



ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2019

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: 31/05/2019

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το αόριστο ολοκλήρωμα:

$$\int \left(6x^2 + \eta\mu x + \frac{4}{x} - 2 \right) dx$$

Λύση

Είναι:

$$\begin{aligned} \int \left(6x^2 + \eta\mu x + \frac{4}{x} - 2 \right) dx &= \frac{6x^3}{3} - \sigma\upsilon\nu x + 4 \ln |x| - 2x + c \\ &= 2x^3 - \sigma\upsilon\nu x + 4 \ln |x| - 2x + c \end{aligned}$$

2. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B του ίδιου δειγματικού χώρου Ω , με $P(A') = \frac{3}{4}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$.

Αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα, να βρείτε τις πιθανότητες:

(α) $P(A \cup B)$

(β) $P(A - B)$

Λύση

Αρχικά, έχουμε ότι:

$$P(A') = 1 - P(A) \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Επιπλέον, τα ενδεχόμενα A και B είναι ανεξάρτητα. Επομένως:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$

(α) Είναι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$$

(β) Είναι:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

3. Δίνεται η έλλειψη $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$, με εστίες E και E'.

(α) Να βρείτε την εκκεντρότητα της έλλειψης.

(β) Αν $T(x_1, y_1)$ είναι τυχαίο σημείο της έλλειψης, να αποδείξετε ότι:

$$(TE') - (TE) = \frac{8}{5}x_1$$

Λύση

(α) Έχουμε:

$$\left. \begin{matrix} a^2 = 25 \\ \beta^2 = 9 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} a = 5 \\ \beta = 3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \gamma^2 = a^2 - \beta^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow \gamma = 4$$

Επομένως:

$$\varepsilon = \frac{\gamma}{a} = \frac{4}{5}$$

(β) Για τυχαίο σημείο $T(x_1, y_1)$ της έλλειψης, ισχύει:

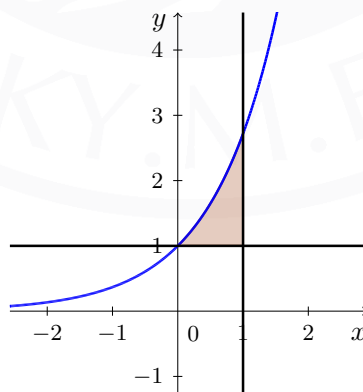
$$(TE') - (TE) = (a + \varepsilon x_1) - (a - \varepsilon x_1) = 2\varepsilon x_1 = 2 \cdot \frac{4}{5}x_1 = \frac{8}{5}x_1$$

4. (α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , με τύπο $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και των ευθειών $x = 1$ και $y = 1$.

(β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του πιο πάνω χωρίου, γύρω από την ευθεία $y = 1$.

Λύση

(α) Το χωρίο που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , με τύπο $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ και των ευθειών $x = 1$ και $y = 1$ φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα.



Είναι:

$$E = \int_0^1 (e^x - 1) dx = [e^x - x]_0^1 = (e - 2) \text{ τετραγωνικές μονάδες}$$

(β) Είναι:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (e^x - 1)^2 dx = \pi \int_0^1 (e^{2x} - 2e^x + 1) dx \\ &= \pi \left[\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + x \right]_0^1 = \left(\frac{e^2}{2} - 2e + \frac{5}{2} \right) \pi \text{ κυβικές μονάδες} \end{aligned}$$

5. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$. Να δείξετε ότι ικανοποιούνται για τη συνάρτηση f όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0, 2]$. Στη συνέχεια, να βρείτε τα $\xi \in (0, 2)$, που ικανοποιούν το συμπέρασμα του θεωρήματος του Rolle.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 2]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα $(0, 2)$, ως πολυωνυμική. Επιπλέον, έχουμε ότι $f(0) = f(2) = 1$. Επομένως, ικανοποιούνται για τη συνάρτηση f όλες οι υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0, 2]$, σύμφωνα με το οποίο υπάρχει $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = 0$.

Η παράγωγος της συνάρτησης f δίνεται από τον τύπο:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2, \quad x \in (0, 2)$$

Έχουμε:

$$f'(\xi) = 0 \Rightarrow 3\xi^2 - 6\xi + 2 = 0 \Rightarrow \xi_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$$

Οι δύο πιο πάνω τιμές του ξ είναι δεκτές, αφού $\frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \in (0, 2)$.

