

**Θέματα Μαθηματικών  
Θετικής Κατεύθυνσης  
Β' Λυκείου 1999**

**Ζήτημα 1ο**

Α. Έστω

$$\vec{a} = (x_1, y_1) \quad \text{και} \quad \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$ .

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$  συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

(Μονάδες 3)

β) Αν τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα  $y'y$  και  $\lambda_1, \lambda_2$  είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

(Μονάδες 5,5)

γ) Αν τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  είναι μη μηδενικά και  $\theta$  είναι η γωνία των  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ , να αποδείξετε ότι:

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

(Μονάδες 4)

Β. α) Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{a}_1 = (\lambda, \lambda - 1),$$

$$\vec{\beta}_1 = (4, \lambda)$$

με  $\lambda \neq 0$ . Για ποια από τις παρακάτω τιμές του  $\lambda$  τα διανύσματα  $\vec{a}_1$  και  $\vec{\beta}_1$  είναι κάθετα;

Α.  $\lambda = 1$

Β.  $\lambda = 3$

Γ.  $\lambda = 2$

Δ.  $\lambda = -2$

Ε.  $\lambda = -3$

Να γράψετε στο τετραδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(Μονάδες 6,5)

β) Δίνονται τα διανύσματα:

$$\vec{u} = (1, -\sqrt{3}),$$

$$\vec{v} = (2, 2\sqrt{3}),$$

$$\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$$

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη στήλη Α' με το μέτρο της που βρίσκεται στη στήλη Β'.

ΣΤΗΛΗ Α'

ΣΤΗΛΗ Β'

1. γωνία των  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$

A.  $\pi/2$

B.  $\pi/6$

2. γωνία των  $\vec{u}$  και  $\vec{w}$

Γ.  $\pi/4$

Δ.  $2\pi/3$

3. γωνία των  $\vec{v}$  και  $\vec{w}$

E.  $3\pi/4$

Z.  $\pi/3$

Να γράψετε στο τετραδιό σας τον αριθμό της στήλης Α' και δίπλα το γράμμα της στήλης Β' που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

(Μονάδες 6)

### Απάντηση:

A. α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων:

$$\vec{\alpha} = (x_1, y_1) \quad , \quad \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

είναι:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

β) Ισχύει:

$$\lambda_1 = y_1/x_1 \text{ και } \lambda_2 = y_2/x_2$$

με  $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 0$ , αφού τα διανύσματα  $\vec{\alpha}$ ,  $\vec{\beta}$  δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα  $y'y$ . Είναι:

$$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 x_2}{x_1 x_2} + \frac{y_1 y_2}{x_1 x_2} = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + \lambda_1 \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

γ) Ισχύει:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cos \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|} \quad (1)$$

Όμως:

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

και

$$|\vec{\alpha}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad , \quad |\vec{\beta}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$$

Επομένως, η (1) γράφεται:

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Β. α) Τα διανύσματα  $\vec{\alpha}_1$  και  $\vec{\beta}_1$  είναι κάθετα αν και μόνο αν:

$$\begin{aligned}\vec{\alpha}_1 \cdot \vec{\beta}_1 = 0 &\Leftrightarrow \lambda \cdot 4 + (\lambda - 1) \cdot \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(4 + \lambda - 1) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lambda(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ (απορ.) ή } \lambda = -3\end{aligned}$$

Επομένως, σωστή απάντηση είναι η Ε.

β) Είναι:

$$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4$$

$$|\vec{w}| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$$

Τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$  υπολογίζουμε ως εξής:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1 \cdot 2 + (-\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}}{2 \cdot 4} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

Άρα:

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3}$$

Τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{w}$  υπολογίζουμε ως εξής:

$$\cos(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{1 \cdot \sqrt{3} + (-\sqrt{3}) \cdot 1}{2 \cdot 2} = \frac{0}{4} = 0$$

Άρα:

$$(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{2}$$

Τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{v}$  και  $\vec{w}$  υπολογίζουμε ως εξής:

$$\cos(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|} = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cdot 1}{4 \cdot 2} = \frac{4\sqrt{3}}{4 \cdot 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Άρα:

$$(\vec{v}, \vec{w}) = \frac{\pi}{6}$$

Επομένως, οι σωστές αντιστοιχίες είναι:

$$1 \leftrightarrow \Delta$$

$$2 \leftrightarrow \text{Α}$$

$$3 \leftrightarrow \text{Β.}$$

## **Ζήτημα 2ο**

Δίνονται οι αριθμοί  $a = 2κ + 2$  και  $β = 6κ + 7$ , όπου  $κ$  ακέραιος αριθμός.  
Να αποδείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί  $3α$  και  $β$  είναι πρώτοι μεταξύ τους.

