

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: 16/06/2023

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από 10 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να βρείτε το ολοκλήρωμα:

$$\int e^x (1 + e^x)^4 dx$$

Λύση Έχουμε ότι:

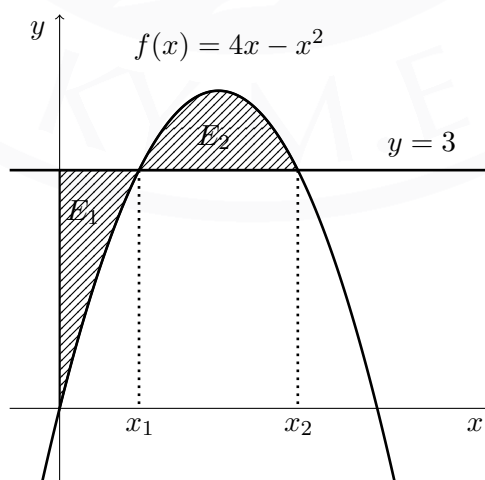
$$\int e^x (1 + e^x)^4 dx = \int (1 + e^x)^4 d(1 + e^x) = \frac{(1 + e^x)^5}{5} + c$$

2^{ος} τρόπος

Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 1 + e^x \Rightarrow du = e^x dx$, παίρνουμε:

$$\int e^x (1 + e^x)^4 dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + c = \frac{(1 + e^x)^5}{5} + c$$

A2. Η ευθεία $y = 3$ τέμνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4x - x^2$ στα σημεία με τετμημένες x_1 και x_2 και σχηματίζει τα χωρία E_1 και E_2 όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου E_1 .

(μονάδες 2)

(β) Να δείξετε ότι τα χωρία E_1 και E_2 είναι ισεμβαδικά.

(μονάδες 3)

Λύση

(α) Για τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f και της $y = 3$, έχουμε ότι:

$$4x - x^2 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad \text{και} \quad x_2 = 3$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^1 [3 - (4x - x^2)] \, dx = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) \, dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 = \left(\frac{1}{3} - 2 + 3 \right) - 0 = \frac{4}{3} \text{ τετραγωνικές μονάδες} \end{aligned}$$

(β) Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E_2 &= \int_1^3 [(4x - x^2) - 3] \, dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x \right]_1^3 \\ &= (18 - 9 - 9) - \left(2 - \frac{1}{3} - 3 \right) = \frac{4}{3} \text{ τετραγωνικές μονάδες} \end{aligned}$$

Επομένως, $E_1 = E_2$.

A3. Να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$\sum_{\kappa=7}^{100} \kappa^2$$

Λύση

Έχουμε

$$\sum_{\kappa=7}^{100} \kappa^2 = \sum_{\kappa=1}^{100} \kappa^2 - \sum_{\kappa=1}^6 \kappa^2 = S_{100} - S_6,$$

όπου:

$$S_\nu = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \kappa^2 = \frac{\nu(\nu+1)(2\nu+1)}{6}$$

Επομένως:

$$\begin{aligned} \sum_{\kappa=7}^{100} \kappa^2 &= S_{100} - S_6 = \frac{100 \cdot 101 \cdot 201}{6} - \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} \\ &= 338350 - 91 = 338259 \end{aligned}$$

A4. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \kappa \sin x - \kappa^2 \eta \mu x + 1$, $\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$. Αν η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

(α) να βρείτε την τιμή του κ (μονάδες 2)

(β) να βρείτε τιμή ξ , για την οποία ικανοποιείται το συμπέρασμα του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (μονάδες 3)

Λύση

(α) Η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Άρα:

- f συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- f παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f'(x) = -\kappa \eta\mu x - \kappa^2 \sigma\upsilon\nu x$
- $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \kappa + 1 = 1 - \kappa^2 \Rightarrow \kappa^2 + \kappa = 0 \Rightarrow \kappa(\kappa + 1) = 0$
Επομένως, έχουμε ότι $\kappa = 0$ (απορρίπτεται) ή $\kappa = -1$.