6. Να αναλύσετε το κλάσμα

$$\frac{1}{(\kappa + 1)(\kappa + 2)}$$

σε άθροισμα απλών κλασμάτων και να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{(\kappa + 1)(\kappa + 2)}$$

Λύση

Αναλύουμε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων ως ακολούθως:

$$\frac{1}{(\kappa + 1)(\kappa + 2)} = \frac{A}{\kappa + 1} + \frac{B}{\kappa + 2}$$

Έχουμε:

$$1 \equiv A(\kappa + 2) + B(\kappa + 1)$$

Δίνουμε τιμές στο κ και παίρνουμε ότι:

$$\kappa = -1 \Rightarrow A = 1$$

$$\kappa = -2 \Rightarrow B = -1$$

Έτσι:

$$\frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)} = \frac{1}{\kappa+1} - \frac{1}{\kappa+2}$$

Το μερικό άθροισμα της σειράς είναι:

$$\begin{aligned} S_\nu &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)} = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \left(\frac{1}{\kappa+1} - \frac{1}{\kappa+2} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{\nu+1} - \frac{1}{\nu+2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{\nu+2} \end{aligned}$$

Επομένως:

$$\lim_{\nu \rightarrow +\infty} S_\nu = \lim_{\nu \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\nu+2} \right) = \frac{1}{2}$$

Έτσι:

$$\sum_{\kappa=1}^{+\infty} \frac{1}{(\kappa+1)(\kappa+2)} = \frac{1}{2}$$

7. Χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x = \eta\mu\vartheta$, $\vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Λύση

Αν $x = \eta\mu\vartheta$, $\vartheta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, τότε $dx = \sigma\upsilon\nu\vartheta d\vartheta$ και:

x	0	$\frac{1}{2}$
ϑ	0	$\frac{\pi}{6}$

Είναι:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2\vartheta}{\sqrt{1-\eta\mu^2\vartheta}} \sigma\upsilon\nu\vartheta d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2\vartheta}{\sqrt{\sigma\upsilon\nu^2\vartheta}} \sigma\upsilon\nu\vartheta d\vartheta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2\vartheta}{|\sigma\upsilon\nu\vartheta|} \sigma\upsilon\nu\vartheta d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\eta\mu^2\vartheta}{\sigma\upsilon\nu\vartheta} \sigma\upsilon\nu\vartheta d\vartheta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \eta\mu^2\vartheta d\vartheta = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu(2\vartheta)}{2} d\vartheta \\ &= \left[\frac{\vartheta}{2} - \frac{\eta\mu(2\vartheta)}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

8. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = x + \frac{\ln x}{x+1}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0, +\infty)$ και η συνάρτηση είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού της. Δηλαδή, υπολογίζουμε τα όρια της συνάρτησης όταν $x \rightarrow 0$ και όταν $x \rightarrow +\infty$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(x + \frac{\ln x}{x+1} \right) = -\infty$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.

Ακολουθώντας, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{\ln x}{x+1} \right)$$

Εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x+1} \right)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x+1)'}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x+1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Επομένως, αφού ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του De l'Hospital, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x+1} \right) = 0$$

Έτσι,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{\ln x}{x+1} \right) = +\infty,$$

και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει οριζόντια ασύμπτωτη όταν $x \rightarrow +\infty$.

Θα βρούμε το όριο της $\frac{f(x)}{x}$, όταν $x \rightarrow +\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{\ln x}{x(x+1)} \right)$$

Εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x(x+1)} \right)$$

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+1) = +\infty$$

Άρα, έχουμε απροσδιόριστη μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$. Εξετάζουμε αν υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x(x+1))'}$$

Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)'}{(x(x+1))'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x^2 + x} = 0$$

Επομένως, αφού ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος του De l'Hospital, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x(x+1)} \right) = 0$$

Έτσι:

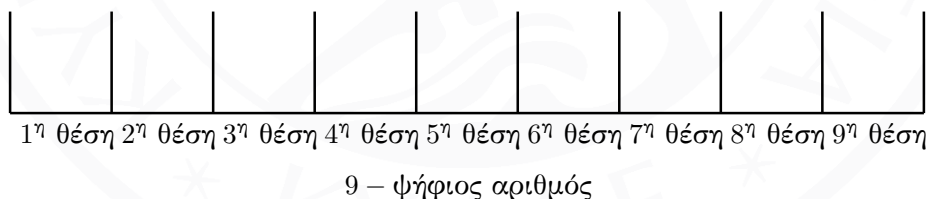
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x(x+1)} \right) = 1 = \lambda$$

Όταν $x \rightarrow +\infty$, ισχύει ότι:

$$\beta = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x+1} = 0$$

Επομένως, η ευθεία $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , όταν $x \rightarrow +\infty$.