(Μονάδες 9)

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού  $(2β - α)$  με το 10 είναι 2.

(Μονάδες 8)

γ) Αν ο αριθμός  $κ$  είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε ο αριθμός  $(α + β - 2)$  είναι πολλαπλάσιο του 7.

(Μονάδες 8)

### **Απάντηση:**

α) Έχουμε:  $a = 2κ + 2$ ,  $β = 6κ + 7$ , με  $κ \in \mathbb{Z}$

Έστω  $\delta = (3α, β) \Leftrightarrow \delta = (6κ + 6, 6κ + 7)$ . Τότε:

$$\left. \begin{array}{l} \delta \mid 6κ + 6 \\ \delta \mid 6κ + 7 \end{array} \right\}$$

Οπότε:

$$\delta / (6κ + 7) - (6κ + 6) \Leftrightarrow \delta / 1, \text{ δηλαδή } \delta = 1.$$

Άρα, οι αριθμοί  $3α$  και  $β$  είναι πρώτοι μεταξύ τους.

β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} 2β - α &= 2(6κ + 7) - (2κ + 2) = 12κ + 14 - 2κ - 2 = 10κ + 12 = \\ &= 10κ + 10 + 2 = 10(κ + 1) + 2. \end{aligned}$$

Άρα:  $2β - α = 10(κ + 1) + 2$

Άρα το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού  $(2β - α)$  με το 10 είναι 2.

γ) Ισχύει:  $κ = \text{πολ.}7$ , δηλαδή  $κ = 7λ$ , με  $λ \in \mathbb{Z}$ . Έχουμε:

$$α + β - 2 = 2κ + 2 + 6κ + 7 - 2 = 8κ + 7 = 8(7λ) + 7 = 7(8λ + 1)$$

Άρα:  $α + β - 2 = 7(8λ + 1)$

Αν θέσουμε:  $8λ + 1 = μ$ , με  $μ \in \mathbb{Z}$ , τότε:

$$α + β - 2 = 7μ = \text{πολ.}7$$

## **Ζήτημα 3ο**

Δίνονται τα σημεία  $A(8, 0)$  και  $B(0, 4)$  του καρτεσιανού επιπέδου  $Oxy$ .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων  $O$  και το μέσο  $\Delta$  του τμήματος  $AB$ .

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία ΟΔ.

(Μονάδες 9)

γ) Έστω Μ τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ε). Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$$

(Μονάδες 7)

### Απάντηση:

Επειδή το σημείο Δ είναι το μέσον του τμήματος ΑΒ, έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} x_{\Delta} &= \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_{\Delta} &= \frac{y_A + y_B}{2} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_{\Delta} &= \frac{8+0}{2} = 4 \\ y_{\Delta} &= \frac{0+4}{2} = 2 \end{aligned}$$

Δηλαδή: Δ(4, 2)

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας ΟΔ θα είναι:

$$\lambda_{OD} = \frac{y_{\Delta} - y_O}{x_{\Delta} - x_O} = \frac{2-0}{4-0} = \frac{1}{2}$$

Επειδή το σημείο Ο(0, 0) είναι σημείο της ευθείας ΟΔ, η εξίσωσή της θα είναι:

$$y - 0 = \lambda_{OD} (x - 0) \Leftrightarrow y = 1/2 x$$

β) Αν  $\lambda_{\epsilon}$  ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας (ε), τότε:

$$(ε) \perp OD \Leftrightarrow \lambda_{\epsilon} \cdot \lambda_{OD} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\epsilon} \cdot 1/2 = -1 \Leftrightarrow \lambda_{\epsilon} = -2$$

Επειδή το σημείο Δ(4, 2) είναι σημείο της ευθείας (ε), η εξίσωσή της θα είναι:

$$y - y_{\Delta} = \lambda_{\epsilon} (x - x_{\Delta}) \Leftrightarrow y - 2 = -2 (x - 4) \Leftrightarrow y + 2x - 10 = 0$$

