ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΜΕΣΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ

ΕΝΙΑΙΕΣ ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ **2005**

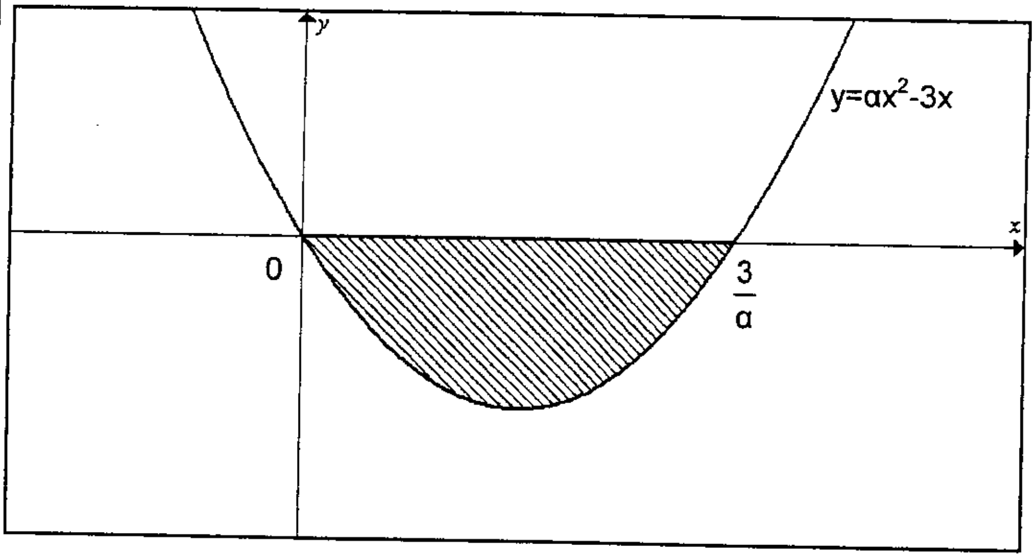
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

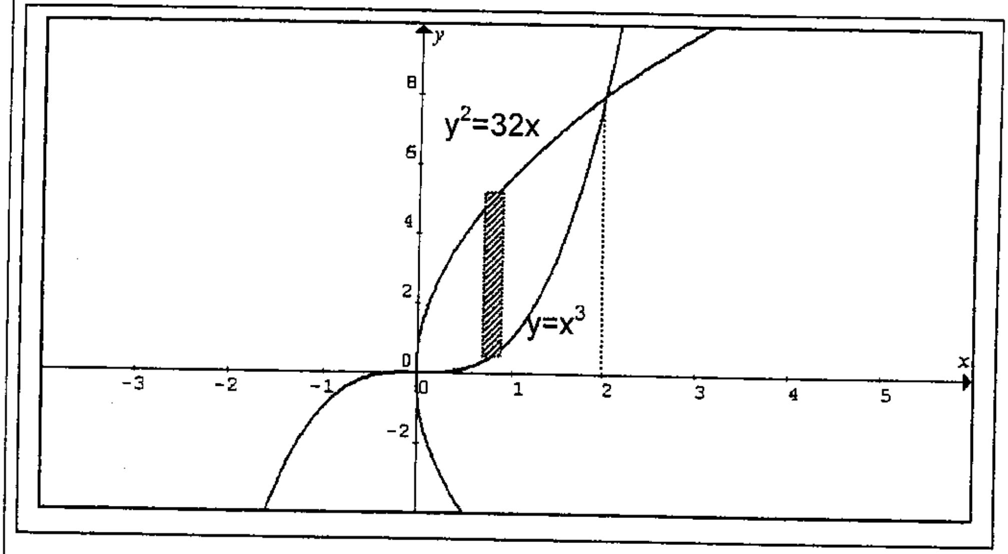
Λ Υ Σ Ε Ι Σ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Α1	$\int(6x^2-7)dx = 2x^3-7x+C$	2 + 2 + 1
Α2	(α) $\frac{10!}{3!3!2!} = 50400$ (β) $\frac{7!}{3!} = 840$	3 2
Α3	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\text{τοξ εφ}x}{e^{2x}-1} = \frac{0}{0}$ απροσδιοριστία, χρησιμοποιούμε τον κανόνα του L'Hôpital $= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}}{2e^{2x}} = \frac{1}{2}$	1 + 1 1+1 , +1
Α4	$x^2+y^2-2x+4y+\lambda=0$ $g=-1,\ f=2,\ c=\lambda$ Κέντρο $(-g,-f) = (1,-2)$ Ακτίνα $R=\sqrt{g^2+f^2-c} = 2$ => $\sqrt{1+4-\lambda} = 2$ => $\lambda = 1$	1 1.5 1 1 + 0,5
Α5	$x^2-y^3+xy-5=0$ => $2x-3y^2\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0$ => $\frac{dy}{dx}=\frac{2x+y}{3y^2-x}$ Στο σημείο (2,1), $\left.\frac{dy}{dx}\right\rvert_{\substack{x=2\\y=1}} = 5$ => $\lambda_{καθ} = -\frac{1}{5}$ Εξίσωση κάθετης: $y-1=-\frac{1}{5}(x-2)$ => $x+5y-7=0$.	2 0,5 + 1 1,5
Α6	$f(x) = \alpha x^3+\beta x^2+x-1$ => $f'(x)=3\alpha x^2+2\beta x+1$, $f''(x)=6\alpha x+2\beta$ Το Α(-1,2) βρίσκεται πάνω στην καμπύλη => $2=-\alpha+\beta-1-1$ => $-\alpha+\beta=4$ Το Α είναι σημείο καμπής της συνάρτησης => $f''(-1)=0$ => $-6\alpha+2\beta=0$ Από το σύστημα των δύο εξισώσεων έχουμε $\alpha=2$, $\beta=6$.	0,5 +0,5 1 1 1 + 1