9. (α) Να βρείτε πόσοι διαφορετικοί 9-ψήφιοι αριθμοί σχηματίζονται με τα ψηφία 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 4, 4.
- (β) Να βρείτε πόσοι από τους 9-ψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται στο ερώτημα (α) έχουν όλα τα 2 σε συνεχόμενες θέσεις.
- (γ) Να βρείτε πόσοι από τους 9-ψήφιους αριθμούς που σχηματίζονται στο ερώτημα (α) έχουν τα ψηφία 1, 1, 3 σε άρτιες θέσεις (δηλαδή στην 2^η, 4^η, 6^η, 8^η θέση).



Λύση

(α) Έχουμε επαναληπτικές μεταθέσεις των 9 ψηφίων. Δηλαδή:

$$M_9^e = \frac{9!}{2! \cdot 2! \cdot 4!} = 3780$$

(β) Θεωρούμε όλα τα 2 ως ένα αντικείμενο και έχουμε επαναληπτικές μεταθέσεις των 6 ψηφίων. Δηλαδή:

$$M_6^e = \frac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$$

(γ) Αρχικά, από τις 4 άρτιες θέσεις επιλέγουμε τις 3, για να τοποθετήσουμε τα ψηφία 1, 1, 3, με $\binom{4}{3} \cdot \frac{3!}{2!} = 12$ διαφορετικούς τρόπους.

Στη συνέχεια, τοποθετούμε τα υπόλοιπα 6 ψηφία στις θέσεις που είναι ακόμα κενές με $\frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ διαφορετικούς τρόπους.
Έτσι, από την Πολλαπλασιαστική Αρχή, έχουμε $12 \cdot 15 = 180$ διαφορετικούς 9-ψήφιους αριθμούς.

10. (α) Έστω $f : [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, συνάρτηση, συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β) . Αν $f'(x) > 0$, $x \in (a, \beta)$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = \ln \left(e^x + \frac{x^3}{3} \right)$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Λύση

- (α) Έστω $x_1, x_2 \in [a, \beta]$, με $x_1 < x_2$.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[x_1, x_2] \subseteq [a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (x_1, x_2) . Αφού η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στο διάστημα $[x_1, x_2]$, τότε υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Τώρα, αφού ισχύει ότι $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, \beta)$, και $x_2 - x_1 > 0$, τότε:

$$f'(\xi) > 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$

Δηλαδή, για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in [a, \beta]$, με $x_1 < x_2$, ισχύει ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Επομένως, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[a, \beta]$.

- (β) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$, με:

$$f'(x) = \frac{e^x + x^2}{e^x + \frac{x^3}{3}} > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty)$$

Επομένως, έπεται ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση f , με τύπο $f(x) = \frac{6x}{x^2 + x + 1}$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού, τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες των συντεταγμένων, τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας, τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, να την παραστήσετε γραφικά.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αφού $x^2 + x + 1 > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και, ως ρητή συνάρτηση, είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της.

Στη συνέχεια, βρίσκουμε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων.

- Αν $x = 0$, τότε $y = 0$.

- Αν $f(x) = 0$, τότε $x = 0$.

Επομένως, το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες των συντεταγμένων είναι το $(0, 0)$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = \frac{6(x^2 + x + 1) - 6x(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{-6x^2 + 6}{(x^2 + x + 1)^2}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -6(x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ ή } x = 1$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f' .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	<				

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα, έχουμε:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[1, +\infty)$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1, 1]$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = -1$, το $f(-1) = -6$, και τοπικό μέγιστο για $x = 1$, το $f(1) = 2$.

Η γραφική παράσταση της f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες, αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

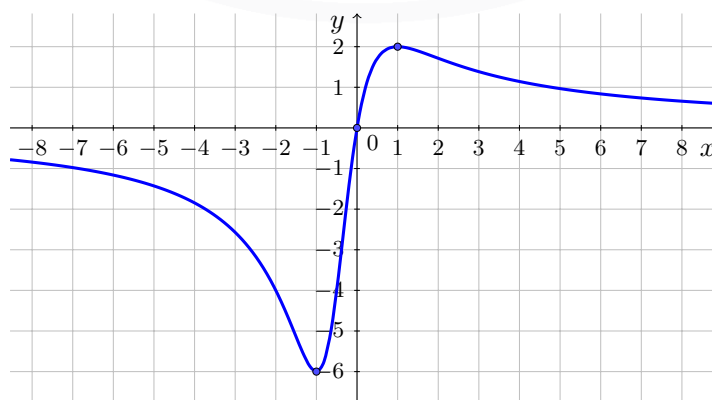
Εξετάζουμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης στα άκρα του πεδίου ορισμού της f . Δηλαδή, υπολογίζουμε τα όρια της συνάρτησης, όταν $x \rightarrow \pm\infty$. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6}{x} = 0$$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 0$, όταν $x \rightarrow +\infty$ και όταν $x \rightarrow -\infty$.

