in [\frac{2}{9}, \frac{9}{2}]$. Τα έσοδα από την πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνεται από την συνάρτηση $E(x) = x^2$, x>0 και το κέρδος από την συνάρτηση $f(x) = E(x) - K(x)$, x>0.

α) Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος που συμβολίζεται με Μ(α).

β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in [\frac{2}{9}, \frac{9}{2}]$ για την οποία το Μ(α) γίνεται μέγιστο καθώς και το μέγιστο κέρδος.

ΖΗΤΗΜΑ 16ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{-\nu x}$, $x \in R, \nu \in N^*$

Α. Να μελετήσετε τη μονοτονία της f , να βρείτε τα ακρότατα και τα σημεία καμπής της.

Β. Να αποδείξετε ότι $2 \le e^2 \nu^2 \cdot \int_{\frac{1}{\nu}}^{\frac{2}{\nu}} xe^{-\nu x}dx \le e$.

ΖΗΤΗΜΑ 17ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(\chi) = 2\chi^2$,$\chi \in R$

α) Αν ε είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C της συνάρτησης f στο σημείο $M(2\alpha, 8\alpha^2)$ α>0 , να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C, την ευθεία ε και τον άξονα $\psi'\psi$.

β) Έστω θ η γωνία που σχηματίζει η ε με την ευθεία ΜΟ, όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων. Να εκφράσετε την εφθ ως συνάρτηση του α και να βρείτε την μέγιστη τιμή της εφθ όταν το α μεταβάλλεται (α>0).

Β. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,e] με $0<f(\chi)<1$ και $f'(\chi)\ge 0$ για κάθε $\chi \in [1,e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $\chi_0 \in (1,e)$ τέτοιος ώστε $f(\chi_0) + \chi_0 \cdot \ln \chi_0 = \chi_0$

ΖΗΤΗΜΑ 18ο

Α. Δίνεται ο θετικός πραγματικός αριθμός α και η συνάρτηση $f(\chi)=\alpha\chi^2-2\chi\ln\chi$ με $\chi\in(0,+\infty)$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο Α(1,f(1)) και να προσδιορίσετε το α ώστε η εφαπτομένη αυτή να διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη στο R η οποία έχει συνεχή f'' στο R, παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $\chi_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(0,1). Αν ισχύει

$\int_0^2[\chi\cdot f''(\chi)+3\cdot f'(\chi)]d\chi=-\frac{8}{3}$ να υπολογίσετε το f(2).

ΖΗΤΗΜΑ 19ο

Α. Έστω ότι η ευθεία ψ=2χ+5 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f στο +∞. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi}$ και $\lim\limits_{\chi\to+\infty}[f(\chi)-2\chi]$.

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ, αν $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{\mu\cdot f(\chi)+4\chi}{\chi\cdot f(\chi)-2\chi^2+3\chi}=1$

Β. Να αποδείξετε ότι:

α) $e^{\chi}-\chi+1>0\ \forall\chi\in R$

β) Η εξίσωση $2\cdot e^{\chi}+2\chi=\chi^2+2$ έχει ακριβώς μια λύση την χ=0.

ΖΗΤΗΜΑ 20ο

α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε μιγαδικούς z_1,z_2 ισχύει $|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1-z_2|^2$ αν και μόνο αν $\mathrm{Re}(z_1\overline{z}_2)=0$.

β) Έστω μια συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$ συνεχής στο [α,β] και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=\alpha^2+if(\alpha)$, $w=f(\beta)+i\beta^2$ με $\alpha\beta\neq0$. Αν $|w|^2+|z|^2=|w-z|^2$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(χ)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα [α,β].

ΖΗΤΗΜΑ 21ο

Α. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ,λ με κ<λ και η συνάρτηση $f(\chi)=(\chi-\kappa)^5(\chi-\lambda)^3$ με $\chi\in R$ να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{f'(\chi)}{f(\chi)}=\frac{5}{\chi-\kappa}+\frac{3}{\chi-\lambda}$ για κάθε χ≠κ και χ≠λ.