(β) Έχουμε ότι:

$$f(x) = -\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x + 1, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Αφού πληρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Rolle, τότε:

$$\exists \xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : f'(\xi) = 0 \Rightarrow \eta\mu \xi - \sigma\upsilon\nu \xi = 0 \Rightarrow \eta\mu \xi = \sigma\upsilon\nu \xi \Rightarrow \xi = \frac{\pi}{4}$$

A5. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $u = 1 - x$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 x^\kappa (1-x)^\lambda dx = \int_0^1 x^\lambda (1-x)^\kappa dx$$

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 x(1-x)^{10} dx$$

Λύση

Θέτουμε $u = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - u$, οπότε $dx = -du$ και $x = 0 \Rightarrow u = 1, x = 1 \Rightarrow u = 0$. Σύμφωνα με τα πιο πάνω, έχουμε:

$$\int_0^1 x^\kappa (1-x)^\lambda dx = - \int_1^0 (1-u)^\kappa u^\lambda du = \int_0^1 u^\lambda (1-u)^\kappa du = \int_0^1 x^\lambda (1-x)^\kappa dx$$

Εφαρμόζοντας το πιο πάνω για $\kappa = 1$ και $\lambda = 10$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(1-x)^{10} dx &= \int_0^1 x^{10}(1-x) dx = \int_0^1 (x^{10} - x^{11}) dx \\ &= \left[\frac{x^{11}}{11} - \frac{x^{12}}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{12} = \frac{1}{132} \end{aligned}$$

A6. Πάνω σε κάθε πλευρά ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ ορίζουμε 10 σημεία, όλα διαφορετικά από τις κορυφές του Α, Β, Γ και Δ. Να βρείτε το πλήθος των τριγώνων που μπορούν να σχηματιστούν με κορυφές από τα 40 αυτά σημεία.

Λύση

Από όλες τις δυνατές τριάδες σημείων, που είναι $\binom{40}{3}$, αφαιρούμε τις περιπτώσεις όπου τα τρία σημεία είναι στην ίδια πλευρά και δεν σχηματίζονται τρίγωνα, που είναι $4 \cdot \binom{10}{3}$. Συνεπώς, το πλήθος των διαφορετικών τριγώνων που σχηματίζονται είναι $\binom{40}{3} - 4 \cdot \binom{10}{3} = 9400$.

2^{ος} τρόπος

Υπάρχουν δύο περιπτώσεις για να σχηματίσουμε τρίγωνα, όπως το πρόβλημα απαιτεί.

1^η περίπτωση

Επιλέγουμε 3 από τις 4 πλευρές του τετραγώνου κατά $\binom{4}{3} = 4$ διαφορετικούς τρόπους και σε δεύτερη φάση επιλέγουμε ένα σημείο από κάθε μια από τις τρεις πλευρές κατά 10 διαφορετικούς τρόπους για κάθε σημείο. Σύμφωνα με την Πολλαπλασιαστική Αρχή, σχηματίζονται $\binom{4}{3} \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 4000$ διαφορετικά τρίγωνα.

2^η περίπτωση

Επιλέγουμε 2 από τις 4 πλευρές του τετραγώνου κατά $\binom{4}{2} = 6$ διαφορετικούς τρόπους και σε δεύτερη φάση επιλέγουμε δύο σημεία από τη μία πλευρά κατά $\binom{10}{2} = 45$ διαφορετικούς τρόπους και ένα σημείο από την άλλη πλευρά κατά 10 διαφορετικούς τρόπους (δύο υποπεριπτώσεις). Σύμφωνα με την Πολλαπλασιαστική Αρχή, σχηματίζονται $2 \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{10}{2} \cdot 10 = 5400$ διαφορετικά τρίγωνα.

Τέλος, σύμφωνα με την Προσθετική Αρχή, σχηματίζονται $4000 + 5400 = 9400$ διαφορετικά τρίγωνα.

