

Προτεινόμενες Λύσεις ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ Κατεύθυνσης της 31/05/2019

(με αναλυτικό σχολιασμό)

Τα θέματα βρίσκονται αναρτημένα στον πιο κάτω σύνδεσμο

http://archeia.moec.gov.cy/mc/164/2019_05_31_37_themata.pdf

Περίληψη: Προτείνουμε λύσεις για το εξεταστικό δοκίμιο του μαθήματος 'Μαθηματικά κατεύθυνσης' της 31/05/2019. Λόγω της πρόσφατης αλλαγής των σχολικών βιβλίων, δίνουμε σχόλια και επισημάνσεις στις λύσεις αυτές.

Μέρος Α

❶ Εκ της γραμμικότητας του αορίστου ολοκληρώματος,

$$\begin{aligned}\int \left(6x^2 + \eta\mu x + \frac{4}{x} - 2\right) dx &= 2 \int 3x^2 dx + \int \eta\mu x dx + 4 \int \frac{dx}{x} - 2 \int dx \\ &= 2x^3 - \sigma\upsilon\nu x + 4 \ln|x| - 2x + c\end{aligned}$$

για κάποια (αυθαίρετη πραγματική) σταθερά c .

❷ Καταρχάς, αφού τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, έπεται ότι

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B) \quad (1)$$

Τώρα, έχουμε

$$P(A) = 1 - P(A') = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Έτσι, από την (1) λαμβάνουμε

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

(α) Είναι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4} = P(A')$$

(β) Είναι

$$P(A - B) = P(A \cap B') = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

❸ Είναι $E(\alpha, 0) \equiv E(5, 0)$ και $E'(-\alpha, 0) \equiv E'(-5, 0)$.

(α) Έχουμε (αφού $\alpha = 5 > 4 = \beta$)

$$\gamma = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$$

και άρα

$$\text{εκκεντρότητα} = \varepsilon = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{4}{5}$$

(β) Έστω $T(x_1, y_1)$ τυχαίο σημείο της έλλειψης. Τότε,

$$(TE') - (TE) = (\alpha + \varepsilon x_1) - (\alpha - \varepsilon x_1) = 2\varepsilon x_1 = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot x_1 = \frac{8}{5} \cdot x_1$$

Σχόλιο: οι πιο πάνω τύποι για τις αποστάσεις σημείου από τις εστίες της έλλειψης ευρίσκονται στο σχολικό βιβλίο και μπορούν να χρησιμοποιηθούν έτοιμοι.

❹ (α) Βρίσκουμε τα σημεία τομής της καμπύλης με τις ευθείες:

$$\begin{cases} f(x) = e^x \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow f(1) = e \text{ και } \begin{cases} f(x) = e^x \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

1ος τρόπος: με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τετμημένων

Είναι

$$E = \int_0^1 |f(x) - 1| dx = \int_0^1 |e^x - 1| dx \quad \begin{matrix} e^x - 1 \geq 0 \\ \forall x \in [0,1] \end{matrix} = \int_0^1 (e^x - 1) dx = \left[e^x - x \right]_0^1 = (e - 2) \text{ τ.μ.}$$

2ος τρόπος: με διαμερίσεις ως προς τον άξονα των τεταγμένων και διαφορά του από το ορθογώνιο (δυσκολότερο)

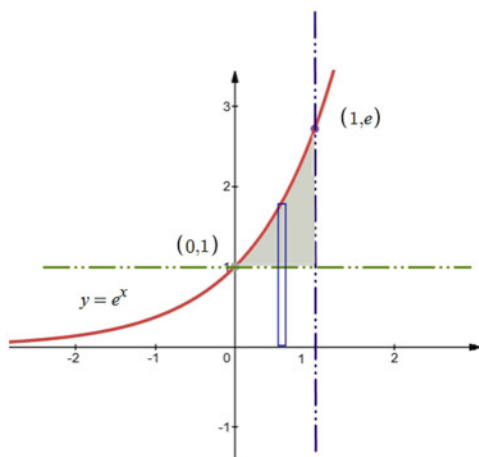
Είναι $y = e^x, x \in [0,1] \Leftrightarrow x = \ln y, y \in [1, e]$ (κατα τα γνωστά, αφού η συνάρτηση $y = e^x$ είναι γνησίως αύξουσα) και έτσι

$$E = E(\text{ορθ.}) - \int_1^e \ln y dy = 1 \cdot (e - 1) - \int_1^e \ln y dy = e - 1 - \left[y(\ln y - 1) \right]_1^e = e - 1 - 1 = e - 2 \text{ τ.μ.}$$

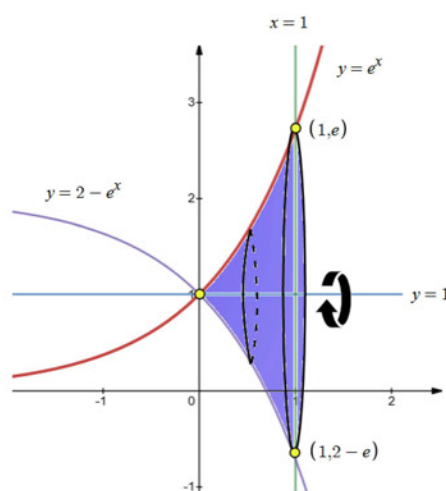
Σχόλιο: Μπορείτε να κατασκευάσετε μια πρόταση που να συνδέει τους 2 αυτούς τρόπους;