Α7	$\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$, $\alpha = 2\sqrt{3}$, $\beta = 2$, $\gamma^2=\alpha^2-\beta^2$ => $\gamma = 2\sqrt{2}$	1,5
	(α) Εστίες $\left(\pm 2\sqrt{2}, 0\right)$ $\varepsilon=\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$	0,5 +0,5
	(β) Οι συντεταγμένες του σημείου Τ επαληθεύουν την εξίσωση της έλλειψης, αφού $\frac{3^2}{12}+\frac{(-1)^2}{4}=\frac{9}{12}+\frac{1}{4}=1$.	0,5
	Εξίσωση εφαπτομένης μιας έλλειψης στο (x_1,y_1): $\frac{xx_1}{\alpha^2}+\frac{yy_1}{\beta^2}=1$, άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της έλλειψης στο Τ είναι η $\frac{3x}{12}-\frac{y}{4}=1$ => $x-y=4$	2
Α8	$P(A\|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ => $\frac{1}{5}=\frac{\frac{1}{12}}{P(B)}$ => $P(B)=\frac{5}{12}$	1,5
	$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) =\frac{1}{4}+\frac{5}{12}-\frac{1}{12} =\frac{7}{12}$	1,5
	$P(B-A)=P(B\cap A')=P(B) - P(A\cap B) =\frac{5}{12}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$	1
	$P(B\|A')=\frac{P(B\cap A')}{P(A')} =\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{9}$	1
Α9	$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ και $\mathbf{\Gamma}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	
	$\mathbf{\Delta}=\frac{1}{9}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}-3\Gamma) =\frac{1}{9}\left[\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ 0 & -4\\ -1 & 2\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right]=$	
	$\frac{1}{9}\left[\begin{pmatrix}3 & 12\\ 12 & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 0\end{pmatrix}\right] = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}0 & 9\\ 9 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$	1 +1 +1
	$\mathbf{\Delta}^{-1}= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\mathbf{\Delta}$	1 +1