- A7. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$ και $A(2, 4)$. Αν η f είναι κυρτή στο διάστημα $[0, 2]$,

(α) να δείξετε ότι $f(x) \leq 2x, \forall x \in [0, 2]$ (μονάδες 3)

(β) να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x) dx \leq 4$ (μονάδες 2)

Λύση

(α) Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $O(0, 0)$ και $A(2, 4)$ έχει εξίσωση $y = 2x$.

Επειδή η f είναι συνεχής και κυρτή στο $[0, 2]$, ισχύει ότι:

$$f(x) \leq 2x, \forall x \in [0, 2]$$

(β) Αφού $f(x) \leq 2x, \forall x \in [0, 2]$, τότε από γνωστό θεώρημα έχουμε:

$$\int_0^2 f(x) dx \leq \int_0^2 2x dx \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx \leq [x^2]_0^2 \Rightarrow \int_0^2 f(x) dx \leq 4$$

- A8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \text{τοξεφ } x, x \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in \mathbb{R}$$

(μονάδες 1,5)

(β) Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \text{τοξεφ } x dx$$

(μονάδες 3,5)

Λύση

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση f με τύπο $y = f(x) = \text{τοξεφ } x$, $x \in \mathbb{R}$. Τότε:

$$x = \text{εφ } y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ότι:

$$1 = \text{τεμ}^2 y \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{τεμ}^2 y} = \frac{1}{1 + \text{εφ}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

(β) Έχουμε:

$$\begin{aligned} \int \text{τοξεφ } x \, dx &= x \cdot \text{τοξεφ } x - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} \, dx = x \cdot \text{τοξεφ } x - \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx \\ &= x \cdot \text{τοξεφ } x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \end{aligned}$$

A9. Δίνεται κύκλος (C) ο οποίος διέρχεται από την αρχή των αξόνων και αποκόπτει από τους θετικούς ημιάξονες των τετμημένων και τεταγμένων ευθύγραμμα τμήματα μήκους 6 και 8 αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι η εξίσωση του κύκλου (C) είναι $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

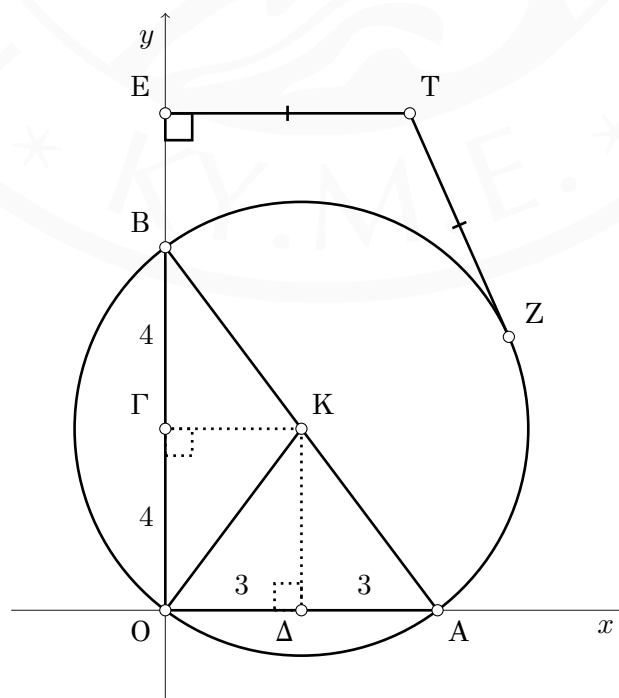
(μονάδες 2)

(β) Να βρείτε την εξίσωση της καμπύλης στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του σημείου $T(x, y)$ του επιπέδου του οποίου η απόσταση από τον άξονα των τεταγμένων είναι ίση με το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος που άγεται από το σημείο T προς τον κύκλο (C).

(μονάδες 3)

Λύση

(α) Κατασκευάζουμε το πιο κάτω σχήμα.



