

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**

ΤΑΞΗ: **Α' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: **2,5 ΩΡΕΣ**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: **26 ΜΑΪΟΥ 2016**

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 β) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
 γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

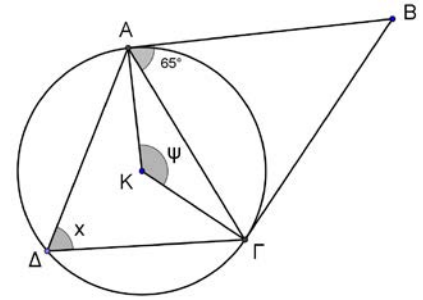
ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία A(7,2) και B(3,-2).
2. Δίνεται η εξίσωση $4x^2 - 5x + 3 = 0$ με λύσεις x_1, x_2 . Χωρίς να λυθεί η εξίσωση να βρείτε : α) το είδος των ριζών της
 β) την τιμή της παράστασης $4x_1^2x_2 + 4x_1x_2^2$
3. Να λύσετε την ανίσωση: $2x^2 + 5x - 3 \geq 0$.
4. Ένας φοιτητής παρακολούθησε τέσσερα μαθήματα σε ένα εξάμηνο. Τα 2 πρώτα ήταν υποχρεωτικά και τα άλλα 2 επιλογής. Οι βαθμοί που πήρε στα υποχρεωτικά μαθήματα ήταν 5 και 7 ενώ στα επιλογής ήταν 8 και 6. Αν τα μαθήματα επιλογής έχουν την ίδια βαρύτητα και τα υποχρεωτικά μαθήματα έχει το καθένα βαρύτητα 30%, να υπολογίσετε τον μέσο όρο του εξαμήνου.

5. Δίνεται κύκλος (K, R) . Από εξωτερικό σημείο B του κύκλου φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα BA και BG . Αν η γωνία $BAG = 65^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες x , ψ και ABG .
Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.



6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$. Να βρείτε :

- α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $2\vec{a} - 3\vec{b}$.
β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} + \vec{b}$.

7. Αν $\sin \omega = -\frac{4}{5}$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$, να δείξετε ότι $\frac{4\epsilon\phi\omega + 9\sigma\tau\epsilon\mu\omega}{\eta\mu(90^\circ - \omega)} = -15$.

8. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (3\lambda - 1)x + \lambda^2 = 0$ με ρίζες x_1, x_2

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν τα παρακάτω:

- (α) Η εξίσωση να έχει ρίζες αντίθετες.
(β) Η εξίσωση να έχει πραγματικές ρίζες.

9. Δίνεται η εξίσωση της παραβολής $y = x^2 - 4x + 3$. Να βρείτε:

- α) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας, τις συντεταγμένες της κορυφής και τα σημεία τομής της παραβολής με τους άξονες.
β) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της παραβολής.

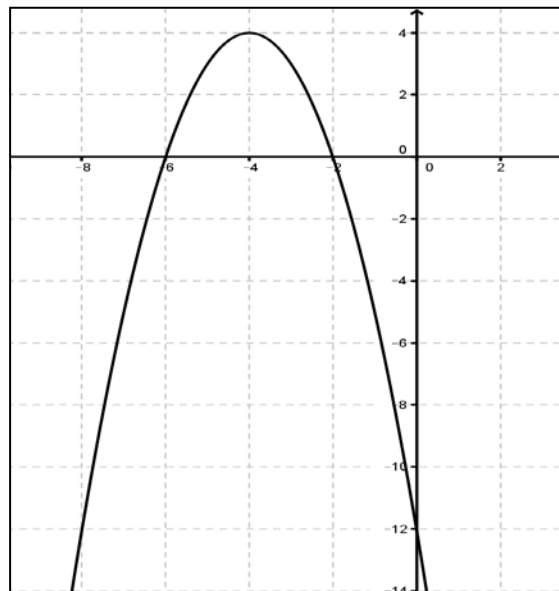
10. Να βρείτε το κ ώστε το σύστημα $\begin{cases} \kappa x + 3y = 6 \\ 2x + (\kappa - 1)y = 4 \end{cases}$ να είναι αόριστο.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Από το σχήμα να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της παράστασης.
- β) το πρόσημο του a και το πρόσημο της διακρίνουσας.
- γ) τον άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες κορυφής.
- δ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$
- ε) την τιμή της παράστασης $A = af(0) + b^2$



2. Δίνεται $A = \frac{\eta\mu(90^\circ + \omega) - \eta\mu(180^\circ + \omega) + \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)}{\sigma\phi(180^\circ - \omega) \cdot \sigma\phi(90^\circ + \omega) + \eta\mu(90^\circ - \omega)}$

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{\eta\mu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega}$

- β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2^{\text{ου}}$ βαθμού που έχει ρίζες τις

$$x_1 = \frac{\eta\mu\omega}{1 + \sigma\upsilon\nu\omega} \text{ και } x_2 = \frac{\eta\mu\omega}{1 - \sigma\upsilon\nu\omega} \text{ είναι η } x^2 - 2\sigma\tau\epsilon\mu\omega \cdot x + 1 = 0$$

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κορυφές Β(-3,-1) και Δ(3,-3) και εξισώσεις των πλευρών ΑΔ και ΑΒ τις $y = -2x + 3$ και $4x - 3y + 9 = 0$ αντίστοιχα.

- α) Να δείξετε ότι οι κορυφές Α και Γ του παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ έχουν συντεταγμένες Α(0,3) και Γ(0,-7).
- β) Να υπολογίσετε το μήκος της πλευράς ΓΔ.
- γ) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής Α από την ευθεία ΓΔ.
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ

4. α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(2-x)(x^2-2x+5)}{x^2(x^2-25)} \geq 0$

β) Αν $2 < x < 5$ και $-4 < y < -1$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

i) $A = 2x + 3y$

ii) $B = -x \cdot y$

5. Δίνεται κύκλος (Κ,Ρ) και εγγεγραμμένο τρίγωνο ΑΒΓ σ' αυτόν με το κέντρο Κ του κύκλου να βρίσκεται στην πλευρά ΒΓ. Από το Κ φέρνουμε κάθετη στην ΑΓ που την τέμνει στο Δ. Φέρνουμε εφαπτομένη χΓγ στο σημείο Γ και στη συνέχεια από το Α φέρνουμε κάθετη στην εφαπτομένη χΓγ που τέμνει την εφαπτομένη στο Ε και τον κύκλο στο σημείο Ζ.

Να αποδείξετε ότι ισχύουν τα πιο κάτω:

α) $(AB)(KA) = (\Delta K)(B\Gamma)$

β) $(E\Gamma)^2 = (EZ)(EA)$

Ο Διευθυντής

.....

Ορφανίδης Ιωάννης

Εισηγήτρια

Η Συντονίστρια

Ο Διευθυντής

.....
Ερωτοκρίτου Χριστιάνα

.....
Ηρακλέους Αναστασία (Β.Δ.)

.....
Ορφανίδης Ιωάννης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: Δευτέρα 23.5.2016

Ώρα: 7.45 π.μ.

Διάρκεια: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράφετε μόνο με μπλε πένα. (Τα σχήματα με μολύβι)
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας
3. Επιτρέπεται η χρήση μη-προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
4. Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
5. Δίνεται τυπολόγιο.
6. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες.
7. Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

ΜΕΡΟΣ Α': (50 μονάδες)

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων:

$$\frac{3x - 1}{(x - 5) \cdot (x + 2)} =$$

2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{x^3 - 5x + 18}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{5x \cdot (x - 2)}$$

3. Ο πέμπτος όρος αριθμητικής προόδου είναι το 14, ενώ το άθροισμα του πρώτου και του τρίτου όρου είναι 10. Να βρείτε το άθροισμα των 21 πρώτων όρων της.

4. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(α) y = x^{2016} - e^{5x} + 2x \cdot \sin 4x - 8 \qquad (β) y = \frac{\ln(2x)}{x^2 + 5}$$

5. Η παράπλευρη έδρα κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας σχηματίζει γωνία 60° με τη βάση της. Αν η ακμή της βάσης της είναι ίση με 12cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

6. Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι $\forall n \in \mathbb{N}$, ισχύει η πιο κάτω πρόταση:

$$3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = n + 2n^2$$

7. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log(4^{2\eta\mu x-2} + 9) + \log 2 = \log(2^{2\eta\mu x-2} + 1) + 1$$

8. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)$ με

$$g(x) = \begin{cases} \frac{3\alpha}{x^3} + 1, & 0 < x \leq 2 \\ \frac{1 - \sqrt{x-1}}{x^2 - 4}, & x > 2 \end{cases}$$

Να προσδιορίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

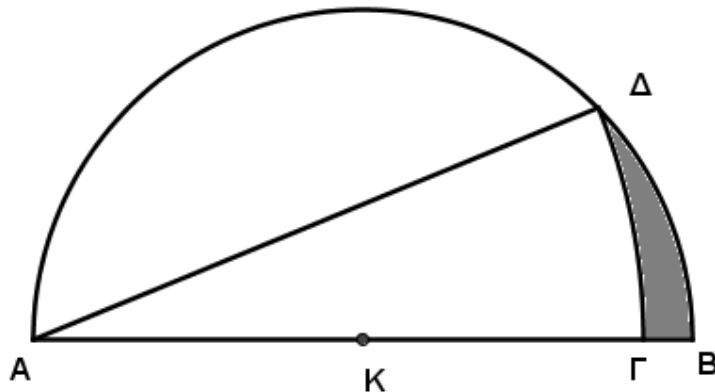
9. (α) Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει:

$$\frac{\beta^2 + \gamma^2}{4R^2} = \eta\mu^2 A + 2\eta\mu B\eta\mu\Gamma \sigma\upsilon\nu A$$

(β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω αποτέλεσμα ή με άλλο τρόπο να δείξετε ότι:

$$\frac{\beta^2 + \gamma^2}{4R^2} = 1 + \sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu(B - \Gamma)$$

10. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $AB = 2R$ και κέντρο το σημείο K . Με κέντρο το A και ακτίνα AD γράφουμε τόξο $\overset{\cap}{\Delta\Gamma}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Η γωνία $\Delta\hat{A}\Gamma$ είναι 30° . Να υπολογίσετε συναρτήσει του R
- (α) το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους και
(β) την περίμετρο του σκιασμένου μέρους.



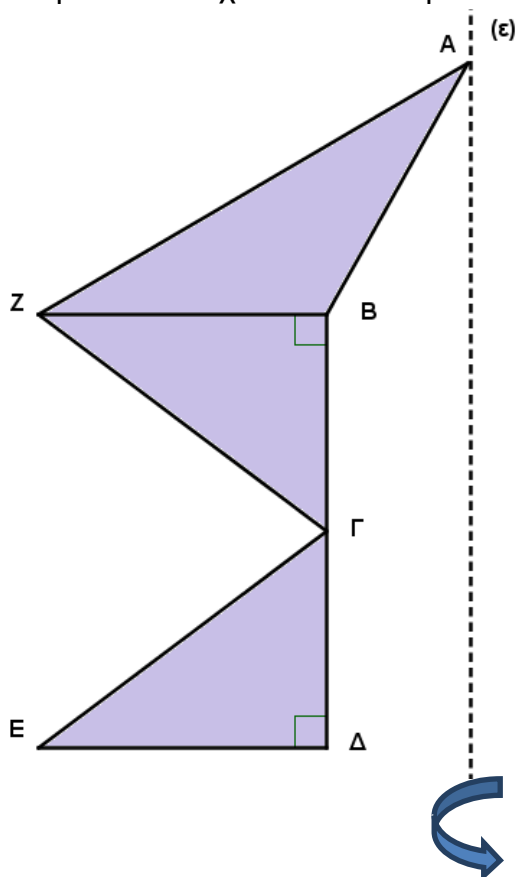
Μέρος Β: (50 μονάδες)

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $B(2,4)$ και $\Gamma(6,2)$. Αν η διάμεσος AM έχει αρνητική κλίση και σχηματίζει γωνία 45° με τη $B\Gamma$, να δείξετε ότι η εξίσωσή της είναι η $3x + y - 15 = 0$. Ακολούθως να βρείτε:
- (α) τις συντεταγμένες της κορυφής A αν αυτή βρίσκεται στην ευθεία $y = x + 3$,
(β) την απόσταση της κορυφής B από την πλευρά $A\Gamma$ και
(γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

2. Αριθμητική πρόοδος και απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Η διαφορά της αριθμητικής προόδου (δ) ισούται με x , όπου x η ρίζα της εξίσωσης $\log_3(\log(\ln e^{997} + x)) = 1$. Ο λόγος της γεωμετρικής προόδου, είναι η τιμή του λ ώστε το πολυώνυμο $f(x) = x^4 - x^3 + \frac{3^{2\lambda}}{2}x^2 - \frac{3}{2}x$ να έχει ρίζα τον αριθμό 1. Αν το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου ισούται με την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης $g(x) = 3\eta\mu^2 x - \frac{\sigma\varphi 2x}{2}$ στο σημείο με $x = \frac{\pi}{4}$, να σχηματίσετε τις δύο προόδους.

3. Στο πιο κάτω σχήμα τα τρίγωνα $B\Gamma Z$ και $\Gamma\Delta E$ είναι δύο ίσα ορθογώνια τρίγωνα ($\angle Z\hat{B}\Gamma = 90^\circ, \angle E\hat{\Delta}\Gamma = 90^\circ$) με $B\Gamma = \Gamma\Delta = 3\text{cm}$, $Z\Gamma = \Gamma E = 5\text{cm}$ και το τρίγωνο ABZ είναι ισοσκελές με $BZ = BA$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος $AB\Delta E\Gamma Z A$ γύρω από ευθεία (ε) η οποία απέχει 2cm από την πλευρά $B\Delta$.



4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $x > 1$ και $g(x) = 2x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) Να δείξετε ότι $f''(x) \cdot f(x) + (f'(x))^2 = 1$.

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ (τύπος και πεδίο ορισμού)

(γ) Αν επιπλέον $h(x) = 2x\sqrt{x^2 - 1}$, να εξετάσετε αν $f \circ g = h$.

Στην περίπτωση που $f \circ g \neq h$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο το $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f \circ g = h$.

5. (α) Να αποδείξετε ότι οι πιο κάτω αριθμοί αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου:

$$1 - \sin 2x + \eta \mu 2x, \quad \sqrt{1 + \eta \mu 2x + \sigma \nu \nu x}, \quad \sigma \varphi x.$$

(β) Έστω $A = \frac{1 + \eta \mu 2x + \sigma \nu \nu 2x}{1 - \sigma \nu \nu 2x + \eta \mu 2x}$ και $B = \sigma \nu \nu x$

Με τη βοήθεια του ερωτήματος (α) να λύσετε την εξίσωση :

$$2\sqrt{3}B^2 - 3A \cdot \eta \mu x = 0 \text{ στο διάστημα } [0, 2\pi].$$

Οι εισηγητές:

Α. Σαββίδου (Β.Δ.)

Ε. Δημητρίου

Μ. Καϊτάνη

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Αλέξης Ντίσκος



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου (5ωρο)

Ημερομηνία: 30/5/2016

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

Ωρα: 08:00 – 10:30

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____

ΤΜΗΜΑ: _____

ΒΑΘΜΟΣ:

Αριθμητικά: _____

Ολογράφως: _____

Υπογραφή: _____

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- 1) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 2) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- 3) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΤΕΚΑ (11) ΣΕΛΙΔΕΣ

Μέρος Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να σχηματίσετε εξίσωση β΄ βαθμού με ρίζες $x_1 = 7$ και $x_2 = -2$

-
2. Να μετατρέψετε τα κλάσματα A και B σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad B = \frac{5}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$$

-
3. Η βαθμολογία του Κώστα σε 7 διαγωνίσματα της Ιστορίας είναι

12, 17, 19, 15, 14, 15, 20.

Να υπολογίσετε τα τρία βασικά μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσο, επικρατούσα τιμή).

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

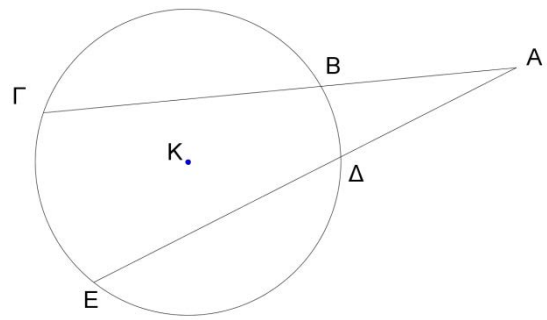
α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

5. Να υπολογίσετε την ορίζουσα $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 6 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix}$.

6. Να λύσετε την ανίσωση $3x^2 - 8x + 5 < 0$.

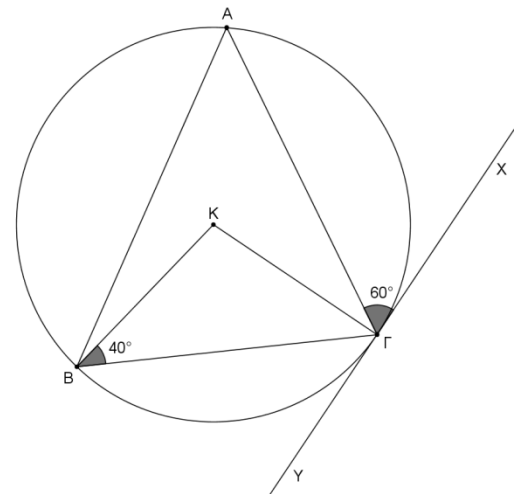
7. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι πιο κάτω διαστάσεις:
 $ΑΓ = 18\text{εκ}$, $ΒΓ=10\text{εκ}$ και
 $ΑΔ= 6\text{εκ}$. Να βρείτε το μήκος της $ΔΕ$.



Το σχήμα δεν είναι σχεδιασμένο στις πραγματικές του διαστάσεις

-
8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο τομής των ευθειών $y = 3x - 7$, $3x + 2y = 4$ και την αρχή των αξόνων.

9. Η ευθεία XY είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, R) στο σημείο Γ . Αν $\hat{A\Gamma X} = 60^\circ$ και $\hat{K\hat{B}\Gamma} = 40^\circ$, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $AB\Gamma$.



-
10. α. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(90^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega) - \eta\mu(180^\circ + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(270^\circ + \omega)}{\epsilon\varphi(180^\circ + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\omega) \cdot \epsilon\varphi(270^\circ - \omega)} = \tau\epsilon\mu\omega$$

β. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{(1+\varepsilon\varphi\theta)^2}{\tau\epsilon\mu\theta} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = 2\eta\mu\theta$

Μέρος Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

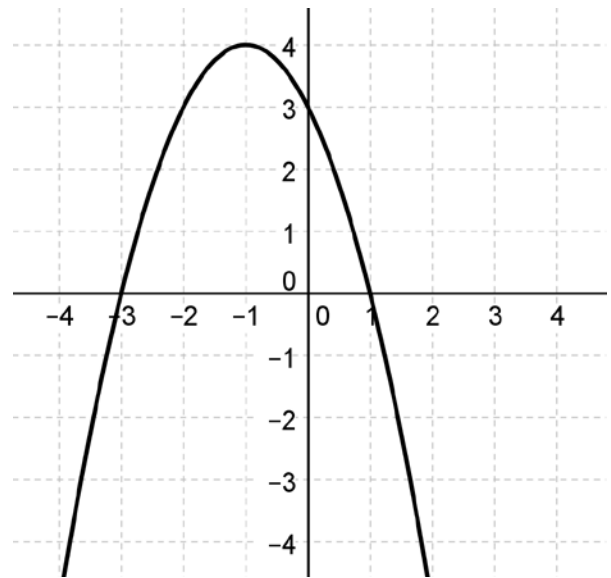
1. α. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in R$ ώστε το σύστημα
$$\begin{cases} \lambda x + 2y = 20 \\ -7x + y = 12 \\ 7x + 5y = 18 \end{cases}$$
 να είναι συμβιβαστό.

- β. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(3, -1)$, $B(4, 3)$ και $\Gamma(-1, 1)$. Να υπολογίσετε το μέγεθος της γωνίας $\hat{A}B\Gamma$ κατά προσέγγιση δεκάτου.

2. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in R$ η εξίσωση $x^2 + (3\mu - 2)x + 3\mu - 2 = 0$
- α) έχει ρίζα τον αριθμό -2
 - β) έχει ρίζες αντίθετες
 - γ) έχει ρίζες αντίστροφες
 - δ) έχει ρίζες πραγματικές και ίσες
 - ε) έχει ρίζες που ικανοποιούν τη σχέση $x_1(x_1 + 2x_2) + x_2^2(x_1^2 + 1) = 0$.

3. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Με την βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της f
- β) το πεδίο τιμών της f
- γ) το πρόσημο του a
- δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- ε) τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης
$$ax^2 + bx + \gamma = 0$$
- ζ) τις τιμές των a , b και γ
- η) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 3$
- θ) τη λύση της ανίσωσης $f(x) \geq 0$



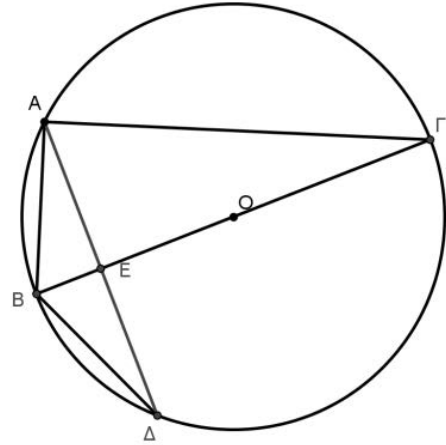
4. α. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(1-2x)(x^2+1)}{2x^2+5x-12} \leq 0$

β. Τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει κορυφή $\Gamma(5,5)$ και η εξίσωση μίας διαγωνίου του είναι $y = 17 - 5x$. Να βρείτε την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του καθώς και τις συνταταγμένες του σημείου Α.

5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, ρ) με $B\Gamma$ διάμετρο και $A\Delta \perp B\Gamma$. Να δείξετε ότι:
- α. Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $BE\Delta$ είναι όμοια.

β. Η $B\Gamma$ είναι διχοτόμος της $A\hat{B}\Delta$.

γ. $(\Delta B)^2 = 2\rho \cdot (BE)$



Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΕΥΑΓΓΕΛΟΣ ΖΩΤΟΣ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

Τάξη: Α΄

Μάθημα: Μαθηματικά 5-ωρο

Ημερομηνία: 23 / 05 / 2016

Αρ. σελίδων: 5

Χρόνος εξέτασης: 2:30 (δύο ώρες και τριάντα λεπτά)

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες (συμπεριλαμβανομένης και της 1^{ης} σελίδας)
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη.
- Το μέρος Α΄ αποτελείται από 10 ασκήσεις. Πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 10.
(Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **5 μονάδες**)
- Το μέρος Β΄ αποτελείται από 5 ασκήσεις. Πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 5.
(Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **10 μονάδες**).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικών υλικών.
- Γράφετε μόνο με μελάνι, μπλε ή μαύρου χρώματος. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

Μέρος Α:

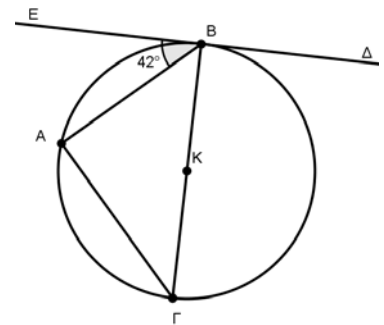
1. Να λύσετε την εξίσωση: $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

2. Να μετατρέψετε τα πιο κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α) $\frac{9}{\sqrt{3}}$

β) $\frac{5}{4 - \sqrt{6}}$

3. Δίνεται κύκλος (Κ, R) με διάμετρο ΒΓ και ΕΔ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β. Αν η $\widehat{EBA} = 42^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ.



4. Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\sigma\phi\theta + \frac{\eta\mu\theta}{1 + \sigma\upsilon\nu\theta} = \frac{1}{\eta\mu\theta}.$$

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος: $\vec{a} - 3\vec{\beta}$

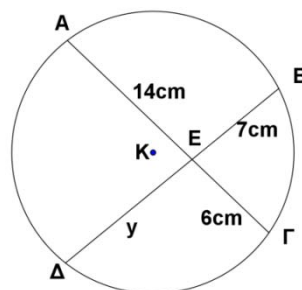
β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος: $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Σ(1,2) και έχει κλίση λ=3.

7. Δίνεται κύκλος με κέντρο το Κ.

Αν ΑΕ=14cm, ΕΓ=6cm, ΒΕ=7cm και ΕΔ=ψcm

να βρείτε την τιμή του ψ.



8. Στον παρακάτω πίνακα καταγράφονται οι μέρες άδειας των 12 υπαλλήλων μιας εταιρείας για το καλοκαίρι. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

Μέρες Άδειας (x_i)	Αριθμός Υπαλλήλων (f_i)
4	2
7	2
12	1
14	3
15	1
16	1
18	1
19	1

9. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\lambda^2 x + 2\lambda = \lambda^2 + 4x$ για τις διάφορες τιμές του λ .

10. Αν το σύστημα

$$\begin{aligned} \chi + 3\psi &= 5 \\ 3\chi - 2\psi &= 4 \\ \kappa\chi + \lambda\psi &= 3 \end{aligned}$$

είναι συμβιβαστό να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

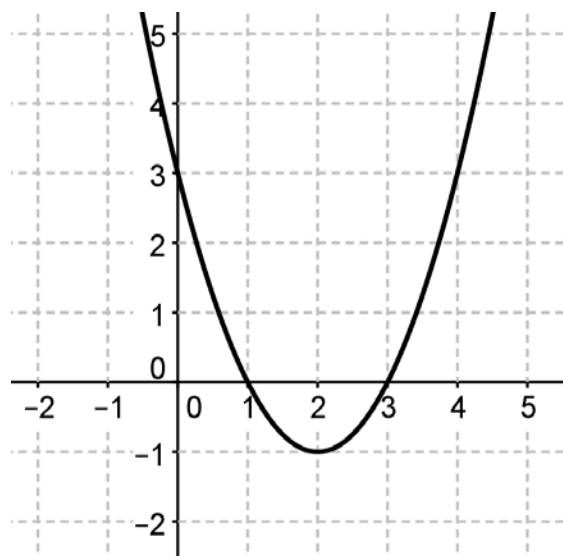
$$A = 4\kappa + 2\lambda + 2016$$

Μέρος Β:

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$, $a \neq 0$. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της f
- β) το πεδίο τιμών της f
- γ) το πρόσημο του a
- δ) το πρόσημο της διακρίνουσας Δ
- ε) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- στ) τη λύση της ανίσωσης $f(x) \leq 0$
- ζ) τις ρίζες x_1 και x_2 της εξίσωσης $ax^2 + \beta x + \gamma - 0$
- η) την τιμή του γ
- θ) την τιμή του a
- ι) την τιμή του β



2. α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x+1)(x^2-2x-3)}{x^2-4} \geq 0$.

β) Να λύσετε το σύστημα: $\chi - \psi = -2$

$$\chi^2 + 2\psi = 7.$$

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,1), Β(7,-5) και Γ(-3,3). Να βρείτε:

- α) Την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.
- β) Την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ.
- γ) Την εξίσωση του ύψους ΑΔ.
- δ) Το μήκος του ύψους ΑΔ .
- ε) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρνουμε ευθεία που τέμνει τη ΔΓ στο Ζ και την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να δείξετε ότι

$$\alpha) \frac{AE}{AZ} = \frac{BE}{A\Delta}$$

$$\beta) (ZA)(Z\Gamma) = (Z\Delta)(ZE)$$

5. α) Αν $\frac{\eta\mu(180^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega)}{\eta\mu(90^\circ - \omega) \sigma\phi(90^\circ + \omega)} + \eta\mu(180^\circ + \omega) - \eta\mu(-\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $0^\circ < \omega < 90^\circ$, να βρείτε την τιμή της γωνιάς ω .

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\eta\mu\theta x - \sigma\upsilon\nu^2\theta = 0$, και $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

i) Να δείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Να δείξετε ότι: $x_1^2 + x_2^2 = 2(1 + \eta\mu^2\theta)$ όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Α. Χριστοδουλίδης

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Από την κορυφή Α φέρνουμε ευθεία που τέμνει τη ΔΓ στο Ζ και την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να δείξετε ότι

$$\alpha) \frac{AE}{AZ} = \frac{BE}{AA}$$

$$\beta) (ZA)(Z\Gamma) = (Z\Delta)(ZE)$$

5. α) Αν $\frac{\eta\mu(180^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \omega)}{\eta\mu(90^\circ - \omega) \sigma\phi(90^\circ + \omega)} + \eta\mu(180^\circ + \omega) - \eta\mu(-\omega) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ και $0^\circ < \omega < 90^\circ$, να βρείτε την τιμή της γωνιάς ω .

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 2\eta\mu\theta x - \sigma\upsilon\nu^2\theta = 0$, και $0^\circ < \theta < 90^\circ$.

i) Να δείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

ii) Να δείξετε ότι: $x_1^2 + x_2^2 = 2(1 + \eta\mu^2\theta)$ όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης.

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Α. Κωνσταντινίδη

Χ. Κωνσταντινίδης

Α. Χριστοδουλίδης

Κ. Παπαβασιλείου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΤΑΞΗ: Α΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23 / 05 /2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (5ωρο)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μπλε ή μαύρης πέννας (τα σχήματα με μολύβι).

β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση κινητού τηλεφώνου.

δ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΔΥΟ (2) ΜΕΡΗ ΚΑΙ ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση $(2 - x)^4 = 81$

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων αν σχηματίζουν μεταξύ τους γωνία 30° .