β) Η συνάρτηση $g(\chi)=\ln|f(\chi)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ,λ).

Β.α) Να αποδείξετε ότι για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο διάστημα [α,β] ισχύει: Αν f′(χ)>0 για κάθε χ∈(α,β), τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο [α,β].

β) Η συνάρτηση $f:R\to R$, είναι παραγωγίσιμη και ισχύει f ′(χ)>0 για κάθε χ∈R. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(\chi)=\int_\alpha^\beta f(\chi-t)dt,\ \chi\in R$ με α,β πραγματικούς αριθμούς είναι παραγωγίσιμη και ότι αν υπάρχει $\chi_0\in R$ με $F'(\chi_0)=0$ τότε F(χ)=0 για κάθε χ∈R.

ΖΗΤΗΜΑ 22ο

Α. Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α,β με 0<α<β τη συνεχή συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt=0$ και τη συνάρτηση $g(\chi)=2+\frac{1}{\chi}\cdot\int_{\alpha}^{\chi} f(t)dt, \chi\in(0,+\infty)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\chi_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύουν:

α) Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $(\chi_0, g(\chi_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα χ′χ και

β) $g(\chi_0)=2+f(\chi_0)$

Β. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to R$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο για την οποία ισχύουν $f(0)=1995$, $f'(0)=1$ και

$$1+\int_0^{\chi} f''(t)\sigma\upsilon\nu t\,dt=\sigma\upsilon\nu^2\chi+\int_0^{\chi} f'(t)\eta\mu t\,dt .$$

ΖΗΤΗΜΑ 23ο

Α. Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία μειώνεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t)=\frac{7A}{2}e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t\geq 0$ όπου Α ένας θετικός αριθμός. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους K(t) από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή δίνεται από τη συνάρτηση $K'(t)=\frac{A}{4}e^{-\frac{t}{7}}$, $t\geq 0$ και υποθέτουμε ότι K(0)=0.

Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή έτσι ώστε το συνολικό κέρδος P(t) από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής να γίνεται μέγιστο.

Β. Αν $G(\chi)=\int_1^{\chi} f(t)dt$ όπου $f(t)=\int_1^{3t}\frac{e^u}{\sqrt{u}}du$ και χ>0, t>0 να βρείτε:

α) την $G''(1)$

β) το $\lim_{\chi\to 0^+}\frac{\sqrt{\chi}\cdot G''(\chi)-\sqrt{3}}{\sqrt{\chi+1}-1}$

ΖΗΤΗΜΑ 24ο

Α. Να βρεθεί η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση:

$$\int_0^1 e^{1-\chi}f(\chi)d\chi=f(\chi)+e^{\chi}, \forall\chi\in R$$

Β. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα [α,β] και ισχύει ότι $f(\chi)+f(\alpha+\beta-\chi)=c$ για κάθε χ∈[α,β] όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(\chi)d\chi=(\beta-\alpha)f(\frac{\alpha+\beta}{2})=\frac{\beta-\alpha}{2}(f(\alpha)+f(\beta))$.

ΖΗΤΗΜΑ 25ο

α) Έστω η συνάρτηση $f(\chi)=e^{\alpha\chi}$ όπου α∈R. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν δυο τιμές της παραμέτρου α έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $f''(\chi)+2f'(\chi)=3f(\chi)$ για κάθε χ∈R

β) Έστω $\lambda,\mu,\beta_1,\beta_2\in R$ με $\beta_1\neq\beta_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(\chi)=\lambda e^{\beta_1\chi}+\mu e^{\beta_2\chi}$ με χ∈R. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός χ_o τέτοιος ώστε $g(\chi_0)=g'(\chi_0)=0$.
Να αποδειχθεί ότι λ=μ=0.

ΖΗΤΗΜΑ 26ο

Α.α) Δίνεται η συνάρτηση g συνεχής στο R και $f(\chi)=\int_0^{\chi}(\chi-t)g(t)dt$. Να αποδείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα όταν $g(\chi)\neq 0$ για κάθε χ∈R.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείετε από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(\chi)=\sqrt{\chi}$ και $f(\chi)=2\chi-1$ και την ευθεία χ=0.