Από το κέντρο K του κύκλου φέρουμε τα αποστήματα $K\Gamma$ και $K\Delta$ των χορδών OB και OA , αντίστοιχα. Επειδή $BK = KO = KA = R$, τα τρίγωνα BKO και AKO είναι ισοσκελή. Επομένως, τα ύψη τους $K\Gamma$ και $K\Delta$ είναι και διάμεσοι των τριγώνων BKO και AKO , αντίστοιχα. Άρα:

$$x_K = (O\Delta) = 3, \quad y_K = (O\Gamma) = 4 \Rightarrow K(3, 4), \quad R = (OK) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Επομένως, η εξίσωση του κύκλου είναι:

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$$

(β) Είναι

$$(TE)^2 = (TZ)^2 \Rightarrow x^2 = x^2 + y^2 - 6x - 8y \Rightarrow y^2 - 6x - 8y = 0,$$

που είναι η ζητούμενη εξίσωση.

A10. Δίνεται η λέξη **ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ**.

(α) Να βρείτε το πλήθος των αναγραμματισμών της πιο πάνω λέξης.

(μονάδες 1)

(β) Σε πόσους από τους πιο πάνω αναγραμματισμούς:

i. τα δύο «Ε» είναι σε συνεχόμενες θέσεις και ταυτόχρονα τα δύο «Ι» είναι σε μη συνεχόμενες θέσεις.

(μονάδες 2)

ii. υπάρχουν ακριβώς δύο γράμματα μεταξύ των δύο «Ε» τα οποία είναι και τα δύο σύμφωνα.

(μονάδες 2)

Λύση

(α) Πλήθος αναγραμματισμών της λέξης **ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ**:

$$\frac{9!}{2!2!} = 90720$$

(β) i. Πλήθος αναγραμματισμών της λέξης **ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ** που έχουν τα δύο «Ε» σε συνεχόμενες θέσεις:

$$\frac{8!}{2!} = 20160 \quad (1)$$

Πλήθος αναγραμματισμών της λέξης **ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ** που έχουν τα δύο «Ε» σε συνεχόμενες θέσεις και τα δύο «Ι» σε συνεχόμενες θέσεις:

$$7! = 5040 \quad (2)$$

Από (1) και (2), το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης **ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ** που έχουν τα δύο «Ε» σε συνεχόμενες θέσεις και τα δύο «Ι» σε μη συνεχόμενες θέσεις είναι $20160 - 5040 = 15120$.

- ii. Το πλήθος των τρόπων που μπορούμε να τοποθετήσουμε δύο από τα τέσσερα σύμφωνα «Π», «Τ», «Χ» και «Σ» μεταξύ των δύο «Ε» είναι:

$$\Delta_2^4 = \frac{4!}{2!} = 12 \quad (3)$$

Έστω «ΕΠΤΕ» μια από τις πιο πάνω διατάξεις. Τότε, το πλήθος των αναγραμματισμών που περιέχουν την λέξη «ΕΠΤΕ» είναι:

$$\frac{6!}{2!} = 360 \quad (4)$$

Από (3) και (4), το πλήθος των αναγραμματισμών της λέξης ΕΠΙΤΥΧΙΕΣ που περιέχουν ακριβώς δύο γράμματα μεταξύ των δύο «Ε», τα οποία είναι και τα δύο σύμφωνα, είναι:

$$12 \cdot 360 = 4320$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από 5 ασκήσεις. Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1}$$

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες των συντεταγμένων.

(μονάδες 2)

- (β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης.

(μονάδες 6)

- (γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .

(μονάδες 2)

Λύση

- (α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αφού $x^2 + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ως πηλίκιο συνεχών συναρτήσεων, η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Στη συνέχεια, βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων.

- Αν $x = 0$, τότε $f(0) = 0$.
- Αν $y = f(x) = 0$, τότε:

$$\frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = 0 \Rightarrow \ln(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$$

Επομένως, το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το $(0, 0)$.

