

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 24 ΙΟΥΝΙΟΥ 2000
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

A.1. Να γράψετε την εξίσωση του κύκλου που έχει κέντρο $K(x_0, y_0)$ και ακτίνα ρ .

Μονάδες 2

A.2. Πότε η εξίσωση $x^2 + y^2 + Ax + By + \Gamma = 0$ παριστάνει κύκλο; Ποιο είναι το κέντρο του και ποια η ακτίνα του;

Μονάδες 4,5

A.3. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ε του κύκλου $C: x^2 + y^2 = \rho^2$ σε ένα σημείο του $A(x_1, y_1)$ έχει εξίσωση $xx_1 + yy_1 = \rho^2$.

Μονάδες 6

B.1. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Δίνεται κύκλος $x^2 + y^2 = 10$ και το σημείο του $M(1, -3)$. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο M έχει εξίσωση:

A. $x + 3y = 10$, **B.** $5x - y = 8$, **Γ.** $x - 3y = 10$,

Δ. $3x + 2y = 3$, **Ε.** $\frac{1}{2}x + y = 5$

Μονάδες 4

B.2. Στη **Στήλη Α** δίνονται οι εξισώσεις που παριστάνουν κύκλους και στη **Στήλη Β** τα κέντρα των κύκλων και οι ακτίνες τους. Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα της **Στήλης Α** και δίπλα σε κάθε γράμμα τον αριθμό της **Στήλης Β** που αντιστοιχεί στη σωστή εξίσωση του κύκλου.

Στήλη Α	Στήλη Β
α. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$	1. $K(0, -1), \rho = 2$
β. $x^2 + (y + 1)^2 = 4$	2. $K(3, -2), \rho = 1$
	3. $K(3, -2), \rho = 4$

Μονάδες 4

B.3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Το σημείο $(1, -1)$ ανήκει στον κύκλο $x^2 + y^2 = 2$.

β. Ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$ και η ευθεία $y = 2x$ εφάπτονται.

γ. Η εξίσωση $x^2 + y^2 + \lambda^2 = 0$, όπου λ πραγματικός αριθμός, είναι εξίσωση κύκλου.

Μονάδες 4,5

ΘΕΜΑ 2ο

Θεωρούμε τους ακέραιους της μορφής $\alpha = 6k + u$ με $0 \leq u < 6$ και k ακέραιος.

Να δείξετε ότι:

α) οι παραπάνω ακέραιοι α που δεν είναι πολλαπλάσια του 2 ή του 3 παίρνουν τη μορφή $\alpha = 6k + 1$ ή τη μορφή $\alpha = 6k + 5$, όπου k ακέραιος
Μονάδες 10

β) το τετράγωνο κάθε ακεραίου αριθμού της μορφής του ερωτήματος (α) μπορεί να πάρει τη μορφή: $\alpha^2 = 3\mu + 1$, όπου μ ακέραιος
Μονάδες 10

γ) η διαφορά των τετραγώνων δύο ακεραίων του ερωτήματος (α) είναι πολλαπλάσιο του 3.
Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3ο

Για τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ ισχύουν οι σχέσεις $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta} = (4, -2)$ και $\vec{\alpha} - 3\vec{\beta} = (-7, 8)$.

α) Να δείξετε ότι $\vec{\alpha} = (-1, 2)$ και $\vec{\beta} = (2, -2)$.
Μονάδες 7

β) Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός k , ώστε τα διανύσματα $k\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.
Μονάδες 8

γ) Να αναλυθεί το διάνυσμα $\vec{\gamma} = (3, -1)$ σε δύο κάθετες συνιστώσες, από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{\alpha}$.
Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 4ο

Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy , η εξίσωση ευθείας

$$(\lambda - 1)x + (\lambda + 1)y - \lambda - 3 = 0$$

, όπου λ πραγματικός αριθμός, περιγράφει τη φωτεινή ακτίνα που εκπέμπει ένας περιστρεφόμενος φάρος Φ .

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του φάρου Φ .
Μονάδες 8

β) Τρία πλοία βρίσκονται στα σημεία $K(2, 2)$, $\Lambda(-1, 5)$ και $M(1, 3)$. Να βρείτε τις εξισώσεις των φωτεινών ακτίνων που διέρχονται από τα πλοία K , Λ και M .
Μονάδες 4,5

γ) Να υπολογίσετε ποιο από τα πλοία K και Λ βρίσκεται πλησιέστερα στη φωτεινή ακτίνα που διέρχεται από το πλοίο M .
Μονάδες 6

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν της θαλάσσιας περιοχής που ορίζεται από το φάρο Φ και τα πλοία Λ και M .
Μονάδες 6,5