(β) (Με τη μέθοδο των κυκλικών δίσκων) Είναι: ακτίνα κυκλικού δίσκου $\rho_1(x) = f(x) - 1 = e^x - 1$ και αρα

$$V = \pi \int_0^1 \rho_1^2(x) dx = \pi \int_0^1 (e^x - 1)^2 dx = \dots = \frac{\pi}{2} (e^2 - 4e + 5) \text{ κ.μ.}$$



(α) με διαμερίσεις ως προς τον
άξονα των τετμημένων



(β)

5 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σύνολο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του (ως πολυωνυμική). Επίσης, εύκολα βλέπουμε ότι $f(0) = 1 = f(2)$. Ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Rolle για την f στο διάστημα $[0,2]$: υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Αλλά, $\forall x \in (0,2)$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$ και αρα

$$(\xi \in (0,2): f'(\xi) = 0) \Leftrightarrow (\xi \in (0,2): 3\xi^2 - 6\xi + 2 = 0)$$

Λύνουμε την $3\xi^2 - 6\xi + 2 = 0$: είναι

$$\xi_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \in (0,2)$$

και αρα

$$(\xi \in (0,2): 3\xi^2 - 6\xi + 2 = 0) \Leftrightarrow \xi_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

Σχόλιο: Σύμφωνα με τον ορισμό του παραγώγου αριθμού στη Β Λυκείου, δεν έχει νόημα να μιλάμε για παράγωγο αριθμό στα άκρα ενός διαστήματος, παρόλο που μπορεί να υπάρχουν οι

πλευρικές παράγωγοι στα σημεία αυτά. Άλλοτε όμως, όταν γράφουμε ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο (συμπαγές) σύνολο $[a, b]$, εννοούμε ότι είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλ. στο (a, b) και οι $f'_+(a)$ και $f'_-(b)$ να υπάρχουν.

Στο Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού, δεν απαιτείται η ύπαρξη των μερικών παραγώγων στα άκρα του διαστήματος (αυστηρότερα στο σύνορο του συνόλου) για την ισχύ του, παρα μόνο η συνέχεια σε όλο το διάστημα. Θα είναι 'ορθότερο' λοιπόν (αφού οι μαθητές δεν έχουν διδαχθεί σημεία συσσώρευσης και γενικότερα δεν μπορούν να αντιληφθούν την έννοια των συνοριακών συνθηκών) να αναφέρουμε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[a, b]$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλ. στο (a, b) .

⑥ Είναι $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, -1\})$

$$\frac{1}{(\kappa + 1) \cdot (\kappa + 2)} = \frac{A}{\kappa + 1} + \frac{B}{\kappa + 2}$$

ισοδύναμα $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, -1\})$

$$0\kappa + 1 = (A + B)\kappa + 2A + B$$

Έτσι, εξισώνοντας συντελεστή με συντελεστή των πολωνύμων στα δυο μέλη, λαμβάνουμε το 2x2 σύστημα

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases}$$

το οποίο λύνεται εύκολα: ευρίσκουμε $A = -B = 1$ και αρα

$$\frac{1}{(\kappa + 1) \cdot (\kappa + 2)} = \frac{1}{\kappa + 1} - \frac{1}{\kappa + 2} \quad (2)$$

Το μερικό άθροισμα S_n της εν λόγω σειράς ($n \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο) είναι

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{\kappa=1}^n \frac{1}{(\kappa + 1) \cdot (\kappa + 2)} \stackrel{(2)}{=} \sum_{\kappa=1}^n \left(\frac{1}{\kappa + 1} - \frac{1}{\kappa + 2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{1+1} - \frac{1}{1+2} \right) + \left(\frac{1}{2+1} - \frac{1}{2+2} \right) + \left(\frac{1}{3+1} - \frac{1}{3+2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{(n-1)+1} - \frac{1}{(n-1)+2} \right) \\ &\quad + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Είναι τότε

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{2}$$

αφού τα όρια $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}$ και $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+2}$ υπάρχουν και είναι ίσα με $\frac{1}{2}$ και 0 αντίστοιχα. Έτσι, η σειρά

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{(\kappa + 1) \cdot (\kappa + 2)}$$

συγκλίνει και μάλιστα στον αριθμό $\frac{1}{2}$.

Σχόλιο: Η σειρά αυτή συγκλίνει αφού συμπεριφέρεται το ίδιο (ως προς τη σύγκλιση) με τη σειρά

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$$

(η οποία συγκλίνει) και αποτελεί περίπτωση τηλεσκοπικής σειράς οπότεν μπορούμε να βρούμε εύκολα σε ποιο (πραγματικό) αριθμό συγκλίνει.