(β) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2+1}(x^2+1) - 2x \ln(x^2+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x(1 - \ln(x^2+1))}{(x^2+1)^2}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \ln(x^2+1) = 1 \Rightarrow x^2+1 = e \Rightarrow x = \pm\sqrt{e-1} \end{cases}$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f' .

x	$-\infty$	$-\sqrt{e-1}$	0	$\sqrt{e-1}$	$+\infty$				
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
f			$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα, έχουμε:

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, -\sqrt{e-1}]$ και $[0, \sqrt{e-1}]$, ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στα $[-\sqrt{e-1}, 0]$ και $[\sqrt{e-1}, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικά μέγιστα για $x = \pm\sqrt{e-1}$, τα $f(-\sqrt{e-1}) = \frac{1}{e}$, $f(\sqrt{e-1}) = \frac{1}{e}$ και τοπικό ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$.

Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της, τότε δεν θα αναζητήσουμε κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού της f . Δηλαδή, υπολογίζουμε τα όρια της συνάρτησης, όταν $x \rightarrow \pm\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2+1) = +\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2+1) = +\infty$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Εξετάζουμε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του De l' Hospital. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)'}{(x^2+1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x(x^2+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

Επομένως, ισχύει ότι:

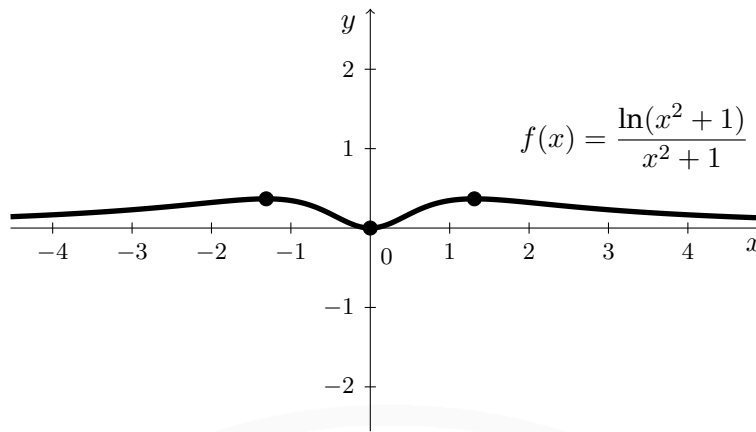
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

Ομοίως, ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Άρα, η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$, στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

(γ) Η γραφική παράσταση της f φαίνεται πιο κάτω.



B2. Δίνεται έλλειψη με κέντρο την αρχή των αξόνων, εστίες $E(\gamma, 0)$ και $E'(-\gamma, 0)$, $\gamma > 0$, μεγάλο άξονα $A'A$ και μικρό άξονα $B'B$, τέτοια ώστε η γωνία $E'BE$ είναι ορθή.

(α) Να υπολογίσετε την εκκεντρότητα της έλλειψης. (μονάδες 2)

(β) Αν οι διεθευτούσες της έλλειψης έχουν εξισώσεις $x = \pm 4\sqrt{2}$ να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης. (μονάδες 2)

(γ) Αν η εξίσωση της έλλειψης είναι η $x^2 + 2y^2 = 16$, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το χωρίο που περικλείεται μεταξύ των ευθύγραμμων τμημάτων BE , AE και της γραφικής παράστασης της έλλειψης στο πρώτο τεταρτημόριο, περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα των τετμημένων. (μονάδες 6)

Λύση

(α) Έχουμε ότι:

$$E'B \perp EB \Rightarrow \lambda_{E'B} \cdot \lambda_{EB} = -1 \Rightarrow \frac{\beta}{\gamma} \cdot \left(\frac{-\beta}{\gamma} \right) = -1 \Rightarrow \beta^2 = \gamma^2$$

Ισχύει ότι:

$$a^2 = \beta^2 + \gamma^2 \quad \text{και} \quad a > \beta > 0, \gamma > 0$$

Άρα:

$$a^2 = 2\gamma^2 \Rightarrow a = \gamma\sqrt{2}$$

Η εκκεντρότητα είναι:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{\gamma}{\gamma\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(β) Είναι

$$\frac{a}{\varepsilon} = 4\sqrt{2} \Rightarrow a = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4$$