3. Δίνεται η εξίσωση: $(\kappa^2 - 4\kappa + 3)x = 9 - \kappa^2, \kappa \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τις τιμές του κ ώστε η εξίσωση να έχει λύση το $x = 1$.

β) Για ποιες τιμές του κ η εξίσωση είναι αόριστη;

4. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τη βαθμολογία 10 μαθητών στα μαθηματικά .

Βαθμός	Αρ. φοιτητών
13	1
16	2
17	3
18	2
19	2

Να υπολογίσετε:

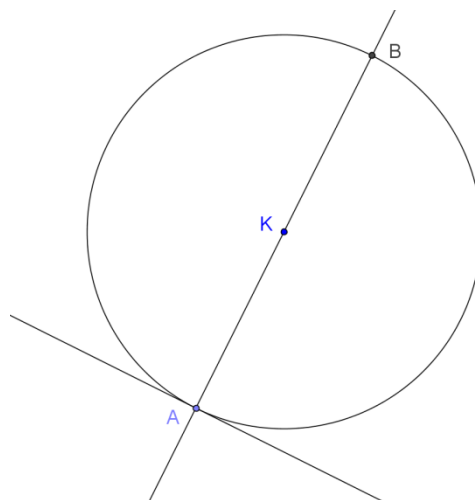
- α) Τη μέση τιμή της βαθμολογίας .
- β) Την τυπική απόκλιση της βαθμολογίας .

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο $K(2,4)$

και το σημείο του $A(1,-2)$.

Να βρείτε:

- α) Την εξίσωση της διαμέτρου AB .
- β) Την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του A .
- γ) Τις συντεταγμένες του σημείου B .



6. Αν το $\sin \omega = -\frac{4}{5}$ και $90^\circ < \omega < 180^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

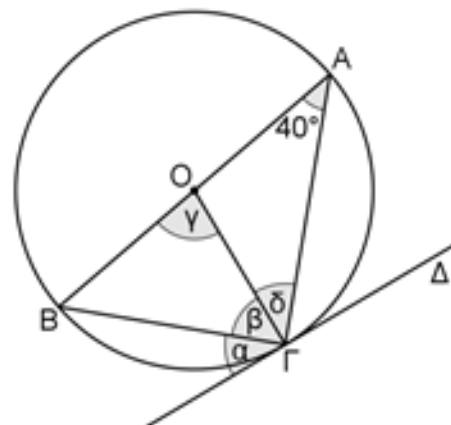
$$A = \frac{4\epsilon\phi(180^\circ + \omega) + 9\tau\epsilon\mu(90^\circ - \omega)}{5\eta\mu(270^\circ + \omega)}$$

7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 40^\circ$,

AB διάμετρος του κύκλου και $\Delta\Gamma$ εφαπτομένη του κύκλου (O,R) στο σημείο Γ .

Να υπολογίσετε, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας,

τα μέτρα των γωνιών α , β , γ και δ .



8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία: Α(5,2), Β(2,-2) και Γ(0,2)

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ($AB = AG$).

β) Να βρείτε το μήκος του ύψους ΓΔ.

γ) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\hat{B}$.

9. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\mu \in R$ ώστε η εξίσωση $x^2 - 2(\mu - 1)x + \mu^2 - 3 = 0$ να έχει:

α) Ρίζες αντίστροφες.

β) Άθροισμα ριζών ίσο με 2.

γ) Ρίζες που να ικανοποιούν τη σχέση $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} > 2$

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^\circ$. Να φέρετε το ύψος ΑΔ και από το Δ να φέρετε την ΔΕ κάθετη στην ΑΓ (Ε σημείο επαφής με την ΑΓ). Να δείξετε ότι :

α) Τα τρίγωνα $\triangle \Gamma \hat{A} E$, $\triangle A \hat{B} \Gamma$ είναι όμοια

β) $(A\Delta)^2 = (AB) \cdot (\Delta E)$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **10 μονάδες**.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε :

α) Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.

β) Τις συντεταγμένες της κορυφής.

γ) Το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

δ) Το πρόσημο της διακρίνουσας.

ε) Το πρόσημο του α.

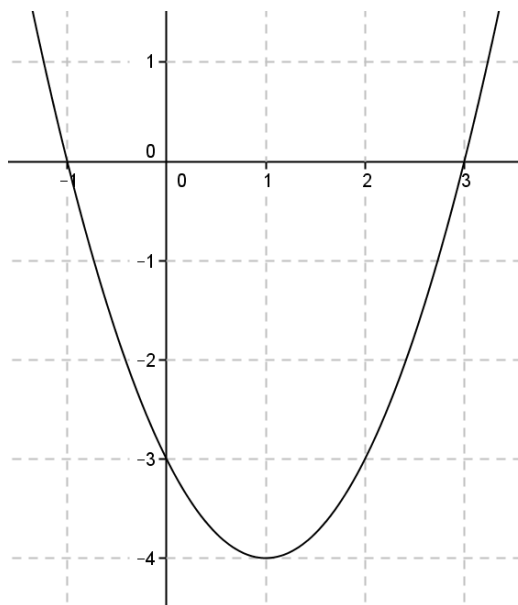
στ) Την τιμή του γ.

ζ) Την τιμή του $f(2)$.

η) Το πρόσημο του $f(-2)$.

θ) Τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$.

ι) Τις τιμές των α και β.



2. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{(x^2-9)(x^2+2x+5)}{(x^2-3x)(1-x)^2} \geq 0$

3. Αν $A = \frac{\sin \chi}{1-\eta\mu\chi} - \frac{\sin \chi}{1+\eta\mu\chi}$

α) Να δείξετε ότι $A = 2\epsilon\phi\chi$

β) Να βρείτε τις τιμές του χ ώστε να ισχύει η σχέση $(\frac{\sin \chi}{1-\eta\mu\chi} - \frac{\sin \chi}{1+\eta\mu\chi})^2 = 4$ στο διάστημα $(0^\circ, 360^\circ)$.

4. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, R)

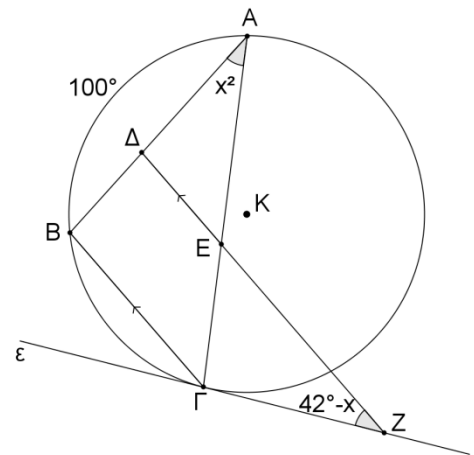
Η ευθεία ε εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Γ, $\angle A\hat{B} = 100^\circ$, $\angle B\hat{A}\Gamma = x^\circ$ και $\angle \Delta\hat{Z}\Gamma = 42^\circ - x$, με $x > 0$.

Αν $\Delta Z \parallel B\Gamma$ τότε:

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABΓ και ΕΓΖ είναι όμοια

β) Να αποδείξετε ότι $(B\Gamma) \cdot (GZ) = (GE) \cdot (BA)$

γ) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΔΕ.



5. Δίνεται ρόμβος ABΓΔ με κορυφή $\Delta(7, -1)$. Αν η εξίσωση της μιας διαγωνίου του είναι $x - y - 2 = 0$ και της πλευράς του ΓΔ: $x + 2y - 5 = 0$ να βρείτε:

α) Την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του.

β) Τις συντεταγμένες των κορυφών του Α, Β, Γ.

γ) Την εξίσωση της πλευράς του ΑΒ.

δ) Το εμβαδόν του ρόμβου ABΓΔ.

Η διευθύντρια

Μαρία Θεοφάνους

.....

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά κατεύθυνσης

ΤΑΞΗ: Α'κατ.

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 01/6/2016

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:2,5 ώρες

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 11:00

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να χρησιμοποιείτε μόνο απλή πένα μπλε χρώματος.
2. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
3. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής
4. Δεν επιτρέπεται να δανείζεστε οτιδήποτε από συμμαθητές σας.
5. Κατοχή κινητού τηλεφώνου = δολίευση.
6. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η εξίσωση $\lambda\chi^2 + (\lambda - 2)\chi + \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει:

- 1) ρίζα τον αριθμό -1
- 2) ρίζες αντίθετες.

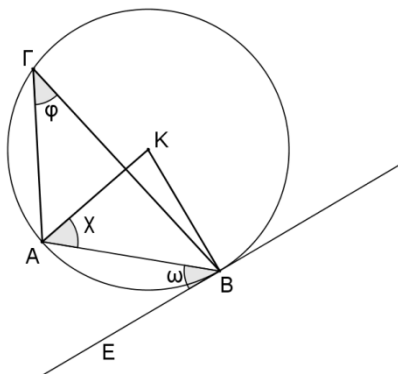
2. Να αντιστοιχίσετε κάθε σχέση της **A στήλης** με την αντίστοιχη σχέση της **B στήλης**, αφού μεταφέρετε και συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα απαντήσεων στο φύλλο εργασίας σας.

Πίνακας απαντήσεων

1.	2.	3.	4.

A	B
Αν για την εξίσωση $\alpha\chi + \beta = 0$ ισχύει:	Τότε:
1. $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$	1. η εξίσωση είναι αόριστη
2. $\alpha \neq 0$ και $\beta \neq 0$	2. η εξίσωση είναι αδύνατη
3. $\alpha \neq 0$ και $\beta = 0$	3. η εξίσωση έχει μοναδική λύση τη $\chi = -\frac{\beta}{\alpha}$
4. $\alpha = 0$ και $\beta = 0$	4. η εξίσωση έχει μοναδική λύση τη $\chi = -\frac{\alpha}{\beta}$
	5. η εξίσωση έχει μοναδική λύση τη $\chi = 0$

3. Δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα KA , τόξο $\widehat{AB} = 78^\circ$ και η BE εφαπτομένη του κύκλου. Να υπολογίσετε τις γωνίες φ , χ και ω , αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



4. Το βάρος πέντε μαθητών μιας ομάδας μπάσκει είναι 62, 77, 65, 72 και 69 κιλά.
- 1) Να βρείτε το μέσο όρο του βάρους των πέντε μαθητών και να υπολογίσετε τη διάμεσο του βάρους τους.
 - 2) Στην πιο πάνω ομάδα μαθητών, αν προστεθεί και έκτος τότε το μέσο βάρος των έξι μαθητών θα γίνει συνολικά 72 κιλά. Να βρείτε το βάρος του έκτου μαθητή που προστέθηκε στην ομάδα.
5. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[12]{3}$ και $B = \sqrt{\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3}}$.
- Να αποδείξετε ότι :
- 1) $A = 3 \cdot \sqrt[6]{3}$, $B = \sqrt[3]{3}$
 - 2) $A \cdot B = 3\sqrt{3}$
6. Αν ισχύει $9\eta\mu\theta - 5 = 4\eta\mu\theta - 8$, $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{8\epsilon\phi\theta - 15\sigma\upsilon\nu\theta}{3\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

7. Δίνονται τα σημεία $A(7,5)$, $B(4,-2)$ και $\Gamma(9,0)$.
- 1) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{A\Gamma}$
 - 2) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{A\Gamma}$, $\overrightarrow{B\Gamma}$ είναι κάθετα μεταξύ τους ($\overrightarrow{A\Gamma} \perp \overrightarrow{B\Gamma}$).
8. Να λύσετε την ανίσωση $(2 - 5\chi)(\chi^2 - 4\chi + 3)(\chi^2 - 9) < 0$.

9. Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα:
- $$\left. \begin{array}{l} \lambda\chi + (\lambda + 1)\psi = 3 \\ 2\lambda\chi + 8\psi = 6 \end{array} \right\} (\lambda \in \mathbb{R})$$

10. α) Αν οι αριθμοί α , γ είναι ετερόσημοι να δείξετε ότι η εξίσωση $\alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $2016\chi^2 - (2\mu^5 + \mu^4 + 3)\chi = \mu^2 + 1$ έχει 2 ρίζες πραγματικές και άνισες.

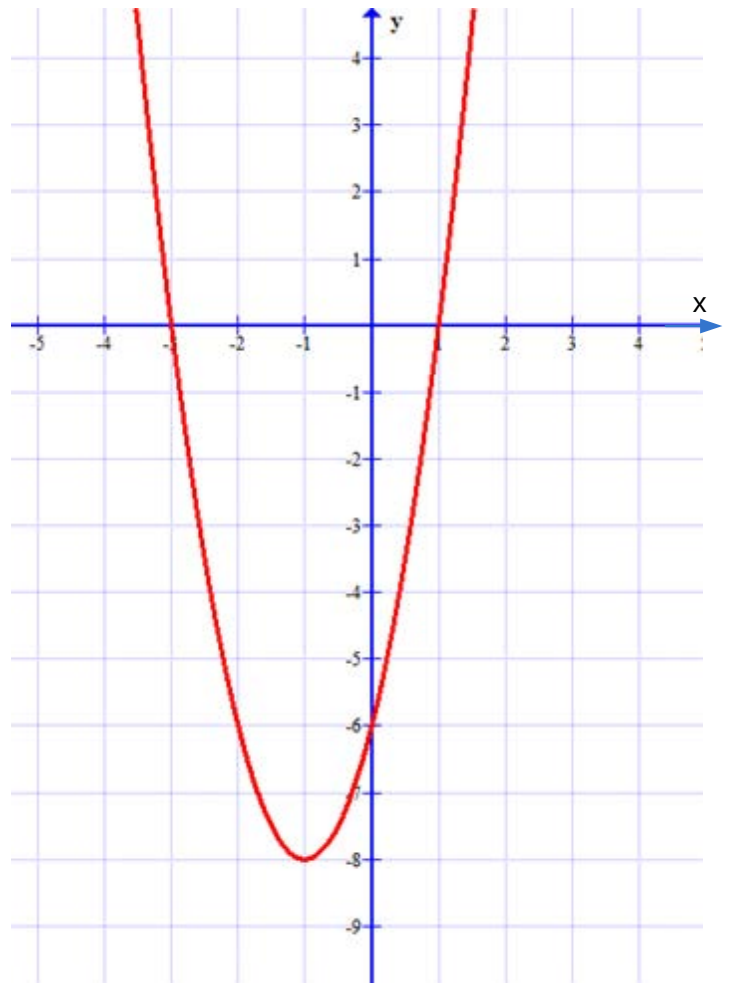
ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της

συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$).

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- 1) Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x)$.
- 2) Τον άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της f .
- 3) Τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$.
- 4) Το πρόσημο του a και της διακρίνουσας (Δ) της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$.
- 5) Τις τιμές των a , b και c .
- 6) Να μετασχηματίσετε τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ στη μορφή $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \delta$.
Να περιγράψετε πώς η γραφική παράσταση της $g(x) = 2x^2$ με κατάλληλες μετατοπίσεις θα συμπίσει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



2. Οι εξισώσεις $3x - 5y - 8 = 0$ και $2x + 3y - 18 = 0$ είναι οι εξισώσεις των πλευρών ΑΓ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ αντίστοιχα. Αν το τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές $A(1, -1)$ και $B(3, 4)$

Να βρείτε:

- i. την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Γ και είναι παράλληλη προς την ΑΒ.
- ii. την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ.
- iii. την εξίσωση του ύψους ΑΔ.
- iv. το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
- v. το μέτρο της γωνίας Γ του τριγώνου ΑΒΓ.

3. Δίνεται κύκλος με διάμετρο ΓΔ. Από σημείο Η έξω από τον κύκλο φέρουμε εφαπτομένη ΗΔ (Δ σημείο επαφής) και τέμνουσα ΗΖΓ. Από τυχαίο σημείο Α της ΔΖ φέρουμε κάθετη ΑΒ στην ΓΔ.
- 1) Να δείξετε ότι $(AB)(HΓ) = (ΑΔ)(ΔΓ)$
 - 2) Αν $HZ = 6,4$ cm και $ZΓ = 3,6$ cm να υπολογίσετε το μήκος της ακτίνας του κύκλου.

4. α) Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\frac{(1 + \epsilon\phi\chi)^2}{\tau\epsilon\mu\chi \cdot \eta\mu\chi} = \tau\epsilon\mu\chi \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\chi + 2$

β) Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 - \eta\mu\theta}$ και $B = \tau\epsilon\mu\theta - \epsilon\phi\theta$, $0 < \theta < \pi$

i. Να δείξετε ότι $A + B = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\theta}$

ii. Αν η εξίσωση $\chi^2 + 3\chi + \frac{1}{2\sigma\upsilon\nu\theta} \cdot A = 0$, έχει ρίζες αντίστροφες να δείξετε ότι $\hat{\theta} = \frac{\pi}{6}$.

5. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = 3\chi - 1$ και $B = -2\psi + 1$.

1) Να λύσετε την εξίσωση $B^{\frac{5}{2}} + 2 = 34$, $\psi < \frac{1}{2}$.

2) Αν $2 < A < 11$ και $3 < B < 11$,

i. Να αποδείξετε ότι $1 < \chi < 4$ και $-5 < \psi < -1$

ii. Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

$$\chi \cdot \psi, \chi - 2\psi \text{ και } 1 - \frac{\chi}{\psi}.$$

ΤΕΛΟΣ

Η Διευθύντρια

Δρ Αντωνία Λοΐζου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Προσανατολισμού Α' (5-ΩΡΟ)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/05/2016

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2½ ώρες

Όνοματεπώνυμο: _____ Βαθμός: _____

Τμήμα: _____ Αριθμός: _____ Βαθμός ολογράφως: _____

Υπογραφή καθηγητή: _____

ΟΔΗΓΙΕΣ :

- (α) Να γράψετε μόνο με **μπλε** μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- (β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (γ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία διαδικασία.
- (δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το δοκίμιο αποτελείται από (έντεκα) 11 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

α) $(2\sqrt{3} - 5)^2$

β) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} + \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{4} - 10\sqrt{27} \cdot \sqrt{3}$

2. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 10x + 1 = 0$, με ρίζες x_1 και x_2 . Χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να βρείτε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

α) $x_1 + x_2$

β) $x_1 \cdot x_2$

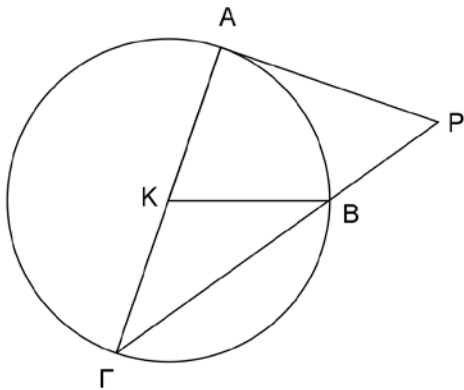
γ) $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$

3. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB όπου A (2,3) και B (-4,5).

4. Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ, διάμετρο ΑΓ, ΑΡ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α και γωνία $\hat{A}P\Gamma = 30^\circ$.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{A}KB$ και $\hat{A}P\Gamma$ και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

β) Αν $PB=3\text{ cm}$, και $B\Gamma=9\text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΡ.



5. Αν $\sin\theta = \frac{5}{13}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{24\sigma\phi\theta - 13\eta\mu\theta}{\epsilon\phi(-\theta)}$.

6. Να βρείτε την τιμή της ορίζουσας: $A = \begin{vmatrix} \chi & 12 \\ 3 & \chi \end{vmatrix}$ και ακολούθως να λύσετε την ανίσωση $\frac{A}{\chi+4} \geq 0$.

7. Να υπολογίσετε την μέση τιμή, το εύρος και την τυπική απόκλιση των τιμών: 1, 1, 1, 3, 4, 4, 5, 6, 7, 8.

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\sqrt{2-\chi} = 4$

β) $\sqrt[3]{2\chi-4} = 2$

γ) $\sqrt{\chi+3} = -4$

9. Να βρείτε τις τιμές του $\kappa \in R$ για τις οποίες η συνάρτηση $f(\chi) = \chi^2 + (\kappa - 2)\chi + 4$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

10. α) Αν το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y \cdot \sigma\upsilon\nu 330^\circ = 2\sqrt{3} \\ x \cdot \epsilon\varphi 240^\circ + y = 5 \\ ax^2 + \beta y = \gamma \end{cases}$$
 είναι συμβιβαστό να δείξετε ότι $3\alpha + 2\beta = \gamma$.

- β) Αν $-1 \leq \alpha \leq 2$ και $5 \leq \beta \leq 6$ να δείξετε ότι $7 \leq \gamma \leq 18$.

ΜΕΡΟΣ Β : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \mu \\ 2 \end{pmatrix}$, και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \mu+1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Να βρείτε για ποιες τιμές του μ :

α) το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{\beta}$,

β) το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\beta}$,

γ) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι ίσο με το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$.

2. Δίνεται η παραβολή $y = ax^2 + bx + \gamma$ ($a \neq 0$).

α) i) Να γράψετε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.

ii) Να αποδείξετε ότι ο άξονας συμμετρίας μπορεί να πάρει την μορφή $x = \frac{S}{2}$, όπου S το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$.

β) Αν η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα $A(2,0)$ και $B(\kappa,0)$, τον άξονα των τεταγμένων στο $\Gamma(0,16)$ και έχει άξονα συμμετρίας $x = 3$, να βρείτε:

i) την τιμή του κ και

ii) τις τιμές των α, β, γ .

$$3. \quad A \vee A = \frac{\sigma \nu \nu (270 + \alpha) \cdot \eta \mu (360 + \alpha) \cdot \varepsilon \varphi (90 + \alpha)}{\sigma \nu \nu (90 - \alpha) \cdot \sigma \nu \nu (\alpha - 180)} \quad \text{και}$$

$$B = (\eta \mu^2 \alpha - \sigma \nu \nu^2 \alpha)^2 + 4 \eta \mu^2 \alpha \cdot \sigma \nu \nu^2 \alpha + \eta \mu (90 + \alpha) \cdot \sigma \nu \nu (180 + \alpha)$$

$$\text{να δείξετε ότι } \frac{A}{B} = \sigma \tau \varepsilon \mu^2 \alpha .$$

4. Ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ έχει εξίσωση πλευράς AB : $y - 7x + 6 = 0$, εξίσωση διαγωνίου $ΑΓ$: $x - 3y + 2 = 0$. Μία από τις κορυφές του έχει συντεταγμένες $(6, -4)$ και K είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του ρόμβου και του σημείου K .

β) Αν $K(4, 2)$ να βρείτε την απόσταση του σημείου K από την πλευρά AB .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του ρόμβου.

5. (α) Να διατυπώσετε το θεώρημα χορδής και εφαπτομένης.

(β) Από τυχαίο σημείο A εκτός του κύκλου (O,R) φέρουμε τις εφαπτόμενες AB και AG , όπου B και G τα σημεία επαφής και την τέμνουσα ADE . Να δείξετε ότι $(BD).(EG)=(EB).(GD)$.

Οι διδάσκοντες

Ανδρέας Χειμώνας

Φρύνη Τοφή

Καρολίνα Παπαχρυσοστόμου

Χρυστάλλα Αλεξάνδρου

Αναστασία Ευαγγελίδου

Η διευθύντρια

Έλση Μαργερίδου

Ο συντονιστής

Ανδρέας Χειμώνας

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ : Α' (5ωρο)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 23 / 5 / 2016

ΧΡΟΝΟΣ : 2,5 ΩΡΕΣ

Βαθμός:

Ολογράφως :

Υπογραφή:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ : ΤΜΗΜΑ :

ΟΔΗΓΙΕΣ : α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής
β) Να γράψετε **μόνο με πέννα μπλε** (τα σχήματα με μολύβι)
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 9 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α :

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Α(- 3 , 5) και σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα των x .

2. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\lambda^2 x - 3\lambda = 9x + \lambda^2$, για κάθε τιμή $\lambda \in R$.

3. Να υπολογίσετε τις τιμές του x αν :

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ x & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & x \end{vmatrix}$$

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε : α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{a} - \vec{\beta}$

β) την τιμή του μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} \mu \\ 3 - \mu \end{pmatrix}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

5. Να υπολογίσετε τη γωνία ω αν $0^\circ < \omega < 90^\circ$ και ισχύει η σχέση

$$\frac{\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega) \cdot \sigma\varphi(90^\circ + \omega) \cdot \tau\epsilon\mu(180^\circ + \omega)}{\eta\mu(-\omega) \cdot \epsilon\varphi(180^\circ + \omega)} = -2.$$

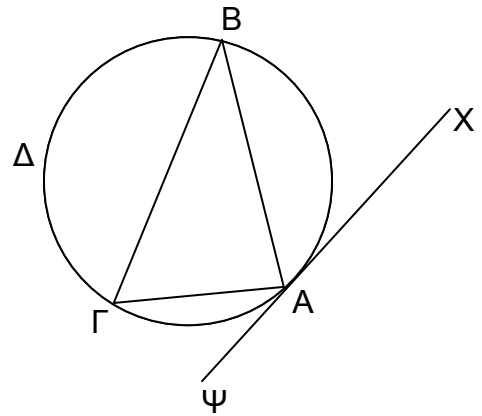
6. Στο διπλανό σχήμα δίνονται:

$\chi\alpha\psi$ εφαπτομένη του κύκλου

$\angle \alpha\hat{B}\Gamma = 48^\circ$, $\angle \beta\Delta\Gamma = 160^\circ$.

Να βρείτε τις γωνίες :

$\angle \beta\hat{A}\Gamma$, $\angle \alpha\hat{\Gamma}B$, $\angle \chi\hat{A}B$, $\angle \psi\hat{A}\Gamma$.



7. Αν $-7 < \alpha < -2$ και $2 < \beta < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις :

α) $\alpha + \beta$, β) $\frac{3}{\beta}$, γ) $\alpha^2 + 2\beta$

8. Δίνεται η εξίσωση $\kappa x^2 - (\kappa^2 - 3)x - 3\kappa = 0$, $\kappa \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή $\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του κ έχει : i) ρίζες ετερόσημες , ii) μία ρίζα ίση με το -1

9. Να δείξετε ότι $\sigma \nu^2 \alpha \cdot (\sigma \varphi^2 \alpha - \varepsilon \varphi^2 \alpha) = \sigma \varphi^2 \alpha - 1$

10. Δίνονται οι βαθμοί 13 μαθητών ενός τμήματος Α τάξης σε ένα διαγώνισμα μαθηματικών .
Να υπολογίσετε :α) τα μέτρα θέσης (τη μέση τιμή , διάμεσο ,επικρατούσα τιμή)
β) την τυπική απόκλιση

Βαθμός (x_i)	Αρ. Μαθητών (f_i)
9	1
10	1
12	4
14	2
15	1
17	2
18	1
20	1

ΜΕΡΟΣ Β :

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma. \text{ Να βρείτε :}$$

α) το πεδίο τιμών της $f(x)$

β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
και τις συντεταγμένες της κορυφής

γ) τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$

δ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) \geq 5$

ε) τις τιμές των α , β , γ .

2. Από σημείο A εκτός κύκλου φέρουμε εφαπτομένη AB (B το σημείο επαφής με τον κύκλο) και τέμνουσα ΑΓΔ (Γ και Δ σημεία του κύκλου).

α) Να δείξετε ότι $(AB)^2 = (AG) \cdot (AD)$

β) Αν $BD = AB$, να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

3. Να λύσετε την ανίσωση
$$\frac{(9-x^2) \cdot (x^2+2x-3) \cdot (4x^2+1)}{x^2+5x} \leq 0$$

4. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $A(1, 3)$, η εξίσωση της πλευράς ΑΔ είναι $x + 2\psi = 7$ και η εξίσωση μιας διαγωνίου του είναι η $x + \psi = 7$. Να βρείτε :
- α) την εξίσωση της άλλης διαγωνίου
 - β) τις συντεταγμένες των κορυφών του
 - γ) τη γωνία Α (κατά προσέγγιση ακεραίου)
 - δ) την περίμετρο του ρόμβου
 - ε) την απόσταση μεταξύ των παράλληλων πλευρών
 - στ) το εμβαδόν του ρόμβου.

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\eta\mu\omega + 1) \cdot x + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 0$, $\hat{\omega} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης , να δείξετε ότι $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\eta\mu\omega - 1}$

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση β' βαθμού με ρίζες $\rho_1 = \frac{1}{x_1}$, $\rho_2 = \frac{1}{x_2}$ είναι η

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega \cdot x^2 + (\eta\mu\omega + 1)x + 1 = 0$$

γ) Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης που σχηματίσατε στο ερώτημα β, να δείξετε ότι η παράσταση $A = \Delta + 9$ είναι πάντα θετική $\forall \hat{\omega} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Ο Διευθυντής

Νεόφυτος Παπαϊωάννου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ : Α' (5ωρο)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : / 6 / 2016

ΧΡΟΝΟΣ : 2,5 ΩΡΕΣ

Βαθμός:

Ολογράφως :

Υπογραφή:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ : ΤΜΗΜΑ :(β' σειρά)

ΟΔΗΓΙΕΣ : α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής
β) Να γράψετε **μόνο με πέννα μπλε** (τα σχήματα με μολύβι)
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 9 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α :

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο Α(0 , - 1) και σχηματίζει γωνία 120° με τον άξονα των x .

2. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\lambda^2 x + 25 = 5\lambda x + \lambda^2$, για κάθε τιμή $\lambda \in R$.