Β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(\chi)=\sqrt{1+\chi^2}+\lambda\chi\ ,\lambda\in R$

α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim\limits_{\chi\to+\infty}\frac{f(\chi)}{\chi}=1$

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε παραπάνω να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1\frac{x}{f^2(x)}dx$.

ΖΗΤΗΜΑ 27ο

Έστω ότι f(t) είναι η ποσότητα ενός αντιβιοτικού που έχει απορροφηθεί από το ανθρώπινο σώμα κατά τη χρονική στιγμή t όπου t≥0 και $f:[0,+\infty)\to R$ είναι πραγματική συνάρτηση με $f(\sqrt{t})=1-2^{-\frac{\sqrt{t}}{499}}$
Να βρεθεί η χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία ο ρυθμός απορρόφησης του αντιβιοτικού από το ανθρώπινο σώμα είναι ίσος με το 1/16 του ρυθμού απορρόφησης κατά τη χρονική στιγμή $t_o=0$.

ΖΗΤΗΜΑ 28ο

Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις f,g με πεδίο ορισμού το R, που έχουν πρώτη και δεύτερη παράγωγο και $g(\chi)\neq 0$ για κάθε x∈R

Έστω α πραγματικός αριθμός. Θέτουμε $A=\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}$ και $B=\frac{f'(\alpha)-Ag'(\alpha)}{g(\alpha)}$.

Αν φ είναι πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο R\{α}, τέτοια ώστε $\frac{f(\chi)}{(\chi-\alpha)^2g(\chi)}=\frac{A}{(\chi-\alpha)^2}+\frac{B}{\chi-\alpha}+\frac{\varphi(\chi)}{g(\chi)}$ για κάθε χ∈R\{α}, να αποδειχθεί ότι υπάρχει το $\lim\limits_{\chi\to\alpha}\varphi(\chi)$.

ΖΗΤΗΜΑ 29ο

Α. Δίνεται πραγματική συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο R τέτοια ώστε $g(\chi)>0$ και $g''(\chi)g(\chi)-[g'(\chi)]^2>0$ για κάθε χ∈R.
Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση $\frac{g'}{g}$ είναι γνησίως αύξουσα και

ii) $g(\frac{\chi_1}{2}+\frac{\chi_2}{2})\le\sqrt{g(\chi_1)g(\chi_2)}$ για κάθε $\chi_1,\chi_2\in R$.

B. Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο R, τέτοια ώστε υπάρχει πραγματικός αριθμός α ώστε να ισχύει $g(\chi+\psi)=e^{\psi}g(\chi)+e^{\chi}g(\psi)+\chi\psi+\alpha$ για κάθε $\chi,\psi\in R$. Να αποδείξετε ότι:

i) g(0)=-α

ii) $g'(\chi)=g(\chi)+g'(0)e^{\chi}+\chi$ για κάθε $\chi\in R$.

ΖΗΤΗΜΑ 30ο

A. Αν οι συναρτήσεις f,g είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο R και ικανοποιούν τις σχέσεις:
$$f''(\chi)-g''(\chi)=4 \text{ για κάθε } \chi\in R$$
$$f'(1)=g'(1) \text{ και } f(2)=g(2)$$

i) Να βρείτε τη συνάρτηση t(χ)=f(χ)-g(χ) ,χ∈R

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g.

B. Έστω f πραγματική συνάρτηση ορισμένη στο R που είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(\chi)>0$ για κάθε χ∈R.

Έστω α,β∈R και α<β. Να αποδειχθεί ότι:

i) $f(\chi)-f(\alpha)\le f'(\beta)(\chi-\alpha)$ για κάθε χ∈[α,β]

ii) $2\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\le f'(\beta)(\beta-\alpha)^2+2f(\alpha)(\beta-\alpha)$.