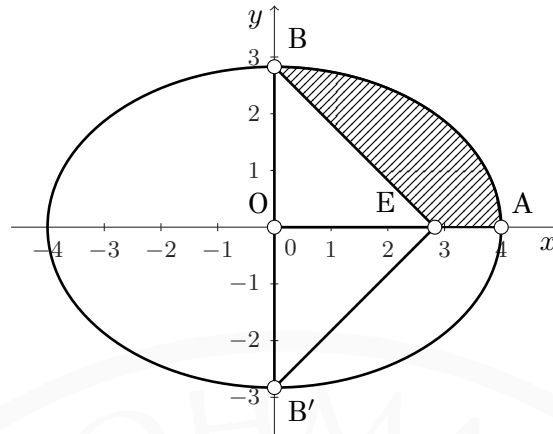
και:

$$2\beta^2 = 2\gamma^2 = a^2 = 16 \Rightarrow \beta^2 = 8 \Rightarrow \beta = \gamma = 2\sqrt{2}$$

Έτσι, η εξίσωση της έλλειψης είναι η:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{8} = 1$$

(γ) Κατασκευάζουμε το πιο κάτω σχήμα.



Έχουμε:

$$x^2 + 2y^2 = 16 \Rightarrow y^2 = 8 - \frac{1}{2}x^2$$

Ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 y^2 dx - V_{\text{κώνου}} = \pi \int_0^4 \left(8 - \frac{1}{2}x^2\right) dx - \frac{\pi (2\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{2}}{3} \\ &= \pi \left[8x - \frac{x^3}{6}\right]_0^4 - \frac{\pi \cdot 16\sqrt{2}}{3} = \pi \left(32 - \frac{32}{3}\right) - \frac{\pi \cdot 16\sqrt{2}}{3} \\ &= \pi \cdot \frac{64}{3} - \frac{\pi \cdot 16\sqrt{2}}{3} = \frac{16\pi}{3} (4 - \sqrt{2}) \quad \text{κυβικές μονάδες} \end{aligned}$$

B3. Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή παράγωγο, η οποία ικανοποιεί την σχέση:

$$x^2 \cdot f(x) = x + \int_1^x t \cdot f(t) dt, \quad \forall x > 0$$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 1$.

(μονάδες 1)

(β) Να αποδείξετε ότι $\forall x > 0$ ισχύει:

$$x \cdot f'(x) + f(x) = \frac{1}{x}$$

(μονάδες 4)

(γ) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

(μονάδες 5)

Λύση

(α) Για $x = 1$, έχουμε:

$$1^2 \cdot f(1) = 1 + \int_1^1 t \cdot f(t) dt = 1$$

Άρα, $f(1) = 1$.

(β) Επειδή η f είναι παραγωγίσιμη, τότε είναι και συνεχής. Άρα και η συνάρτηση $g(t) = t f(t)$ είναι συνεχής. Συνεπώς, από το Θεμελιώδες Θεώρημα Ολοκλη-

ρωτικού Λογισμού, έχουμε:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_1^x t \cdot f(t) dt \right) = xf(x)$$

Παραγωγίζοντας λοιπόν και τα δύο μέλη της δεδομένης εξίσωσης, για $x > 0$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} 2xf(x) + x^2 f'(x) &= 1 + xf(x) \Rightarrow xf(x) + x^2 f'(x) = 1 \\ &\Rightarrow f(x) + xf'(x) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

(γ) Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g, h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $g(x) = xf(x)$ και $h(x) = \ln x$ για $x > 0$. Έχουμε

$$g'(x) = f(x) + xf'(x) = \frac{1}{x} = h'(x)$$

για $x > 0$. Άρα, υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε

$$g(x) = h(x) + c \Rightarrow xf(x) = \ln x + c$$

για κάθε $x > 0$. Τότε:

$$f(x) = \frac{\ln x + c}{x}$$

Για $x = 1$, παίρνουμε:

$$1 = f(1) = \frac{\ln 1 + c}{1} = c$$

Άρα

$$f(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$$

για $x > 0$.