7 Θεωρούμε το μετασχηματισμό x με $x(\theta) = \eta\mu\theta, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ο μετασχηματισμός αυτός είναι αντιστρέψιμος (αφού $x'(\theta) = \sigma\upsilon\nu\theta > 0$) και ιδιαίτερα γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Έτσι, απεικονίζει με 1-1 και επί τρόπο το διάστημα $\left[0, \tau\omicron\xi\eta\mu\left(\frac{1}{2}\right)\right]$ στο διάστημα $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Είναι

$$\tau\omicron\xi\eta\mu\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητής στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα, έχουμε

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{\sqrt{1-\eta\mu^2\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\theta}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{|\sigma\upsilon\nu\theta|} dx$$

και αφού $\sigma\upsilon\nu\theta > 0, \forall \theta \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ έχουμε ότι $|\sigma\upsilon\nu\theta| = \sigma\upsilon\nu\theta$ και

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{|\sigma\upsilon\nu\theta|} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu^2\theta d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(2\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2} \left[\theta - \frac{\eta\mu(2\theta)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Σχόλιο: Πρέπει και επιβάλλεται (αφού η μονοτονία είναι στη σχολική ύλη) να γίνεται αυστηρή χρήση του Θεωρήματος Αλλαγής Μεταβλητής στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα καθόσον η διαδικασία θα τους είναι χρήσιμη στο μέλλον.

Θεώρημα [Αλλαγή Μεταβλητής στο Ορισμένο Ολοκλήρωμα]

Έστω $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Έστω $\varphi: [c, d] \rightarrow [a, \beta]$ ($c < d$) παραγωγίσιμη συνάρτηση με την παράγωγό της να είναι συνεχής συνάρτηση και $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in [c, d]$. Τότε

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(\beta)} (f \circ \varphi)(t) \cdot |\varphi'(t)| dt$$

Με τις υποθέσεις του πιο πάνω Θεωρήματος, έχουμε ότι αν φ γνησίως αύξουσα, τότε

$$\int_a^\beta f(x) dx = \int_c^d (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) dt$$

ενω αν φ γνησίως φθίνουσα, τότε

$$\int_a^\beta f(x) dx = - \int_d^c (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) dt$$

8 Είναι

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\} \cap (0, +\infty) = (0, +\infty)$$

Η f είναι συνεχής στο π.ο. της (ως σύνθεση τέτοιων).

Συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του διαστήματος του π.ο. της

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -0^+} \left(x + \frac{\ln x}{x+1} \right) = -\infty$$

αφού

$$\lim_{x \rightarrow -0^+} x = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -0^+} \left(\frac{\ln x}{x+1} \right) = -\infty$$

Άρα, το γράφημα της συνάρτησης έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τον άξονα των τεταγμένων.

Τώρα,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{\ln x}{x+1} \right)$$

Ελέγχουμε την ύπαρξη του $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x+1} \right)$. Το όριο αυτό αποτελεί απροσδιόριστη μορφή τύπου $\frac{+\infty}{+\infty}$. Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x+1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

και αρα (από κανόνα του DeL'Hospital) έχουμε

$$0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x+1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1}$$

Επίσης, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$. Συνεπώς, το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ υπάρχει (στην εκτεταμένη ευθεία των πραγματικών αριθμών) και είναι ίσο με $+\infty$.

Εύρεση πλάγιας ασύμπτωτης

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x(x+1)} \right)$$

Κάνοντας και πάλι χρήση κανόνα του De L'Hospital, ευρίσκουμε ότι το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x(x+1)}$ υπάρχει και είναι ίσο με 0. Συνεπώς,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x(x+1)} \right) = 1 + 0 = 1$$

Τέλος,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = 0$$

από πρίν. Έτσι, η ευθεία με εξίσωση $y = 1 \cdot x + 0$, δηλ. η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη του γραφήματος της f στο $+\infty$.

Τέλος, η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη (λόγω της συνέχειάς της).

Σχόλιο: Η f αποτελεί παράδειγμα συνάρτησης στην οποία η πλάγια ασύμπτωτή της τέμνει το γράφημά της.

❶ (α) Το ζητούμενο πλήθος είναι ίσο με το πλήθος των επαναληπτικών διατάξεω 9 ψηφίων (2 ίδια, 2 ίδια, 4 ίδια):

$$\frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 4!}$$

(β) Θεωρούμε τα 2 ως ένα ψηφίο. Άρα έχουμε 6 ψηφία στα οποία επαναλαμβάνονται δυο τεσσάρια και 2 μονάδες:

$$\frac{6!}{2! \cdot 2!}$$

(γ) **Βήμα 1:** Επιλογή άρτιας θέσης για τοποθέτηση των ψηφίων 1,1,3: $\binom{4}{3} = 4$ τρόποι.

Βήμα 2: Σε κάθε μια από τις πιο πάνω θέσεις, τα ψηφία 1,1,3 έχουν $\frac{3!}{2!} = 3$ τρόπους για να μετατεθούν μεταξύ τους

Βήμα 3: Τοποθέτηση των υπόλοιπων 6 ψηφίων στις υπόλοιπες θέσεις:

$$\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15 \text{ τρόποι}$$

Έτσι, από την πολλαπλασιαστική αρχή, το ζητούμενο πλήθος τρόπων είναι

$$4 \cdot 3 \cdot 15 = 180$$

10 (α) Έστωσαν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$. Υποθέτουμε χωρίς απώλεια της γενικότητας ότι $x_1 < x_2$. Τότε έχει νόημα το διάστημα $[x_1, x_2]$ και $[x_1, x_2] \subseteq [\alpha, \beta]$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ (ως περιορισμός συνεχούς συνάρτησης) και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλ. στο (x_1, x_2) (αφού $(x_1, x_2) \subseteq (\alpha, \beta)$ και f παραγωγίσιμη στο (α, β) -οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη). Έτσι πληρούνται όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος της Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού για την f στο διάστημα $[x_1, x_2]$, σύμφωνα με το οποίο θα υπάρχει (τουλάχιστον) ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