3. Να υπολογίσετε τις τιμές του x αν :

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & x \\ x & 2x \end{vmatrix}$$

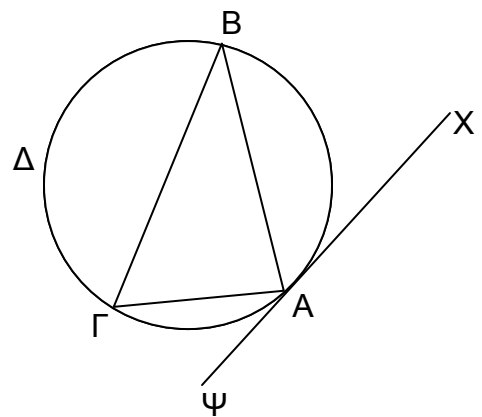
4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε : α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{a} - \vec{\beta}$

β) την τιμή του μ ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = \begin{pmatrix} \mu \\ 3 - \mu \end{pmatrix}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

5. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση
$$\frac{\eta\mu(270^\circ - \omega) \cdot \tau\epsilon\mu(-\omega) \cdot \sigma\varphi(90^\circ + \omega)}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) \cdot \epsilon\varphi(180^\circ + \omega) \cdot \tau\epsilon\mu(360^\circ + \omega)} = -1.$$

6. Στο διπλανό σχήμα δίνονται:
 $\chi\alpha\psi$ εφαπτομένη του κύκλου
 $\angle \alpha\hat{b}\gamma = 46^\circ$, $\angle \beta\Delta\gamma = 160^\circ$.
 Να βρείτε τις γωνίες :
 $\angle \beta\hat{\alpha}\gamma$, $\angle \alpha\hat{\gamma}\beta$, $\angle \chi\hat{\alpha}\beta$, $\angle \psi\hat{\alpha}\gamma$.



7. Αν $-9 < \alpha < -3$ και $2 < \beta < 6$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις :

α) $a + \beta$, β) $\frac{3}{\beta}$, γ) $a^2 + 3\beta$

8. Δίνεται η εξίσωση $\kappa x^2 - (\kappa^2 - 4)x - 4\kappa = 0$, $\kappa \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε τιμή $\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του κ έχει : i) ρίζες ετερόσημες , ii) μία ρίζα ίση με το -1

9. Να δείξετε ότι $\sigma_{\text{τεμ}\chi} - \frac{\sigma\varphi^2\chi}{\sigma_{\text{τεμ}\chi}} = \eta_{\mu\chi}$

10. Δίνονται οι βαθμοί 13 μαθητών ενός τμήματος Α τάξης σε ένα διαγώνισμα μαθηματικών .
 Να υπολογίσετε :α) τα μέτρα θέσης (τη μέση τιμή , διάμεσο ,επικρατούσα τιμή)
 β) την τυπική απόκλιση

Βαθμός (x_i)	Αρ. Μαθητών (f_i)
9	1
10	1
12	4
14	2
15	1
17	2
18	1
20	1

ΜΕΡΟΣ Β :

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma. \text{ Να βρείτε :}$$

α) το πεδίο τιμών της $f(x)$

β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
και τις συντεταγμένες της κορυφής

γ) τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$

δ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) \leq 8$

ε) τις τιμές των α , β , γ .



2. Τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ώστε ΑΓ διάμετρος του κύκλου. Να φέρετε την εφαπτομένη (ε) του κύκλου στο σημείο Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας Α τέμνει τη ΒΓ στο Ε και την εφαπτομένη στο Δ , να δείξετε ότι $(BE) \cdot (AD) = (AE) \cdot (ΓΔ)$

3. Να λύσετε την ανίσωση
$$\frac{(4-x^2) \cdot (x^2+x-2) \cdot (9x^2+1)}{x^2+6x} \leq 0$$

4. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με $\Gamma(1, 3)$, η εξίσωση της πλευράς ΓΔ είναι $x + 2\psi = 7$ και η εξίσωση μιας διαγωνίου του είναι η $x + \psi = 7$. Να βρείτε :
- α) την εξίσωση της άλλης διαγωνίου
 - β) τις συντεταγμένες των κορυφών του
 - γ) τη γωνία Α (κατά προσέγγιση ακεραίου)
 - δ) την περίμετρο του ρόμβου
 - ε) την απόσταση μεταξύ των παράλληλων πλευρών
 - στ) το εμβαδόν του ρόμβου.

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\eta\mu\omega + 1) \cdot x + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 0$, $\hat{\omega} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Αν x_1 , x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης , να δείξετε ότι $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\eta\mu\omega - 1}$

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση β' βαθμού με ρίζες $\rho_1 = \frac{1}{x_1}$, $\rho_2 = \frac{1}{x_2}$ είναι η

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega \cdot x^2 + (\eta\mu\omega + 1)x + 1 = 0$$

γ) Αν Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης που σχηματίσατε στο ερώτημα β, να δείξετε ότι η παράσταση $A = \Delta + 5$ είναι πάντα θετική $\forall \hat{\omega} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Ο Διευθυντής

Νεόφυτος Παπαϊωάννου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού

Ημερομηνία: 09/06/2016

ΤΑΞΗ: Α'

Διάρκεια: 2,5 ώρες

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- α. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- β. Να γράψετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- γ. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού.
- δ. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

Μέρος Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.
Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία περνά από το σημείο $(2,5)$ και σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα των τετμημένων.

A2. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

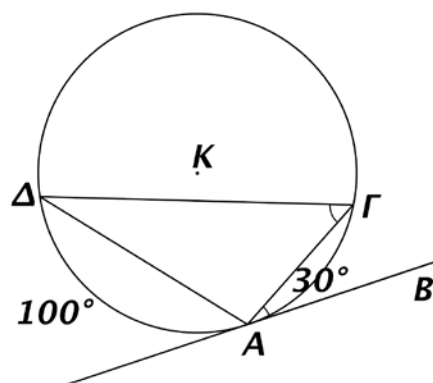
α. $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3}$

β. $\sqrt{21 + \sqrt{13 + \sqrt{7 + \sqrt{4}}}}$

γ. $(\sqrt{8} + \sqrt{2})^2$

δ. $32^{\frac{3}{5}}$

A3. Στο πιο κάτω σχήμα η ευθεία AB είναι η εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) στο σημείο του A. Αν η γωνία $\widehat{\Gamma\hat{A}B} = 30^\circ$ και το μέτρο του τόξου $\widehat{A\hat{D}} = 100^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $\triangle A\Gamma\Delta$ δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



A4. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

α. $\sqrt[3]{x+5} = 4$

β. $x^{\frac{2}{5}} = 9$

A5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \end{pmatrix}$. Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

A6. Αν η εξίσωση $2x^2 + 4x - 1 = 0$ έχει ρίζες x_1 και x_2 να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς να λύσετε την εξίσωση:

α. $x_1 + x_2$

β. $x_1 x_2$

γ. $\frac{5}{x_1} + \frac{5}{x_2}$

δ. $4x_1^3 x_2 + 4x_1 x_2^3$

A7. Να υπολογίσετε τη γωνία ω , αν $0^\circ < \omega < 90^\circ$ και

$$\frac{\sin(270^\circ + \omega) \cdot \cos(180^\circ - \omega)}{\sin(180^\circ - \omega) \cdot \cos(-\omega)} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

A8. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x^2 + x + 1)(x - 1)^2}{(x^2 - 2x - 15)} \geq 0$

A9. Να λύσετε και να διερευνήσετε το σύστημα:

$$(\lambda - 5)x - y + 3 = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$2x - y - 7 = 0$$

A10. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον χρόνο (σε ώρες) που αφιερώνουν οι μαθητές ενός σχολείου σε μια βδομάδα.

Χρόνος (σε ώρες)	12	51	48	15	12	12
Αριθμός Μαθητών x_i						

f_i

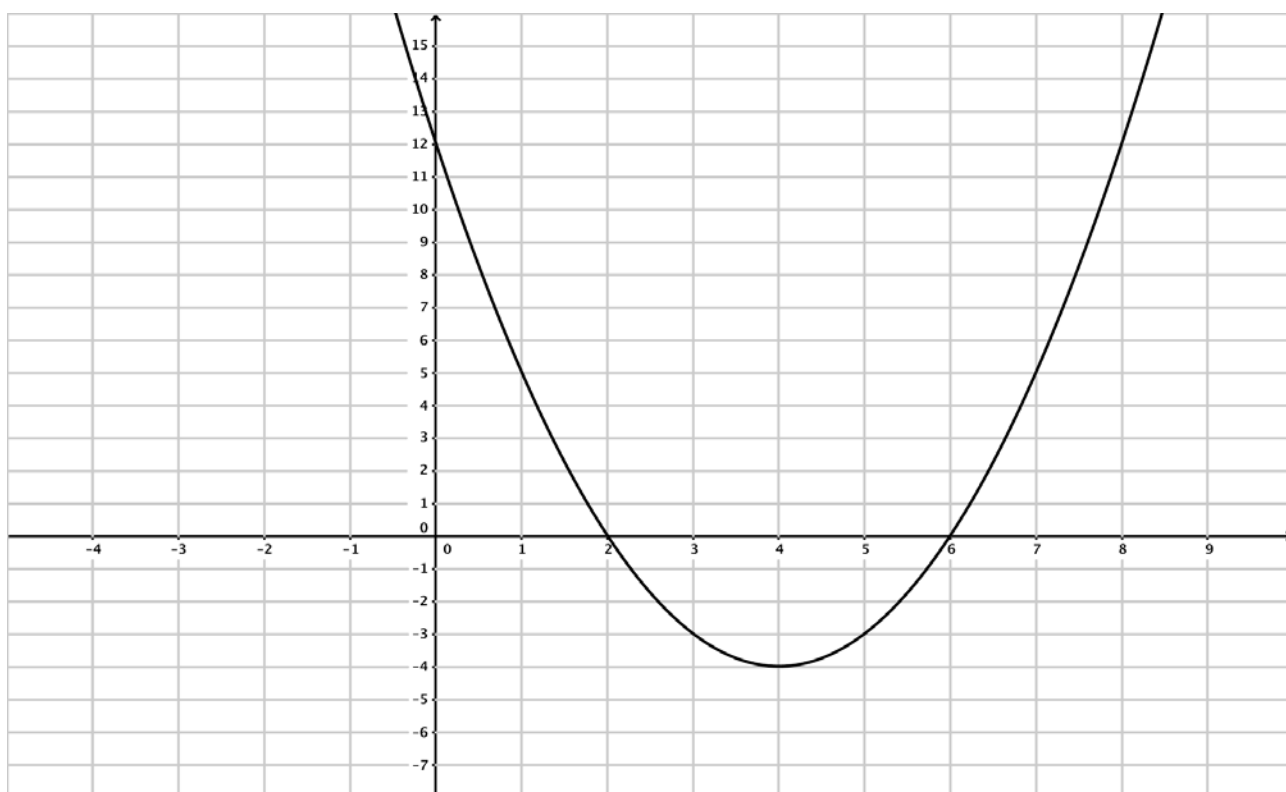
Για τα δεδομένα του πιο πάνω πίνακα να βρείτε:

- α. τη μέση τιμή,
- β. την τυπική απόκλιση,
- γ. το συντελεστή μεταβολής.

Μέρος Β: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
 Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Να βρείτε :

- α. το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $f(x)$,
- β. την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της $f(x)$ και τις συντεταγμένες της κορυφής,
- γ. τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) = 0$,
- δ. τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) < 0$,
- ε. τις τιμές των a, b, γ .



B2. Αν $|\vec{\alpha}| = 4$, $|\vec{\beta}| = 7$ και το μέτρο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι $\frac{\pi}{3}$, να υπολογίσετε:

- α. $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$,

β. $(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) \cdot (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$,

γ. τη τιμή του λ ώστε $(2\vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}) \perp (\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.

B3. α. Αν $\eta\mu\theta = -\frac{3}{5}$, $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Lambda = \frac{10\eta\mu\theta + 4\epsilon\varphi\theta}{5\sigma\upsilon\nu\theta}$$

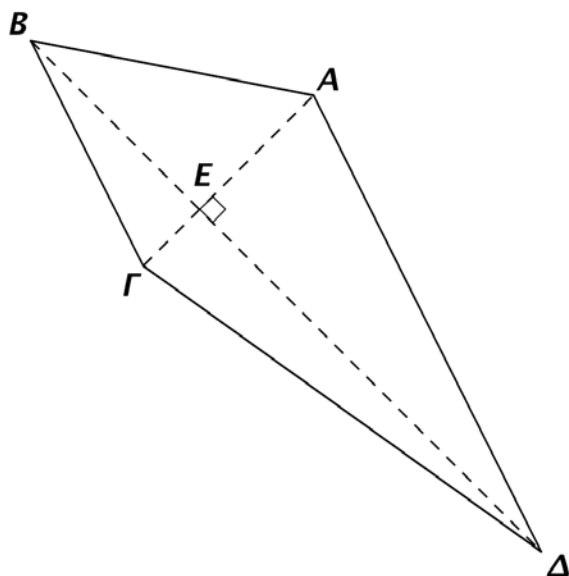
β. Να αποδείξετε τις πιο κάτω τριγωνομετρικές ταυτότητες:

i. $\epsilon\varphi\theta + \frac{1}{\epsilon\varphi\theta} = \sigma\tau\epsilon\mu\theta \cdot \tau\epsilon\mu\theta$

ii. $\frac{\sigma\upsilon\nu^3\theta \cdot \epsilon\varphi\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \epsilon\varphi\theta} = \frac{1 + \eta\mu\theta}{\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$

B4. Στο πιο κάτω τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ δίνονται $A\Delta \parallel B\Gamma$, $A\Gamma \perp B\Delta$ και E το σημείο τομής των διαγωνίων του. Το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(3,1)$, το Δ έχει συντεταγμένες $(10, -4)$ και η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ είναι $\epsilon_1: 2x + y - 7 = 0$. Αν η εξίσωση της μίας διαγωνίου του τραπέζιου είναι $\epsilon_2: x + y - 6 = 0$, να βρείτε:

- την εξίσωση της άλλης διαγωνίου,
- το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta E$,
- το μέτρο των γωνιών του τριγώνου $B\Gamma E$ κατά προσέγγιση δεκάτου,
- το μέτρο των γωνιών του τριγώνου $A\Delta E$.



B5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο AB. Από σημείο Γ εκτός του κύκλου φέρουμε την ΓΖ κάθετη στην AB που τέμνει τον κύκλο στο Ε και την ΓΑ που τέμνει τον κύκλο στο Δ.

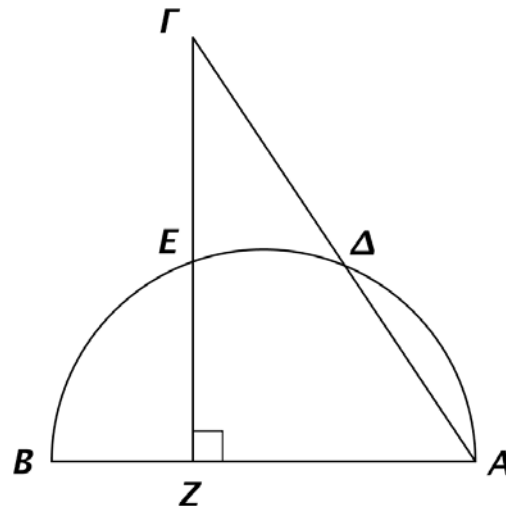
α. Να δείξετε ότι :

i. τα τρίγωνα ΑΓΖ και ΑΒΔ είναι όμοια,

ii. $(ΑΔ)(ΑΓ) = (ΑΖ)(ΑΒ)$,

iii. $(ΑΔ)(ΑΓ) = (ΑΕ)^2$.

β. Αν $(ΑΖ) = \frac{2}{3}(ΑΓ)$ και η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΔ είναι 15 cm , να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΓΖ.



Ο Διευθυντής

.....

Φλουρής Σωτήρης

B5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο AB. Από σημείο Γ εκτός του κύκλου φέρουμε την ΓΖ κάθετη στην AB που τέμνει τον κύκλο στο Ε και την ΓΑ που τέμνει τον κύκλο στο Δ.

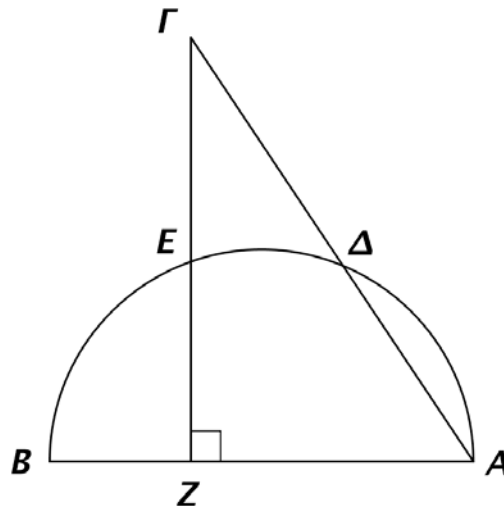
α. Να δείξετε ότι :

i. τα τρίγωνα ΑΓΖ και ΑΒΔ είναι όμοια,

ii. $(ΑΔ)(ΑΓ) = (ΑΖ)(ΑΒ)$,

iii. $(ΑΔ)(ΑΓ) = (ΑΕ)^2$.

β. Αν $(ΑΖ) = \frac{2}{3}(ΑΓ)$ και η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΔ είναι 15 cm , να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου ΑΓΖ.



Οι Εισηγητές

Η Συντονίστρια

Ο Διευθυντής

.....

.....

.....

Κωνσταντίνου Λ.

Πολυκάρπου Ε.

Φλουρής Σωτήρης

.....

Παρισινός Γ.

.....

Χ'Χαραλάμπους Γ.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ (5ωρο)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/05/2016

ΟΔΗΓΙΕΣ: Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού και διορθωτικής ταινίας.

Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρη πένα. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

Το γραπτό αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

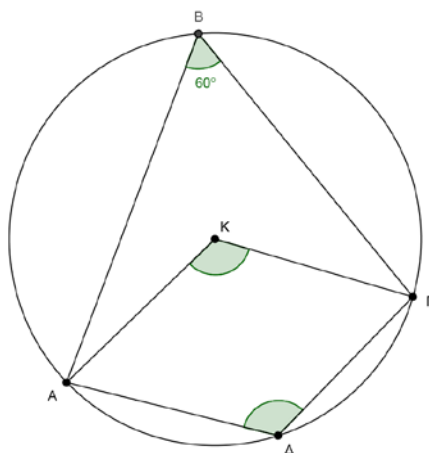
- 1) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Να υπολογίσετε :

α) το μέτρο του $\vec{\alpha}$ και

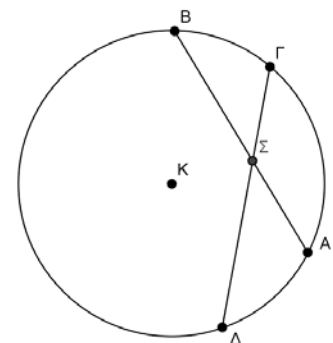
β) το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων.

2)



Δίνεται κύκλος (Κ,Ρ). Αν $\widehat{AB\Gamma} = 60^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\widehat{AK\Gamma}$ και $\widehat{AD\Gamma}$. Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας.

- 3) Δίνεται κύκλος (Κ,Ρ) και οι τέμνουσες ΑΣΒ και ΓΣΔ.

Αν $(ΑΣ) = x \text{ cm}$, $(ΣΒ) = 2x \text{ cm}$, $(ΓΣ) = 3 \text{ cm}$ και $(ΣΔ) = 6 \text{ cm}$, να βρείτε την τιμή του x .

4) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda + 2)x + \lambda - 7 = 0$.

Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\lambda \in R$, έτσι ώστε η εξίσωση να έχει :

α) ρίζες αντίθετες,

β) ρίζες αντίστροφες,

γ) το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών να είναι ίσο με 17.

5) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(2-x)(x^2-7x+10)}{x^3-9x} \leq 0$.

6) Σε μια τάξη ενός Λυκείου θέλουμε να εξετάσουμε την επίδοση 15 μαθητών στα Μαθηματικά. Πήραμε τις παρακάτω βαθμολογίες : 12, 15, 12, 14, 15, 10, 12, 15, 17, 18, 14, 20, 14, 17, 20.

Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των βαθμολογιών τους.

7) Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): 3x - 4y - 11 = 0$ και $(\varepsilon_2): y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$.

Να δείξετε ότι είναι παράλληλες και να βρείτε την απόσταση τους.

8) Αν $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε την ταυτότητα $\sqrt{\frac{1+\eta\mu\theta}{1-\eta\mu\theta}} - \sqrt{\frac{1-\eta\mu\theta}{1+\eta\mu\theta}} = 2\varepsilon\varphi\theta$.

9) Αν $0^\circ < \omega < 90^\circ$ να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(\pi+\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi-\omega) \cdot \eta\mu(2\pi-\omega) \cdot \eta\mu(\frac{\pi}{2}-\omega)}{\sigma\varphi(5\pi+\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{5\pi}{2}-\omega) \cdot \sigma\varphi(\frac{\pi}{2}+\omega)} = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega}$$

10) Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} 3\alpha x - 3\beta y = 2\gamma^2 \\ 2x - y = \alpha \\ -x + 2y = \beta \end{cases} \quad \text{όπου } \alpha, \beta, \gamma \text{ πλευρές τριγώνου } \text{ABΓ}.$$

Αν το σύστημα είναι συμβιβαστό να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

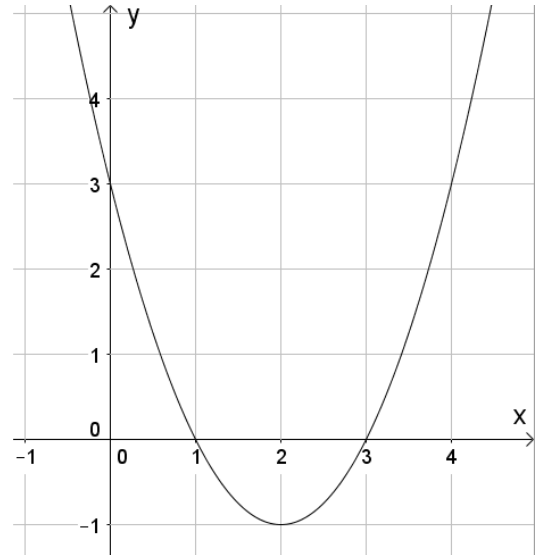
ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$. Να βρείτε :

- α) το Π.Ο και το Π.Τ της f .
- β) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.
- δ) το είδος των ριζών και το πρόσημο της διακρίνουσας.
- ε) την ελάχιστη ή την μέγιστη τιμή της παραβολής.
- στ) την εξίσωση της παραβολής.
- ζ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) > 0$.



2) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι εξισώσεις των πλευρών του είναι:

ΑΒ: $3x + 2y = 6$, ΑΓ: $2y - x = -2$ και ΒΓ: $2y - 9x = 6$.

Να βρείτε :

- α) την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ,
- β) την εξίσωση του ύψους ΒΔ,
- γ) το μέτρο της γωνίας Β,
- δ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

3) Αν $\sin\theta + \sin\varphi = \alpha$ και $\tan\theta + \tan\varphi = \beta$ με $\theta, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

- α) Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες τα $\sin\theta$ και $\sin\varphi$.
- β) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και ίσες, αν $\alpha\beta = 4$.

- 4) Δίνονται τα σημεία $A(x_1, 1)$ και $B(x_2, 5)$ με $x_1 < x_2$ όπου x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (\lambda^2 + 3\lambda + 4)x - 8 = 0.$$

Αν το σημείο $M(1,3)$ είναι το μέσο του AB να υπολογίσετε :

- α) Τις τιμές του λ , $\lambda \in \mathbb{R}$.
- β) Τις συντεταγμένες των σημείων A και B .
- γ) Τις συντεταγμένες σημείου Γ , του άξονα xx' , το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B .
- δ) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v} = 2\vec{A\Gamma} + 3\vec{AB}$.

- 5) Από σημείο A εκτός κύκλου φέρουμε τα εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα AB , $A\Gamma$ και την τέμνουσα $A\Delta E$ του κύκλου. Να δείξετε ότι :

- α) τα ευθύγραμμα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα,
- β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AEB είναι όμοια ,
- γ) $(B\Delta)(\Gamma E) = (BE)(\Gamma\Delta)$.

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23 / 05 / 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ½ ώρες

ΑΡ. ΣΕΛΙΔΩΝ: 4

-
- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 2. Να γράφετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
 3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 4. Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνονται καθαρά τα βήματα επίλυσης των ασκήσεων.
 5. Σύνολο μονάδων δοκιμίου 100.
 6. Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
-

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

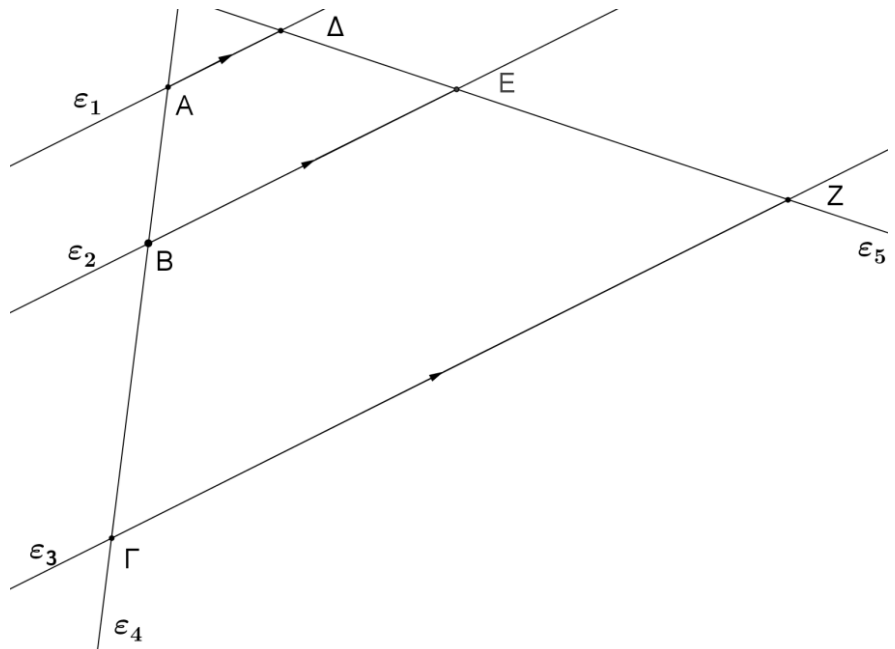
1. Να σχηματίσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς $x_1 = -3 + \sqrt{2}$, $x_2 = 3 + \sqrt{2}$.
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο B(1,5) και είναι παράλληλη προς την ευθεία με εξίσωση $3x - 12y + 1 = 0$.
3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης με τύπο: $\psi = \sqrt{x^2 - 4}$
4. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:
 - i. $\sqrt{18} =$
 - ii. $\sqrt[3]{54} =$
 - iii. $\sqrt{8x^3}$, $x \geq 0$
 - iv. $\sqrt{32x^3\psi^5}$, $x, \psi \geq 0$
5. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu\chi - \sqrt{2} = 0$ στο διάστημα $0^\circ \leq \chi \leq 360^\circ$.

6. Αν η μέση τιμή σε ένα δείγμα παρατηρήσεων 10,11,13,ω,18,19 και 20 είναι 15, να υπολογίσετε κατά προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων :

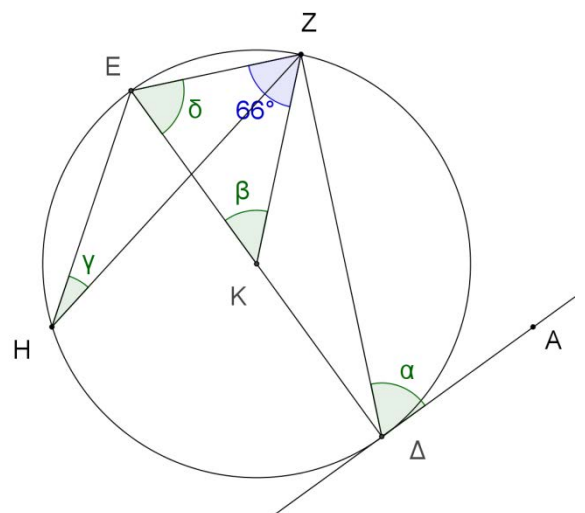
- Τον αριθμό ω .
- Την τυπική απόκλιση στο δείγμα και τον συντελεστή μεταβλητότητας (C.V).

7. Στο πιο κάτω σχήμα, οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και ε_3 είναι παράλληλες.

- Αν $AB = 3\text{cm}$, $BF = 4\text{cm}$, $DE = \mu\text{cm}$ και $EZ = 6\text{cm}$, να υπολογίσετε την τιμή του μ .
- Να βρείτε για ποια τιμή του κ το σύστημα $\begin{cases} -\chi + 2\psi = 7 \\ 8\chi - \psi = -11 \\ \chi + \kappa\psi = \kappa + 5 \end{cases}$ είναι συμβιβαστό .
- Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_4$ και ε_5 στο πιο κάτω σχήμα έχουν εξισώσεις $-\chi + 2\psi = 7$, $8\chi - \psi = -11$ και $\chi + \kappa\psi = \kappa + 5$ αντίστοιχα. Αν το $\kappa = 3$, να ερμηνεύσετε γραφικά ποια θα είναι η θέση των τριών ευθειών.



8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K και διάμετρο DE . Αν η ευθεία AD είναι εφαπτομένη του κύκλου στο Δ και η γωνία $E\hat{Z}K = 66^\circ$ να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$.



9.

- i. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \alpha_1 \vec{i} + \alpha_2 \vec{j}$ και $\vec{\beta} = \beta_1 \vec{i} + \beta_2 \vec{j}$. Να αποδείξετε ότι η αναλυτική έκφραση του εσωτερικού γινομένου των δύο διανυσμάτων δίνεται από τη σχέση: $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \alpha_1 \cdot \beta_1 + \alpha_2 \cdot \beta_2$.
- ii. Αν $\vec{\alpha} = \vec{i} - 4\vec{j}$ και $\vec{\beta} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$, να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζουν τα δύο διανύσματα.