A10	$u=\sqrt{6-2x}$ => $u^2=6-2x$ => $2udu = -2dx$ => $dx= - udu$ $x=\frac{6-u^2}{2}$ για x=1, u=2 και για x=3, u=0 $\int_1^3 x\sqrt{6-2x}\,dx = -\int_2^0 \frac{6-u^2}{2}u^2du = \int_0^2\left(3u^2-\frac{u^4}{2}\right)du = \left[u^3-\frac{1}{10}u^5\right]_0^2 = \frac{24}{5}$	0,5 0,5 1 0,5+0,5+1+1
A11	Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x όταν $\alpha x^2 - 3x = 0$ => $x = 0$ ή $x = \frac{3}{\alpha}$.  Έχουμε την εξίσωση $\int_0^{\frac{3}{\alpha}} -(\alpha x^2-3x)dx = 8$ => $\left[-\frac{\alpha x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}\right]_0^{\frac{3}{\alpha}} = -\frac{9}{\alpha^2}+\frac{27}{2\alpha^2}=8$ => $\alpha^2=\frac{9}{16}$ => $\alpha=\frac{3}{4}$ (αφού α > 0).	Μόνο γραφική παράστ. 1 Όρια ολοκληρ. 1 Το «-» 0,5 Εξίσωση 0,5 1 +1 +1
A12	x=3συνt-1 και y=2+ημt $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\sigma\upsilon\nu t}{-3\eta\mu t}=-\frac{1}{3}\sigma\varphi t$ => $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{1}{3}\sigma\tau\epsilon\mu^2 t}{-3\eta\mu t}=-\frac{1}{9}\sigma\tau\epsilon\mu^3 t$ $9(y-2)\frac{d^2y}{dx^2}+9\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=9(\eta\mu t)\left(-\frac{1}{9}\sigma\tau\epsilon\mu^3 t\right)+9\left(-\frac{1}{3}\sigma\varphi t\right)^2+1=$ $=-\sigma\tau\epsilon\mu^2 t+\sigma\varphi^2 t+1=0$	1,5 +2 0,5 1

<table>
<tr>
<td>A13</td>
<td>


Οι δύο καμπύλες τέμνονται στα σημεία (0,0) και (2,8).
Όγκος του στερεού που παράγεται =

$$\pi\int_0^2\left(y_2^{\,2}-y_1^{\,2}\right)dx=\pi\int_0^2\left(32x-x^6\right)dx=\pi\left(16x^2-\frac{x^7}{7}\right)\Bigg|_0^2=\frac{320\pi}{7}\ \text{κ.μ.}$$
</td>
<td>Μόνο σχήμα: 1

Όρια ολοκλήρ. 1

Ολοκλήρωμα 1
+1 +1 +1</td>
</tr>
<tr>
<td>A14</td>
<td>
(α) $\begin{vmatrix} \alpha & -1 & -1 \\ -1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha-2 & -1 & -1 \\ \alpha-2 & \alpha & -1 \\ \alpha-2 & -1 & \alpha \end{vmatrix}$ (Στην πρώτη στήλη προσθέτω τις άλλες δύο)

$=(\alpha-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 1 & -1 & \alpha \end{vmatrix}$ (βγάζω κοινό παράγοντα το (α-2) από την πρώτη στήλη)

$=(\alpha-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+1 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha+1 \end{vmatrix}$ (προσθέτω την πρώτη στήλη στις άλλες δύο)