B4. Δίνεται η παραβολή με εξίσωση $y^2 = 4x$ και η εστιακή χορδή AB όπου $A(t^2, 2t)$, $t > 0$ και $B(\rho^2, 2\rho)$. Από τα σημεία A και B φέρουμε κάθετες προς την διευθετούσα της παραβολής, την οποία τέμνουν στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα.

(α) Να δείξετε ότι $t\rho = -1$. (μονάδες 2)

(β) Αν $S = (A\Gamma) + (B\Delta)$, να δείξετε ότι $S = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$. (μονάδες 4)

(γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου t ώστε το S να ελαχιστοποιείται. (μονάδες 4)

Λύση

(α) Η δοσμένη παραβολή $y^2 = 4x$ έχει εξίσωση διευθετούσας $x = -1$ και εστία $E(1, 0)$. Τα σημεία $A(t^2, 2t)$ με $t > 0$, $E(1, 0)$, $B(\rho^2, 2\rho)$ με $\rho < 0$ είναι συνευ-

θειακά. Άρα:

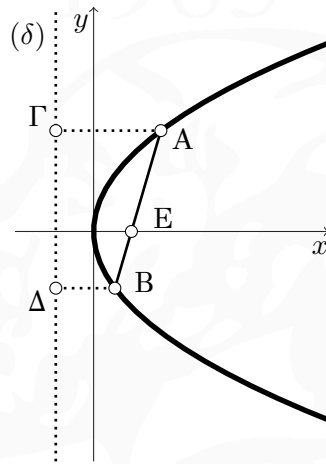
$$\begin{aligned}\lambda_{EA} = \lambda_{EB} &\Rightarrow \frac{y_A - y_E}{x_A - x_E} = \frac{y_B - y_E}{x_B - x_E} \Rightarrow \frac{2t - 0}{t^2 - 1} = \frac{2\rho - 0}{\rho^2 - 1} \\ &\Rightarrow t\rho^2 - t = \rho t^2 - \rho \Rightarrow t\rho(\rho - t) + (\rho - t) = 0 \\ &\Rightarrow (\rho - t)(t\rho + 1) = 0 \Rightarrow t\rho = -1 \quad (t \neq \rho)\end{aligned}$$

2^{ος} τρόπος

Είναι:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} t^2 & 2t & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ \rho^2 & 2\rho & 1 \end{vmatrix} &= 0 \Rightarrow 2t\rho^2 + 2\rho - 2\rho t^2 - 2t = 0 \\ &\Rightarrow 2(\rho - t)(t\rho + 1) = 0 \Rightarrow t\rho = -1 \quad (t \neq \rho)\end{aligned}$$

(β) Κατασκευάζουμε το πιο κάτω σχήμα.



Έχουμε ότι:

$$(A\Gamma) = |x_A - x_\Gamma| = t^2 + 1 \quad \text{και} \quad (B\Delta) = |x_B - x_\Delta| = \rho^2 + 1$$

Αφού $t\rho = -1$, τότε $\rho = -\frac{1}{t}$ και:

$$S = (A\Gamma) + (B\Delta) = t^2 + 1 + \rho^2 + 1 = t^2 + \frac{1}{t^2} + 2$$

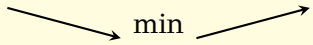
(γ) Έχουμε ότι:

$$S'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} = \frac{2t^4 - 2}{t^3}$$

Έτσι:

$$S'(t) = 0 \Rightarrow \frac{2t^4 - 2}{t^3} = 0 \Rightarrow t = 1 \quad (t > 0)$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την S' .

t	0	1	$+\infty$
$S'(t)$		- 0 +	
S			

Παρατηρούμε ότι για $t = 1$ η απόσταση S παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

2^{ος} τρόπος

$$S'(t) = 2t - \frac{2}{t^3} \quad \text{και} \quad S''(t) = 2 + \frac{6}{t^4}$$

Έτσι,

$$S'(t) = 0 \Rightarrow \frac{2t^4 - 2}{t^3} = 0 \Rightarrow t = 1 \quad (t > 0)$$

και

$$S''(1) = 8 > 0$$

Παρατηρούμε ότι για $t = 1$ η απόσταση S παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, αφού η $t = 1$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $S'(t) = 0$.

