ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 260, Θεώρημα Fermat

Β. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελ. 213, Ορισμός

Γ. **α)** Σωστό **β)** Σωστό **γ)** Λάθος **δ)** Λάθος **ε)** Σωστό

ΘΕΜΑ 2ο

α. Για το πεδίο ορισμού της f έχουμε $x \geq 0$, οπότε: $A = (0,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x) = 2x\ln x + x^2\frac{1}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1) \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

Οπότε υπολογίζουμε τη μονοτονία και τα ακρότατα της f κατασκευάζοντας τον πίνακα:

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$\boxed{-\frac{1}{2e}}$ ελάχ.	$\nearrow$	

γιατί:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ή} \\ 2\ln x + 1 = 0 \end{cases} \overset{x\neq 0}{\Leftrightarrow} \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow x(2\ln x + 1) > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \ln x > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow x > \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$, γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$

και παρουσιάζει ελάχιστο στο $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ίσο με $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^2 \ln\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{e}\ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}$

β. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f''(x) = (2x\ln x + x)' = 2\ln x + 2x\frac{1}{x} + 1 = 2\ln x + 2 + 1 = 2\ln x + 3 \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

Οπότε υπολογίζουμε την κυρτότητα και τα σημεία καμπής της f κατασκευάζοντας τον πίνακα:

x	0		$e^{-\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\frown$	$-\frac{3}{2e^3}$ σ.κ.	$\smile$	

γιατί:

- $f''(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{3}{2}}$
- $f''(x)>0 \Leftrightarrow 2\ln x + 3 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}}$

Η f είναι κοίλη στο $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right]$, κυρτή στο $\left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$ και έχει σημείο καμπής στο $e^{-\frac{3}{2}}$ ίσο με $f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right) = \left(e^{-\frac{3}{2}}\right)^2 \ln e^{-\frac{3}{2}} = e^{-3}\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2e^3}$

γ. Επειδή η f παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) στο $\frac{1}{\sqrt{e}}$ είναι:

$f(x) \geq f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) \Leftrightarrow f(x) \geq -\frac{1}{2e}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2 \ln x\right) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$. Οπότε αφού η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ το σύνολο τιμών της f είναι: $f(A) = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$

ΘΕΜΑ 3ο

α. Εφαρμόζουμε Θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση g στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$:

- Η g είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ ως παραγωγίσιμη.
- Η g είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων.
- $\begin{cases} g(0) = e^0 \cdot f(0) = 1 \cdot 0 = 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} \cdot f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{\frac{3}{2}} \cdot 0 = 0 \end{cases}$ άρα $g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right) = 0$

και αφού $g'(x) = \left(e^x f(x)\right)' = e^x f(x) + e^x f'(x) = e^x\left(f(x) + f'(x)\right)$

οπότε από το Θ. Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστο $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$ τέτοιο ώστε

$g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi\left(f(\xi) + f'(\xi)\right) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) + f'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) = -f(\xi)$

β. $I(\alpha) = \int_\alpha^0 g(x)dx = \int_\alpha^0 e^x f(x)dx = \int_\alpha^0 e^x(2x^2 - 3x)dx = \int_\alpha^0 (e^x)'(2x^2 - 3x)dx =$

$= \left[e^x(2x^2 - 3x)\right]_\alpha^0 - \int_\alpha^0 e^x(4x - 3)dx = -e^\alpha(2\alpha^2 - 3\alpha) - \int_\alpha^0 (e^x)'(4x - 3)dx =$

$= -e^\alpha(2\alpha^2 - 3\alpha) - \left[e^x(4x - 3)\right]_\alpha^0 + \int_\alpha^0 4e^x dx = -e^\alpha(2\alpha^2 - 3\alpha) + 3e^0 + e^\alpha(4\alpha - 3) + 4\left[e^x\right]_\alpha^0 =$

$= e^\alpha(-2\alpha^2 + 3\alpha + 4\alpha - 3) + 3 + 4(1 - e^\alpha) = e^\alpha(-2\alpha^2 + 7\alpha - 3) + 3 + 4 - 4e^\alpha =$

$= e^\alpha(-2\alpha^2 + 7\alpha - 3 - 4) + 7 = e^\alpha(-2\alpha^2 + 7\alpha - 7) + 7$

γ. $\lim_{\alpha\to-\infty} I(\alpha) = \lim_{\alpha\to-\infty}\left[e^{\alpha}(-2\alpha^2+7\alpha-7)+7\right] \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \lim_{\alpha\to-\infty}\dfrac{-2\alpha^2+7\alpha-7}{e^{-\alpha}}+7 \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{\alpha\to-\infty}\dfrac{-4\alpha+7}{-e^{-\alpha}}+7 \overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=}$

$$\overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim_{\alpha\to-\infty}\frac{-4}{e^{-\alpha}}+7=0+7=7$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Επειδή $|z|f(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $1\in\mathbb{R}$ τότε η $\int_1^{x^3}|z|f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=|z|f(x^3)3x^2-3\left|z+\dfrac{1}{z}\right|$.

β. Παρατηρούμε ότι g(1)=0 άρα g(x)≥g(1) για κάθε $x\in\mathbb{R}$, δηλαδή η g παρουσιάζει στο x=1 ελάχιστο. Και επειδή η g είναι παραγωγίσιμη στο x=1 σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα πρέπει:

$$g'(1)=0 \Leftrightarrow |z|f(1)\cdot 3-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=0 \overset{f(1)=1}{\Leftrightarrow} 3|z|-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=0 \Leftrightarrow |z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

γ. Για z=α+βi έχουμε: $z^2=(\alpha+\beta i)^2=\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i$, οπότε $\mathrm{Re}(z^2)=\alpha^2-\beta^2$

Από το (β) ερώτημα έχουμε:

$$|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|^2=\left|z+\frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\cdot\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right) \Leftrightarrow z\cdot\bar{z}=z\cdot\bar{z}+\frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{1}{z\cdot\bar{z}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{\bar{z}}+\frac{\bar{z}}{z}+\frac{1}{z\cdot\bar{z}}=0 \Leftrightarrow \frac{z^2+\bar{z}^2+1}{z\cdot\bar{z}}=0 \Leftrightarrow z^2+\bar{z}^2+1=0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta i)^2+(\alpha-\beta i)^2+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta i+\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta i+1=0 \Leftrightarrow 2\alpha^2-2\beta^2+1=0 \Leftrightarrow 2(\alpha^2-\beta^2)=-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2-\beta^2=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$$

δ. Από το (γ) ερώτημα έχουμε:

$\alpha^2-\beta^2=-\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=-\dfrac{1}{2}<0$ άρα $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)<0 \overset{\alpha-\beta>0}{\Leftrightarrow} \alpha+\beta<0 \Leftrightarrow \beta<-\alpha$, οπότε β<0.

Η f είναι συνεχής στο [2,3] ως παραγωγίσιμη με $f(2)\cdot f(3)=\alpha\beta<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

Επιμέλεια απαντήσεων
Ευάγγελος Σακαρίκος
Μαθηματικός