και αφού $x_1 < x_2$, δηλ. $x_2 \neq x_1$, η πιο πάνω δίνει

$$(x_2 - x_1) \cdot f'(\xi) = f(x_2) - f(x_1)$$

Αλλά, από υπόθεση, θα είναι $f'(\xi) > 0$ και αφού $x_2 > x_1$, δηλ. $x_2 - x_1 > 0$, έπεται από την τελευταία σχέση ότι $f(x_2) - f(x_1) > 0$, δηλ. $f(x_2) > f(x_1)$. Αφού τα x_1, x_2 ήταν **τυχόντα** έπεται το συμπέρασμα (ότι δηλ. η f είναι γνησίως αύξουσα).

(β) Η συνάρτηση είναι καλά ορισμένη στο $[0, +\infty)$ αφού $e^x + \frac{x^3}{3} > 0, \forall x \in [0, +\infty)$. Επίσης, είναι και συνεχής στο π.ο. της και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του, δηλ. στο $(0, +\infty)$. Έχουμε $\forall x \in (0, +\infty)$:

$$f'(x) = \frac{e^x + x^2}{e^x + \frac{x^3}{3}}$$

Έτσι, $f'(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ και αρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ και λόγω της (δεξιάς) συνέχειας της f στο άκρο 0 του διαστήματός της, έπεται ότι θα είναι αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

(δεξιά) συνέχεια της f στο άκρο 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(e^x + \frac{x^3}{3} \right) = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(e^x + \frac{x^3}{3} \right) \right) = \ln 1 = 0 = f(0)$$

Μέρος Β

❶ Εύρεση πεδίου ορισμού

Η συνάρτηση είναι ρητή, άρα

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 \neq 0\}$$

$$\text{Αλλά, } x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \text{ και άρα } D(f) = \mathbb{R}$$

Εύρεση σημείων τομής με τους άξονες

Είναι $f(0) = 0$ και $f(x) = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Έτσι, το γράφημα της συνάρτησης τέμνει μόνο μια φορά τον άξονα των τετμημένων, στο σημείο $(0,0)$.

Η συνάρτηση είναι συνεχής στο π.ο. της.

Εύρεση διαστημάτων μονοτονίας και τοπικών ακροτάτων

Η συνάρτηση είναι παντού παραγωγίσιμη στο π.ο. της και

$$f'(x) = -6 \frac{x^2 - 1}{(x^2 + x + 1)^2} = -6 \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2 + x + 1)^2}, \quad \forall x \in D(f) = \mathbb{R}$$

Άρα, αφού η παράγωγος συνάρτηση είναι παντού ορισμένη, τα κρίσιμά της σημεία (υποψήφια Τ.Α.) είναι τα σημεία τα οποία αποτελούν λύσεις της εξίσωσης $f'(x) = 0$, δηλ. τα $x = \pm 1$. Βοηθητικά και μόνο κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f' :

x	$-\infty$	-1	$+1$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$
	Min		Max	

Έτσι,

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1)$ και $(1, +\infty)$ και λόγω της συνέχειάς της, γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1, 1)$ και και λόγω της συνέχειάς της στα άκρα αυτού, γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.

Από τα πιο πάνω, το ότι $f'(-1) = 0$ και $f'(1) = 0$, έπεται από το κριτήριο πρώτης παραγώγου ότι η συνάρτηση λαμβάνει μέγιστη τιμή για $x = 1$ και ελάχιστη για $x = -1$. Είναι $f(-1) = -6$ και $f(1) = 2$.

Εύρεση ασυμπτώτων

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x}{x^2 + x + 1} = 6 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2} = 6 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

και άρα ο άξονας των τετμημένων είναι οριζόντια σύμπτωτη στο γράφημα της f .

Η συνάρτηση δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη αφού είναι παντού συνεχής.

Για τη γραφική αναπαράσταση της συνάρτησης πρέπει να μελετήσουμε την κυρτότητά της

Η συνάρτηση είναι δις παραγωγίσιμη παντού με

$$f''(x) = 12 \frac{x^3 - x - 1}{(x^2 + x + 1)^3}, \quad \forall x \in D(f) = \mathbb{R}$$

Είναι $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 1 = 0$. Η ύπαρξη και εύρεση των ριζών κυβικών πολυωνύμων είναι εκτός σχολικής ύλης. Μπορούμε όμως, με χρήση του Θεωρήματος του Bolzano (ύλη Β Λυκείου κατ.) να δείξουμε ότι αυτό έχει 3 διακεκριμένες ρίζες, μια ρίζα x_1 στο διάστημα $(-2, -1)$, μια