Η γραφική παράσταση της f φαίνεται πιο κάτω.



2. Ένα σχολείο έχει 200 μαθητές. Για τη μετάβαση τους στο σχολείο, 120 μαθητές χρησιμοποιούν λεωφορείο, 60 μαθητές χρησιμοποιούν αυτοκίνητο και οι υπόλοιποι πηγαίνουν με τα πόδια. Αν ένας μαθητής χρησιμοποιεί για τη μετάβασή του στο σχολείο λεωφορείο, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι $\frac{1}{3}$, αν χρησιμοποιεί αυτοκίνητο, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι $\frac{1}{4}$, ενώ αν πηγαίνει με τα πόδια, η πιθανότητα να καθυστερήσει είναι $\frac{1}{8}$. Επιλέγουμε στην τύχη έναν μαθητή του σχολείου.

- (α) Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής που επιλέξαμε να έχει καθυστερήσει το πρωί στο σχολείο.
 (β) Αν ο μαθητής που επιλέξαμε καθυστέρησε το πρωί να έλθει στο σχολείο, να βρείτε την πιθανότητα να ήλθε στο σχολείο με λεωφορείο.

Λύση

Ορίζουμε τα ενδεχόμενα:

A : «Ο μαθητής μεταβαίνει στο σχολείο με αυτοκίνητο»

Λ : «Ο μαθητής μεταβαίνει στο σχολείο με λεωφορείο»

Π : «Ο μαθητής μεταβαίνει στο σχολείο με τα πόδια»

K : «Ο μαθητής μεταβαίνει στο σχολείο με καθυστέρηση»

Τότε,

$$P(A) = \frac{3}{10}, \quad P(\Lambda) = \frac{3}{5}, \quad P(\Pi) = \frac{1}{10}$$

και:

$$P(K|A) = \frac{1}{4}, \quad P(K|\Lambda) = \frac{1}{3}, \quad P(K|\Pi) = \frac{1}{8}$$

(α) Είναι:

$$\begin{aligned} P(K) &= P(A \cap K) + P(\Lambda \cap K) + P(\Pi \cap K) \\ &= P(A) \cdot P(K|A) + P(\Lambda) \cdot P(K|\Lambda) + P(\Pi) \cdot P(K|\Pi) \\ &= \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{8} = \frac{23}{80} \end{aligned}$$

(β) Είναι:

$$P(\Lambda|K) = \frac{P(\Lambda \cap K)}{P(K)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{23}{80}} = \frac{16}{23}$$

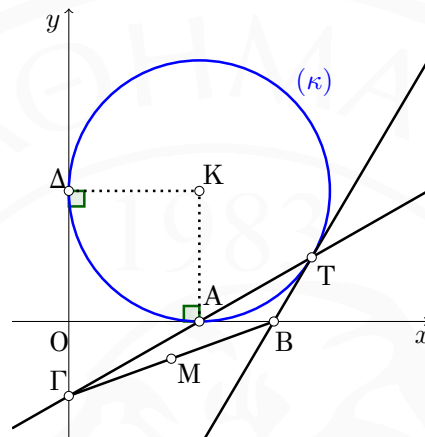
3. (α) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (κ), ο οποίος εφάπτεται στους θετικούς ημιάξονες των συντεταγμένων Ox και Oy και το σημείο επαφής του με τον θετικό ημιάξονα Ox είναι το σημείο $A(2, 0)$.
 (β) Αν ο πιο πάνω κύκλος (κ) έχει εξίσωση $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) του κύκλου (κ), σε τυχαίο σημείο του $T(2 + 2\sigma\eta\nu\vartheta, 2 + 2\eta\mu\vartheta)$, $\vartheta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, είναι $\sigma\eta\nu\vartheta \cdot x + \eta\mu\vartheta \cdot y = 2\sigma\eta\nu\vartheta + 2\eta\mu\vartheta + 2$.