$=(\alpha+1)^2(\alpha-2)$

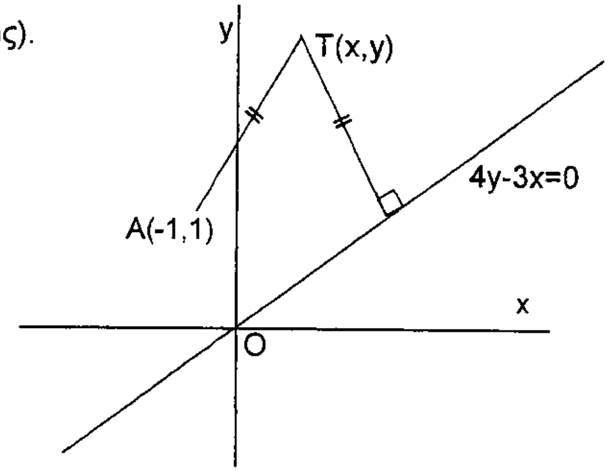
(β) Η ορίζουσα προκύπτει από την προηγούμενη με αντικατάσταση του α με το (2-λ). Άρα έχουμε την εξίσωση $(2-\lambda+1)^2(2-\lambda-2)=0$ ή $-\lambda(3-\lambda)^2=0 \Rightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=3$.
</td>
<td>1

0,5

0,5

1

2</td>
</tr>
</table>

A15	(α) Παραβολή είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο Ε (την Εστία της παραβολής) και μια σταθερή ευθεία (δ) (τη διευθετούσα της παραβολής).	2
	(β) 	
	Έστω T(x,y) σημείο της ζητούμενης παραβολής. Η απόσταση AT ισούται με την απόσταση του A από την ευθεία. Άρα $\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}=\dfrac{\lvert 4y-3x\rvert}{\sqrt{4^2+3^2}} \Rightarrow$	1,5
	$x^2+2x+1+y^2-2y+1=\dfrac{16y^2-24xy+9x^2}{25} \Rightarrow$	1
	$16x^2+9y^2+24xy+50x-50y+50=0.$	0,5

ΜΕΡΟΣ Β

Β1

$F(x) = \dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

<u>Πεδίο ορισμού</u>: $R-\{-1\}$ — 1

<u>Σημείο τομής με άξονες</u>: (0,2) — 1

<u>Ασύμπτωτες</u>:

$\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}=x+1+\dfrac{1}{x+1}$ και $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$, άρα η ευθεία y=x+1 είναι πλάγια ασύμπτωτη της y=f(x). — 1

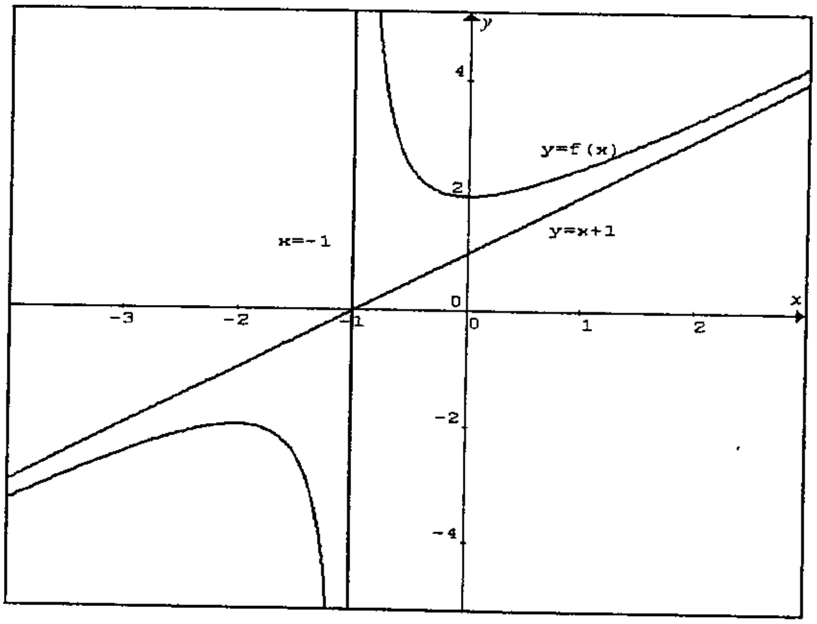
$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+2x+2}{x+1}=+\infty\\ \lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+2x+2}{x+1}=-\infty\end{aligned}\right\}$$, άρα η ευθεία x=-1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της y=f(x). — 1