ΖΗΤΗΜΑ 31ο

Έστω f πραγματική συνάρτηση συνεχής στο R τέτοια ώστε $f(\chi)\ge 2$ για κάθε χ∈R. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(\chi)=\chi^2-5\chi+1-\int_0^{\chi^2-5\chi}f(t)dt,\ \chi\in R$

A. Να αποδείξετε ότι: $g(-3)\cdot g(0)<0$

B. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση g(χ)=0 έχει μια μόνο ρίζα στο διάστημα (-3,0).

ΖΗΤΗΜΑ 32ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν f(χ)>0, χ>0, $f'(\chi)+2\chi f(\chi)=0,\ \chi>0$ και η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,1)

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f.

β) Να δείξετε ότι $\frac{\chi-1}{2\chi^2}f(\chi)<\int_1^x\frac{f(t)}{2t^2}dt<\frac{\chi-1}{2},\chi>1$

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $F(\chi)=\int_1^x\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt,\ \chi>1$

δ) Να αποδείξετε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2}dt<1$ για κάθε χ μεγαλύτερο του ένα.

ΖΗΤΗΜΑ 33ο

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to R$ για την οποία ισχύουν f(χ)>0, χ>0, $f'(\chi)+2\chi f(\chi)=0,\ \chi>0$ και η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο Α(1,1)

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τη συνάρτηση f.

β) Να δείξετε ότι $\frac{\chi-1}{2\chi^2}f(\chi)<\int_1^x\frac{f(t)}{2t^2}dt<\frac{\chi-1}{2}$,$\chi>1$

γ) Να βρείτε τη συνάρτηση $F(\chi)=\int_1^x\left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt,\ \chi>1$

δ) Να αποδείξετε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2}dt<1$ για κάθε χ μεγαλύτερο του ένα.

ΖΗΤΗΜΑ 34ο

Β. Δίνεται συνάρτηση $f:R\to R$ δυο φορές παραγωγίσιμη η οποία σε σημείο x_0∈Υ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο το 0 και ικανοποιεί τη σχέση $f''(x)>4\left(f'(x)-f(x)\right)$ για κάθε x∈Υ

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)e^{-2x}$ είναι κυρτή στο Υ.

β) Να αποδείξετε ότι είναι $f(x)\geq 0$ για κάθε x∈Υ.

ΖΗΤΗΜΑ 35ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση $f(t)=\frac{2t+3}{t+2},\ t\in[1,4]$

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^4 f(t)dt$

β) Έστω η συνάρτηση $g(x)=\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt,\ x>0$

i) Να αποδείξετε ότι: $e^{\frac{1}{x^2}}\leq e^{\frac{t}{x^2}}\leq e^{\frac{4}{x^2}}$ για κάθε t∈[1,4] και x>0.

ii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)$

Β. Έστω $h:[1,+\infty)\to R$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί τη σχέση $h(x)=1999(x-1)+\int_1^x\frac{h(t)}{t}dt$ για κάθε $x\geq 1$. Να αποδείξετε ότι:

α) $h(x)=1999x\ln x,\ x\geq 1$

β) Η h είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

ΖΗΤΗΜΑ 36ο

α) Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1)>x-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{5}$ για κάθε x∈[0,+∞)

β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο [0,+∞) για την οποία ισχύει $\left[f(x)\right]^5+2\left[f(x)\right]^3+3f(x)=(x+1)\ln(x+1)-\frac{4}{5}x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+182$ για κάθε x∈[0,+∞).

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο [0,+∞)

ΖΗΤΗΜΑ 37ο

Α. Εστω f:R→R συνάρτηση συνεχής στο R.

Εστω I:R→R η συνάρτηση με $I(x)=\int_0^1[\left(f(t)\right)^2-2xt^2f(t)+x^2t^4]dt$, για x∈R.

