

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1

A.1 σχολικό βιβλίο σελ 194

A.2 Η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ αν και μόνο αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (\lambda x + \beta)] = 0$

- B. α) Λ
β) Λ
γ) Σ
δ) Σ
ε) Λ
στ) Σ

ΘΕΜΑ 2

α) $|z_1| = 3$ ή $|z_1|^2 = 3^2$ ή $z_1 \cdot \bar{z}_1 = 9$ ή $\bar{z}_1 = \frac{9}{z_1}$

β) $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \omega$. Αρκεί να δείξουμε $\bar{\omega} = \omega$.

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{\frac{9}{z_1}}{\frac{9}{z_2}} + \frac{\frac{9}{z_2}}{\frac{9}{z_1}} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2} = \omega$$

γ) $|z_1 + z_2 + z_3| = \left| \frac{9}{\bar{z}_1} + \frac{9}{\bar{z}_2} + \frac{9}{\bar{z}_3} \right| = 9 \left| \frac{1}{\bar{z}_1} + \frac{1}{\bar{z}_2} + \frac{1}{\bar{z}_3} \right| = 9 \left| \frac{\bar{z}_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_3 + \bar{z}_2 \bar{z}_3}{\bar{z}_1 \bar{z}_2 \bar{z}_3} \right| =$
 $9 \frac{|\bar{z}_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \bar{z}_3 + \bar{z}_2 \bar{z}_3|}{|\bar{z}_1| \cdot |\bar{z}_2| \cdot |\bar{z}_3|} = 9 \frac{|z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3|}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3} |z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3|$

ΘΕΜΑ 2 β) Β' άποψη:

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = \frac{z_1^2 + z_2^2}{z_2 \cdot z_1} = \frac{(z_1^2 + z_2^2) \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 z_1 \bar{z}_2 \bar{z}_1} = \frac{z_1^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 + z_2^2 \cdot \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2}{|z_1|^2 \cdot |z_2|^2} =$$

$$\frac{z_1(z_1 \cdot \bar{z}_1) \cdot \bar{z}_2 + z_2(z_2 \cdot \bar{z}_2) \bar{z}_1}{9 \cdot 9} = \frac{z_1 \bar{z}_2 \cdot 3^2 + 3^2 \cdot z_2 \bar{z}_1}{81} = \frac{9(z_1 \bar{z}_2 + (\overline{z_2 \cdot z_1}))}{91} =$$

$$\frac{2\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)}{9} \in \Re$$

2γ) Β' Αποψη

$$|z_1 + z_2 + z_3|^2 = \frac{1}{9} |z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1|^2 = (z_1 + z_2 + z_3)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \bar{z}_3) =$$

$$\frac{1}{9} (z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)(\bar{z}_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_2 \bar{z}_3 + \bar{z}_3 \bar{z}_1) \Leftrightarrow$$

$$z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_3 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + z_3 \bar{z}_2 + z_3 \bar{z}_3 =$$

$$\frac{1}{9} |z_1|^2 |z_2|^2 + \frac{1}{9} z_1 |z_2|^2 \bar{z}_3 + \frac{1}{9} |z_1|^2 z_2 \bar{z}_3 + \frac{1}{9} |z_2|^2 z_3 \bar{z}_1 + \frac{1}{9} |z_2|^2 |z_3|^2 + \frac{1}{9} |z_3|^2 z_2 \bar{z}_1$$

$$+ \frac{1}{9} z_3 |z_1|^2 \bar{z}_2 + \frac{1}{9} z_1 |z_3|^2 \bar{z}_2 + \frac{1}{9} |z_3|^2 |z_1|^2 \Leftrightarrow$$

$$9 + z_1 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_3 + z_2 \bar{z}_1 + 9 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + z_3 \bar{z}_2 + 9 =$$

$$= 9 + z_1 \bar{z}_3 + z_2 \bar{z}_3 + z_3 \bar{z}_1 + 9 + z_2 \bar{z}_1 + z_3 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_2 + 9 \Leftrightarrow$$

$$0=0 \text{ ισχύει}$$

ΘΕΜΑ 3

α) $f'(x) = (e^{\lambda x})' = \lambda \cdot e^{\lambda x} > 0$ αφού $\lambda > 0$

οπότε η f γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

β) Εστω $M \left(x_0, e^{\lambda x_0} \right)$ το σημείο επαφής τότε $\lambda_{\epsilon\phi} = f'(x_0) = \lambda e^{\lambda x_0}$

$$\text{άρα } \epsilon\phi: y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0} (x - x_0)$$

αφού διέρχεται από την αρχή των αξόνων τότε

$$0 - e^{\lambda x_0} = \lambda \cdot e^{\lambda x_0} (0 - x_0) \Leftrightarrow -e^{\lambda x_0} = -\lambda \cdot e^{\lambda x_0} \cdot x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{οπότε } \varepsilon\phi: y - e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} (x - \frac{1}{\lambda}) \Leftrightarrow y - e = \lambda e \cdot x - \lambda \cdot e \cdot \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow y = \lambda e x$$

$$\text{και } M\left(\frac{1}{\lambda}, e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}}\right) \text{ δηλαδή } M\left(\frac{1}{\lambda}, e\right)$$

$$\gamma) f'(x) = (\lambda e^{\lambda x})' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x} > 0 \text{ δηλαδή η } f \text{ κυρτή στο } \mathbb{R} \text{ οπότε}$$