$f'(x)=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0 \Rightarrow x=0,\ x=-2$. — 1+0,5

x	$-\infty$	-2		-1		0	$+\infty$
f΄(x)	+	0	-	‖	-	0	+
f(x)	↗	-2	↘	‖	↘	2	↗

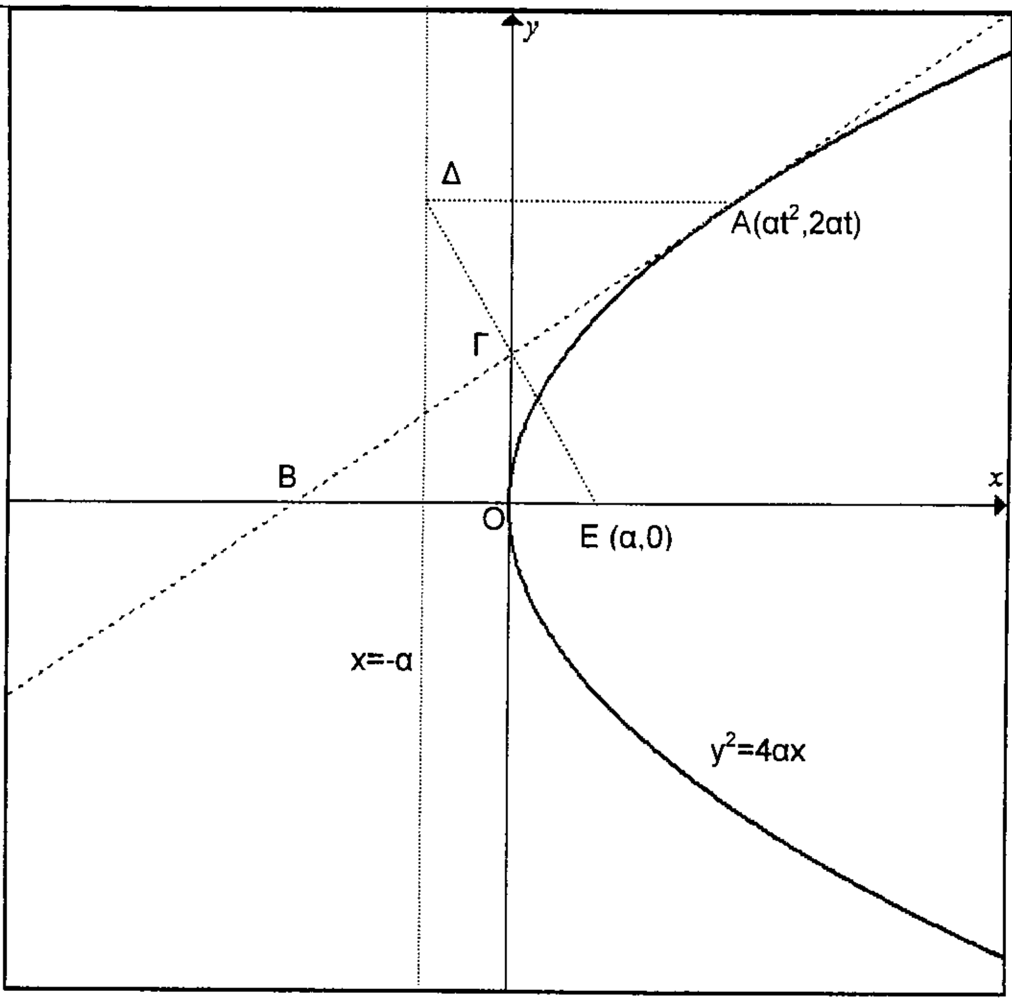
— 1,5

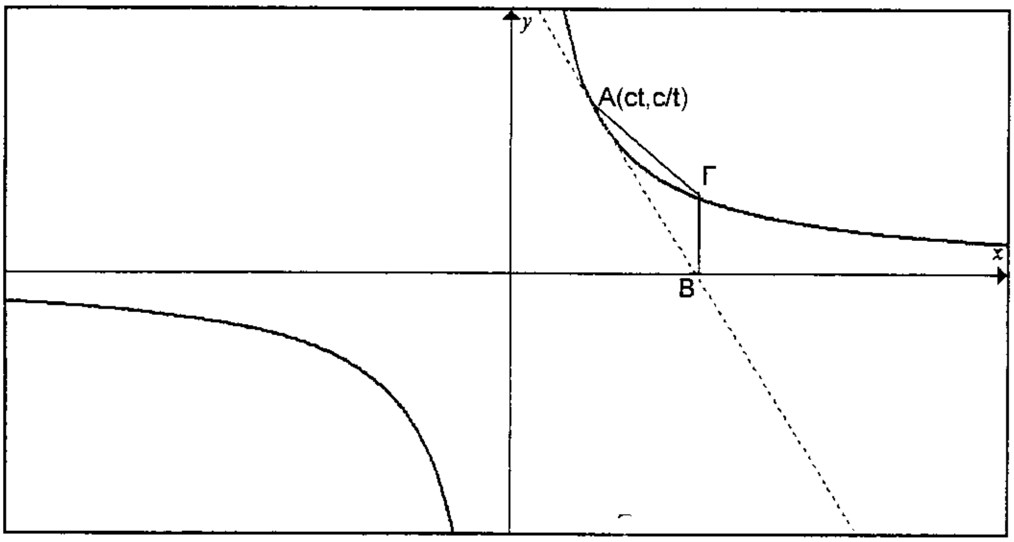
Η συνάρτηση έχει τοπικό ελάχιστο στο σημείο (0, 2) και τοπικό μέγιστο στο σημείο (-2,-2) — 1



— 2

Β2	$\dfrac{2x^3+1}{x^2+x^4}=\dfrac{2x^3+1}{x^2(1+x^2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{\Gamma x+\Delta}{1+x^2}$ =>	1
	$Ax(1+x^2)+B(1+x^2)+(\Gamma x+\Delta)x^2 \equiv 2x^3+1$	0,5
	Για x=0 B=1 $\left.\begin{array}{l}\text{Για } x=1 \quad 2A+2B+\Gamma+\Delta=3\\ \text{Για } x=-1 \quad -2A+2B-\Gamma+\Delta=-1\end{array}\right\}\Rightarrow 4B+2\Delta=2 \Rightarrow \Delta=-1$ και $4A+2\Gamma=4$	0,5
	$\left.\begin{array}{l}4A+2\Gamma=4\\ \text{για } x=2 \quad 10A+5B+8\Gamma+4\Delta=17\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}4A+2\Gamma=4\\ 10A+8\Gamma=16\end{array}\right\}$ => A=0, Γ=2	3