γ) Θεωρούμε το τυχαίο σημείο Μ( $x_0$ ,  $y_0$ ) της ευθείας (ε). Σύμφωνα με το ερώτημα β) ισχύει:

$$2x_0 + y_0 - 10 = 0 \quad (1)$$

Πρέπει:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2 \Leftrightarrow |\overrightarrow{MA}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2 = 2|\overrightarrow{OM}|^2 \Leftrightarrow$$

$$\left( \sqrt{(x_0 - 8)^2 + y_0^2} \right)^2 + \left( \sqrt{x_0^2 + (y_0 - 4)^2} \right)^2 = 2 \left( \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \right)^2 \Leftrightarrow$$

$$x_0^2 - 16x_0 + 64 + y_0^2 + x_0^2 + y_0^2 - 8y_0 + 16 = 2x_0^2 + 2y_0^2 \Leftrightarrow$$

$$-16x_0 - 8y_0 + 80 = 0 \Leftrightarrow -8(2x_0 + y_0 - 10) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 + y_0 - 10 = 0$$

Η τελευταία ισχύει, λόγω της (1).

#### **Ζήτημα 4ο**

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό  $n = 1, 2, 3, \dots, 1999$  και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο  $Oxy$  διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1).$$

Να δείξετε ότι:

α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του.

(Μονάδες 9)

β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο  $A$  (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου  $A$ ;

(Μονάδες 8)

γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας  $x + y - 1 = 0$  στο σημείο  $A$ .

(Μονάδες 8)

#### **Απάντηση:**

Ισχύει ότι:

$$(x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1), n = 1, 2, 3, \dots, 1999 \quad (1)$$

α) Έχουμε:

$$\begin{aligned} (x - 1)^2 + y^2 = 2n(x + y - 1) &\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2nx - 2ny + 2 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(n + 1)x - 2ny + 1 + 2n = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Θέτουμε:

$$-2(n + 1) = A, -2n = B \text{ και } 1 + 2n = \Gamma.$$

Για να είναι η (2), άρα και η ισοδύναμή της (1), εξίσωση κύκλου, πρέπει:

$$\begin{aligned} A^2 + B^2 - 4\Gamma > 0 &\Leftrightarrow 4(n + 1)^2 + 4n^2 - 4(1 + 2n) > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (n + 1)^2 + n^2 - (1 + 2n) > 0 \Leftrightarrow n^2 + 2n + 1 + n^2 - 1 - 2n > 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 2n^2 > 0 \text{ που ισχύει για κάθε } n = 1, 2, 3, \dots, 1999 \end{aligned}$$

Επομένως, η (2) είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο:

$$K\left(-\frac{A}{2} = n + 1, -\frac{B}{2} = n\right)$$

και ακτίνα:

$$\rho = \sqrt{2n^2} = n\sqrt{2}$$

β) Έστω  $A(x_0, y_0)$  το σταθερό σημείο που ζητούμε. Το σημείο  $A$  πρέπει να είναι σημείο του κύκλου  $C$ . Δηλαδή, πρέπει:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2(n+1)x_0 - 2ny_0 + 1 + 2n = 0 \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 2n(x_0 + y_0 - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x_0 + y_0 - 1)n + (x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 - 1) = 0 \quad (3)$$

Για να ισχύει η (3) για κάθε  $n = 1, 2, 3, \dots, 1999$ , πρέπει:

$$\left. \begin{array}{l} 2(x_0 + y_0 - 1) = 0 \\ -x_0^2 - y_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ x_0^2 - 2x_0 + 1 + y_0^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Επομένως, το σημείο  $A(1, 0)$  είναι το ζητούμενο σταθερό σημείο.

γ) Έστω  $\varepsilon : x + y - 1 = 0$  και  $d(K, \varepsilon)$  η απόσταση του κέντρου  $K$  του κύκλου  $C$  από την ευθεία  $(\varepsilon)$ . Έχουμε:

$$d(K, \varepsilon) = \frac{|1 + n + n - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2n|}{\sqrt{2}} = \frac{2n}{\sqrt{2}} = n\sqrt{2} = e$$

Επομένως, οι τροχιές των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας  $(\varepsilon)$  και μάλιστα στο σημείο  $A$ , αφού:

$$1 + 0 - 1 = 0, \text{ που ισχύει.}$$