- (γ) Η εφαπτομένη (ε) τέμνει τον άξονα των τετμημένων $x'x$ στο σημείο B και η ευθεία TA τέμνει τον άξονα των τεταγμένων $y'y$ στο σημείο Γ. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος BΓ.

Λύση

- (α) Ο κύκλος (κ), με κέντρο $K(a, \beta)$ και ακτίνα R , έχει εξίσωση:

$$(\kappa) : (x - a)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$



Από ακτίνα και εφαπτομένη στο T, έχουμε ότι $KA \perp x'x$ και $KD \perp y'y$. Έτσι, $a = 2$. Εύκολα παρατηρούμε ότι το τετράπλευρο ΚΑΟΔ είναι τετράγωνο. Συνεπώς, $a = \beta = R = 2$.

Έτσι, η εξίσωση του κύκλου (κ) είναι η:

$$(\kappa) : (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0$$

- (β) Η κλίση της KT είναι $\lambda_{KT} = \frac{\eta\mu\vartheta}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}$. Έτσι, από ακτίνα και εφαπτομένη, έχουμε ότι $KT \perp (\varepsilon)$ και η κλίση της εφαπτομένης (ε) είναι $\lambda_{(\varepsilon)} = -\frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu\vartheta}$. Επομένως:

$$\begin{aligned} (\varepsilon) : y - 2 - 2\eta\mu\vartheta &= -\frac{\sigma\upsilon\nu\vartheta}{\eta\mu\vartheta}(x - 2 - 2\sigma\upsilon\nu\vartheta) \\ \Rightarrow \eta\mu\vartheta \cdot y - 2\eta\mu\vartheta - 2\eta\mu^2\vartheta &= -\sigma\upsilon\nu\vartheta \cdot x + 2\sigma\upsilon\nu\vartheta + 2\sigma\upsilon\nu^2\vartheta \\ \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\vartheta \cdot x + \eta\mu\vartheta \cdot y &= 2\sigma\upsilon\nu\vartheta + 2\eta\mu\vartheta + 2(\eta\mu^2\vartheta + \sigma\upsilon\nu^2\vartheta) \\ \Rightarrow \sigma\upsilon\nu\vartheta \cdot x + \eta\mu\vartheta \cdot y &= 2\sigma\upsilon\nu\vartheta + 2\eta\mu\vartheta + 2 \end{aligned} \quad (1)$$

- (γ) Η κλίση της TA είναι $\lambda_{TA} = \frac{1 + \eta\mu\vartheta}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}$. Επομένως:

$$(TA) : y = \frac{1 + \eta\mu\vartheta}{\sigma\upsilon\nu\vartheta}(x - 2) \quad (2)$$

Από την (1) και την ευθεία $y = 0$, παίρνουμε ότι $B(2 + 2\varepsilon\varphi\vartheta + 2\tau\epsilon\mu\vartheta, 0)$.

Από την (2) και την ευθεία $x = 0$, παίρνουμε ότι $\Gamma(0, -2\tau\epsilon\mu\vartheta - 2\varepsilon\varphi\vartheta)$.

Οι συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ είναι:

$$M(1 + \varepsilon\vartheta + \tau\mu\vartheta, -\tau\mu\vartheta - \varepsilon\vartheta)$$

Επομένως, η εξίσωση της ευθείας στην οποία ανήκει ο γεωμετρικός τόπος του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος $B\Gamma$ είναι:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \varepsilon\vartheta + \tau\mu\vartheta \\ y = -\tau\mu\vartheta - \varepsilon\vartheta \end{array} \right\} \Rightarrow x + y = 1$$

4. Δίνεται η συνάρτηση g , με τύπο $g(x) = e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

- (α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς την κυρτότητα.
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $A(0, g(0))$.
- (γ) Να αποδείξετε ότι $e^{-x} \geq 1 - x$, $x \in \mathbb{R}$.