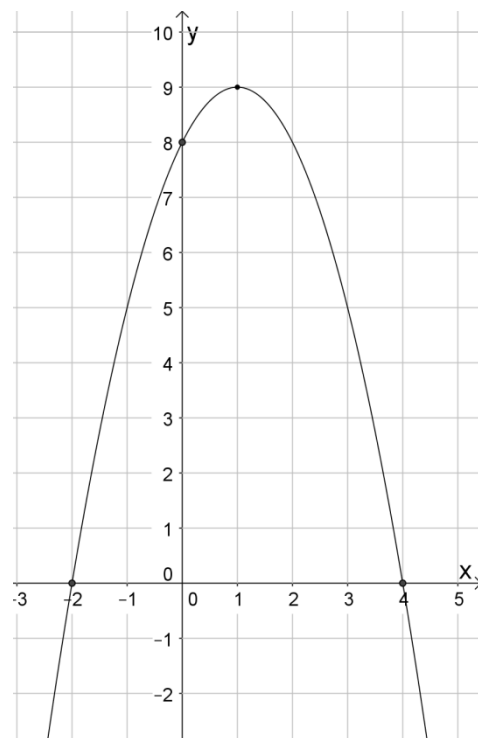
10. Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

$$\frac{\eta\mu(5\pi + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(7\pi - \omega) \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)}{\sigma\varphi(5\pi + \omega) \cdot \eta\mu(7\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{5\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} + \omega\right)} = \eta\mu^2 \omega - 1$$

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$, για $x \in \mathbb{R}$. Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:
 - i. Το πεδίο τιμών της $f(x)$.
 - ii. Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της.
 - iii. Τις τιμές των συντελεστών a , b και c του τύπου της $f(x)$.
 - iv. Με τη μέθοδο συμπλήρωσης του τέλει τετραγώνου να εκφράσετε την $f(x) = ax^2 + bx + c$ στη μορφή $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$ και να περιγράψετε πώς, με κατάλληλες μετατοπίσεις της $g(x) = -x^2$, προκύπτει η γραφική παράσταση της $f(x)$ που δίνεται στο διπλανό σχήμα.



2. Δίνονται τα σημεία $A(1,2)$, $B(5,4)$, $\Gamma(2,-1)$ και $\Delta(10,3)$.
 - i. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{\Gamma\Delta}$ είναι παράλληλα
 - ii. Να υπολογίσετε το διάνυσμα: $2 \cdot \vec{AB} - 3 \cdot \vec{\Gamma\Delta}$
 - iii. Αν M είναι το μέσο του AB και $Z(5,-1)$, να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{MZ}$ είναι κάθετα.
 - iv. Να βρείτε εξωτερικό σημείο P του AB έτσι ώστε $\frac{AP}{PB} = 3$.

3. Δίνεται ότι $\frac{1}{2} < \eta\mu\chi < 1$ και $-1 < \sigma\upsilon\nu\chi < -\frac{1}{3}$ για κάθε $\chi \in R$. Να δείξετε ότι:

i. $2 < 2\eta\mu\chi - 3\sigma\upsilon\nu\chi < 5$

ii. $-3 < \epsilon\phi\chi < -\frac{1}{2}$

4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με κορυφές τα σημεία Α(-2,2) Β(2,5) Γ(9,4) και Δ(-3,-5). Να υπολογίσετε:

i. Το μήκος του ύψους του τραpezίου.

ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ.

iii. Την γωνία Γ του τραpezίου.

iv. Την εξίσωση της διαμέσου του τραpezίου.

5. Οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρουμε τη διάμετρο ΑΖ και τη χορδή ΖΓ. Στο σημείο Ζ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου που τέμνει τις προεκτάσεις των ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να δείξετε ότι :

i. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΕΔ είναι όμοια.

ii. Στη συνέχεια, αν $AB = 2\chi \text{ cm}$, $AG = (\chi + \psi) \text{ cm}$, $B\Gamma = 3\chi \text{ cm}$, $AE = (\chi + 2\psi) \text{ cm}$, $AD = 10 \text{ cm}$ και $DE = 12 \text{ cm}$ να υπολογίσετε τις τιμές των χ και ψ .

Ο Διευθυντής

.....

Παπαμιτιάδου Δημήτρης

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

Ημερομηνία: 31/5/2015

Χρόνος: 2,5 ώρες

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 - β) Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
 - γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 - δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας .

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από πέντε (5) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x-5} = 3$, $x \geq 5$.
2. Για ποια τιμή του κ η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (\kappa - 3)x - 5$, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$.
3. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - \psi = 5 \\ \lambda^2 x + \lambda \psi = 8 \\ 2x + 3\psi = -4 \end{cases}$$
 να είναι συμβιβαστό.
4. Να δείξετε ότι:
$$\begin{vmatrix} \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\sqrt{2}} & -\frac{\eta\mu\chi}{\sqrt{2}} \\ \frac{\eta\mu\chi}{\sqrt{2}} & \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$
 .
5. Να γράψετε στο **τετράδιο απαντήσεων**, αν η κάθε πρόταση είναι **Σωστή** ή **Λανθασμένη**.
 - (α) Οι πλευρές μιας εγγεγραμμένης γωνίας είναι ακτίνες του κύκλου. Σ / Λ
 - (β) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ενός κύκλου είναι ίση με το μισό κάθε επίκεντρης γωνίας του ίδιου κύκλου. Σ / Λ
 - (γ) Η εγγεγραμμένη γωνία ενός κύκλου που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή. Σ / Λ
 - (δ) Οι εγγεγραμμένες γωνίες του ίδιου κύκλου που βαίνουν σε ίσα τόξα είναι ίσες. Σ / Λ
 - (ε) Η επίκεντρη γωνία είναι ίση σε μοίρες με το μισό της εγγεγραμμένης που βαίνει στο ίδιο τόξο με αυτήν. Σ / Λ

6. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $A(-1,0)$, $B(3,2)$ και $\Gamma(-3,4)$.

Να βρείτε: (α) την εξίσωση του ύψους AD ,

(β) την εξίσωση της διαμέσου BM .

7. Ο αριθμός των απουσιών 10 μαθητών ενός τμήματος είναι 15, 10, 2, 6, 4, 9, 23, 9, 8, 34.

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των πιο πάνω τιμών.

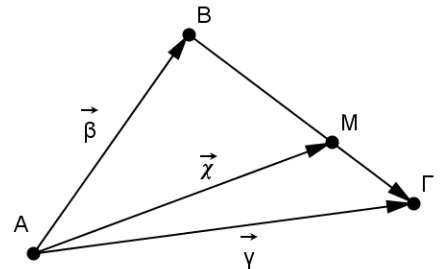
8. Να δείξετε ότι:
$$\frac{\sigma\upsilon\nu(-\chi) \cdot \sigma\varphi(\pi + \chi) - \eta\mu\chi \cdot \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \chi\right)}{\sigma\tau\epsilon\mu\chi - \tau\epsilon\mu\chi} = 1 + \eta\mu\chi \cdot \sigma\upsilon\nu\chi.$$

9. Να λύσετε την ανίσωση
$$\frac{(-\chi + 1)^2 \cdot (2\chi^2 + 7)}{\chi^2 + 3\chi} \leq 0.$$

10. Στο διπλανό σχήμα ισχύει $(BM)=2(M\Gamma)$.

(α) Να δείξετε ότι: $\vec{\chi} = \frac{\vec{\beta} + 2\vec{\gamma}}{3}$

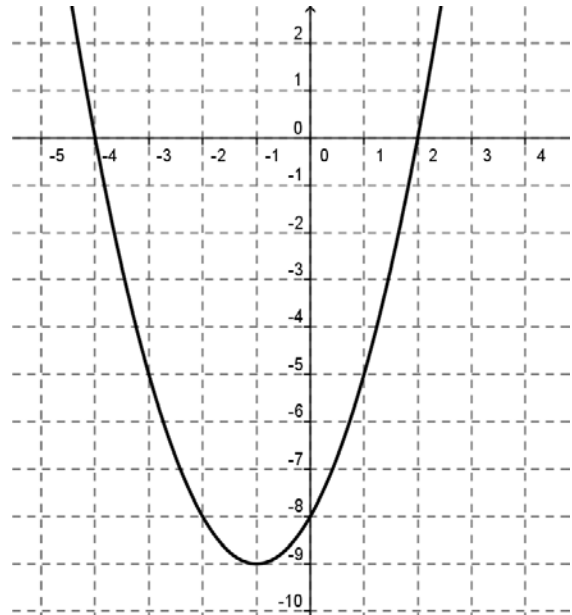
(β) Αν $\vec{B\Gamma} \perp \vec{AB}$, $\hat{B\Lambda\Gamma} = 30^\circ$ και $B\Gamma=8\text{cm}$ να υπολογίσετε το μήκος του AB .



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών,
- (β) τον άξονα συμμετρίας,
- (γ) τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$,
- (δ) τις τιμές των P και S,
- (ε) τις τιμές των α, β και γ,
- (στ) τις τιμές του χ για τις οποίες ισχύει $\alpha x^2 + \beta x + \gamma \leq 0$



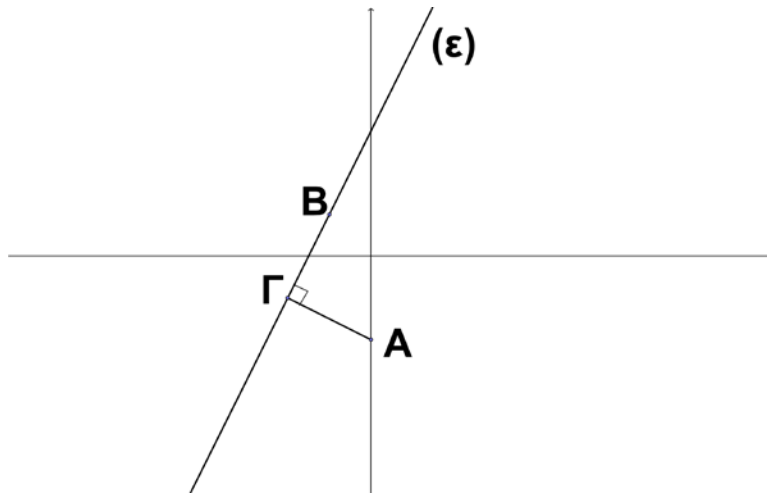
2. (α) Δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού $x^2 - x \cdot \text{τεμθ} \cdot \text{στεμθ} + 1 = 0$

- (i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.
- (ii) Να δείξετε ότι $x_1 = \varepsilon\varphi\theta$ είναι μία λύση της εξίσωσης.
- (iii) Να βρείτε την άλλη λύση της εξίσωσης.

- (β) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ ισχύει ότι $\sqrt{3} - 1 < \kappa < 1$ και $\frac{1 + \sqrt{3}}{4} < \lambda < 1$

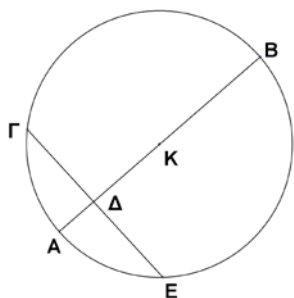
να δείξετε ότι για την παράσταση $A = \kappa^2 + 8\lambda$ ισχύει ότι $6 < A < 9$.

3. Δίνονται τα σημεία $A(0,-2)$ και $B(-1,1)$. Όπως φαίνεται και στο σχήμα που ακολουθεί, η ευθεία (ε) έχει θετική κλίση, περνά από το σημείο B και το σημείο A απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με $\sqrt{5}$ μονάδες. Επιπλέον, το σημείο Γ είναι το ίχνος της καθέτου.



- (α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) .
- (β) Αν το σημείο Γ έχει συντεταγμένες $(-2, -1)$, να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{B\Gamma} \cdot \overrightarrow{BA}$.
4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} - 2$, $g(x) = \sqrt{x} + 2$ και $h(x) = \sqrt{x - 4}$, $x > 4$.
- (α) να μετατρέψετε τα κλάσματα $A = \frac{x - 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ και $B = \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2}$ σε ισοδύναμα με ρητούς παρανομαστές επιβεβαιώνοντας ότι $A = f(x)$ και $B = g(x)$.
- (β) να δείξετε ότι: $\sqrt{f(x)} \cdot h(x) \cdot \sqrt{g(x)} = [h(x)]^2$
- (γ) να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{f(25)}$, $\sqrt{h(9)}$, $\sqrt{g(36)} - 6$, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.
Να δείξετε πως εργαστήκατε.

5. Σε κύκλο (K,R) , η διάμετρος AB και η χορδή $ΓΕ$ τέμνονται κάθετα στο σημείο Δ , όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:



(α) Να δείξετε ότι: (i) $(A\Gamma)^2 = (AB)(A\Delta)$

$$(ii) (A\Gamma)^2 = (\Delta E)(\Delta \Gamma) + (\Delta A)^2$$

(β) Αν οι συντεταγμένες του κέντρου K είναι $(2,-1)$ και του σημείου B είναι $(3,-3)$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης του κύκλου στο σημείο του A .

.....ΤΕΛΟΣ.....

Ο Διευθυντής

Λοίζος Σέπος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ 5-ωρο

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23 / 05 / 2016

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

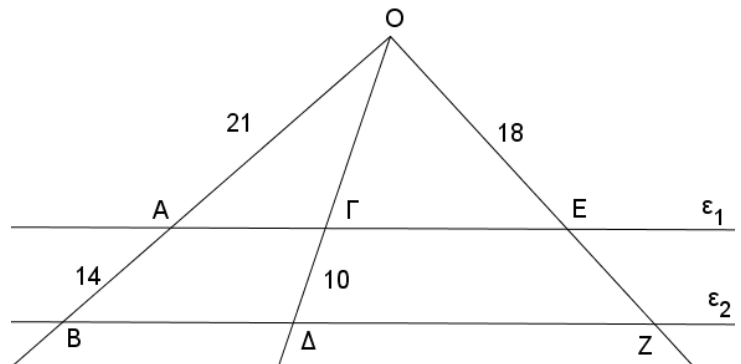
ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣΟΔΗΓΙΕΣ

- Να γράψετε με μελάνι μπλε ή μαύρο.
- Τα σχήματα επιτρέπεται να είναι με μολύβι.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

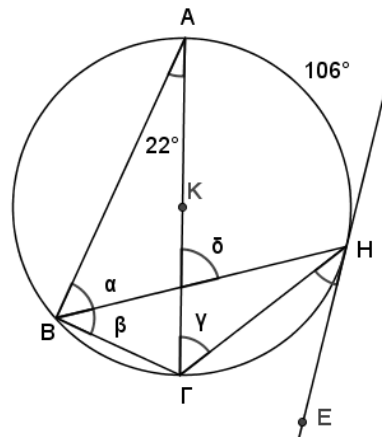
ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- Δίνεται η εξίσωση $x^2 + 5x - 2 = 0$ να υπολογίσετε τις τιμές των παραστάσεων:
α) $x_1 + x_2$ β) $x_1 \cdot x_2$ γ) $x_1 \cdot x_2^3 + x_1^3 \cdot x_2 - 6$ (Μον. 1,5+1,5+2)
- Ένα προϊόν πωλείται σε 10 διαφορετικά καταστήματα στις παρακάτω τιμές σε ευρώ:
8, 10, 13, 13, 15, 16, 18, 14, 14, 9. Να υπολογίσετε:
α) Την μέση τιμή.
β) Την τυπική απόκλιση.
- Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\eta\mu(\pi - \theta) \cdot \eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta) \cdot \epsilon\phi\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \cdot \eta\mu(2\pi - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + \theta) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right)} = -1$$
- Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $\epsilon_1: 5x - \psi + 7 = 0$ και $\epsilon_2: 3x + 2\psi = 0$

- Στο διπλανό σχήμα οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 είναι παράλληλες. Να υπολογίσετε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΓ και ΕΖ.



6. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ και την $\widehat{ΓΗΕ}$, αν $\widehat{ΑΗ} = 106^\circ$, $\widehat{Β\hat{A}Γ} = 22^\circ$, ΑΓ διάμετρος και η ΕΗ εφαπτομένη του κύκλου στο Η.



7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = \vec{\alpha} - 2 \cdot \vec{\beta}$.

β) Να υπολογίσετε τις τιμές του x έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v} = \begin{pmatrix} x^2 \\ x-1 \end{pmatrix}$ να είναι κάθετα.

8. Αν $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ να αποδείξετε την ισότητα:

$$\left(\sqrt{\alpha^2 + \beta} + \sqrt{\gamma + \beta^2} + \alpha \right) \cdot \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta} + \sqrt{\gamma + \beta^2} - \alpha \right) \cdot \left(\sqrt{\gamma + \beta^2} - \beta \right) = \gamma.$$

9. Δίνονται τα σημεία $A = (1+2\kappa, 4\kappa-2)$ και $B = (5\kappa+1, -\kappa)$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Να γράψετε το διάνυσμα $\vec{AB}$ συναρτήσει του κ .

β) Να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε $|\vec{AB}| = 10$.

10. Από σημείο Σ που βρίσκεται έξω από κύκλο φέρουμε εφαπτόμενο τμήμα $\Sigma\Gamma$ (Γ σημείο επαφής) και τέμνουσα ΣAB που περνά από το κέντρο του κύκλου. Η κάθετη στην ΣB στο σημείο Σ τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο Δ . Να αποδείξετε ότι: $(AB)(B\Sigma) = (B\Delta)(B\Gamma)$.

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα, παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Από την γραφική παράσταση της παραβολής, να βρεθούν:

α) Το πεδίο τιμών της.

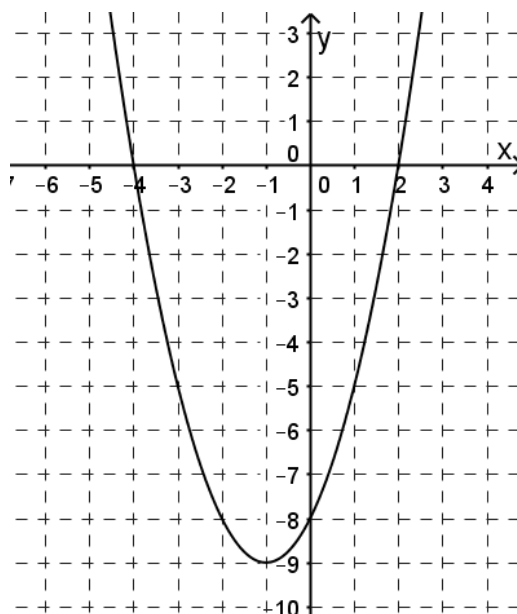
β) Τις τιμές του x έτσι ώστε $f(x) = 0$.

γ) Τα πρόσημα των $f(-25)$ και $f(1)$.

δ) Τα α, β, γ .

ε) Την τιμή της παράστασης: $A = \frac{3P - 6S}{f(S)} - f(0)$

όπου S το άθροισμα και P το γινόμενο των ριζών.



2. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x+1)^2(6-x)(x^2+9)}{(x^2+2x-15)(x^2-4)} \geq 0$.
3. Να διερευνήσετε και να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ , $\lambda \in \mathbb{R}$.
- $$\begin{cases} \lambda^2 x + \psi = \lambda \\ x + 4\psi = 2 \end{cases}$$
4. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ δίνονται οι εξισώσεις των πλευρών ΑΒ: $8x + 3\psi + 1 = 0$, ΑΔ: $2x + \psi - 1 = 0$ και η εξίσωση $3x + 2y + 3 = 0$ μιας διαγωνίου του.
- α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής Α είναι Α(-2, 5).
- β) Αν Μ(3, -6) είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.
5. α) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα: $\frac{\sigma\phi x(1 - \eta\mu^2 x)}{\sigma\phi x + \sigma\upsilon\nu x} = 1 - \eta\mu x$.
- β) Αν $1 - \eta\mu x = \frac{2}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{\sqrt{16\epsilon\phi x + 25\sigma\upsilon\nu^2 x}}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Ιωσήφ Ανδρέας

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 27/05/2016

ΟΔΗΓΙΕΣ:

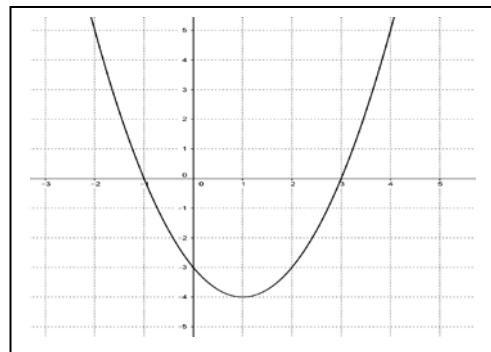
- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
 (β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
 (γ) Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
 (δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στις κόλλες (όπου χρειάζεται).
 (ε) Το γραπτό αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' : (Μονάδες 50/100)

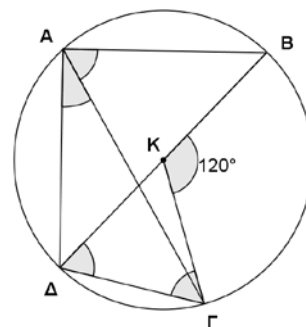
Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100 μονάδες.

- A1.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Να βρείτε:
 α) Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης f .
 β) Τις ρίζες της $f(x) = 0$.
 γ) Τα πρόσημα των a και Δ .
 δ) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της f .



- A2.** Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε οι ευθείες $\varepsilon_1 : (\kappa + 3)x + 2\psi = 12$ και $\varepsilon_2 : \psi = (3\kappa - 2)x + 5$ να είναι παράλληλες.
- A3.** Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K και $\widehat{BK\Gamma} = 120^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{BA\Gamma}$, $\widehat{\Gamma\Delta\Delta}$, $\widehat{B\Delta\Gamma}$, $\widehat{\Delta\Gamma K}$. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



A4. Να λύσετε την εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 \\ x & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 2x \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$$

A5. Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$\frac{\eta\mu(180 - \omega)}{1 + \eta\mu(90 + \omega)} - \frac{1 + \sigma\upsilon\nu(360 - \omega)}{\eta\mu(-\omega)} = 2\tau\epsilon\mu(270 + \omega)$$

- A6.** Αν A , B και Γ είναι οι γωνίες τριγώνου $AB\Gamma$, να δείξετε ότι $\varepsilon\varphi\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sigma\varphi\frac{\Gamma}{2}$
- A7.** Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x^2 - 4x + 4)(-x - 4)(-x^2 + 2x - 3)}{x^2 + 2x - 15} \geq 0$
- A8.** α) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt[3]{2\alpha + 3} = 2$
 β) Να λύσετε την εξίσωση $2\beta^5 - 64 = 0$
 γ) Να μετατρέψετε την παράσταση $\gamma = \frac{1}{\sqrt{5} + 2}$ σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή
 δ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς α , β και γ
- A9.** Αν $3 \leq X \leq 5$ και $-4 \leq \Psi \leq -2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:
 α) $X + \Psi$ (μον. 1)
 β) $X - 3\Psi$ (μον. 2)
 γ) $\frac{X}{\Psi}$ (μον. 2)
- A10.** Να διερευνήσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ , $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$
 $2x + \lambda y = \lambda - 2$
 $\lambda x + 2y = 4\lambda - 8$

ΜΕΡΟΣ Β' : (Μονάδες 50/100)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100 μονάδες.

- B1.** Δίνονται οι πιο κάτω παρατηρήσεις: 4, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 3, 4, 5
- i) Να βρείτε: α) Τη μέση τιμή. (μον. 2)
 β) Την επικρατούσα τιμή. (μον. 1)
 γ) Τη διάμεσο τιμή. (μον. 1)
 δ) Το εύρος των τιμών. (μον. 1)
 ε) Την τυπική απόκλιση. (μον. 2)
 στ) Το συντελεστή μεταβλητότητας. (μον. 1)
- ii) Αν όλες οι παρατηρήσεις αυξηθούν κατά α , $\alpha > 0$, να επιλέξετε τις ορθές απαντήσεις από τα πιο κάτω: α) Η νέα μέση τιμή παραμένει η ίδια.
 β) Η νέα μέση τιμή αυξάνεται κατά α .
 γ) Η νέα τυπική απόκλιση παραμένει η ίδια.
 δ) Η νέα τυπική απόκλιση αυξάνεται κατά α . (μον. 2)

- B2.** Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda + 3 = 0$, $\lambda \neq 2$ με ρίζες x_1, x_2
 Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει:
 α) Ρίζες αντίθετες.
 β) Ρίζες ετερόσημες.
 γ) Ρίζες πραγματικές.
 δ) Ρίζες που να ικανοποιούν την σχέση $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 0$
- B3.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A(1, -3) και B(9, 3), εξίσωση της ΑΓ $\psi = 2x - 5$ και εξίσωση της ΒΓ $2\psi = 15 - x$
 i) Να δείξετε ότι:
 α) Οι συντεταγμένες της κορυφής Γ είναι (5,5). (μον. 1)
 β) $AG \perp BG$ (μον. 1)
 ii) Να βρείτε:
 α) Την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ. (μον. 2)
 β) Το μήκος της διαμέσου ΓΜ. (μον. 1)
 γ) Την εξίσωση του ύψους ΓΕ. (μον. 2)
 δ) Το μήκος του ύψους ΓΕ. (μον. 2)
 ε) Το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ. (μον. 1)
- B4.** Δίνεται τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο με διάμετρο AB. Στο σημείο Α να φέρετε την εφαπτόμενη του κύκλου. Η διχοτόμος της γωνίας Β τέμνει την ΑΓ στο Δ, τον κύκλο στο Σ και την εφαπτόμενη στο Ε. Να δείξετε ότι : α) Η ΑΣ είναι διχοτόμος της γωνίας ΕΑΔ (μον. 4)
 β) $(\Gamma B)(\Sigma E) = (\Gamma \Delta)(\Sigma A)$ (μον. 6)
- B5.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
 i) Να υπολογίσετε: α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{\beta}$ (μον. 1)
 β) Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}, \vec{\beta}$ (μον. 2)
 γ) Την τιμή του λ , ώστε το διάνυσμα $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ \lambda \end{pmatrix}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{a}$. (μον. 2)
 ii) Να βρείτε: α) Ένα μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο να είναι παράλληλο προς το $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{\beta}$ (μον. 3)
 β) Ένα συγγραμμικό διάνυσμα με το $\vec{a} + \vec{\beta}$ το οποίο να έχει διπλάσιο μέτρο από το $\vec{a} + \vec{\beta}$. (μον. 2)

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....

Παναγιώτης Λαμπίτης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ–ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά Προσανατολισμού**ΤΑΞΗ:** Α΄ Λυκείου (5 ωρο)**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 2 / 6 / 2016**ΧΡΟΝΟΣ:** 2 ώρες και 30 λεπτά**ΩΡΑ:** 7:45 – 10:15**ΒΑΘΜΟΣ**

Αριθμητικώς:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα: Αρ.:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ**ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας:

α) $\frac{10}{\sqrt{5}}$

β) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$

- 2) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(2, 0), Β(-1, 1) και Γ(0, -1). Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

- 3) Να χαρακτηρίσετε ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό.

α) Η εξίσωση $\frac{x}{2}-1=1-x$ έχει λύση την τιμή $x=\frac{4}{3}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
β) Η εξίσωση $\lambda x=\lambda$ για $\lambda \neq 0$ είναι αδύνατη	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
γ) Η εξίσωση $3x-2=-3x-2$ δεν έχει λύση	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
δ) Η εξίσωση $\lambda x-1=\lambda-2+x$ για $\lambda=1$ είναι ταυτότητα	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
ε) Η εξίσωση $(\lambda^2-1)x=1+\lambda$ για $\lambda=-1$ είναι αδύνατη	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

- 4) Το πλάτος x και το μήκος y ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου ικανοποιούν τις ανισότητες $1 < x < 4$ και $4 < y < 8$. Αν αυξήσουμε το πλάτος κατά 2 cm και ελαττώσουμε το μήκος κατά 1 cm, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

- 5) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

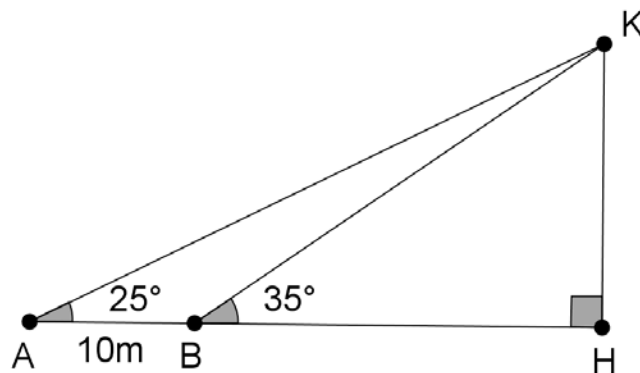
Να υπολογίσετε: α) τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (μον. 2)
 β) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. (μον. 3)

- 6) Οι ημερήσιες θερμοκρασίες, σε βαθμούς Κελσίου, που παρατηρήθηκαν σε ένα χωριό της ορεινής Λευκωσίας, σε δέκα διαδοχικές μέρες, ήταν: 15, 15, 16, 18, 18, 16, 17, 18, 17, 20.