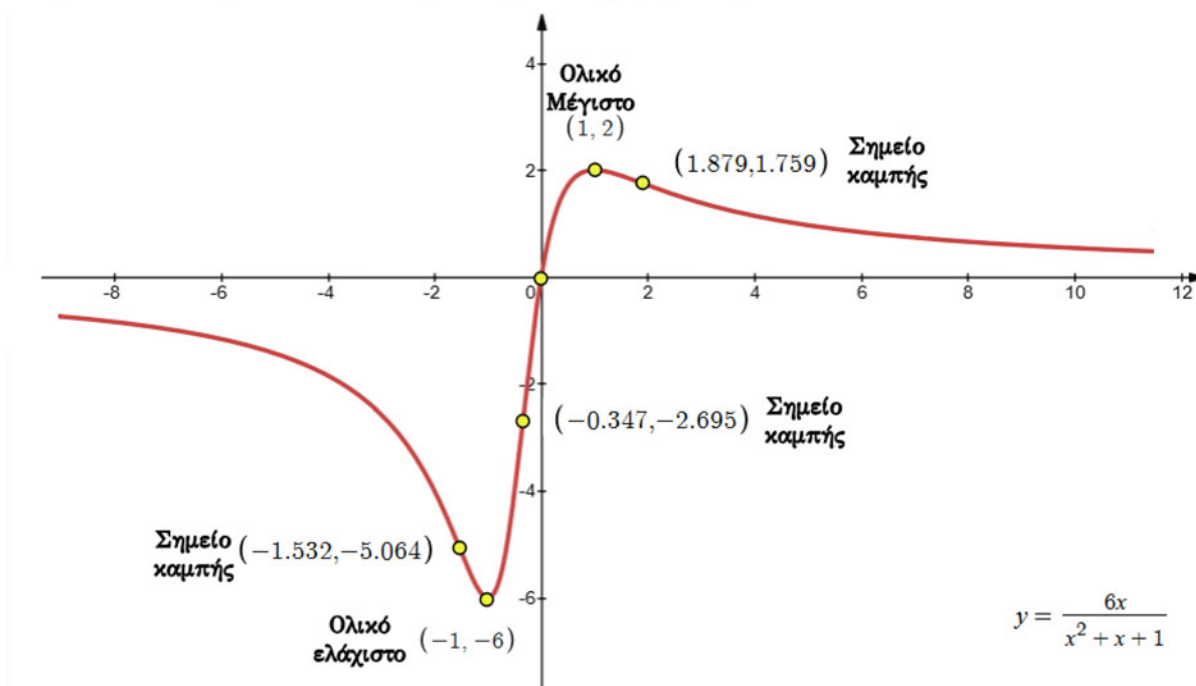
ρίζα x_2 στο διάστημα $(-1,0)$ και μια ρίζα x_3 στο διάστημα $(1,2)$. Αυτό είναι αναμενόμενο αφού στα διαστήματα αυτά η συνάρτηση θα αλλάζει καμπυλότητα (αφού παρουσιάζει 2 Τ.Α. και είναι συνεχής συνάρτηση). Ιδιαίτερα, με μεθόδους που δεν άπτονται επί του σχολικού προγράμματος, οι ρίζες αυτές είναι οι

$$x_1 = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{2\pi}{9}\right) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{9}\right), \quad x_2 = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{14\pi}{9}\right) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{9}\right), \quad x_3 = -2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{8\pi}{9}\right) = 2\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

Έτσι, η συνάρτηση είναι:

κοίλη στα διαστήματα $(-\infty, x_1)$ και (x_2, x_3) και κυρτή στο διάστημα (x_1, x_2) . Παρουσιάζει Σ.Κ. στα σημεία με $x = x_1$, $x = x_2$ και $x = x_3$.

Επίσης, το σημείο τοπικού μεγίστου είναι σημείο ολικού μεγίστου και το σημείο τοπικού ελαχίστου είναι σημείο ολικού ελαχίστου για το γράφημα της f .



Σχόλια: Έστω f μια ρητή συνάρτηση, δηλ. της μορφής $f = \frac{P}{Q}$ όπου P και Q πολυώνυμα.

A. Αν $\deg(P) < \deg(Q)$

Διαισθητικά, αν ο βαθμός του αριθμητή είναι (γνήσια) μικρότερος από το βαθμό του παρονομαστή, δηλ. ο παρονομαστής 'υπερισχύει' του αριθμητή, θα αναμένουμε αυτός να 'έλκει' το γράφημα της συνάρτησης στην αρχή των αξόνων δίνοντάς μας έτσι μια οριζόντια ασύμπτωτη: τον άξονα των τετμημένων. Πράγματι, θα έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$$

B. Αν $\deg(P) = \deg(Q) = m$, γράφουμε

$P(x) = a_m x^m + \dots + a_1 x + a_0$ και $Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$
όπου $a_m, b_m \neq 0$. Τότε

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{a_m}{b_m} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

και αρα η ευθεία $y = \frac{a_m}{b_m}$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της f

C. Αν $\deg(P) > \deg(Q)$

Διαισθητικά, αν ο βαθμός του αριθμητή είναι (γνήσια) μεγαλύτερος από το βαθμό του παρονομαστή, δηλ. ο αριθμητής 'υπερισχύει' του παρονομαστή, θα αναμένουμε αυτός να 'έλκει' το γράφημα της συνάρτησης μακριά από τον άξονα των τεταγμένων ή από οποιαδήποτε άλλη σταθεροποιημένη τιμή στον άξονα των τεταγμένων. Πράγματι, είναι

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{\beta(x)}{Q(x)}$$

όπου $\deg(A) = 1$ και $\deg(\beta) < \deg(P)$ και έτσι

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - A(x)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\beta(x)}{Q(x)} = 0$$

Συνεπώς, η ευθεία $y = A(x)$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της f

D. Αποδεικνύεται ότι οι ρητές συναρτήσεις $f = \frac{P}{Q}$, με βαθμό του αριθμητή P μεγαλύτερο τουλάχιστον κατά δύο του βαθμού του παρονομαστή Q , δεν έχουν πλάγιες ασύμπτωτες.