	$\int\dfrac{(2x^3+1)dx}{x^2+x^4}=\int\dfrac{dx}{x^2}+\int\dfrac{(2x-1)dx}{1+x^2}=-\dfrac{1}{x}+\ln(1+x^2)-\text{τοξεφ}x+C$	0,5 χώρισμα ολοκληρ. 1+1,5+1,5 +0,5
Β3	(α) $P(A)=\dfrac{1}{9^3}$	3
	(β) $P(B)=\left(\dfrac{4}{9}\right)^3$	3
	(γ) Οι ευνοϊκές περιπτώσεις είναι οι {1,1,1}, {1,1,2}, {1,2,1} και {2,1,1} Η κάθε μια από αυτές έχει πιθανότητα $\dfrac{1}{9^3}$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P(\Gamma)=\dfrac{4}{9^3}$.	4
Β4	Η κλίση της εφαπτομένης δίνεται από την παράγωγο της συνάρτησης: $\lambda(x)=\dfrac{dy}{dx}=3x^2-6x+5$. Θέλουμε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης λ(x).	3
	Η παράγωγος της λ(x) είναι η $\dfrac{d\lambda}{dx}=6x-6$ και μηδενίζεται για x = 1.	1 + 1
	Επειδή $\left.\dfrac{d^2\lambda}{dx^2}\right\|_{x=1}=6>0$, έχουμε ελάχιστη τιμή για τη λ(x) στο x = 1.	0,5+0,5+ 1
	Η ελάχιστη τιμή της κλίσης είναι $\lambda_{min}=\lambda(1)=2$.	1
	Η ελάχιστη τιμή της κλίσης της y συμβαίνει στο σημείο της y για το οποίο x = 1, δηλαδή στο (1, 3).	2