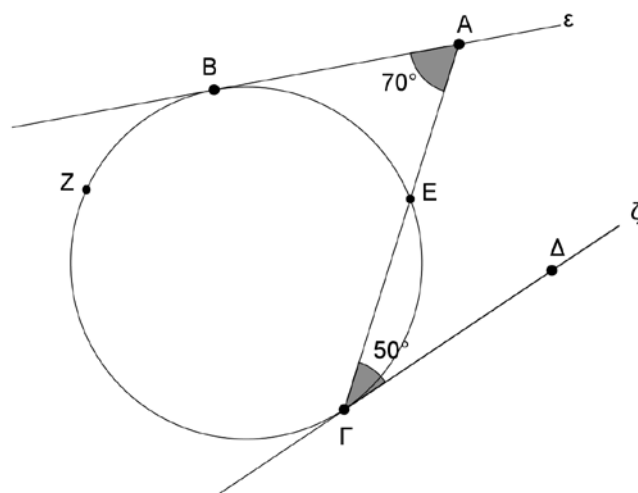
Να υπολογίσετε:

- α) τη μέση τιμή (μον. 1)
 β) τη διάμεσο (μον. 1)
 γ) την επικρατούσα τιμή και (μον. 1)
 δ) την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων (με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων). (μον. 2)

- 7) Στο παρακάτω σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα KH φαίνεται από το σημείο A υπό γωνία 25° και από το σημείο B υπό γωνία 35° . Αν τα σημεία A και B απέχουν μεταξύ τους 10 m να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων BH και KH , με προσέγγιση 2 δεκαδικών ψηφίων.

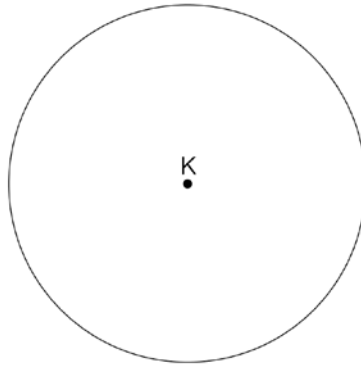


- 8) Στο πιο κάτω σχήμα οι ευθείες ϵ και ζ είναι οι εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία B και Γ αντίστοιχα. Αν $\widehat{BAE} = 70^\circ$ και $\widehat{E\Gamma\Delta} = 50^\circ$ να υπολογίσετε τα μέτρα των τόξων $\widehat{BE}$ και $\widehat{B\Gamma}$.



9) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \mu = 0$, με $\mu \neq 0$, να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες τις $\rho_1 = x_1 + \frac{1}{x_1}$ και $\rho_2 = x_2 + \frac{1}{x_2}$.

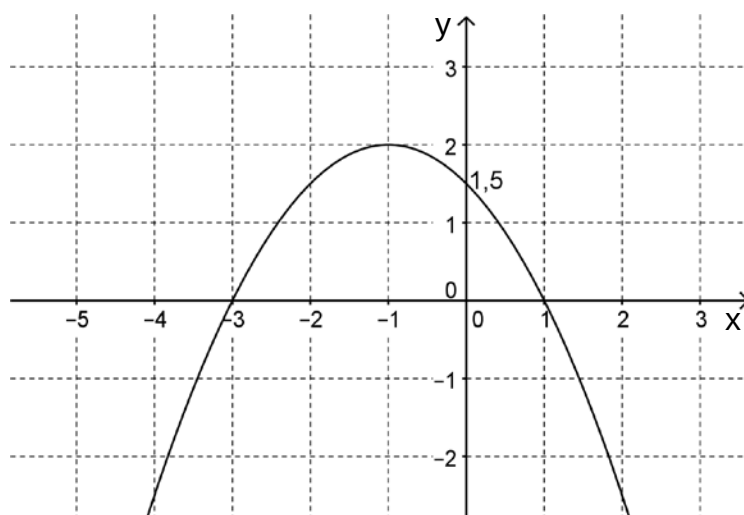
10) Δίνεται κύκλος (K, 24 cm) και ένα σημείο P, του ιδίου επιπέδου, τέτοιο ώστε $PK = 12$ cm. Αν η χορδή AB διέρχεται από το σημείο P ($PA < PB$) και έχει μήκος 42 cm, να υπολογίσετε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων PA και PB.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(-x-2)(x^2+6x+9)}{(x^2-5x+6)} \leq 0$.

- 2) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$. Να βρείτε:
- α) το πεδίο τιμών της συνάρτησης (μον. 1)
 - β) την κορυφή και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της (μον. 2)
 - γ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) > 0$ (μον. 1)
 - δ) το πρόσημο των τιμών $f(0)$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $f(-3,7)$ και $f(2016)$ (μον. 2)
 - ε) τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (μον. 1)
 - στ) το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$ (μον. 1)
 - ζ) το πρόσημο της παράστασης $-\frac{2b\gamma}{a^2}$. (μον. 2)



- 3) Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(3, 7)$, $B(8, 9)$, $\Gamma(6, 4)$ και $\Delta(1, 2)$.
- α) Να αποδείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (μον. 2)
 - β) Να βρείτε τις εξισώσεις των διαγωνίων του. (μον. 2)
 - γ) Να αποδείξετε ότι το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι και ρόμβος. (μον. 1)
 - δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου K του $AB\Gamma\Delta$. (μον. 1)
 - ε) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής A από την πλευρά $\Delta\Gamma$. (μον. 2)
 - στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$. (μον. 2)

4) α) Να δείξετε ότι η πιο κάτω παράσταση είναι ανεξάρτητη του x :

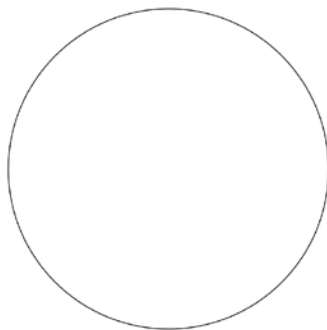
$$A = \frac{\eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu(\pi - x) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - x) + 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\frac{\eta\mu(\pi - x)}{\sigma\upsilon\nu(-x)} + \sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 2}$$

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\epsilon\varphi x - \eta\mu x}{\eta\mu^3 x} = \frac{\tau\epsilon\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$.

5) Ένα ισοσκελές τρίγωνο $\Delta\Gamma$ ($\Delta A = \Delta\Gamma$) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Έστω E το μέσο του τόξου $\Delta\Gamma$. Αν η ΔE τέμνει την προέκταση της $A\Gamma$ στο σημείο B , να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες $\hat{\Gamma}\hat{A}E$ και $\hat{A}\hat{B}\Delta$ είναι ίσες

β) $(A\Delta)^2 = (B\Delta)(\Delta E)$.



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού (5ωρο)

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: Δευτέρα, 30 Μαΐου 2016

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Να γράφετε με μελάνι χρώματος μπλε. Για τα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται καθαρά και επιμελημένα όλη η αναγκαία εργασία.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

- 1) Ζητήθηκε από ένα μαθητή να γράψει την ηλικία του και έγραψε: $\left(\sqrt{\frac{16^4 + 4^{16}}{16^2 + 64^4}} \right)$.

Να βρείτε την ηλικία του, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των ριζών και των δυνάμεων.

- 2) Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 7$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις $2x + y$ και $y - 2x$.

- 3) Η εξέταση 10 μαθητών στο μάθημα της Στατιστικής έδωσε τους εξής βαθμούς:

3 7 5 16 14 11 10 11 12 11

Να βρείτε:

α) τη μέση τιμή

β) την τυπική απόκλιση της παραπάνω βαθμολογίας.

- 4) Να δείξετε ότι:
$$\frac{\sin(360^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(-\theta) \cdot \epsilon\phi(180^\circ - \theta)}{\sin(90^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(180^\circ + \theta)} = -1 \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

5) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $2\vec{v} - \vec{u}$

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{v}$.

6) α) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3$ παριστάνει την εξίσωση ευθείας που διέρχεται

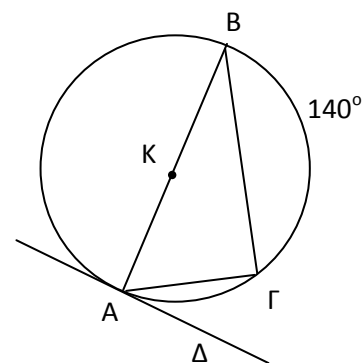
από τα σημεία A(4,2) και B(3,3).

β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB.

7) Σε κύκλο (K, ρ) δίνεται το μέτρο του τόξου $\widehat{B\Gamma} = 140^\circ$ και η διάμετρος του AB.

Να βρείτε: α) οι γωνίες του τριγώνου ABΓ και

β) η γωνία $\widehat{\Gamma\Delta}$.



8) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sin\theta}{1+\eta\mu\theta} + \varepsilon\phi\theta = \frac{1}{\sin\theta}$.

9) Να βρείτε την απόσταση μεταξύ των σημείων τομής της ευθείας $x - y = 1$ και της καμπύλης $x^2 + 2y = 6$.

10) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda + 1) \cdot x + 6 - \lambda = 0$ με ρίζες x_1, x_2 . Να υπολογίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες ισχύει η σχέση: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq 1$.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1) Αν $\sin(90^\circ - \theta) = -\sin(180^\circ + \theta) - \sqrt{2}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$ να δείξετε ότι: α) $\sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

β) χωρίς να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\hat{\theta}$, να υπολογίσετε την τιμή της

παράστασης $A = \frac{\sin \theta}{1 - \eta \mu \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \eta \mu \theta}$.

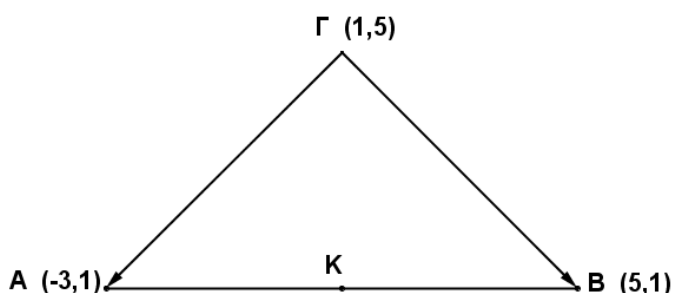
2) Δίνονται τα σημεία: A(-3,1), B(5,1) και Γ(1,5), να βρείτε:

i) α) τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma A}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{AB}$

β) τη γωνία $\hat{\Gamma AB}$

ii) γ) να αποδείξετε ότι το εσωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{\Gamma B}$ είναι ίσο με μηδέν

δ) χρησιμοποιώντας την απάντηση του ερωτήματος γ να δικαιολογήσετε ότι από τα σημεία A, B, Γ περνά κύκλος



3) Από το μπαλκόνι ενός σπιτιού και από ύψος 6m πετάμε μπάλα η οποία διαγράφει παραβολική τροχιά που περιγράφεται από την εξίσωση

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \gamma \text{ με } 0 \leq x \leq 6.$$

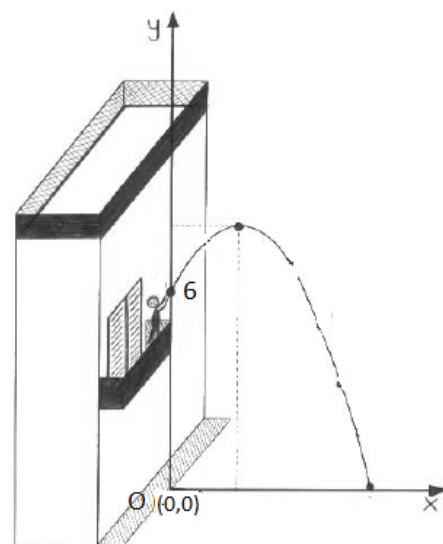
Να βρείτε:

α) την τιμή του γ

β) το μέγιστο ύψος που φθάνει η μπάλα σε σχέση με το έδαφος (άξονα των $x'x$)

γ) την απόσταση της μπάλας από το σπίτι, όταν βρεθεί στο έδαφος

δ) την απόσταση της μπάλας από το σπίτι, όταν βρεθεί και πάλι σε ύψος 6m από το έδαφος



- 4) Ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ η εξίσωση της ΑΒ είναι $x + 2y = 1$, η κορυφή Β(1, 0) και το σημείο τομής των διαγωνίων του Κ($\frac{1}{2}$, 4).
- α) Υπολογίστε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.
Από το σημείο Κ φέρουμε κάθετο ΚΘ στην πλευρά ΑΒ καθώς και κάθετο ΚΛ στην πλευρά ΒΓ.
- β) Να υπολογίσετε το μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων ΚΘ και ΚΛ
- γ) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΚΘ και ΑΒΓ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητας τους.
- δ) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΓΚΛ και ΓΑΒ είναι όμοια και να βρείτε το λόγο ομοιότητας τους.
- Στη συνέχεια με βάση τα πιο πάνω και το λόγο ομοιότητας ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε:
- ε) την περίμετρο και
- στ) το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
- 5) Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη ΣΑ και την τέμνουσα ΣΒΓ του κύκλου, όπου Α, Β και Γ σημεία του κύκλου. Αν Μ είναι το μέσο του μικρού τόξου ΒΓ και Δ το σημείο τομής της ΒΓ με την ΑΜ να αποδείξετε ότι :
- α) $(\Sigma\text{Α})^2 = (\Sigma\text{Β}) \cdot (\Sigma\text{Γ})$ και
- β) $(\Delta\text{Α}) \cdot (\text{ΜΓ}) = (\text{ΑΓ}) \cdot (\Delta\text{Β})$.

----- ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ -----

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 20/05/2016

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ΩΡΕΣ ΚΑΙ 30 ΛΕΠΤΑ

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.
- Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α΄:

- Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

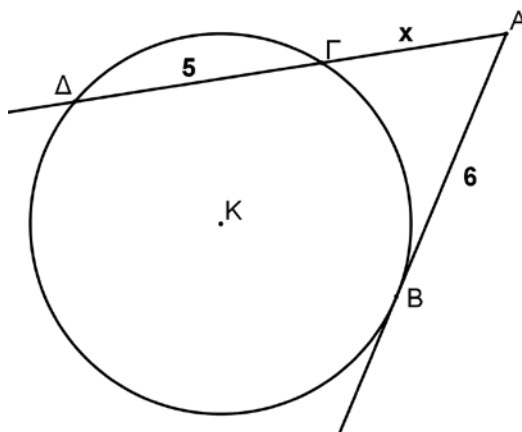
Να υπολογίσετε:

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

β) το μέτρο του διανύσματος $3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

2. Να λύσετε την ανίσωση $3x^2 - 2x - 5 < 0$

3. Στο πιο κάτω σχήμα η AB είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B και η ΑΓΔ είναι τέμνουσα του κύκλου. Να βρείτε την τιμή του x.



4. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\begin{vmatrix} x & x \\ -8 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 0 & x \\ 5 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Οι βαθμοί 10 μαθητών σε μια άσκηση ενός διαγωνίσματος μαθηματικών είναι οι εξής:
8, 6, 7, 6, 8, 4, 4, 10, 8, 9

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s

β) Να εξετάσετε αν οι βαθμοί παρουσιάζουν ομοιογένεια.

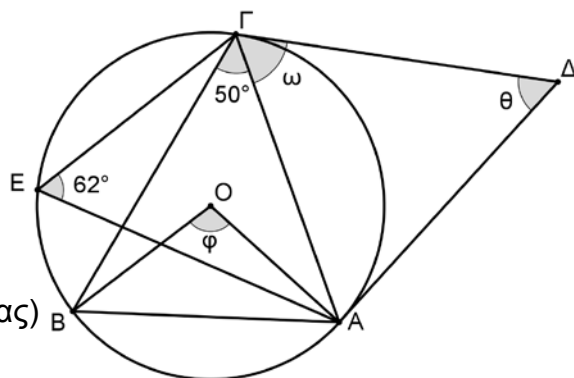
6. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) η οποία περνά από το σημείο τομής Σ των ευθειών (ϵ_1): $3x - y = 10$ και (ϵ_2): $x = 2$ και από το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος AB όπου $A(1, -2)$ και $B(-3, 4)$.

7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο O .

Τα τμήματα $\Delta\Gamma$ και ΔA εφάπτονται του κύκλου στα σημεία του Γ και A αντίστοιχα.

Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\varphi}$, $\hat{\omega}$, $\hat{\Gamma\hat{B}A}$, $\hat{\Gamma\hat{A}B}$ και $\hat{\theta}$.

(Να δίνονται επαρκείς δικαιολογίες στις απαντήσεις σας)



8. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\mu^2 x + 1 = \mu^2 + \mu x$ για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού μ .

9. Δίνονται τα σημεία $A(2, 3)$ και $B(-2, 6)$. Να βρείτε:

α) το διάνυσμα $\overline{AB}$

β) το μοναδιαίο διάνυσμα $\bar{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ που είναι κάθετο στο διάνυσμα $\overline{AB}$

10. Δίνεται $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$, $0^\circ < \theta < 90^\circ$ και $A = \frac{8\epsilon\varphi(180^\circ + \theta)}{10\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) - 12\tau\epsilon\mu(90^\circ + \theta)}$

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2}$

β) Να βρείτε τη γωνία φ για την οποία ισχύει $\eta\mu\varphi + A = 0$ και $180^\circ < \varphi < 270^\circ$.

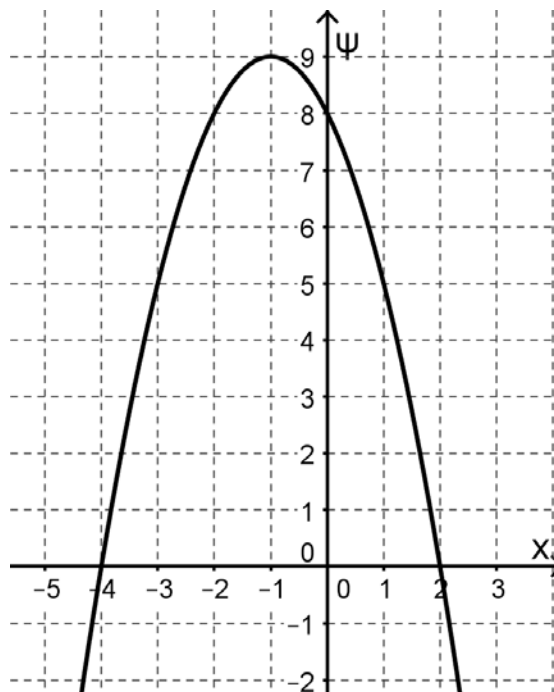
ΜΕΡΟΣ Β΄:

- Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- α) το πεδίο τιμών της f
- β) τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης
- γ) το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$
- δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- ε) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$
- στ) τις τιμές των α , β και γ
- ζ) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 8$.



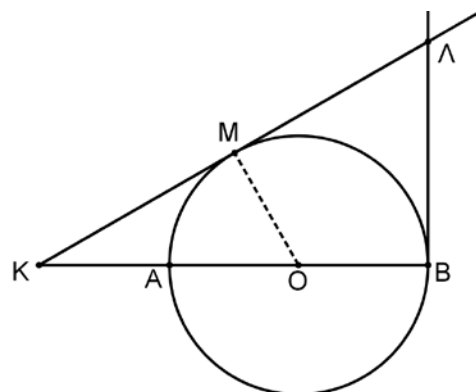
2. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) . Η KAB είναι τέμνουσα και τα τμήματα KM και ΛB είναι εφαπτόμενα τμήματα του κύκλου.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα KOM και $K\Lambda B$ είναι όμοια.

β) Αν $(AB) = 2(KA)$, να δείξετε ότι:

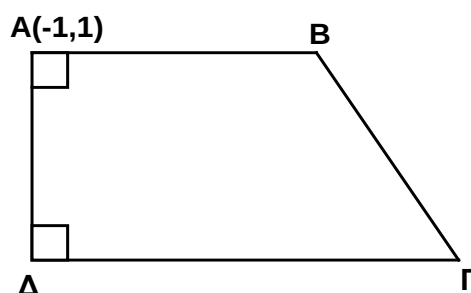
i) $(KO) \cdot (KB) = (KM) \cdot (K\Lambda) = 6R^2$

ii) $(\Lambda B) = \frac{(K\Lambda)}{2}$



3. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ ∥ ΓΔ) με κορυφή Α (−1, 1). Αν οι εξισώσεις των πλευρών ΒΓ και ΓΔ είναι ΒΓ : $x - 3y = -9$ και ΓΔ : $2x - y = 2$, να βρείτε:

- τις συντεταγμένες της κορυφής Γ
- την οξεία γωνία $\hat{B}\hat{\Gamma}\Delta$
- τις εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΔ
- την απόσταση των πλευρών ΑΒ και ΓΔ
- το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΔ .



4. Δίνεται η εξίσωση $(1 + \sin \alpha)x^2 - 2\eta \mu \alpha \sin \alpha (x + \eta \mu^2 \alpha) = 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ με ρίζες x_1, x_2 .

- Να δείξετε ότι $S = 2\eta \mu \alpha$ και $P = 1 - \sin \alpha$, όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης αντίστοιχα.

- Αν $\hat{\alpha} = 60^\circ$, να βρείτε:

- τις τιμές των παραστάσεων $x_1 + x_2$, $x_1 \cdot x_2$ και $(x_1 - x_2)^2$

- τις τιμές του λ ($\lambda \in \mathbb{R}$), για τις οποίες ισχύει η ανίσωση $\frac{\lambda + 2(x_1 \cdot x_2)}{\lambda^2 - (x_1 - x_2)^2} \geq 1$

5. Δίνονται οι αριθμοί , $\alpha = \sqrt{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$, $\beta = \sqrt{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$ και $\gamma = \sqrt{2\sqrt{x}}$ όπου x και y θετικοί ακέραιοι με $x > y$.

- Αν $x - y = 1$, να δείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = 1$

- Να διατάξετε τους αριθμούς α^2 , β^2 και γ^2 από το μικρότερο στο μεγαλύτερο

- Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\frac{1}{\gamma^2}$ και $\frac{1}{\alpha^2 - \beta^2}$

- Να δείξετε ότι το τρίγωνο με πλευρές τις α , β και γ είναι ορθογώνιο τρίγωνο.

(Να δίνονται επαρκείς δικαιολογίες στις απαντήσεις σας)

Η Διευθύντρια

Ελένη Αντωνίου Τσιελεπή

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19/05/ 2016ΤΑΞΗ: Α΄ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 Ώρες

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
(β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας .
(γ) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
(δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ (β) το μέτρο του διανύσματος $\frac{1}{2}\vec{\beta}$.

2. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 2x - 15 < 0$

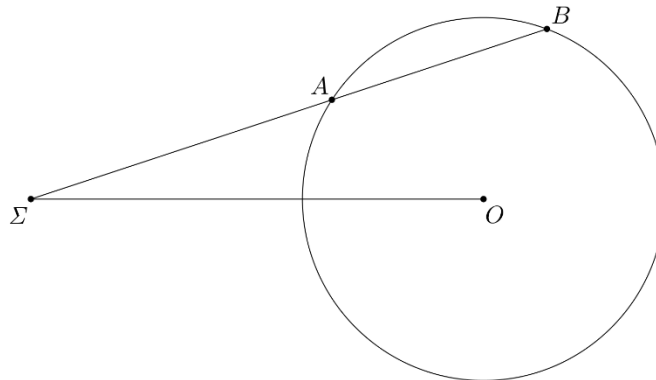
3. Να μετατρέψετε την παράσταση σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή: $A = \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}$, $0 \leq x \neq 1$

4. Ένας υποψήφιος θετικής κατεύθυνσης για την τριτοβάθμια εκπαίδευση έχει γενικό βαθμό πρόσβασης 17,6 με βαρύτητα 8, Μαθηματικά 15 με βαρύτητα 1,3, Φυσική 17 με βαρύτητα 0,7 και στο ειδικό μάθημα 14 με βαρύτητα 1. Να βρείτε τον σταθμισμένο μέσο όρο της βαθμολογίας του υποψηφίου.

5. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(-1,3)$ και σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα των τετμημένων.

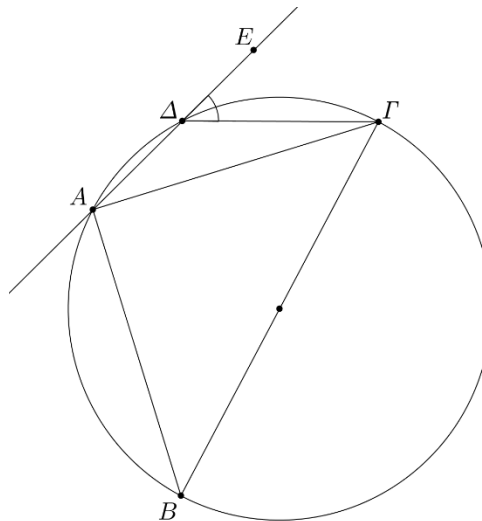
6. Αν η εξίσωση $2x^2 + 3x - 6 = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 , να υπολογίσετε την τιμή της πιο κάτω παράστασης:
 $A = x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$

7. Δίνεται κύκλος (O, R) με $R = 4\text{ cm}$ και σημείο Σ εκτός αυτού, ώστε $(\Sigma O) = 10\text{ cm}$. Από το Σ φέρνουμε την τέμνουσα ΣAB , ώστε $(\Sigma A) = 7\text{ cm}$. Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB .



8. Να αποδείξετε ότι: $\varepsilon\varphi^2 x + \sigma\varphi^2 x + 2 = \left(\frac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x} \right)^2$

9. Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές και το ευθύγραμμο τμήμα $B\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου. Το σημείο Δ είναι ένα τυχαίο σημείο στο τόξο AG . Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\Gamma\Delta E$.



10. Δίνεται κύκλος (O, R) . Από σημείο A εκτός του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη AB του κύκλου (B το σημείο επαφής της εφαπτομένης με τον κύκλο) και την τέμνουσα $A\Gamma\Delta$ ($A\Gamma < A\Delta$). Από το σημείο Γ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς τη ΔB , η οποία τέμνει την AB στο E . Να δείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα $A\epsilon\Gamma$ και $AB\Gamma$ είναι όμοια

(β) $(A\Gamma)^2 = (A\epsilon) \cdot (AB)$

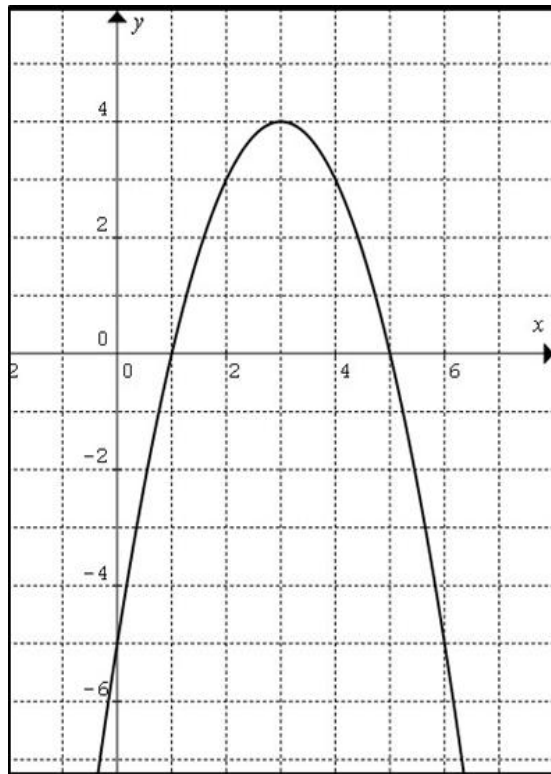
ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Χρησιμοποιώντας το σχήμα, να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $f(x)$
- (β) το πρόσημο του α
- (γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής
- (δ) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής
- (ε) το πρόσημο της παράστασης: $\beta^2 - 4\alpha\gamma$
- (στ) τις λύσεις της ανίσωσης: $f(x) \leq 0$
- (ζ) τις τιμές των α , β και γ



2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{v} = -3\vec{i} - \vec{j}$. Να υπολογίσετε:

- (α) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$
- (β) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$
- (γ) την τιμή του λ , ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{i} - 4\vec{j} + \lambda\vec{v}$

3. (α) Να υπολογίσετε τη γωνία θ , αν $180^\circ < \theta < 270^\circ$ και
$$\frac{\eta\mu(\theta - 180^\circ) \epsilon\varphi(90^\circ - \theta) \eta\mu(-\theta)}{\epsilon\varphi(180^\circ - \theta) \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta)} = -\frac{1}{2}$$

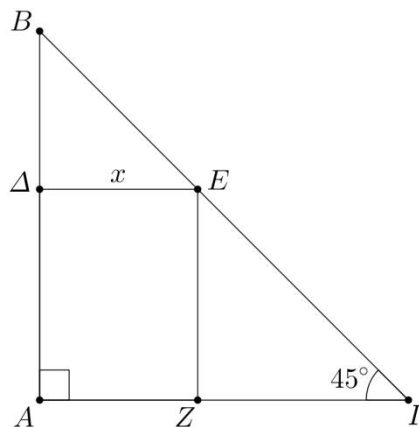
- (β) Η εξίσωση $2x^2 - (2\kappa + 1)x + \kappa = 0$, $\kappa \in \mathbb{R}$ έχει ρίζες $x_1 = \eta\mu\theta$, $x_2 = \sigma\upsilon\nu\theta$. Αν ισχύει

$$\frac{\epsilon\varphi\theta - 1}{\tau\epsilon\mu^2\theta} + \frac{\sigma\varphi\theta - 1}{\sigma\tau\epsilon\mu^2\theta} = 1, \text{ να υπολογίσετε την τιμή του } \kappa.$$

4. (α) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2 - 36)(x^2 + 7x + 6)}{x + 3} \leq 0$

(β) Στο πιο κάτω σχήμα, το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\angle A = 90^\circ$, $\angle \Gamma = 45^\circ$, $AE = x$ και $AB = 6\text{ cm}$. Ένας μαθητής θέλει να βρει τη θέση του σημείου E , έτσι ώστε το ορθογώνιο $A\Delta EZ$ να έχει το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

- (i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου $A\Delta EZ$ δίνεται από τη σχέση: $E(x) = 6x - x^2$
- (ii) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου $A\Delta EZ$ να είναι μέγιστο.
- (iii) Ποια είναι η μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου $A\Delta EZ$;



5. Δίνεται τρίγωνο $AO\Gamma$ με $A(1,1)$ και $O(0,0)$.

- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ , η οποία έχει θετική τεταγμένη, ανήκει στην ευθεία $x + 2y = 0$ και το εμβαδόν του τριγώνου $AO\Gamma$ είναι ίσο με 9 cm^2 .
- (β) Αν η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(-12,6)$, να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής Γ από την πλευρά AO .
- (γ) Να υπολογίσετε τη γωνία $\angle OAG$ του τριγώνου.
- (δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου A ως προς την ευθεία OG .

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ
 Δημήτρης Κωνσταντίνου ΒΔ
 Ηλίας Ζήκκος
 Έλενα Χατζηγεωργίου
 Κυριακή Παναγή
 Χριστίνα Κουμπάρου

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Ανδρούλλα Χρίστου

ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΟΥ ΙΩΑΝΝΗ ΛΕΜΕΣΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2015-2016

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Α' Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/05/2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΩΡΑ: 7:45 – 10:15

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο. Τα σχήματα με μολύβι.
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
3. Επιτρέπεται η χρήση σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής.
4. Το γραπτό αποτελείται από τέσσερις σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' (50 μονάδες)**Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.****A1.** Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$ για την οποία η εξίσωση:

$$(\mu - 1)x = 24 \quad \text{είναι αδύνατη.}$$

A2. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό:

$$3x + y = 5$$

$$x - 2y = 4$$

$$\lambda x + 3\lambda y = 16 + 7\lambda$$

A3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετεα) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ β) το μέτρο του $\vec{u}$.**A4.** Αν $\sin\theta = -\frac{3}{5}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να υπολογίσετεα) τους τριγωνομετρικούς αριθμούς: $\eta\mu\theta$ και $\epsilon\phi\theta$ β) την τιμή της παράστασης $A = 25 \cdot \eta\mu(180^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(90^\circ - \theta)$ **A5.** Δέκα μαθητές ενός γυμνασίου έχουν μέση τιμή ύψους 162cm. Αν οι 6 από αυτούς έχουν μέσο ύψος 160cm, να βρείτε το μέσο ύψος των υπολοίπων.

A6. Σε ένα κύκλο με κέντρο O η επίκεντρη γωνία του $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

Οι εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία A και B τέμνονται στο K .

Να υπολογίσετε :

α) τη γωνία $\widehat{AKB}$

β) και να δείξετε ότι $KA + KB = KO$

A7. (α) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού συναρτήσει του α , $\alpha > 0$ με ρίζες τους αριθμούς $\chi_1 = 1 + \sqrt{\alpha}$, $\chi_2 = 1 - \sqrt{\alpha}$.

(β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = (1 + \sqrt{\alpha})^2 + (1 - \sqrt{\alpha})^2$.

A8. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $\frac{(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 - 1}{\sigma\phi\chi - \eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi} = 2\varepsilon\phi^2\chi$.

A9. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - 5\lambda\chi - 1 = 0$ με παράμετρο λ .

(α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(β) Αν χ_1, χ_2 είναι οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης, να υπολογίσετε τις τιμές του λ

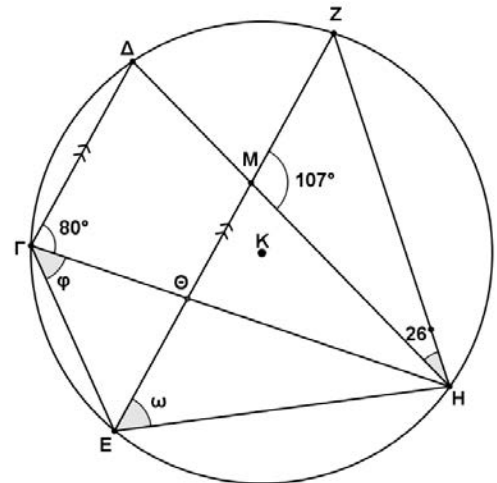
για τις οποίες ισχύει $(\chi_1 + \chi_2)^2 - 18 - 7(\chi_1 \cdot \chi_2)^4 \leq 0$

A10. Δίνεται το διπλανό σχήμα στο οποίο φαίνονται κύκλος (K, R) ,

$$\widehat{ZMH} = 107^\circ, \widehat{ZHM} = 26^\circ, \widehat{\Delta\Gamma H} = 80^\circ$$

και $\Delta\Gamma \parallel EZ$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\phi}$ και $\hat{\omega}$.



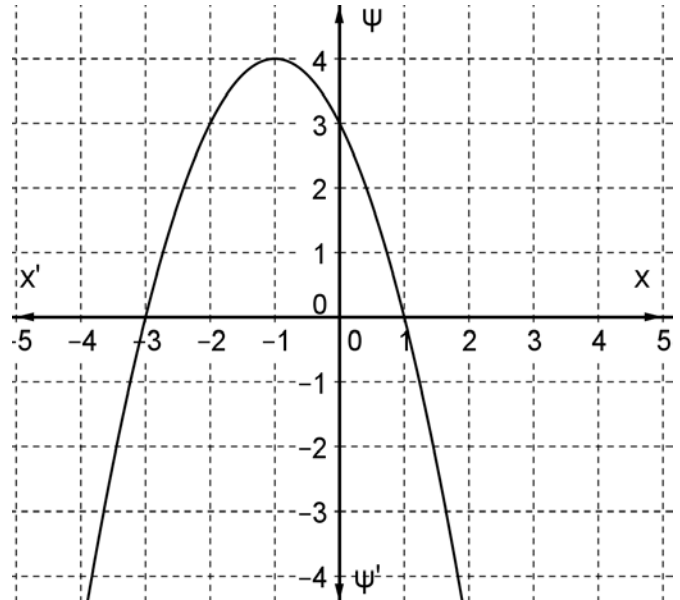
ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Να βρείτε:

- α) i) το πεδίο ορισμού της $f(x)$
- ii) το πεδίο τιμών της $f(x)$
- iii) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής
- iv) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- ε) την εξίσωση της $f(x)$



β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{f(x)}{x-2} \leq 0$

B2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) δίνεται η κορυφή $A(3, -2)$. Αν η εξίσωση της AB είναι η $x = 3$ και η εξίσωση της διαμέσου ΓM είναι η $3x + 2y = -1$, να βρείτε:

- α) τις συντεταγμένες των κορυφών του τριγώνου $AB\Gamma$
- β) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

B3. Αν $K = 2x - 1$ και $\Lambda = 3y + 2$

α) να λύσετε την εξίσωση $K^{\frac{3}{2}} + 3 = 30, x \geq \frac{1}{2}$

β) Αν $1 < K < 13$ και $8 < \Lambda < 17$

i) να αποδείξετε ότι $1 < x < 7$ και $2 < y < 5$

ii) να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

$$x \cdot y, x - 2y \quad \text{και} \quad \frac{x}{y}$$

B4. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$. Από το Γ φέρουμε την $\Gamma E \perp B\Delta$ (E σημείο της $B\Delta$).

Η προέκταση της ΓE τέμνει την AB στο H και την προέκταση της ΔA στο Z .

Να αποδείξετε ότι: α) $\frac{EB}{EH} = \frac{EZ}{E\Delta}$ β) $(\Gamma E)^2 = (EH)(EZ)$

B5. Δίνεται ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο Δ της πλευράς του $B\Gamma$ τέτοιο
ώστε $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = -2\overrightarrow{B\Delta}$.

α) Να αποδείξετε ότι $3\overrightarrow{A\Delta} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}$

β) Αν $A(1,1)$, $B(-1,3)$ και $\Gamma(0,-1)$ να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ και του
διανύσματος $\overrightarrow{A\Delta}$.

Η Διευθύντρια

Οικονομίδου Σύλβια

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ(5-ΩΡΟ)****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19/05/2016****ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να γράψετε με **μπλε** μελάνι. (Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι)
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού/ταινίας.
3. Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
4. Τα προσωπικά σας στοιχεία και οι λύσεις των ασκήσεων να γραφτούν στα φύλλα εξέτασης.
5. Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.**ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(3,2)$ και σχηματίζει προσανατολισμένη γωνία 135° με τον άξονα των τετμημένων.
2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:
(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$,
(β) το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{\alpha}$.
3. Δίνεται η εξίσωση $\mu^2x - 6 = 2\mu + 9x$ όπου $\mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου μ για τις οποίες η εξίσωση:
(α) έχει λύση τον αριθμό $x=1$,
(β) είναι αόριστη.

4. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt[4]{(10 - \sqrt{19})} \cdot \sqrt[4]{(10 + \sqrt{19})}$ και $B = 3 + \sqrt{18}$.

Να δείξετε ότι: (α) $A = 3$

(β) $\frac{A}{B} = \sqrt{2} - 1$

5. Τα 10 τμήματα της Γ τάξης ενός Λυκείου της Λευκωσίας έχουν τους εξής αριθμούς μαθητών κατά τμήμα: 24, 18, 22, 23, 22, 16, 23, 18, 16, 18.

(α) Να βρείτε τη μέση τιμή ($\bar{X}$) του πλήθους των μαθητών κατά τμήμα.

(β) Να βρείτε την τυπική απόκλιση (s) του πλήθους των μαθητών κατά τμήμα, δίνοντας την απάντησή σας με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

6. Δίνονται οι ευθείες
$$\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x+y=7 \\ 3\lambda x+2y=\lambda^2+7 \end{cases}$$

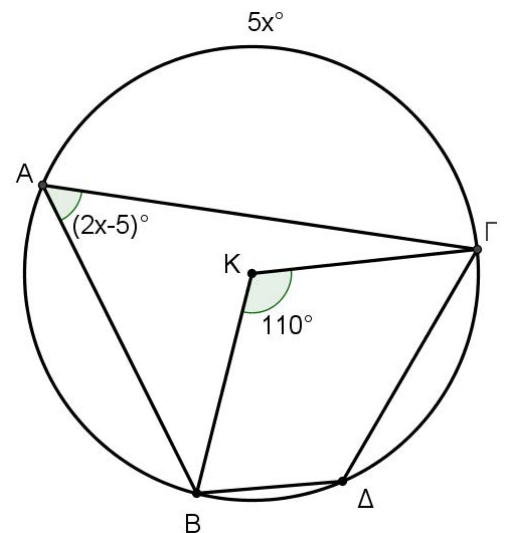
(α) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πιο πάνω σύστημα ευθειών είναι συμβιβαστό.

(β) Να ερμηνεύσετε γραφικά τη θέση των τριών ευθειών του πιο πάνω συστήματος.

7. Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ. Αν $\hat{A} = (2x - 5)^\circ$, $\hat{BKG} = 110^\circ$

και $A\Gamma = 5x^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{BAG}$, $\hat{AGB}$ και

$\hat{BDG}$, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



8. Να δείξετε ότι: $\epsilon\phi x - \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 - \eta\mu x} = -\tau\epsilon\mu x$

9. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης

$$x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0 \quad \text{με } \lambda \in (0, 2).$$

(α) Να βρείτε: (i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου,

(ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ .

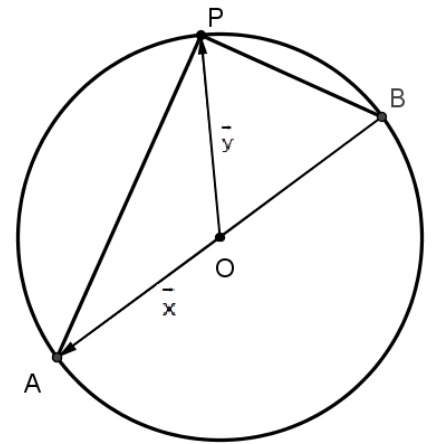
(β) Για ποια τιμή του λ το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο;

10. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB . Το σημείο P είναι

τυχαίο πάνω στον κύκλο με $\overrightarrow{OA} = \vec{x}$ και $\overrightarrow{OP} = \vec{y}$.

(α) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{PA}$ και $\overrightarrow{PB}$ ως συνάρτηση των διανυσμάτων $\vec{x}$ και $\vec{y}$.

(β) Χρησιμοποιώντας το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$, να δείξετε ότι η γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.



ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma, \quad a \neq 0.$$

Να βρείτε:

(α) το πεδίο τιμών της $f(x)$,

(β) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$,

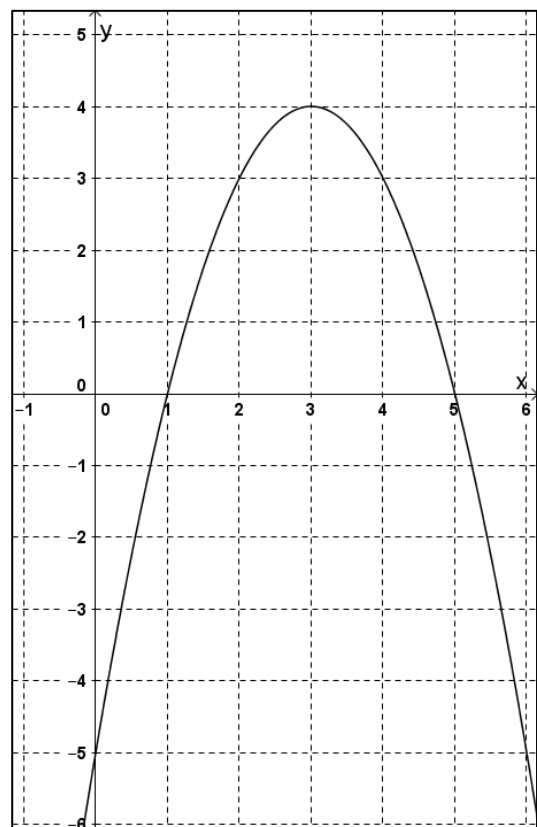
(γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της $f(x)$,

(δ) τις συντεταγμένες της κορυφής της $f(x)$,

(ε) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$,

(στ) τις λύσεις της εξίσωσης $[f(x)]^3 = 27$,

(ζ) την τιμή του $\frac{2\gamma + 3\beta}{a}$.



2. Δίνεται η εξίσωση $(\mu - 1)x^2 - (\mu + 2)x + 2\mu = 0$, $\mu \neq 1$. Να βρείτε, για κάθε περίπτωση, τις τιμές της παραμέτρου μ ώστε:

(α) Η εξίσωση να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

(β) Οι ρίζες της εξίσωσης x_1 και x_2 να ικανοποιούν τη σχέση $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq 2$.

3. (α) Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu(90^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(360^\circ - \theta) + \sigma\phi(-\theta) \cdot \epsilon\phi(180^\circ + \theta)}{\eta\mu(180^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(720^\circ + \theta)} = \epsilon\phi\theta$

(β) Να λύσετε την εξίσωση $(5\epsilon\phi\theta + 4)^{\frac{3}{2}} = 27$ στο διάστημα $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

(γ) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της παράστασης $y = 3 - 2\eta\mu x$, $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

4. Οι ευθείες $\epsilon_1: x - y = 1$ και $\epsilon_2: 7x - y = -11$ είναι οι εξισώσεις των πλευρών $ΑΔ$ και $ΓΔ$ ενός ρόμβου $ΑΒΓΔ$ αντίστοιχα.

(α) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία $\hat{A}\Delta\Gamma$, δίνοντας την απάντησή σας με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

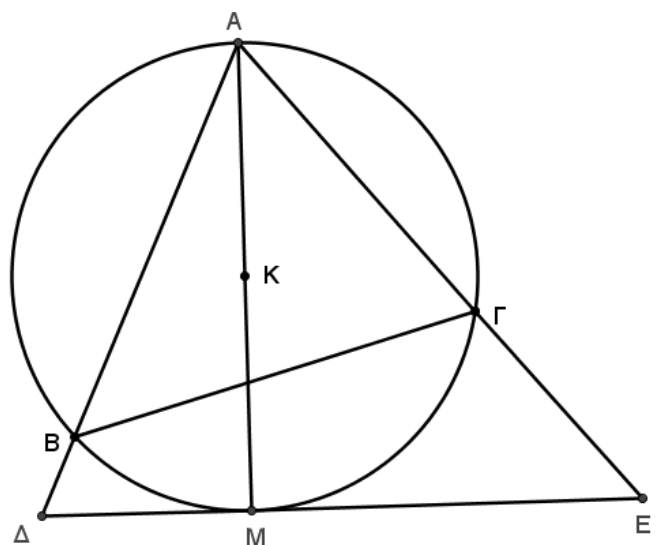
(β) Αν οι συντεταγμένες της κορυφής B είναι $(4, 9)$ να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_3) η οποία περνά από το σημείο B και είναι κάθετη στην ευθεία $ΓΔ$.

(γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $ΒΓΔ$.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο K . Φέρουμε τη διάμετρο $ΑΜ$ και την εφαπτομένη του κύκλου στο M . Οι προεκτάσεις των πλευρών $ΑΒ$ και $ΑΓ$ τέμνουν την εφαπτομένη στα σημεία $Δ$ και E αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

(α) $(ΜΓ)^2 = (ΕΓ) \cdot (ΓΑ)$

(β) Τα τρίγωνα $\hat{A}B\Gamma, \hat{A}\Delta E$ είναι όμοια.



Ο Διευθυντής

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Αντρέας Γεωργίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 5-ωρο

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 31/05/2016

ΒΑΘΜΟΣ

Αριθμητικώς:-----

Ολογράφως:-----

Υπογραφή :-----

Ονοματεπώνυμο:-----Τμήμα:-----Αριθμός:-----

ΟΔΗΓΙΕΣ: 1. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **9** σελίδες.2. Να γράφετε μόνο με **μπλε ή μαύρο** μελάνι. (Για τα σχήματα επιτρέπεται και το μολύβι)

3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

4. Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

ΜΕΡΟΣ Α' **Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε 5 μονάδες.

A1. Δίνονται οι αριθμοί $\chi_1 = 3$, $\chi_2 = 4$. Να κατασκευάσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες χ_1 και χ_2 .

A2. Δίνονται τα σημεία A (1, -3) και B (4, 1) . Να βρείτε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB .

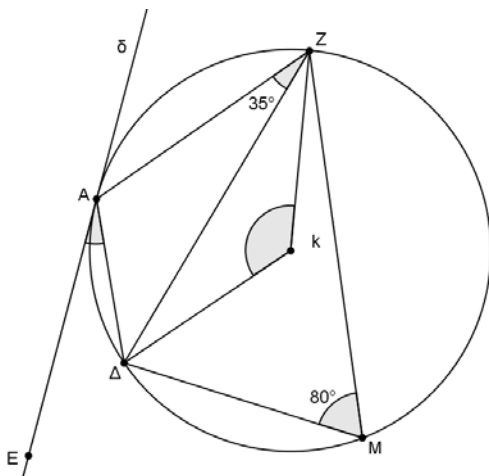
A3. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi)^2 + (\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi)^2 = 2$

A4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

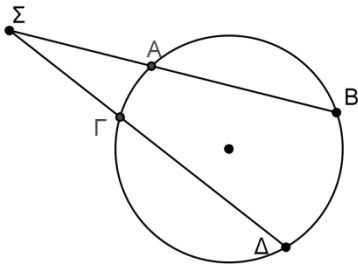
(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\beta} - \vec{\alpha}$.

(β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

A5. Στο πιο κάτω σχήμα, δίνεται κύκλος (Κ,Ρ) με γωνία $\angle AZD = 35^\circ$, γωνία $\angle ZMD = 80^\circ$ και (δ) εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας $\angle DAE$ και της γωνίας $\angle ZKD$, αιτιολογώντας την απάντησή σας.



A6. Στο πιο κάτω σχήμα, οι ημιευθείες ΣAB και $\Sigma \Gamma \Delta$ είναι τέμνουσες του κύκλου (K,R) . Αν $\Sigma \Delta = 10m$, $\Sigma \Gamma = 4m$ και $\Sigma A = 5m$, να υπολογίσετε το μήκος της χορδής AB .



A7. Δίνεται εξίσωση $\chi^2 - 10\chi + 20 = 0$. Χωρίς να υπολογίσετε τις ρίζες, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

(α) $S = \chi_1 + \chi_2$,

(β) $P = \chi_1 \cdot \chi_2$,

(γ) $4\chi_1 + 4\chi_2 + 3\chi_1 \cdot \chi_2$

A8. Να βρείτε την τιμή του α ώστε τα σημεία $A(1,1)$, $B(3,-1)$ και $\Gamma(0,\alpha)$ να είναι συνευθειακά.

A9. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\chi}{\chi-2} \geq 2$

A10. Δίνεται η παραμετρική εξίσωση $\mu^2\chi + 2 = 3\mu\chi - 1 + \mu$. Να βρείτε τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση :

(α) να έχει μοναδική λύση,

(β) να είναι αδύνατη,

(γ) να είναι αόριστη.

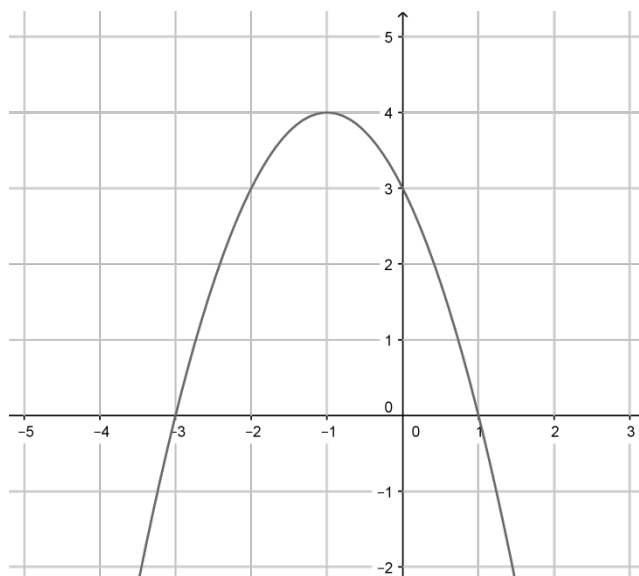
ΜΕΡΟΣ Β΄ **Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma \text{ με } a \neq 0.$$

Να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $f(x)$,
- (β) το πρόσημο της Διακρίνουσας (Δ) ,
- (γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της $f(x)$,
- (δ) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$,
- (ε) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) < 0$,
- (στ) τις τιμές των a, b, γ .



B2. Οι βαθμοί του πρώτου εξαμήνου ενός φοιτητή στο Τμήμα Ψυχολογίας ενός Πανεπιστημίου είναι:

10, 6, 10, 7, 5, 4,

(α) να βρείτε το εύρος R ,

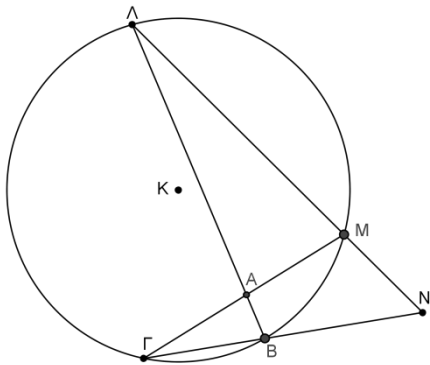
(β) να δείξετε ότι η μέση τιμή των βαθμών του φοιτητή είναι $\bar{x}=7$,

(γ) να δείξετε ότι η τυπική απόκλιση των βαθμών του φοιτητή είναι $s=\frac{4\sqrt{3}}{3}$,

B3. Από σημείο N εκτός κύκλου (K, R) , φέρουμε τις τέμνουσες $NM\Lambda$, $NB\Gamma$ και τις χορδές ΛB , $M\Gamma$ οι οποίες οι τελευταίες τέμνονται στο σημείο A .

(α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΛBN και ΓMN είναι όμοια.

(β) Να δείξετε ότι $(NB)(M\Gamma) = (\Lambda B)(NM)$.



B4. Δίνονται οι παραστάσεις B και Γ με $\chi \in (0^\circ, 90^\circ)$

$$B = \varepsilon\varphi\chi(\sigma\tau\epsilon\mu\chi - \eta\mu\chi)$$

$$\Gamma = \sigma\varphi(360^\circ + \chi) \cdot [\eta\mu(180^\circ - \chi) + \sigma\varphi(270^\circ - \chi)] - 1 - \sigma\upsilon\nu(-\chi) + \eta\mu\chi$$

Να δείξετε ότι:

(α) $B = \sigma\upsilon\nu\chi,$

(β) $\Gamma = \eta\mu\chi,$

(γ) $B + \Gamma > 0.$

B5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 1)$, $B(3, -5)$ και $\Gamma(-3, 3)$. Να βρείτε:

- (α) την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$,
- (β) την απόσταση του σημείου A από τη $B\Gamma$,
- (γ) τις συντεταγμένες του μέσου M της $A\Gamma$,
- (δ) την εξίσωση της διαμέσου BM .
- (ε) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ είναι 10 τετραγωνικές μονάδες.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....
ΑΛΕΚΟΣ ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΕΟΥΣ

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΪΟΥ/ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**

Τάξη: Α' Λυκείου

Ημερομηνία:

31 / 05 / 16

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ώρες

Διάρκεια εξέτασης: 2,5

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι.
- (β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (γ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- (δ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους αυτού.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου κ , $\kappa \in \square$ για την οποία η εξίσωση $(2\kappa+1)x=14$ είναι αδύνατη.
2. Αν $1 < x < 3$ και $2 < y < 5$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:
α) $x+y$ β) $x-y$
3. Στο μάθημα της Φυσικής ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου πήρε τους πιο κάτω βαθμούς με την αντίστοιχη βαρύτητα:

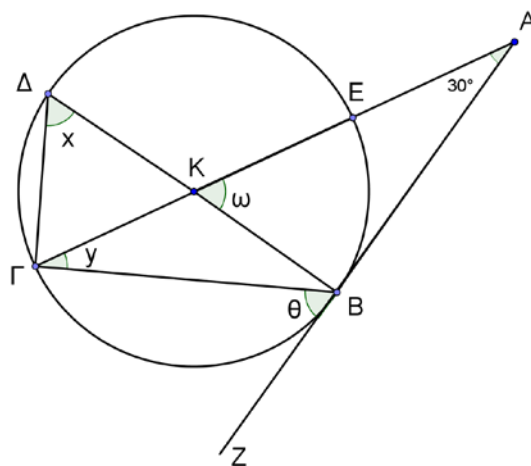
	Διαγώνισμα 1	Διαγώνισμα 2	Εργαστήριο	Προφορικό
Βαθμός (από το 20)	14	17	18	20
Βαρύτητα	35 %	35 %	20 %	10 %

Να υπολογίσετε τον τελικό βαθμό του μαθητή στο μάθημα της Φυσικής, δείχνοντας τις πράξεις σας.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

- α) το εσωτερικό τους γινόμενο, και
β) τη γωνία μεταξύ τους.

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{1}{\eta\mu^2\alpha} - \frac{1}{\varepsilon\varphi^2\alpha} = 1$
6. Αν $x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ και $y = \frac{1}{\sqrt{3}}$ να δείξετε ότι $\frac{3(x+y)}{3-\sqrt{3}} = 2$ (χωρίς τη χρήση της υπολογιστικής μηχανής και δείχνοντας τις πράξεις σας).
7. Δίνεται κύκλος (K, R). Η ευθεία AZ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B και η γωνία $\hat{KAB} = 30^\circ$. Να βρείτε τις γωνίες χ , y , θ , ω και το τόξο ΔΓ, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



8. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\lambda(\lambda^2 x - 1) + 2 = \lambda x(5\lambda - 6)$ για διάφορες τιμές της παραμέτρου λ , $\lambda \in \mathbb{R}$.
9. Δίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 + 2\tau\epsilon\mu\theta \cdot x + \varepsilon\varphi^2\theta = 0$, $\theta \in (0, 90^\circ)$.
- α) Να δείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
- β) Να δείξετε ότι $\frac{(x_1 + x_2)^2}{\varepsilon\varphi^2\theta} = 4\sigma\tau\epsilon\mu^2\theta$, όπου x_1 και x_2 οι ρίζες της εξίσωσης.
10. Στην εξίσωση $2x^2 - \lambda x + \mu + 3 = 0$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) οι ρίζες της έχουν διαφορά 1. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\lambda^2 = 4(2\mu + 7)$

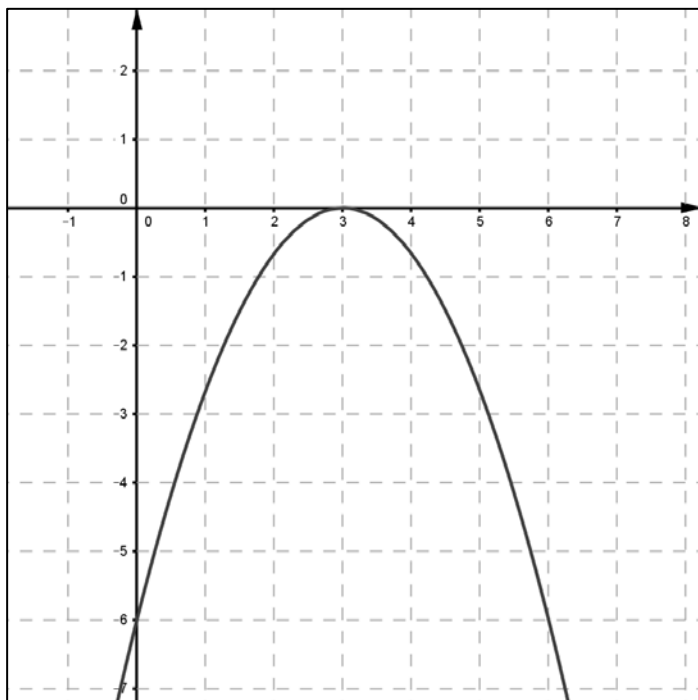
ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους αυτού.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Για ποιες τιμές του λ ($\lambda \in \mathbb{R}$) η εξίσωση $x^2 - (2\lambda + 1)x + \lambda - 3 = 0$:
- α) έχει ρίζα τον αριθμό 3
- β) έχει ρίζες αντίθετες
- γ) έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες

$$\delta) \text{ ισχύει } \frac{s}{p} \geq 1$$

2. Το διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$.
Να βρείτε:



- α) το πεδίο τιμών της συνάρτησης
- β) το πρόσημο του a
- γ) τις συντεταγμένες της κορυφής
- δ) το είδος των ριζών της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$
- ε) την τιμή του γ
- στ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- ζ) τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$
- η) το πρόσημο της παράστασης $f(99) - f(100)$

3. Να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\sigma\phi\theta}{\sigma\tau\epsilon\mu\theta - 1} - \frac{\sigma\phi\theta}{\sigma\tau\epsilon\mu\theta + 1} = 2\epsilon\phi\theta$

β) $\frac{\eta\mu(180^\circ - \omega)\sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) - \sigma\upsilon\nu(-180^\circ + \omega)\eta\mu(90^\circ + \omega)}{\tau\epsilon\mu(180^\circ - \omega)\sigma\upsilon\nu(720^\circ + \omega)} = -1$

4. Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται η κορυφή Γ(3,-1) και οι εξισώσεις του ύψους ΑΔ: $3x - 4y + 6 = 0$ και της διαμέσου ΑΜ: $2x + y - 7 = 0$. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της ΒΓ
- β) το μήκος ύψους ΑΔ, αν η εξίσωση της ΒΓ είναι $4x + 3y - 9 = 0$
- γ) τις συντεταγμένες του σημείου Μ και της κορυφής Β
- δ) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ

5. Τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB > B\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) . Φέρουμε τη $B\chi$ εφαπτομένη του κύκλου στο B και από το Γ τη $\Gamma\upsilon$ παράλληλη προς τη $B\chi$ που τέμνει την AB στο Δ και τον κύκλο στο E . Να δείξετε ότι:

α) $(B\Gamma)^2 = (AB)(B\Delta)$

- β) Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη σχέση (ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο), να αποδείξετε ότι $(B\Gamma)^2 - (B\Delta)^2 = (\Gamma\Delta)(\Delta E)$

Ο Διευθυντής

Γ. Χρυσοστόμου

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 07 / 06 / 2016

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

Βαθμός:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

Όνομα: Τμήμα: Αρ.:

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 10 σελίδες.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράψετε με μελάνι μαύρο ή μπλε (για τα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α΄:

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Δίνεται η ευθεία (ε) με εξίσωση $y = 7x - 3$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(2, -1)$ και είναι:

- α) Παράλληλη με την ευθεία (ε).
- β) Κάθετη στον άξονα των τετμημένων.

2) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $6x^2 - 12x - 18 = 0$, χωρίς να τη λύσετε, να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

α) $x_1 + x_2 =$ β) $x_1 \cdot x_2 =$ γ) $16x_1^2 x_2 + 16x_1 x_2^2 =$

3) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 4 - \lambda \\ \kappa + 5 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:

α) Το διάνυσμα $\vec{\delta} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

β) Τις τιμές των κ και λ ώστε $\vec{\gamma} = \vec{\alpha}$.

4) Αν $\eta\mu\omega = -\frac{4}{5}$ και $270^\circ < \omega < 360^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{3\epsilon\phi\omega - 10\sigma\upsilon\nu\omega}{1 - 4\sigma\tau\epsilon\mu\omega}$$

5) Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό των αυτοκινήτων που έχουν οι οικογένειες μιας γειτονιάς. Να βρείτε :

α) Τη μέση τιμή ($\bar{x}$) του αριθμού των αυτοκινήτων των οικογενειών.

β) Την τυπική απόκλιση (σ).

γ) Το συντελεστή μεταβλητότητας (CV).

Αριθμός αυτοκινήτων	Αριθμός οικογενειών
0	1
1	5
2	7
3	7

6) Δίνεται ορθογώνιο με μήκος x και πλάτος y , του οποίου οι διαστάσεις ικανοποιούν τις ανισότητες $7 \leq x \leq 15$ και $2 \leq y \leq 4$.

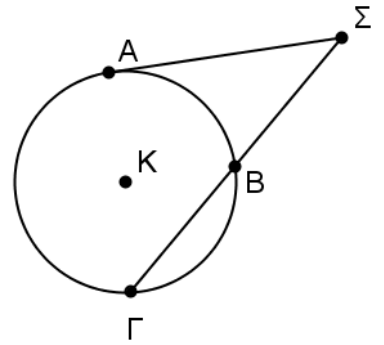
Αν μειώσουμε το μήκος κατά 5 και τριπλασιάσουμε το πλάτος του, να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή :

α) Της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου.

β) Του εμβαδού του νέου ορθογωνίου.

- 7) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(4,1)$, $B(1,5)$, $\Gamma(9,2)$. Να υπολογίσετε:
- α) Τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.
 - β) Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$.
 - γ) Το συνημίτονο της γωνίας A του τριγώνου.
- 8) Τα σημεία $A(\lambda, \lambda+1)$, $B(\lambda-3, 5)$ και $\Gamma(\lambda+2, 4)$ είναι σημεία κύκλου. Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η $A\Gamma$ να είναι διάμετρος του κύκλου.

- 9) Στο σχήμα, από ένα σημείο Σ εκτός του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη ΣA και την τέμνουσα $\Sigma B\Gamma$.
Αν $\Sigma A = x - 4$, $\Sigma B = \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$ και $\Sigma \Gamma = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}$, να βρείτε την τιμή του x .



- 10) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από τυχαίο σημείο E της AB φέρουμε την EZ παράλληλη προς την πλευρά $A\Gamma$ (Z σημείο της $B\Gamma$) και την ED παράλληλη προς την AZ (D σημείο της $B\Gamma$). Να δείξετε ότι:

$$\frac{BZ}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{BZ}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄:

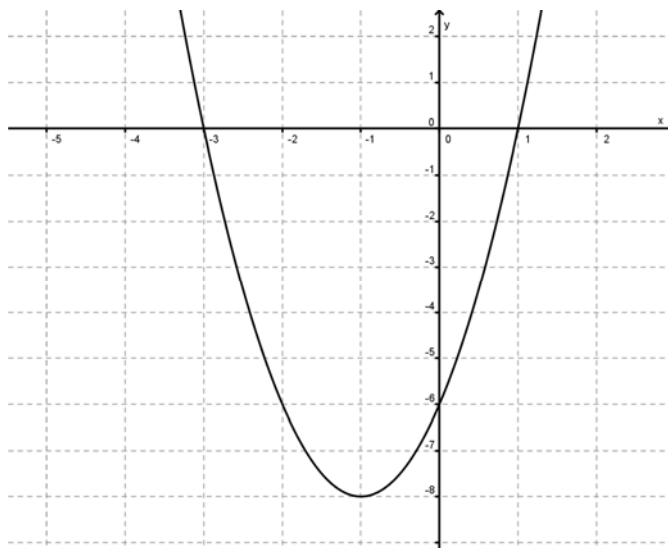
Να λύσετε και τα 5 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

Να βρείτε :

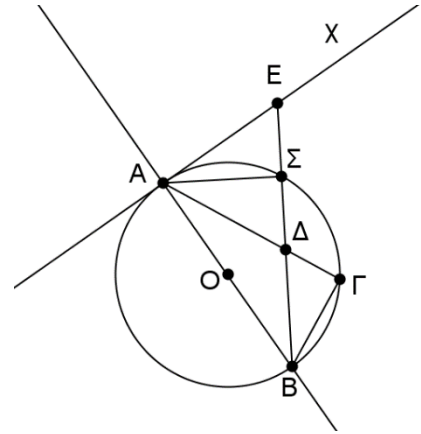
- α) Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x)$.
- β) Τον άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της καμπύλης.
- γ) Το πρόσημο του a και το πρόσημο της διακρίνουσας της $f(x)$.
- δ) Τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- ε) Για ποιες τιμές του x ισχύει $f(x) < 0$.
- στ) Την τιμή της παράστασης $B = -\frac{5\beta}{2\alpha} + 2\gamma$.
- ζ) Το πρόσημο της παράστασης $A = \frac{f(0) + f(1)}{f(2016)}$.



- 2) Στο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου (O, R) και η $A\chi$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A . Η διχοτόμος BE της γωνίας $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Gamma$ στο Δ , τον κύκλο στο Σ και την εφαπτομένη στο E .

Να δείξετε ότι :

- (α) Η $A\Sigma$ είναι διχοτόμος της γωνίας EAD .
 (β) $(\Gamma B)(\Sigma E) = (\Gamma \Delta)(\Sigma A)$.



- 3) α) Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (3\lambda + 2)x + \lambda^2 - 2 = 0$. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ , για τις οποίες η εξίσωση έχει:
- i) Άθροισμα ριζών ίσο με το γινόμενο τους.
 - ii) Ρίζες αντίστροφες.

β) Να λύσετε την ανίσωση:
$$\frac{(1-2x)(x^2+3)(4x^2-1)}{x^2-10x+24} \leq 0$$

- 4) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή $B(2, -4)$, εξίσωση ύψους AZ : $x+2y=1$ και εξίσωση διαμέσου AM : $2x+3y=0$. Να βρείτε:
- α) Την εξίσωση της ευθείας $B\Gamma$.
 - β) Τις συντεταγμένες των σημείων M και Γ .
 - γ) Την οξεία γωνία των ευθειών AZ και AM .
 - δ) Τις συντεταγμένες της κορυφής A .
 - ε) Το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

5) Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\sin(270^\circ + \varphi) \eta\mu(360^\circ + \varphi) \epsilon\varphi(90^\circ + \varphi)}{\sin(90^\circ - \varphi) \sin(\varphi - 180^\circ)}$ και

$$B = (\eta\mu^2\varphi - \sigma\upsilon\nu^2\varphi)^2 + 4\eta\mu^2\varphi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\varphi + \eta\mu(90^\circ + \varphi) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \varphi).$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = 1$ και $B = \eta\mu^2\varphi$.

β) Αν $\frac{A}{B} \cdot \eta\mu\varphi = -2$ και $270^\circ < \varphi < 360^\circ$, να βρείτε την τιμή της γωνίας φ .

Οι Εισηγητές

Η Διευθύντρια

Πασκοπτή Σούλα

Χριστοφορίδης Γιώργος

Αχειρώτου Σοφούλα

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ/ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΤΑΞΗ : Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19 / 5 / 2016

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2,5 ώρες

Βαθμός:

Ολογράφως:

Υπογραφή:
.....

Όνομα: Τμήμα: Αριθμός:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (μολύβι επιτρέπεται μόνο στα σχήματα).
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Επιτρέπεται η χρήση ΜΗ προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **10** σελίδες και περιλαμβάνει δύο μέρη.

ΜΕΡΟΣ Α΄ (50 μονάδες):

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να μετατρέψετε το κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή:

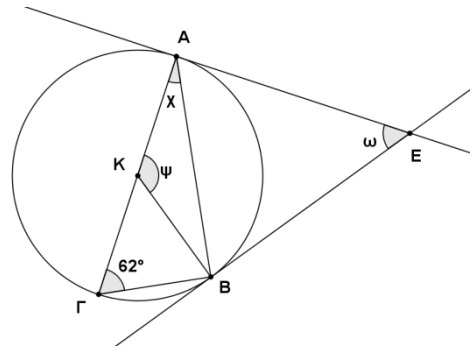
$$\frac{8}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} =$$

2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές Α(−1, 3), Β(1, 5) και Γ(2, 0).

3. Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής της βαθμολογίας ενός μαθήματος δίνεται βαρύτητα 20% σε μια εργασία και από 40% σε δύο διαγωνίσματα. Αν κάποιος μαθητής πήρε 18 στην εργασία, 14 στο πρώτο διαγώνισμα και 17 στο δεύτερο, ποια θα είναι η μέση τιμή της βαθμολογίας του;

4. Να απλοποιηθεί το κλάσμα: $\frac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 - 4}$

5. Στο διπλανό σχήμα οι ΑΕ, ΒΕ εφάπτονται στον κύκλο (Κ,Ρ) και η γωνία $\hat{\Gamma} = 62^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες χ , ψ και ω , δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



6. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $(\chi - 1)^4 = 16$

β) $(3\chi + 1)^{\frac{3}{2}} = 8, \quad \chi \geq -\frac{1}{3}$

7. Η ευθεία (ε) του διπλανού σχήματος περνά από την αρχή των αξόνων Ο και το σημείο $A(-1,2)$. Να βρείτε:

1) Την κλίση της ευθείας (ε).

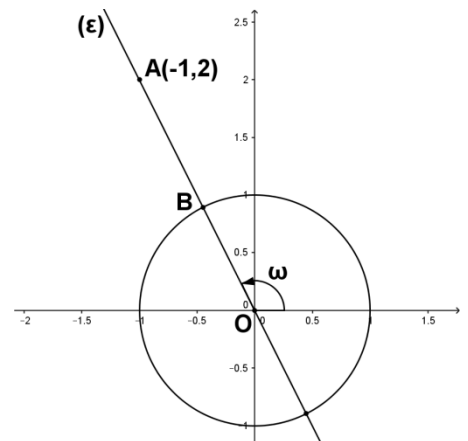
(2 μονάδες)

2) Την προσανατολισμένη γωνία ω που σχηματίζει με τον θετικό ημιάξονα Οχ, με ακρίβεια ακεραίου.

(1 μονάδα)

3) Τις συντεταγμένες του σημείου τομής Β της ευθείας με τον τριγωνομετρικό κύκλο, με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

(2 μονάδες)



8. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x^2 - 7}{x - 2} \leq 2$

9. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\varepsilon\varphi(180^\circ + \chi) - \varepsilon\varphi(90^\circ + \chi) = \tau\epsilon\mu(-\chi) \cdot \tau\epsilon\mu(90^\circ - \chi)$

10. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\kappa^2\chi - \kappa = \chi + 1$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου κ , $\kappa \in \mathbb{R}$.

Μέρος Β': (50 Μονάδες)

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

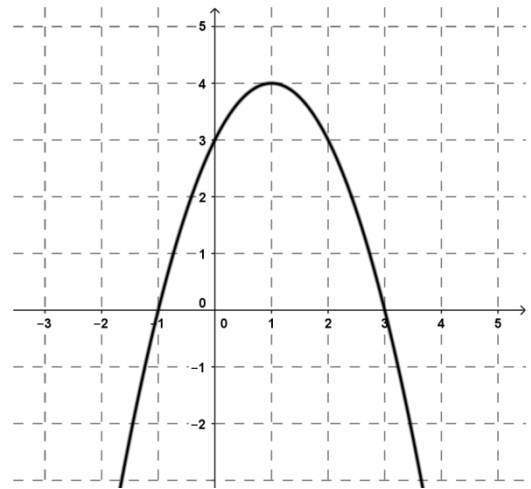
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + c$ με $a \neq 0$.

- 1) Να βρείτε: (4 μονάδες)
- (i) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $f(x)$.
 - (ii) το πρόσημο του a .
 - (iii) το πρόσημο της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$.
 - (iv) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$.

- 2) Να υπολογίσετε τα a , b και c .

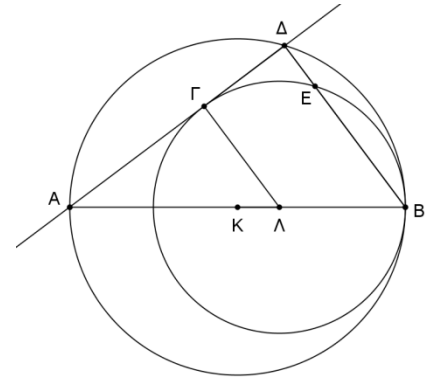
(6 μονάδες)



2. Σε ρόμβο $AB\Gamma\Delta$ δίνονται οι εξισώσεις της πλευράς $AB: 3\chi - \psi - 3 = 0$, της διαγωνίου $A\Gamma: \chi + \psi - 5 = 0$ και οι συντεταγμένες της κορυφής $\Delta(5, 4)$. Να βρείτε:
- α) την απόσταση του σημείου Δ από την πλευρά AB . (2 μονάδες)
 - β) την οξεία γωνία μεταξύ της AB και της $A\Gamma$, με προσέγγιση ακεραίου. (3 μονάδες)
 - γ) τις συντεταγμένες των κορυφών A , B και Γ . (5 μονάδες)

3. Δίνεται κύκλος $(K, 4\text{ cm})$ με διάμετρο AB και κύκλος $(\Lambda, 3\text{ cm})$ ο οποίος εφάπτεται εσωτερικά στον πρώτο στο σημείο B . Από το σημείο A φέρουμε εφαπτομένη AG στον δεύτερο κύκλο και η προέκτασή της τέμνει τον πρώτο κύκλο σε σημείο Δ .

- 1) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $AG\Lambda$ και $A\Delta B$ είναι όμοια.
(3 μονάδες)
- 2) Να υπολογίσετε τα τμήματα $\Gamma\Delta$ και ΔB .
(4 μονάδες)
- 3) Να υπολογίσετε το τμήμα ΔE .
(3 μονάδες)



4. Δίνονται σημεία $A(3, -1)$ και $B(4, 2)$ σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με διανύσματα θέσης $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA}$ και $\vec{\beta} = \overrightarrow{OB}$ αντίστοιχα (Ο η αρχή των αξόνων).
- 1) Να βρείτε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.
(2 μονάδες)
 - 2) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
(3 μονάδες)
 - 3) Να βρείτε το χ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \chi\vec{i} + \vec{j}$ να είναι κάθετο στο $\vec{\delta} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$.
(3 μονάδες)
 - 4) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου P του τμήματος AB έτσι ώστε $AP = 2 \cdot PB$.
(2 μονάδες)

5. Δίνεται η εξίσωση: $\chi^2 + 2\varepsilon\varphi\theta \cdot \chi + \tau\varepsilon\mu\theta - \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1-\eta\mu\theta} = 0$, όπου $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$.

1) Να δείξετε ότι το άθροισμα των ριζών τους είναι διπλάσιο του γινομένου τους.
(6 μονάδες)

2) Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι πραγματικές και ίσες, να υπολογίσετε τη γωνία θ .
(4 μονάδες)

ΟΙ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ

Χατζηγιάνγκου Γρηγορία, Σ.Β.Δ.

Κασσιανής Γιώργος, Β.Δ.

Τσίγκη Έλενα

Κοντοβούρκης Μιχάλης

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Κωνσταντινίδου Παρασκευούλα

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (5ωρο)

ΣΕΙΡΑ: Α΄

ΤΑΞΗ: Α΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 24/05/2016

ΧΡΟΝΟΣ: 8:00 π.μ. – 10:30 π.μ.

Οδηγίες:

- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο (2) μέρη.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από πέντε (5) σελίδες.
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (με μολύβι μόνο τα σχήματα).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής σφραγισμένης από το σχολείο.
- Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
- Όλες οι απαντήσεις να δοθούν σε σφραγισμένες κόλλες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

1. Να λύσετε την ανίσωση: $3\chi^2 - 7\chi + 2 \leq 0$

2. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

α) $\frac{1}{\sqrt{\chi} - \sqrt{\psi}} =$, $\chi \neq \psi, \chi \geq 0, \psi \geq 0$ β) $\frac{\chi}{\sqrt[3]{\psi}} =$, $\psi > 0$

3. Αν $3 < \chi < 4$ και $-4 < \psi < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $\chi + \psi$ β) $\frac{\chi}{\psi}$

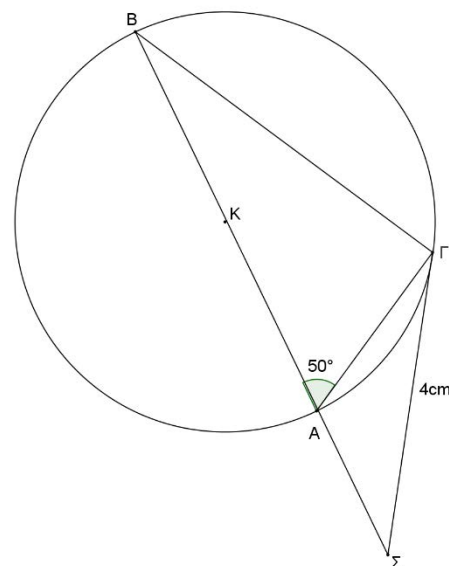
4. Να αποδείξετε ότι: $\sin^2\theta \left(1 + \frac{1}{\sigma\phi^2\theta}\right) + \eta\mu^2\theta \left(1 + \frac{1}{\epsilon\phi^2\theta}\right) = 2$

5. Σε ένα ραντάρ αεροδρομίου, δίνεται το ελικοδρόμιο ως ευθεία και η θέση του ελικόπτερου ως σημείο. Αν το ελικοδρόμιο είναι η ευθεία (ε): $3\chi + 4\psi + 5 = 0$ και η θέση του ελικόπτερου είναι το σημείο: $(2,1)$, να βρείτε την απόσταση του ελικόπτερου από το ελικοδρόμιο.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, 3 cm) με εφαπτόμενο τμήμα $\Sigma\Gamma = 4$ cm και τέμνουσα ΣAB που περνά από το K.

Αν $\widehat{B\hat{A}\Gamma} = 50^\circ$, να βρείτε:

- α) το μέτρο της γωνίας $\widehat{A\hat{\Gamma}\Sigma}$
 β) το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος $A\Sigma$



7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Να βρείτε:

- α) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{a} - 2\vec{\beta}$ (μονάδες 1)
 β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ (μονάδες 2)
 γ) τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{\beta}$ (μονάδες 2)

8. Δίνεται η εξίσωση: $-\chi^2 + (\lambda - 7)\chi + \lambda - 6 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του λ έχει:

- α) μια ρίζα ίση με 1
 β) μια διπλή ρίζα
 γ) δύο ρίζες αντίστροφες
 δ) άθροισμα ριζών διπλάσιο από το γινόμενό τους

9. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό βιβλίων που διάβασαν 50 μαθητές ενός Λυκείου της Λεμεσού κατά τις καλοκαιρινές τους διακοπές.

Αρ. βιβλίων	0	1	2	3	4	6
Αρ. μαθητών	8	17	11	3	7	4

Να υπολογίσετε:

- τη μέση τιμή των παρατηρήσεων
- την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων

10. Αν ισχύει η σχέση : $\varepsilon\varphi(180^\circ + \omega) + 2\sigma\varphi(90^\circ + \omega) = 5\sigma\varphi(270^\circ - \omega) - 6$ και η εξίσωση: $\chi^2 + (\sigma\upsilon\nu\theta + 1)\chi + 5 = 0$ έχει ρίζες αντίθετες, να δείξετε ότι οι ευθείες: $(\varepsilon_1) : \psi = (\varepsilon\varphi\omega)\chi - 2$ και $(\varepsilon_2) : (\sigma\upsilon\nu\theta)\chi - \psi = 0$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

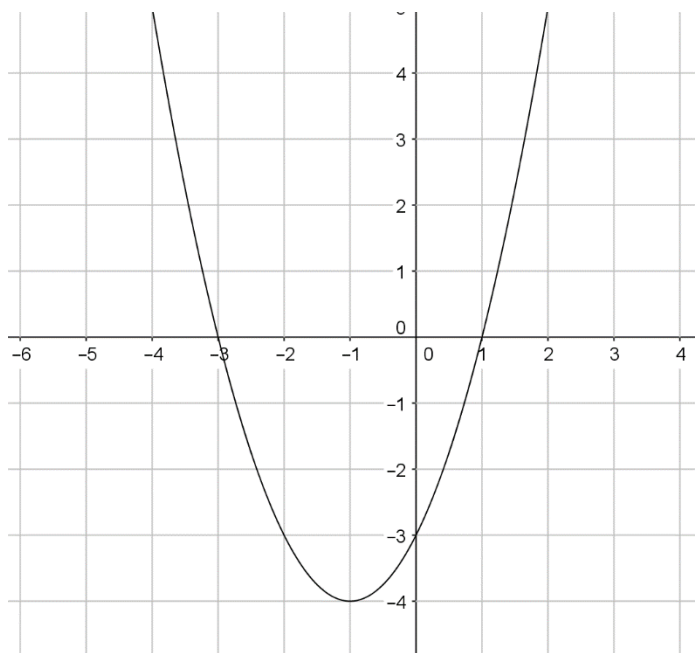
ΜΕΡΟΣ Β΄: (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες (10/100).

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση

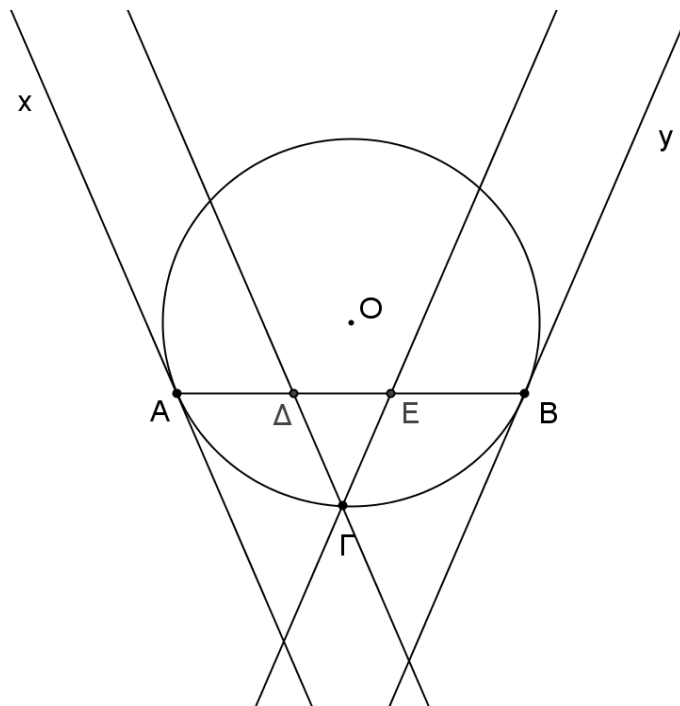
της συνάρτησης: $f(\chi) = \alpha\chi^2 + \beta\chi + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

Να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης
β) τις τιμές των S και P
γ) τις τιμές των α, β και γ
δ) τη λύση της ανίσωσης: $f(\chi) \leq 0$
- Αν η πιο πάνω παραβολή έχει εξίσωση: $f(\chi) = \chi^2 + 2\chi - 3$, να βρείτε τα σημεία τομής της με την ευθεία: $-2\chi + \psi = 1$.



2. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda\chi^2 - 2(\lambda - 1)\chi + \lambda = 0$, $\lambda \neq 0$. Αν χ_1, χ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του λ , ισχύει η ανίσωση: $\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} > 14$
3. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφές $A(1,3)$ και $\Gamma(4,-6)$. Δύο πλευρές του έχουν εξισώσεις: $\varepsilon_1: \psi = 2\chi + 1$ και $\varepsilon_2: \psi = -\chi - 2$. Να βρείτε:
- τις συντεταγμένες των κορυφών B και Δ
 - την εξίσωση της πλευράς $\Delta\Gamma$
 - το εμβαδόν του παραλληλογράμμου
 - τη γωνία μεταξύ των διαγώνιων του
4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και η χορδή του AB . Φέρουμε τις εφαπτομένες Ax, By στα σημεία A και B . Από ένα σημείο Γ του μικρότερου τόξου AB φέρουμε παράλληλες προς την Ax και By που τέμνουν την AB στα Δ και E αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:
- τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και $\Gamma E B$ είναι όμοια
 - $(\Gamma E)^2 = (A\Delta)(BE)$



5. Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} \sigma\alpha\alpha \cdot \chi - \eta\mu\alpha \cdot \psi = 3 \\ \eta\mu\alpha \cdot \chi + \sigma\alpha\alpha \cdot \psi = 4 \end{cases}, \quad \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι το σύστημα έχει μοναδική λύση για κάθε τιμή του α .

β) Αν (χ_1, ψ_1) είναι η μοναδική λύση του συστήματος,
να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \chi_1^2 + \psi_1^2$.