$$f(x) \geq y_{\varepsilon\phi} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{άρα } E(\lambda) = \int_0^{\frac{1}{\lambda}} (e^{\lambda x} - \lambda \cdot e x) dx = \left[\frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda x} - \lambda e \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{\lambda}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot \frac{1}{\lambda}} - \lambda e \frac{\frac{1}{\lambda^2}}{2} - \left(\frac{1}{\lambda} \cdot e^0 - \lambda \cdot e \frac{0^2}{2} \right) = \frac{1}{\lambda} \cdot e - \frac{e}{2\lambda} - \frac{1}{\lambda} = \frac{2e - e - 2}{2\lambda} = \frac{e - 2}{2\lambda}$$

$$\delta) \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot \frac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta\mu\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(e-2)}{2(2 + \eta\mu\lambda)}$$

$$\text{Έχω ότι } -1 \leq \eta\mu\lambda \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 2 + \eta\mu\lambda \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 2(2 + \eta\mu\lambda) \leq 6 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq \frac{1}{2(2 + \eta\mu\lambda)} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(e-2)\lambda}{6} \leq \frac{(e-2)\lambda}{2(2 + \eta\mu\lambda)} \leq \frac{(e-2)\lambda}{2}$$

$$\text{Παρατηρώ ότι: } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left[\lambda \cdot \frac{e-2}{6} \right] = +\infty \cdot \frac{e-2}{6} = +\infty$$

$$\text{Και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(e-2)}{2} = +\infty \cdot \frac{e-2}{2} = +\infty$$

$$\text{Οπότε σύμφωνα με το ΚΠ και } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(e-2)}{2(2 + \eta\mu\lambda)}$$

Β' Αποψη: Διαιρώντας αριθμητή και παρονομαστή με $\lambda > 0$ τη σχέση έχουμε:

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{(e-2)}{2\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda}\right)} \cdot \text{Οριο αριθμητή } e-2 > 0. \text{ Οριο παρονομαστή μηδέν } \left(\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu\lambda}{\lambda} = 0 \right),$$

αποδεικνύεται με κριτήριο παρεμβολής) και ο παρονομαστής θετικός άρα το όριο είναι $+\infty$

ΘΕΜΑ 4

$$\alpha) 2f'(x) = e^{x-f(x)}, \forall x \in \mathbb{R}, f(0) = 0$$

$$2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{e^x}{2} \quad \text{ή}$$

$$\left(e^{f(x)} \right)' = \left(\frac{e^x}{2} \right)' \quad \text{άρα} \quad e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + c \quad \text{για } x=0 \quad e^0 = \frac{e^0}{2} + c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$e^{f(x)} = \frac{e^x + 1}{2} \Leftrightarrow f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{2}.$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x} \quad (1)$$

θέτω $x-t=u$ τότε $-dt=du$

για $t=0$ τότε $u=x$

για $t=x$ τότε $u=-x$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $0 \in \mathbb{R}$ τότε η $\int_0^x f(u)du$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ άρα

και συνεχής στο $\mathbb{R}$ οπότε :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f(u)du = \int_0^0 f(u)du = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \eta\mu x = 0$$

Από κανόνα Del' Hospital η (1) γίνεται :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(u)du \right)'}{(\eta\mu x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0} = 0$$

$$\text{Άρα} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(u)du \right)'}{(\eta\mu x)'} = 0$$

$$\gamma) h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} f(t) dt \qquad g(x) = \frac{x^{2007}}{2007}$$

$$h(x) = \int_{-x}^{\alpha} t^{2005} f(t) dt + \int_{\alpha}^x t^{2005} f(t) dt = - \int_{\alpha}^{-x} t^{2005} f(t) dt + \int_{\alpha}^x t^{2005} f(t) dt$$

$$h'(x) = -(-x)^{2005} \cdot f(-x) \cdot (-x)' + x^{2005} f(x) =$$

$$= -x^{2005} \ln\left(\frac{1+e^{-x}}{2}\right) + x^{2005} \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$$

$$= x^{2005} \left[\ln \frac{2}{1 + \frac{1}{e^x}} + \ln \frac{1+e^x}{2} \right] =$$

$$= x^{2005} \ln \left[\frac{2e^x}{1+e^x} \cdot \frac{1+e^x}{2} \right] = x^{2005} \cdot \ln e^x = x^{2006}$$

$$g'(x) = \frac{2007x^{2006}}{2007} = x^{2006}$$

$$\text{Άρα } h'(x) = g'(x) \Rightarrow h(x) = g(x) + c$$

$$\text{Για } x=0 \text{ έχουμε } h(0) = g(0) + c \Rightarrow c = 0,$$

$$\text{Άρα } h(x) = g(x)$$

$$\delta) \int_{-x}^x t^{2005} f(t) dt = \frac{1}{2005} \Leftrightarrow \frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008}$$

$$2008 \cdot x^{2007} = 2007 \Leftrightarrow 2008x^{2007} - 2007 = 0$$

$$\text{Θέτουμε } K(x) = 2008x^{2007} - 2007$$

$$K(0) = -2007$$

$$K(1) = 2008 - 2007 = 1$$

$\left. \begin{array}{l} K(0) = -2007 \\ K(1) = 2008 - 2007 = 1 \end{array} \right\} \Theta. \text{ Bolzano Υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο } (0,1)$

$$K'(x) = 2007 \cdot 2008 \cdot x^{2006} > 0 \text{ στο } (0,1) \Rightarrow K(x) \uparrow \text{ στο } [0,1] \rightarrow \text{η ρίζα είναι μοναδική}$$