② Θεωρούμε τα ακόλουθα ενδεχόμενα

A: "ο μαθητής μεταβαίνει στο σχολείο με αυτοκίνητο"

B: "ο μαθητής μεταβαίνει στο σχολείο με λεωφορείο"

Γ: "ο μαθητής μεταβαίνει στο σχολείο με τα πόδια"

K: "ο μαθητής μεταβαίνει στο σχολείο με καθυστέρηση" (σαφώς, 'άσχετα' με το πώς αφίχθη)

Από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$P(A) = \frac{3}{10}, \quad P(B) = \frac{3}{5}, \quad P(\Gamma) = \frac{1}{10}$$

Επίσης, από τα δεδομένα του προβλήματος έχουμε:

$$P(K|A) = \frac{1}{4}, \quad P(K|B) = \frac{1}{3}, \quad P(K|\Gamma) = \frac{1}{8}$$

(α) Είναι

$$\begin{aligned} P(K) &= P(K|A) \cdot P(A) + P(K|B) \cdot P(B) + P(K|\Gamma) \cdot P(\Gamma) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{10} \\ &= \frac{3}{40} + \frac{1}{5} + \frac{1}{80} = \frac{23}{80} \end{aligned}$$

Σχολιο: Εδώ γίνεται χρήση του Θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας με διαμέριση του χώρου σε 3 ενδεχόμενα, στα A, B και Γ. Στα σχολικά εγχειρίδια, τέτοια προβλήματα αντιμετωπίζονται με δέντροδιαγράμματα.

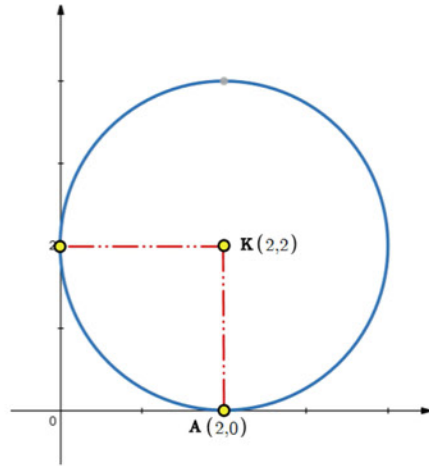
(β) Είναι

$$P(B|K) = \frac{P(K \cap B)}{P(K)} = \frac{P(K|B) \cdot P(B)}{P(K)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5}}{\frac{23}{80}} = \frac{16}{23}$$

Σχολιο: Είναι a posteriori Πιθανότητα.

③ Κύκλος κέντρου $K(x_K, y_K)$ και ακτίνας $R > 0$. Αφού $(KA) \perp xx'$, έπεται ότι $x_K = x_A = 2$. Επίσης, για τον ίδιο λόγο, $R = 2$. Αλλά αφού ο κύκλος εφάπτεται του άξονα των τεταγμένων, έχουμε ότι $d(K, yy') = R = 2$ και αρα $y_K = 2$. Συνεπώς, $K(2, 2)$. Έτσι, ο κύκλος που ψάχνουμε έχει εξίσωση

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$



(β) Είναι

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

Αφού $\theta \neq 0, 2\pi$, η εφαπτομένη στο σημείο $T(2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta, 2 + 2\eta\mu\theta)$ δεν μπορεί να είναι κατακόρυφη (αφού $\theta \neq 0, 2\pi \Rightarrow \eta\mu\theta \neq 0$). Θα βρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο T :

Παραγωγίζουμε πεπλεγμένα την εξίσωση του κύκλου:

$$2(x-2) + 2(y-2)y' = 0$$

δηλ. (αφού $\theta \neq 0, 2\pi \Rightarrow y \neq 2 \Rightarrow y-2 \neq 0$)

$$y' = \frac{2-x}{y-2}$$

και αρα στο σημείο T είναι

$$y'(2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta) = \frac{2 - (2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)}{(2 + 2\eta\mu\theta) - 2} = -\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}$$

(διαφορετικά: $(KT) \perp (\epsilon\varphi.) \Rightarrow \lambda_{\epsilon\varphi.} = -\frac{1}{\lambda_{KT}}$). Έτσι, η εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο T είναι η

$$y - (2 + 2\eta\mu\theta) = -\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{\eta\mu\theta}(x - (2 + 2\eta\mu\theta))$$

δηλ. η

$$(\eta\mu\theta)y + (\sigma\upsilon\nu\theta)x = 2\sigma\upsilon\nu\theta + 2\eta\mu\theta + 2 \quad (\theta \neq 0, 2\pi)$$

(γ) Θέτοντας $y = 0$ στην πιο πάνω εξίσωση της εφαπτομένης, λαμβάνουμε $x_B = 2 + 2\epsilon\varphi\theta + 2\tau\epsilon\mu\theta$.