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση I παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $x_o=5\int_0^1 t^2f(t)dt$

Β. Εστω η συνάρτηση f:(1,+∞)→R, με $f(x)=2000+\left|\ln(x-1)\right|$

Έστω c πραγματικός μεγαλύτερος του 2000.΄Εστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y=c$ και η γραφική παράσταση της f τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία του επιπέδου, τα Α και Β.
Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f, στα Α και Β, είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΖΗΤΗΜΑ 38ο

Εστω $f,g: R\to R$, είναι συναρτήσεις συνεχείς στο R τέτοιες, ώστε να ισχύει $f(x)-g(x)=x-4$, για $x\in R$.
΄Εστω ότι η ευθεία με εξίσωση $y=3x-7$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f, καθώς $x\to+\infty$.

α) Να βρείτε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{x}$ και ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)+3x+\eta\mu 2x}{x\,f(x)-3x^2+1}$

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-3$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της g, καθώς $x\to+\infty$.

ΖΗΤΗΜΑ 39ο

Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:R\to R$ τέτοια, ώστε:
$2xf(x)+(x^2+1)f'(x)=e^x$ για κάθε $x\in R$, με $f(0)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in R$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ΖΗΤΗΜΑ 40ο

Α. Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο R.

α) Να αποδείξετε ότι: $\displaystyle\int_0^3 f(2x+1)\,dx=\frac{1}{2}\int_1^7 f(x)\,dx$

β) Εστω ότι: $\displaystyle 4\int_0^3 f(2x+1)\,dx=\int_1^7 f(x)\,dx+2004$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,7)$ τέτοιο, ώστε $f(\xi)=334$.

Β. Θεωρούμε συνεχή συνάρτηση $f:R\to R$ που ικανοποιεί την ισότητα:

$$\int_0^x\left(1+t^2\right)f(t)\,dt=x^2+\int_0^1 6x\left(t^2+t\right)dt\ ,\ x\in R.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2x+5}{x^2+1}$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της Α $(0,f(0))$.

ΖΗΤΗΜΑ 41ο

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^2\ln x$, $x>0$.

α. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x και την ευθεία $x=x_0$, όπου x_0 είναι η θέση του τοπικού ακροτάτου της f.

Β. Έστω η συνάρτηση $f: [\alpha,\beta]\to R$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=2\beta$, $f(\beta)=2\alpha$.

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ξ_1, $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε: $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$

ΖΗΤΗΜΑ 42ο

Α. Έστω η συνάρτηση: $f(x)=x^3-3x^2συν2α+2xσυν^2 2α+ημ^2 2α$, $x \in R$ και $α \in R$.

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του α η γραφική παράσταση της f έχει μόνο ένα σημείο καμπής, το οποίο για τις διάφορες τιμές του α ανήκει σε παραβολή.

Β. Εστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με $f'(0)=1$ και τέτοια ώστε να

ισχύει: $\int_0^x f(t)dt \geq xe^{-x}$, για κάθε $x \in R$.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$.

ΖΗΤΗΜΑ 43ο

Α. Η συνάρτηση $f:R \to R$ έχει συνεχή παράγωγο και ικανοποιεί την ισότητα

$\int_{á}^{â} f'(x)\, e^{f(x)}\, dx = 0$, όπου α, $β \in R$ με $α<β$.

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(α)=f(β)$

β. Η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

Β. Εστω η συνάρτηση: $f(x)=2x+\frac{4}{x}$, $x>0$

α. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν Ε(λ) του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x=λ, x=λ+1, όπου λ>0, είναι $Ε(λ)=2λ+1+4\ell n\left(1+\frac{1}{ë}\right)$

β. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ για την οποία το εμβαδόν Ε(λ) γίνεται ελάχιστο.

ΖΗΤΗΜΑ 44ο

Α. Δίνεται η συνάρτηση: $g(x)=\int_0^x xσυνtdt$, $x \in R$.

α. Να αποδείξετε ότι: $g''(x)=2συνx-xημx$, $x \in R$.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης

της συνάρτησης g στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{2},g\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Β. Έστω η συνάρτηση: $f(x)=\frac{\alpha x^2+\beta x}{x-2}$, $x \in R-\{2\}$, όπου $α,β \in R$.

Αν η ευθεία ε: y=2x-1 είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ ποιες είναι οι τιμές των α,β;