

**ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Β΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 26 ΙΟΥΝΙΟΥ 1999
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΘΕΜΑ 1ο

A. Έστω $\vec{a} = (x_1, y_1)$ και $\vec{b} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να εκφράσετε (χωρίς απόδειξη) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ συναρτήσει των συντεταγμένων τους.

Μονάδες 3

β) Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ δεν είναι παράλληλα προς τον άξονα $y'y$ και λ_1, λ_2 είναι οι συντελεστές διεύθυνσης των $\vec{a}, \vec{b}$ αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Μονάδες 5,5

γ) Αν τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$ είναι μη μηδενικά και θ είναι η γωνία των $\vec{a}$ και $\vec{b}$, να αποδείξετε ότι:

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Μονάδες 4

B. α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}_1 = (\lambda, \lambda - 1)$ και $\vec{b}_1 = (4, \lambda)$, με $\lambda \neq 0$. Για ποια από τις παρακάτω τιμές του λ τα διανύσματα $\vec{a}_1$ και $\vec{b}_1$ είναι κάθετα;

A. $\lambda = 1$,

B. $\lambda = 3$,

Γ. $\lambda = 2$,

Δ. $\lambda = -2$,

Ε. $\lambda = -3$.

Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6,5

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (1, -\sqrt{3})$, $\vec{v} = (2, 2\sqrt{3})$ και $\vec{w} = (\sqrt{3}, 1)$.

Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία που βρίσκεται στη **στήλη Α΄** με το μέτρο της που βρίσκεται στη **στήλη Β΄**.

ΣΤΗΛΗ Α΄	ΣΤΗΛΗ Β΄
1. γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{v}$	A. $\pi/2$
2. γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{w}$	B. $\pi/6$
3. γωνία των $\vec{v}$ και $\vec{w}$	Γ. $\pi/4$
	Δ. $2\pi/3$
	Ε. $3\pi/4$
	Z. $\pi/3$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τον αριθμό της Στήλης Α' και δίπλα το γράμμα της Στήλης Β' που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 2\kappa + 2$ και $\beta = 6\kappa + 7$, όπου κ ακέραιος αριθμός. Να αποδείξετε ότι:

α) Οι αριθμοί 3α και β είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Μονάδες 9

β) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $(2\beta - \alpha)$ με το 10 είναι 2.

Μονάδες 8

γ) Αν ο αριθμός κ είναι πολλαπλάσιο του 7, τότε και ο αριθμός $(\alpha + \beta - 2)$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνονται τα σημεία $A(8,0)$ και $B(0,4)$ του καρτεσιανού επιπέδου Oxy .

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από την αρχή των αξόνων O και το μέσο Δ του τμήματος AB .

Μονάδες 9

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) που διέρχεται από το σημείο Δ και είναι κάθετη στην ευθεία OD .

Μονάδες 9

γ) Έστω M τυχαίο σημείο της παραπάνω ευθείας (ϵ) . Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 = 2\overrightarrow{OM}^2$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Θεωρούμε έναν πληθυσμό από 1999 μυρμήγκια. Κάθε μυρμήγκι χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό $n=1,2,3,\dots,1999$ και κινείται επάνω στο καρτεσιανό επίπεδο Oxy διαγράφοντας μια τροχιά με εξίσωση:

$$(x-1)^2 + y^2 = 2n(x+y-1).$$

Να δείξετε ότι:

α) η τροχιά κάθε μυρμηγκιού είναι κύκλος και να βρεθούν οι συντεταγμένες του κέντρου του

Μονάδες 9

β) κατά την κίνησή τους όλα τα μυρμήγκια διέρχονται από ένα σταθερό σημείο A (που είναι η φωλιά τους). Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου A ;

Μονάδες 8

γ) οι τροχιές όλων των μυρμηγκιών εφάπτονται της ευθείας $x+y-1=0$ στο σημείο A .

Μονάδες 8