B5		
	(α) Εξίσωση εφαπτομένης στο Α(αt^2, $2\alpha t$) : $ty=x+\alpha t^2$ => Β($-\alpha t^2$,0), Γ(0,αt)	1+0,5+0,5
	Το μέσο του ΑΒ έχει συντεταγμένες $\left(\frac{\alpha t^2-\alpha t^2}{2},\frac{2\alpha t+0}{2}\right)=(0,\alpha t)$	
	=> το Γ είναι το μέσο του ΑΒ.	1
	(β) $\lambda_{ΓΕ}= - t$ => η εξίσωση της ΓΕ είναι : $y=-t(x-\alpha)$.	1
	Η ΓΕ συναντά τη διευθετούσα $x = -\alpha$ στο σημείο Δ($-\alpha$, $2\alpha t$).	1
	Παρατηρώ επίσης ότι το Γ είναι το μέσο της ΔΕ => οι ΕΔ και ΑΓ διχοτομούνται	1
	Επίσης, αφού $\lambda_{εφ}=\frac{1}{t}$, $\lambda_{ΓΕ}\cdot\lambda_{εφ} = -1$ => οι ΕΔ και ΑΓ είναι κάθετες.	1
	Από τα πιο πάνω συμπεραίνω ότι στο ΑΕΒΔ οι διαγώνιοι του διχοτομούνται κάθετα, άρα είναι ρόμβος.	1
	(γ) Για να είναι τετράγωνο το ΑΕΒΔ θα πρέπει να έχει και ίσες διαγωνίους, δηλ $\sqrt{(\alpha t^2+\alpha t^2)^2+(2\alpha t)^2}=\sqrt{(\alpha+\alpha)^2+(2\alpha t)^2}$	1
	=> $4\alpha^2t^4 + 4\alpha^2t^2 = 4\alpha^2 + 4\alpha^2t^2$ => $t^4 = 1$ => $t= \pm 1$	1

B6		
	(α) Εξίσωση εφαπτομένης στο Α: $t^2y+x=2ct$. Το σημείο Β $(2ct,0)$.	1 + 0,5
	Η κάθετη στον άξονα x΄x στο Β έχει εξίσωση $x=2ct$.	1
	Το σημείο Γ $(2ct, \frac{c}{2t})$.	0,5
	Εξίσωση ΑΓ: $y-\frac{c}{t}=\dfrac{\frac{c}{2t}-\frac{c}{t}}{2ct-ct}(x-ct)$ => $y-\frac{c}{t}=-\frac{1}{2t^2}(x-ct)$	1
	=> $2t^2y+x=3ct$.	
	(β) Το ζητούμενο εμβαδόν δίνεται από το ολοκλήρωμα	
	$\int_{ct}^{2ct}\left[-\frac{x}{2t^2}+\frac{3c}{2t}-\frac{c^2}{x}\right]dx=\left[-\frac{x^2}{4t^2}+\frac{3c}{2t}x-c^2\ln x\right]_{ct}^{2ct}=$	2 +1
	$-\frac{4c^2t^2}{4t^2}+\frac{6c^2t}{2t}-c^2\ln(2ct)+\frac{c^2t^2}{4t^2}-\frac{3c^2t}{2t}+c^2\ln(ct) = c^2\left(\frac{3}{4}-\ln 2\right)$	1,5 +1
	= ανεξάρτητο του t	0,5