Θα βρούμε την εξίσωση της (TA) :

$$\lambda_{TA} = \frac{0 - (2 + 2\eta\mu\theta)}{2 - (2 + 2\sigma\upsilon\nu\theta)} = \frac{1 + \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} \quad \left(\theta \neq 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$$

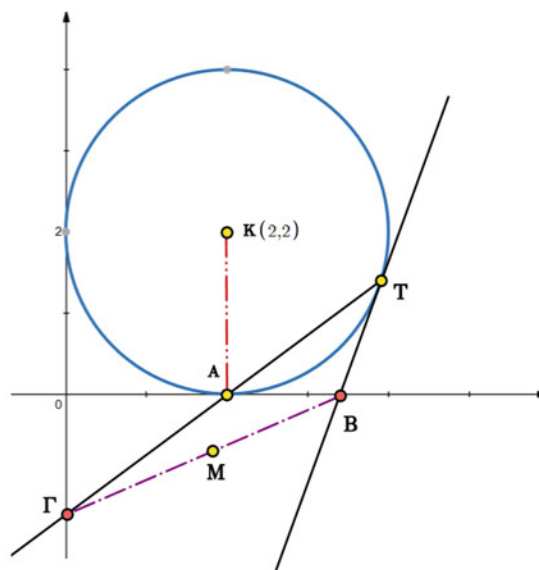
και αρα τελικά

$$(TA): y = \frac{1 + \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta}(x - 2)$$

Θέτοντας $x = 0$ στην πιο πάνω εξίσωση, λαμβάνουμε $y_\Gamma = -2\tau\epsilon\mu\theta - 2\epsilon\varphi\theta$. Έτσι,

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_B + x_\Gamma}{2} = \frac{1 + 2\epsilon\varphi\theta + 2\tau\epsilon\mu\theta + 0}{2} = 1 + \epsilon\varphi\theta + \tau\epsilon\mu\theta \\ y_M = \frac{y_B + y_\Gamma}{2} = \frac{0 - 2\tau\epsilon\mu\theta - 2\epsilon\varphi\theta}{2} = -\epsilon\varphi\theta - \tau\epsilon\mu\theta \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $x_M + y_M = 1$ και άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του μέσου M είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 1 - x$.



4 (α) Η συνάρτηση g είναι δις παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$g'(x) = -e^{-x} \text{ και } g''(x) = e^{-x}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Έτσι, αφού $g''(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$, έπεται ότι η συνάρτηση είναι παντού κυρτή.

(β) Είναι $A(0, g(0)) \equiv A(0, 1)$. Είναι $g'(0) = -1$ και άρα η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της g στο $A(0, 1)$ είναι η

$$y - y_A = g'(0) \cdot (x - x_A)$$

δηλ. η

$$y + x = 1$$

(γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = g(x) - f(x)$$

όπου $f(x) = 1 - x$. Δηλ.

$$h(x) = e^{-x} - 1 + x$$

Η h είναι παντού παραγωγίσιμη (ως διαφορά παραγωγίσιμων) με

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) = 1 - e^{-x}$$

Τα κρίσιμά της σημεία είναι μόνο αυτά στα οποία $h'(x) = 0$. Έχουμε

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Παρατηρούμε ότι

$h'(x) < 0, \forall x \in (-\infty, 0)$ και άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό και $h'(x) > 0, \forall x \in (0, +\infty)$ και άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό και αφού $h'(0) = 0$, έπεται από το κριτήριο πρώτης παραγώγου ότι η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο σημείο με $x = 0$. Ιδιαίτερα (άσκηση για τον αναγνώστη) το σημείο αυτό είναι και σημείο ολικού ελαχίστου για τη συνάρτηση. Έτσι, $\forall x \in \mathbb{R}$

$$h(x) \geq \underbrace{h(0)}_{=0}$$

δηλ. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^{-x} - 1 + x \geq 0$$

δηλ. $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^{-x} \geq 1 - x$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι η $f(x)$ είναι ακριβώς η εξίσωση της εφαπτομένης του γραφήματος της g στο $A(0, 1)$ και αρα η πιο πάνω ανίσωση αντανακλά το ότι το γράφημα μιας κυρτής συνάρτησης (με την έννοια του σχολικού βιβλίου-για παραγωγίσιμες συναρτήσεις) είναι 'πάνω' από το (επι)γράφημα της συνάρτησης. Η ερμηνεία όμως αυτή δεν εμπίπτει στο σκοπό της σχολικής ύλης.