Λύση

- (α) Η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $g'(x) = -e^{-x}$ και $g''(x) = e^{-x}$. Ισχύει ότι $g''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως, η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
- (β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο της $A(0, g(0)) = (0, 1)$. Έχουμε:

$$\lambda_{(\varepsilon)} = g'(0) = -1$$

Επομένως:

$$(\varepsilon) : y - 1 = -x \Rightarrow y = 1 - x$$

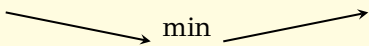
- (γ) Η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. Άρα, το διάγραμμα της g βρίσκεται πάνω από κάθε εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης σε οποιοδήποτε σημείο της, εκτός από το σημείο επαφής. Επομένως, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$g(x) \geq 1 - x \Rightarrow e^{-x} \geq 1 - x$$

Εναλλακτικά, ορίζουμε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = e^{-x} + x - 1$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(x) = -e^{-x} + 1 = \frac{e^x - 1}{e^x}$. Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f' .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα, έχουμε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$. Έτσι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, έχουμε ότι:

$$f(x) \geq f(0) = 0 \Rightarrow e^{-x} + x - 1 \geq 0 \Rightarrow e^{-x} \geq 1 - x$$

5. (α) Να αποδείξετε ότι $(\text{τοξεφ}x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- (β) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα, τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \text{τοξεφ}(x^2)$ και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.
- (γ) Αν g συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, a]$, $a > 0$, χρησιμοποιώντας την αντικατάσταση $x^2 = u$, να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^a x^3 g(x^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x g(x) dx$$

- (δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο $h(x) = x^3 \text{τοξεφ}(x^2)$, τον άξονα των τεταγμένων x' και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

Λύση

- (α) Θεωρούμε τη συνάρτηση k με τύπο $y = k(x) = \text{τοξεφ}x$, $x \in (-\infty, +\infty)$.

Τότε:

$$x = \varepsilon\varphi y, \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

Έχουμε:

$$\frac{d}{dx}(x) = \frac{d}{dx}(\varepsilon\varphi y) \Rightarrow 1 = \text{τεμ}^2 y \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\text{τεμ}^2 y} = \frac{1}{1 + \varepsilon\varphi^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

- (β) Το πεδίο ορισμού της f είναι:

$$A_f = \{x \in \mathbb{R} | x^2 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

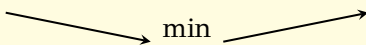
Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με:

$$f'(x) = \frac{2x}{1+x^4}$$

Έχουμε:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμου για την f' .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

Με βάση τον πιο πάνω πίνακα, έχουμε:

- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$, ενώ η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$.
- Η f παρουσιάζει τοπικό (ολικό) ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0)$. Έχουμε:

$$f(0) = \text{τοξεφ}0 = a \Leftrightarrow \varepsilon\varphi a = 0, \quad a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow a = 0$$

Τώρα, αφού το $f(0) = 0$ είναι το ολικό ελάχιστο της συνάρτησης f , έχουμε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ότι:

$$f(x) \geq f(0) \Rightarrow f(x) \geq 0$$

(γ) Αν $x^2 = u$, τότε $2x \, dx = du$ και:

x	0	a
u	0	a^2

Είναι:

$$\int_0^a x^3 g(x^2) \, dx = \int_0^a x^2 g(x^2) x \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} u g(u) \, du = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} x g(x) \, dx$$

(δ) Η συνάρτηση h έχει τύπο $h(x) = x^3 \text{τοξεφ}(x^2) = x^3 f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, όπου f η συνάρτηση του ερωτήματος (β). Έπεται, για κάθε $x \geq 0$, ότι $h(x) \geq 0$. Έτσι, το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με τύπο $h(x) = x^3 \text{τοξεφ}(x^2)$, τον άξονα των τεταγμένων $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$ είναι:

$$E = \int_0^1 h(x) \, dx = \int_0^1 x^3 f(x) \, dx$$

Τώρα, ορίζω συνάρτηση $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $g(x) = \text{τοξεφ}x$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο διάστημα $[0, 1]$ και ισχύει ότι $g(x^2) = \text{τοξεφ}(x^2)$. Άρα, συνδυάζοντας τα πιο πάνω, έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 h(x) \, dx = \int_0^1 x^3 f(x) \, dx = \int_0^1 x^3 g(x^2) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x g(x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x \text{τοξεφ}x \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \text{τοξεφ}x \, d(x^2) = \frac{1}{4} \left([x^2 \text{τοξεφ}x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\text{τοξεφ}1 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) \, dx \right) \\ &= \frac{1}{4} \text{τοξεφ}1 - \frac{1}{4} [x - \text{τοξεφ}x]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \text{τοξεφ}1 - \frac{1}{4} = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) \text{ τετραγωνικές μονάδες} \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι για το $\text{τοξεφ}1$ κάναμε τον εξής υπολογισμό:

$$\text{τοξεφ}1 = a \Rightarrow \varepsilon\varphi a = 1, \quad a \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow a = \frac{\pi}{4}$$