B5. Δίνονται τρία δοχεία με μπάλες. Το πρώτο και το δεύτερο δοχείο περιέχουν από μία κόκκινη και δύο άσπρες μπάλες το καθένα, ενώ το τρίτο δοχείο περιέχει τρεις άσπρες μπάλες. Όλες οι μπάλες του ίδιου χρώματος είναι όμοιες μεταξύ τους. Επιλέγουμε τυχαία ένα δοχείο και στη συνέχεια επιλέγουμε τυχαία από αυτό δύο μπάλες, χωρίς επανατοποθέτηση.

- (α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου οι δύο μπάλες να είναι άσπρες. (μονάδες 3)
- (β) Αν γνωρίζουμε ότι οι δύο μπάλες που επιλέξαμε είναι άσπρες, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε να είναι κόκκινη. (μονάδες 5)
- (γ) Αν γνωρίζουμε ότι από τις δύο μπάλες που επιλέξαμε, ακριβώς μία είναι άσπρη, να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου η μπάλα που έμεινε στο δοχείο που επιλέξαμε να είναι άσπρη. (μονάδες 2)

Λύση

Συμβολίζουμε τα ενδεχόμενα:

Δ_i : «Επιλέγουμε το δοχείο i », με $i = 1, 2, 3$

KA : «Επιλέγουμε μια μπάλα κόκκινη και μια μπάλα άσπρη»

AA : «Επιλέγουμε δύο μπάλες άσπρες»

(α) Είναι:

$$\begin{aligned} P(AA) &= P(AA \cap \Delta_1) + P(AA \cap \Delta_2) + P(AA \cap \Delta_3) \\ &= P(\Delta_1)P(AA|\Delta_1) + P(\Delta_2)P(AA|\Delta_2) + P(\Delta_3)P(AA|\Delta_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{5}{9} \end{aligned}$$

(β) Συμβολίζουμε το ενδεχόμενο:

$$K_i : \text{«Έμεινε κόκκινη μπάλα στο δοχείο } \Delta_i\text{»}, \text{ με } i = 1, 2, 3$$

Τότε:

$$\begin{aligned} P(K|AA) &= P(K_1|AA) + P(K_2|AA) + P(K_3|AA) \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} + \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{9}} + 0 = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

(γ) Αφού είναι γνωστό ότι επιλέξαμε μία άσπρη και μία κόκκινη μπάλα, τότε είναι βέβαιο ότι, οποιοδήποτε δοχείο και αν επιλέξαμε αρχικά (πρώτο δοχείο ή δεύτερο), στο δοχείο παραμένει άσπρη μπάλα. Επομένως, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με 1.

2^{ος} τρόπος

Συμβολίζουμε το ενδεχόμενο

$$A_i : \text{«Έμεινε άσπρη μπάλα στο δοχείο } \Delta_i\text{»}, \text{ με } i = 1, 2, 3$$

Αρχικά, υπολογίζουμε την πιθανότητα

$$\begin{aligned} P(KA) &= P(KA \cap \Delta_1) + P(KA \cap \Delta_2) + P(KA \cap \Delta_3) \\ &= P(\Delta_1)P(KA|\Delta_1) + P(\Delta_2)P(KA|\Delta_2) + P(\Delta_3)P(KA|\Delta_3) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{3}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\binom{1}{1} \cdot \binom{2}{1}}{\binom{3}{2}} + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + 0 = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

ή:

$$P(KA) = 1 - P(AA) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}$$

Τότε:

$$\begin{aligned} P(A|KA) &= P(A_1|KA) + P(A_2|KA) + P(A_3|KA) \\ &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} + \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} + 0 = 1 \end{aligned}$$