5 (α) 1ος τρόπος (με πεπλεγμένη παραγωγή)

Έχουμε για $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\begin{aligned} y = \operatorname{τοξεφ} x & \Leftrightarrow x = \varepsilon\varphi y & \Leftrightarrow \frac{dx}{dx} = \frac{d\varepsilon\varphi y}{dx} \\ \text{Πεπλεγμένη παραγωγή} & \Leftrightarrow 1 = \varepsilon\mu y \cdot \varepsilon\varphi y \frac{dy}{dx} & \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varepsilon\mu^2 y} \\ y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \varepsilon\mu y \neq 0 & \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 y} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R} \\ \varepsilon\mu^2 y = 1 + \varepsilon\varphi^2 y & \end{aligned}$$

2ος τρόπος (με τον ορισμό)

Έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{τοξεφ}(x+h) - \operatorname{τοξεφ}(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{τοξεφ}(x+h) - \operatorname{τοξεφ}(-x)}{h} && \text{Η } y = \operatorname{τοξεφ} x \text{ είναι περιττή (ίσως εκτός ΣΧΟΛΙΚΗΣ ύλης)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{τοξεφ}(x+h) - \operatorname{τοξεφ}(-x)}{h} && \text{(εκτός ΣΧΟΛΙΚΗΣ ύλης)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \operatorname{τοξεφ} \left(\frac{x+h-x}{1+x(x+h)} \right) \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \operatorname{τοξεφ} \left(\frac{h}{1+x^2+hx} \right) \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{h} \cdot \left(\frac{h}{1+x^2+hx} \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{h}{1+x^2+hx} \right)^3 + \frac{1}{53} \left(\frac{h}{1+x^2+hx} \right)^5 \right. && \text{(Ανάπτυγμα Taylor-εκτός ΣΧΟΛΙΚΗΣ ύλης)} \\ &\quad \left. + \text{όροι τάξεως 7 ως προς } h \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1+x^2+hx} - \frac{h^2}{3(1+x^2+hx)^2} + \frac{h^3}{5(1+x^2+hx)^5} + \text{όροι τάξεως 6 ως προς } h \right) \\ &= \frac{1}{1+x^2+0x} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιούμε το προηγούμενο ερώτημα και τον κανόνα της αλυσίδας.

Κατ'αρχάς, είναι $f(x) = (g \circ h)(x)$, όπου $h(x) = x^2$ και $g(x) = \operatorname{τοξεφ}(x)$. Έτσι,

$$D(f) = \{x \in D(h) \mid h(x) \in D(g)\} = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση f είναι παντού παραγωγίσιμη (ως σύνθεση τέτοιων) και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι

$$f'(x) = (\text{τοξεφ}(x^2))' = \underbrace{(\text{τοξεφ})'(x^2)}_{\text{απ'όπρ'όν}} \cdot (x^2)' = \frac{2x}{1+(x^2)^2} = \frac{2x}{1+x^4}$$

Έλεγχος μονοτονίας+Τ.Α.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια (εύκολο). Συνεπώς, αρκεί να τη μελετήσουμε στο διάστημα $(0, +\infty)$. Είναι

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4} > 0, \quad \forall x > 0$$

και άρα είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$. Λόγω της συνέχειας στο $x = 0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. Αφού $f(0) = \text{τοξεφ}(0) = 0$, έπεται ότι

$$f(x) \geq \underbrace{f(0)}_{=0}, \quad \forall x > 0$$

Έπεται ότι (λόγω της συνέχειας και του ότι είναι άρτια) ότι είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και από τα πιο πάνω,

$$f(x) \geq \underbrace{f(0)}_{=0}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ιδιαίτερα, είναι $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(γ) Αφού η συνάρτηση g είναι συνεχής, έπεται ότι και η $h(x) = x^3 g(x^2)$, $x \in [0, \alpha]$ είναι συνεχής, άρα κατά Riemann ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε το μετασχηματισμό $u: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ με $u(x) = x^2$

ο οποίος είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού του κα μάλιστα γνησίως αύξουσα συνάρτηση ($\frac{du}{dx} = 2x > 0, \forall x \in [0, \alpha]$). Έτσι, από το **Θεώρημα Αλλαγής μεταβλητής στο Ορισμένο ολοκλήρωμα**,

$$\int_0^\alpha x^3 g(x^2) dx = \int_0^\alpha x g(x^2) x^2 dx = \frac{1}{2} \int_{u(0)}^{u(\alpha)} u g(u) du = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha^2} u g(u) du \equiv \frac{1}{2} \int_0^{\alpha^2} x g(x) dx$$

(δ) Από τα πιο πάνω ερωτήματα, έχουμε ότι $h(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$ και $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Είναι

$$h(1) = \text{τοξεφ}(1) = \frac{\pi}{4}$$

και άρα

$$E = \int_0^1 x^3 \text{τοξεφ}(x^2) dx \stackrel{(\beta)}{=} \frac{1}{2} \int_0^{1^2} x \text{τοξεφ}(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \text{τοξεφ}(x) dx$$

Κατά τα γνωστά (ολοκλήρωση κατά μέρη)

$$\int x \text{τοξεφ}(x) dx = \frac{1}{2} (x^2 \text{τοξεφ}(x) + \text{τοξεφ}(x) - x) + c$$

και άρα

$$E = \frac{1}{2} \left[x^2 \text{τοξεφ}(x) + \text{τοξεφ}(x) - x \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \text{ τ.μ.}$$

Σχόλιο: Θα ήταν προτιμότερο το χωρίο ολοκλήρωσης στο ερώτημα (δ) να περιγραφεί ως

το εμβαδόν του χωρίου που βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο $h(x) = x^3 \text{τοξεφ}(x^2)$, δεξιά από την ευθεία με εξίσωση $x = 0$ και αριστερά από την ευθεία με εξίσωση $x = 1$.

Επιστημονική επιμέλεια:

Ιωακείμ Ιωάννης

31/05/2019