Η Διευθύντρια

Νεοφύτα Ευαγγέλου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2016
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ Α' ΛΥΚΕΙΟΥ (5 ΩΡΟ)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 02-06-2016

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 02:30'

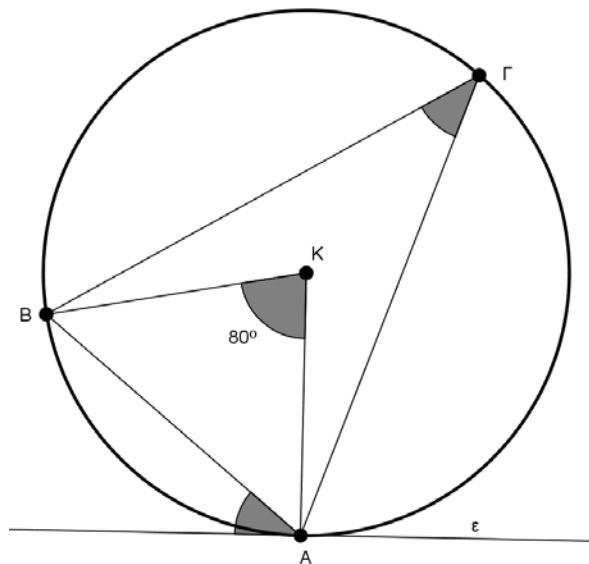
- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράφετε μόνο με μπλε ξηρό μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
ε) Πρέπει να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 03 (τρεις) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση $x^{\frac{3}{2}} - 1 = 7$.
2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{a} + 2\vec{b}$.
3. Δίνεται κύκλος με κέντρο **K** και εφαπτομένη ϵ αυτού στο **A**. Να υπολογίσετε τις σκιασμένες γωνίες **A** και **Γ**. Δίνεται ότι η επίκεντρη γωνία **BKA** είναι 80° . Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



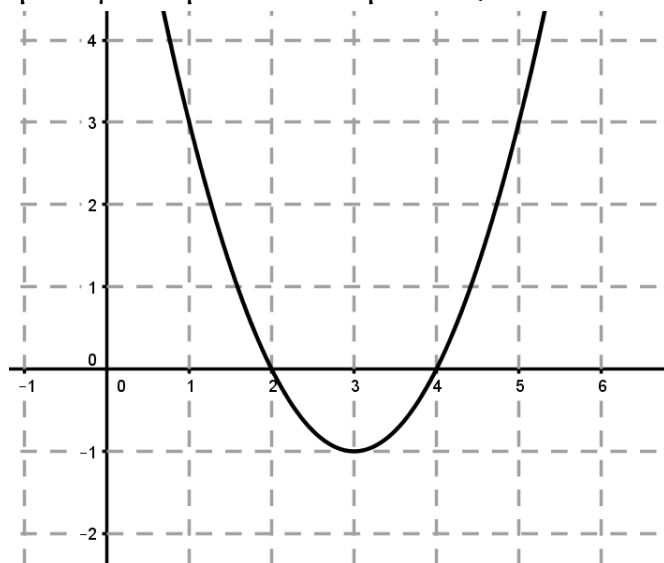
4. Έστω α, β θετικοί αριθμοί. Να δείξετε ότι:
α) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right) \geq 4$
β) $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$

5. Να υπολογίσετε για ποια τιμή του x η ορίζουσα $A(x) = \begin{vmatrix} x & 5 \\ 5 & x-4 \end{vmatrix}$ έχει ελάχιστο αποτέλεσμα.
6. Δίνεται ότι $\sin \omega = \frac{5}{13}$, όπου $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$. Να υπολογίσετε : $\tan \omega$ και $\csc \omega$.
7. Δίνονται οι ευθείες $x + y = 1$, $3x + y = -1$ και $x - 2y = -5$. Να δείξετε ότι οι τρεις ευθείες αποτελούν δέσμη ευθειών.
8. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με συντεταγμένες κορυφών $A(2,2)$, $B(5,4)$ και $\Gamma(8,1)$.
 α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $A\Delta$
 β) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου $B\Delta$.
9. 10 άτομα έχουν μέσο βάρος 80 κιλά. Αποχωρούν 3 άτομα με μέσο βάρος 70 κιλά και προστίθεται ένα νέο άτομο. Αν το καινούριο μέσο βάρος είναι πάλι 80 κιλά, πόσα κιλά ζυγίζει ο νέος που προστέθηκε;
10. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{x(x-1)^2}{x-3} \geq 0$

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $y = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.
 Να βρείτε:
 α) Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της παραβολής.
 β) Την τιμή της παράστασης $A = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$, όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της $y = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$
 γ) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής.
 δ) Τις τιμές των α, β, γ .



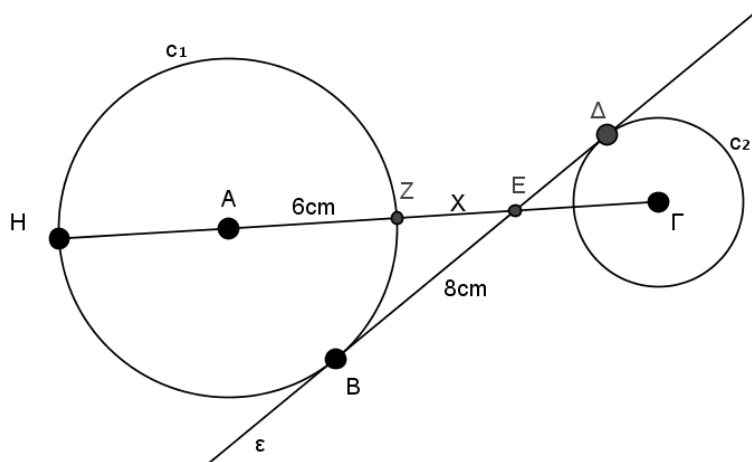
2. α) Για ποια τιμή του λ το σύστημα των ευθειών $\begin{cases} \epsilon_1: \lambda x + 3y = 8 \\ \epsilon_2: x + y = \lambda + 1 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση;
 β) Για $\lambda=2$ ποια είναι η λύση του συστήματος;
 γ) Αν K είναι το σημείο τομής των ευθειών, ποια είναι η απόστασή του από την ευθεία $3x + 4y = 1$;
3. α) Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu(\pi+\chi) \cdot \sigma\varphi(\frac{\pi}{2}+\chi)}{\epsilon\varphi(\pi-\chi)} = -\eta\mu\chi$
 β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu(\pi+\chi) \cdot \sigma\varphi(\frac{\pi}{2}+\chi)}{\epsilon\varphi(\pi-\chi)} = -\frac{1}{2}$, όπου $\frac{\pi}{2} < \chi < \pi$.

4. Στο διπλανό σχήμα δίνονται δύο κύκλοι c_1 και c_2 με κέντρα A και Γ αντίστοιχα, καθώς και η κοινή εφαπτομένη τους ϵ στα σημεία B και Δ αντίστοιχα.

AG είναι η διάκεντρος και H η τομή της με τον c_1 .

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα AEB και $\Delta E \Gamma$ είναι όμοια.

β) Αν η ακτίνα του c_1 είναι 6cm και το μήκος του εφαπτόμενου τμήματος EB είναι 8cm , να υπολογίσετε το μήκος χ του EZ .



5. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\beta} - \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = 3\vec{\alpha} + 4\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι διανύσματα με $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 2$ και γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 120^\circ$. Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου:

α) Να εκφράσετε το $\overrightarrow{AM}$ συναρτήσει των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

β) Να βρείτε το $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

γ) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM .

δ) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\overrightarrow{AM}, \vec{\beta})$.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ Β.Δ.

ΖΗΝΩΝ ΤΑΥΡΟΥ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΤΑΛΙΑΔΩΡΟΣ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ:

ΣΚΟΥΡΑΣ ΗΛΙΑΣ

ΛΟΪΖΙΔΗΣ ΜΙΧΑΛΗΣ

ΠΑΠΑΦΙΛΙΠΠΟΥ ΠΑΝΑΓΙΩΤΑ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΤΑΞΗ: Β΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 03/06/2016

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

ΟΝΟΜΑ: ΤΜΗΜΑ:..... ΑΡ.:

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες
συμπεριλαμβανομένου του τυπολογίου.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας τύπου Tipp-Ex.
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσης δεν θα λαμβάνονται υπόψη.

ΜΕΡΟΣ Α:

- Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = e^{2x} + \eta\mu 3x$

(β) $y = \frac{1-x^2}{x+4}$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2+3x}{x-1}$. Να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού της,

(β) το πεδίο τιμών της,

(γ) το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x-2)(x^2 + 1)}$.

4. Το άθροισμα των απείρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου ισούται με το διπλάσιο του πρώτου όρου της και ο τέταρτος όρος της είναι κατά 3 μικρότερος του δεύτερου όρου της. Να γράψετε την πρόοδο.

5. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x^2 - 3x| + 2x^2 - 3x - 9}{3 - x}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}$

6. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα το παράπλευρο ύψος σχηματίζει γωνία 60° με τη βάση και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς της είναι ίσο με 300m^2 . Να υπολογίσετε:
 (α) το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας,
 (β) τον όγκο της πυραμίδας.

7. Να δείξετε ότι:
$$\frac{\eta\mu 2\alpha \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \eta\mu 3\alpha \sigma\upsilon\nu 2\alpha - 2\eta\mu \frac{7\alpha}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{3\alpha}{2}}{\frac{\epsilon\phi 5\alpha - \epsilon\phi 3\alpha}{1 + \epsilon\phi 5\alpha \epsilon\phi 3\alpha}} = \eta\mu^2 \alpha - \sigma\upsilon\nu^2 \alpha.$$

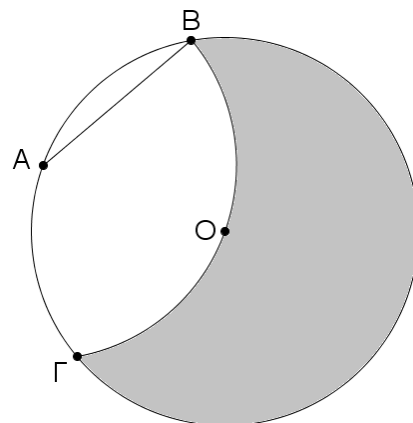
8. Δίνεται η εξίσωση $\ln y = x \ln 2 + \ln x$.

(α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + y \ln 2$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{dy}{dx} - y \ln 2 + 12 = 4^x$.

9. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, να αποδείξετε για κάθε θετικό ακέραιο n , τη σχέση: $1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$.

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) με χορδή $AB = \lambda_6$. Με κέντρο το A και ακτίνα AB γράφουμε τόξο $B\Gamma$ μέσα στον κύκλο (Γ το σημείο τομής με τον κύκλο). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μηνίσκου που σχηματίζεται συναρτήσει του R .



ΜΕΡΟΣ Β:

- Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους:

$$f(x) = \ln \frac{\sqrt{2x+44}}{2-x}, \quad g(x) = \frac{1}{2} \ln(2x+44) - \ln(2-x)$$

(α) Να δείξετε ότι $f = g$.

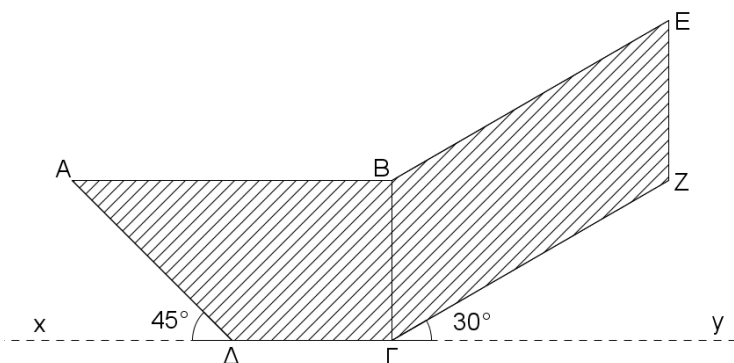
(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $f(x)$ στο σημείο της με τεταγμένη $y = 0$.

(γ) Η συνάρτηση $h(x)$ δίνεται από τον τύπο $h(x) = 2f'(x) \cdot \frac{x+22}{x+46}$.

Να δείξετε ότι $h(x) = \frac{1}{2-x}$.

(δ) Αν $\varphi(x) = 6 - x^2$, να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ \varphi$ (τύπος και πεδίο ορισμού).

2. Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με $A(1, 5)$. Αν $x - y - 2 = 0$ είναι η εξίσωση μιας διαγωνίου του, η εφαπτομένη της γωνίας $AB\Delta$ είναι ίση με $\frac{1}{3}$ και $\lambda_{AB} > 1$:
- (α) να δείξετε ότι η εξίσωση της AB είναι $2x - y + 3 = 0$,
- (β) να υπολογίσετε την περίμετρο του ρόμβου,
- (γ) να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου $A\Gamma$,
- (δ) να υπολογίσετε το εμβαδόν του ρόμβου.
3. (α) Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\beta = 2\gamma$ και $\hat{A} = 60^\circ$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- (β) i) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\eta\mu 2x - \epsilon\phi x = \epsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$, $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$.
- ii) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω ταυτότητα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu 2x - \epsilon\phi x = \sqrt{3} \sigma\upsilon\nu 2x$.
4. Στο πιο κάτω σχήμα είναι: $AB = 8\text{cm}$, $B\Gamma = 4\text{cm}$, $BE = 8\text{cm}$, $BEZ\Gamma$ παραλληλόγραμμο, $Z\hat{\Gamma}y = 30^\circ$ και $A\hat{\Delta}x = 45^\circ$. Το σχήμα στρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα xy . Να υπολογίσετε:
- (α) το ολικό εμβαδόν και
- (β) τον όγκο του στερεού που παράγεται.



5. Έστω η αριθμητική πρόοδος (α_n) και $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\alpha_{3k} = 44$ και $\alpha_{5k} = 74$.
- (α) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω σχέση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να υπολογίσετε τον όρο α_{7k} .
- (β) Αν το άθροισμα των $8k - 1$ πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 2301, να υπολογίσετε τη διαφορά δ της προόδου.

Η Διευθύντρια

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

1. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \eta\mu B \sigma\upsilon\nu A \quad \sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B = \eta\mu(A - B) + \eta\mu(A + B) \quad 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu(A - B) + \sigma\upsilon\nu(A + B)$$

$$2\eta\mu A \eta\mu B = \sigma\upsilon\nu(A - B) - \sigma\upsilon\nu(A + B)$$

$$\eta\mu 2A = 2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu A, \quad \sigma\upsilon\nu 2A = \sigma\upsilon\nu^2 A - \eta\mu^2 A$$

$$\eta\mu^2 A = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2A}{2} \quad \sigma\upsilon\nu^2 A = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2A}{2}$$

$$\eta\mu 2A = \frac{2\varepsilon\varphi A}{1 + \varepsilon\varphi^2 A} \quad \sigma\upsilon\nu 2A = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 A}{1 + \varepsilon\varphi^2 A}$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \quad \eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \quad \sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \cdot \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

$$\alpha = 2R \cdot \eta\mu A \quad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \quad E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma}{2}$$

2. Στερεομετρία

Ορθό πρίσμα	$E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$	$V = E_{\beta} \cdot \upsilon$
Κανονική πυραμίδα	$E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$	$V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$
Κύλινδρος	$E_{\kappa} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \upsilon$	$V = \pi \cdot R^2 \cdot \upsilon$
Κώνος	$E_{\kappa} = \pi \cdot R \cdot \lambda$	$V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \upsilon}{3}$
Κόλουρος Κώνος	$E_{\kappa} = \pi \cdot (R + \rho) \cdot \lambda$	$V = \frac{\pi \cdot \upsilon}{3} (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2)$

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**ΤΑΞΗ: **Α΄**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: **30/05/2016**ΧΡΟΝΟΣ: **2,5 ΩΡΕΣ**

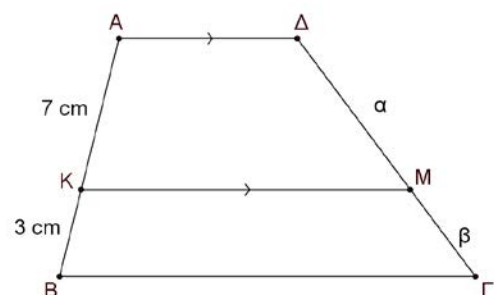
ΟΝΟΜΑ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.:

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.**ΟΔΗΓΙΕΣ**

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας τύπου Tippi-Ex.
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσης δεν θα λαμβάνονται υπόψη.

ΜΕΡΟΣ Α΄**Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.****A1.** Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $x_1 = 5$ και $x_2 = -2$.**A2.** Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με $KM \parallel AD$ και $ΔΓ = 13 \text{ cm}$.

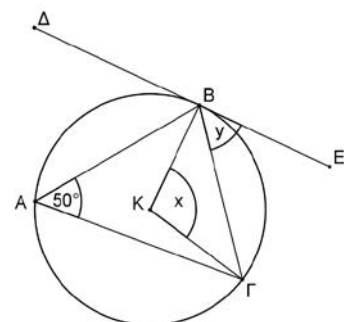
Να υπολογίσετε τα μήκη α και β.

**A3.** Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

(α) $\frac{5}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$)

(β) $\frac{2}{3 - \sqrt{y}}$ ($y > 0$)

A4. Στο διπλανό σχήμα ΔΕ είναι η εφαπτομένη του κύκλου (Κ, R) στο σημείο Β και $\widehat{B\hat{A}G} = 50^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες x και y (να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



A5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Να υπολογίσετε:

- (α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$
 (β) το μέτρο του διανύσματος β

A6. Δίνεται το ευθύγραμμο τμήμα AB με άκρα A(1,1) και B(5,9).

Να βρείτε:

- (α) τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB
 (β) την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο M και σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ίση με 45°

A7. Ο μέσος μισθός τραπεζικών υπαλλήλων στο Μπλεμβούργο είναι €1825 με τυπική απόκλιση €413. Ο μέσος μισθός τραπεζικών υπαλλήλων στο Πρασινιστάν είναι €2100 με τυπική απόκλιση €305.

- (α) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας (C.V.) για την κάθε χώρα ξεχωριστά.
 (β) Σε ποια χώρα παρουσιάζεται ομοιογένεια στους μισθούς των τραπεζικών υπαλλήλων; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

A8. Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\frac{1 - \epsilon\phi^2\theta}{1 + \epsilon\phi^2\theta} = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1$$

A9. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{x^2(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 25)}{(9 - x^2)} \geq 0$$

A10. Δίνεται η εξίσωση $(5x - 3)^{\frac{2}{5}} = 4$, $x \geq \frac{3}{5}$ και το σύστημα
$$\left. \begin{array}{l} \omega + 3\gamma = 5 \\ 2\omega - \gamma = 3 \\ \kappa\omega + \lambda\gamma = -2 \end{array} \right\}.$$

Αν το σύστημα είναι συμβιβαστό, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 6\kappa + 3\lambda - 2x$.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + \beta x + \gamma$.

- (α) Αν $S = 2$ και $P = 3$, όπου S το άθροισμα και P το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$, να δείξετε ότι $\beta = -4$ και $\gamma = 6$.
- (β) (i) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής $y = f(x)$ και του άξονα συμμετρίας της.
(ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες και το είδος του ακρότατου της πιο πάνω παραβολής (δικαιολογείτε την απάντησή σας).
(iii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{2x^2 - 4x + 6}$.

B2. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 3 \\ \kappa \end{pmatrix}$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε:

- (α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων α και β
(β) το μέτρο της γωνίας των διανυσμάτων α και β
(γ) την τιμή της παραμέτρου κ , ώστε τα διανύσματα α και γ να είναι κάθετα

B3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή $\Gamma(2,7)$. Το ύψος AD έχει εξίσωση $2x - 5y = 9$ και η διάμεσος AM έχει εξίσωση $3x - 2y = 8$.

- (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ είναι $5x + 2y = 24$.
(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών A και B .
(γ) Να βρείτε την απόσταση της κορυφής A από την πλευρά $B\Gamma$.
(δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABM .

B4. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\eta\mu(-\theta) \cdot \epsilon\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)}{\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \cdot \epsilon\phi(2\pi - \theta)} \quad \text{και} \quad B = \frac{\eta\mu(\pi - \theta) - 2\epsilon\phi(\pi + \theta)}{3\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + 3\epsilon\phi(\theta - \pi)}$$

(α) Αν $\eta\mu\theta \neq 0$, $\sigma\upsilon\nu\theta \neq 0$ να δείξετε ότι:

(i) $A = \sigma\upsilon\nu\theta$

(ii) $B = \frac{2 - A}{3A - 3}$

(β) Αν $B = -1$ και $0 < \theta < 2\pi$, να υπολογίσετε τη γωνία θ .

B5. Σε κύκλο (K,R) με διάμετρο AD φέρουμε την εφαπτομένη (ϵ) στο D και δύο τυχαίες χορδές AB και AG των οποίων οι προεκτάσεις τέμνουν την (ϵ) στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να δείξετε ότι:

(α) $(BD)^2 = (AB)(BE)$

(β) $(AD)^2 = (AB)(AE)$

(γ) $(AB)(AE) = (AG)(AZ)$

Η Διευθύντρια

Παναγιώτα Χρυσόχου-Αναστασιάδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (5-ωρο)

HMEPOMHNIA: 30/05/2016

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 8:00 Π.Μ

ΧΡΟΝΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού .

Το γραπτό αποτελείται από 4 σελίδες

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$**

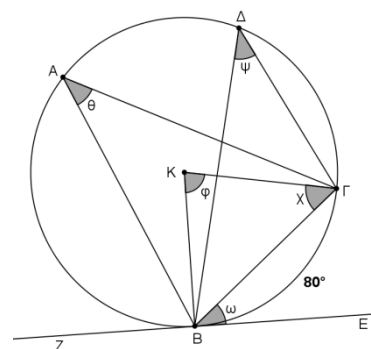
Να υπολογίσετε:

- α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
β) το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

2. Στο διπλανό σχήμα δίνονται: ΕΒΖ
εφαπτομένη του κύκλου (Κ,Ρ) στο Β και το
τόξο ΒΓ = 80°.

Να υπολογίσετε τις γωνίες : $\varphi, \chi, \psi, \theta, \omega$.

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



3. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathcal{R}$, ώστε το σύστημα:

$$\begin{cases} \kappa x + (\kappa + 1)y = 1 \\ x - 2y = 5 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$

να είναι συμβιβαστό.

4. Αν $4,5 < x < 4,6$ και $5,3 < y < 5,4$ να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:

α) $x + y$ β) $x - y$ γ) $\frac{x}{y}$ δ) $x^2 + y^2$

5. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ευθεία

$$y = (\mu^2 - 1)x + (\mu^2 - 3\mu - 4)$$

α) τέμνει τον άξονα των τετμημένων σε ένα μόνο σημείο

β) είναι παράλληλη με τον άξονα των τετμημένων

γ) συμπίπτει με τον άξονα των τετμημένων

6. α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας που περνά από τα σημεία $A(2,3)$ και $B(-2,1)$.

β) Να βρεθεί η απόσταση του κοινού σημείου των ευθειών

$$(\varepsilon_1): 2\chi + \psi = 3 \text{ και } (\varepsilon_2): \chi - \psi = 3 \text{ από την ευθεία } (\varepsilon_3): 3\chi + 4\psi + 10 = 0.$$

7. Ένας άνθρωπος στέκεται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο μ' ένα σπίτι και σ' απόσταση 9m απ' αυτό. Αν βλέπει την οροφή του σπιτιού υπό γωνία 30° και την κορυφή της κεραίας που βρίσκεται στην άκρη του σπιτιού προς την πλευρά του, υπό γωνία 45° , να δείξετε ότι το ύψος της κεραίας είναι ίσο με $3(3 - \sqrt{3})\text{m}$.

8. Η εξίσωση $(\kappa - 1)\chi^2 + 4\chi + (6 - \kappa) = 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

α) Να δείξετε ότι το κ επαληθεύει την ανίσωση: $\kappa^2 - 7\kappa + 10 > 0$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{\kappa^2 - 7\kappa + 10}{\kappa} > 4$

9. Δίνεται η εξίσωση: $(\sin\theta) \cdot \chi^2 - 2\chi + \sin\theta = 0$, $(\sin\theta \neq 0)$, με ρίζες χ_1, χ_2 .

Να δείξετε ότι:

$$1) \quad \frac{2}{\chi_1} + \frac{2}{\chi_2} = 4\cot\theta$$

$$2) \quad \chi_1^2 + \chi_2^2 = 2(1 + 2\cot^2\theta)$$

10. Στον παρακάτω πίνακα φαίνονται οι βαθμοί 25 μαθητών ενός τμήματος λυκείου στο διαγώνισμα των Μαθηματικών.

Βαθμός	Συχνότητα
9	3
11	6
14	5
15	2
16	4
18	2
19	3

Να υπολογίσετε:

- τη μέση τιμή
- τη διάμεσο
- την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων
- τον συντελεστή μεταβολής

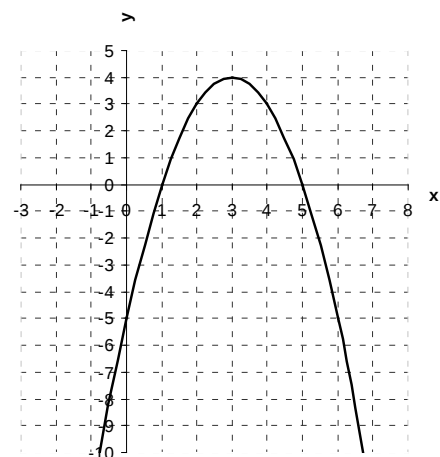
ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$.

Από το σχήμα να βρείτε:

- το πεδίο τιμών
- το πρόσημο του a
- την τιμή του γ
- τον άξονα συμμετρίας
- τις συντεταγμένες του ακρότατου σημείου
- τις λύσεις της $ax^2 + bx + c = 0$
- την τιμή του β
- τις τιμές των $f(5)$ και $f(2)$
- τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$
- τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$



2. Από σημείο P εκτός κύκλου φέρνουμε την εφαπτόμενη PA και την τέμνουσα PBG του κύκλου. Ναδειχθεί ότι:

α) Το τρίγωνο PAB είναι όμοιο με το τρίγωνο $PΓA$

β)
$$\frac{(AB)^2}{(AG)^2} = \frac{PB}{PG}$$

3. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sin(360^\circ - \theta) \cdot \sin(270^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(180^\circ + \theta) \cdot \epsilon\varphi(90^\circ - \theta)}{\sigma\varphi(-\theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \sin(-\theta)} = -\eta\mu\theta.$$

β) Αν $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \beta$ να δείξετε ότι $\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\beta^2 - 1}{2}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης : $A = \epsilon\varphi\theta + \sigma\varphi\theta$

4. α) Να σχηματιστεί εξίσωση β' βαθμού με ρίζες $\chi_1, \chi_2 \in R$ αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{1}{\chi_1} + \frac{1}{\chi_2} = 1 \text{ και } 2\chi_1 + 2\chi_2 = 3\chi_1\chi_2 - \frac{\mu}{\mu-1}, \mu \in R.$$

β) Δίνεται η εξίσωση β' βαθμού $(\mu - 1)\chi^2 - \mu\chi + \mu = 0, \mu \in R$.

Να βρεθεί η τιμή του μ ώστε να ισχύει : $3\chi_1^3\chi_2 + 3\chi_2^3\chi_1 \geq 0$.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-2,3) , Β(4,5) και Γ(3,8).

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β.

(β) Να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας ΑΓ.

(γ) Την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ.

(δ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΜ.

(ε) Τις πραγματικές τιμές του μ και του ν , ώστε η ευθεία

(ε₂): $\psi = (\mu^2 - \mu)x + \nu - 1$, να ταυτίζεται με τη διάμεσο ΓΜ του τριγώνου ΑΒΓ.

---ΤΕΛΟΣ---

Εισηγητές

Συντονιστής Β.Δ.

Διευθύντρια

Σ.Χρυσάνθου

Γ.Χαραλάμπους

Κ.Παπαντωνίου

Δ.Τσιντίδου

3. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sin(360^\circ - \theta) \cdot \sin(270^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(180^\circ + \theta) \cdot \varepsilon\varphi(90^\circ - \theta)}{\sigma\varphi(-\theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \sin(-\theta)} = -\eta\mu\theta.$$

β) Αν $\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta = \beta$ να δείξετε ότι $\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{\beta^2 - 1}{2}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης : $A = \varepsilon\varphi\theta + \sigma\varphi\theta$

4. α) Να σχηματιστεί εξίσωση β' βαθμού με ρίζες $\chi_1, \chi_2 \in R$ αν ισχύουν οι σχέσεις:

$$\frac{1}{\chi_1} + \frac{1}{\chi_2} = 1 \text{ και } 2\chi_1 + 2\chi_2 = 3\chi_1\chi_2 - \frac{\mu}{\mu-1}, \mu \in R.$$

β) Δίνεται η εξίσωση β' βαθμού $(\mu - 1)\chi^2 - \mu\chi + \mu = 0, \mu \in R$.

Να βρεθεί η τιμή του μ ώστε να ισχύει : $3\chi_1^3\chi_2 + 3\chi_2^3\chi_1 \geq 0$.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(-2,3) , Β(4,5) και Γ(3,8).

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β.

(β) Να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας ΑΓ.

(γ) Την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ.

(δ) Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΜ.

(ε) Τις πραγματικές τιμές του μ και του ν , ώστε η ευθεία

(ε₂): $\psi = (\mu^2 - \mu)x + \nu - 1$, να ταυτίζεται με τη διάμεσο ΓΜ του τριγώνου ΑΒΓ.

---ΤΕΛΟΣ---

Διευθύντρια

Κ.Παπαντωνίου

ΛΑΝΙΤΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2015-2016

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30-5-2016

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΤΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΒΑΘΜΟΛΟΓΕΙΤΑΙ ΜΕ 100 ΜΟΝΑΔΕΣ.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τα μέρη Α΄ και Β΄
- Να γράφετε με μελάνι μπλε (με μολύβι μόνο τα σχήματα)
- Να λύσετε όλες τις ασκήσεις
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αποδείξετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής, ότι $\frac{11}{4-\sqrt{5}} + \frac{11}{4+\sqrt{5}} = 8$
2. Δίνεται η ευθεία $(\epsilon_1): 2x - 3y = 4$. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που είναι κάθετη στην (ϵ_1) και περνά από το σημείο $A(4,1)$.
3. Αν $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 15\sigma\upsilon\nu\theta - 6\sigma\phi\theta$
4. Ένας φοιτητής πήρε σε τρία διαφορετικά μαθήματα τους βαθμούς 7, 6 και 8. Τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ανάλογα με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος που είναι 2,3 και 5 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τον μέσο όρο της βαθμολογίας του φοιτητή.

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \kappa - 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ με $\kappa \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε:

α) $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$

β) $(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) \cdot (2\vec{\alpha} - \vec{\beta})$

γ) την τιμή του κ ώστε $\vec{\gamma} \perp \vec{\alpha}$

6. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\lambda^2(x-1) + 2x = \lambda(3x-1)$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$

7. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{3x^2(4-x)}{x^2-5x+6} \geq 0$

8. Να αποδείξετε το παρακάτω θεώρημα: (θεώρημα γωνίας από χορδή και εφαπτομένη)
«Η γωνία που σχηματίζεται από μια χορδή ενός κύκλου και την εφαπτομένη του κύκλου στο ένα άκρο της χορδής, ισούται με κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής».

9. Δίνεται η παραβολή $y = \kappa x^2 - (\kappa + 4)x + 6$, $\kappa \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Η παραβολή τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία $A(x_1, 0)$ και $B(x_2, 0)$.

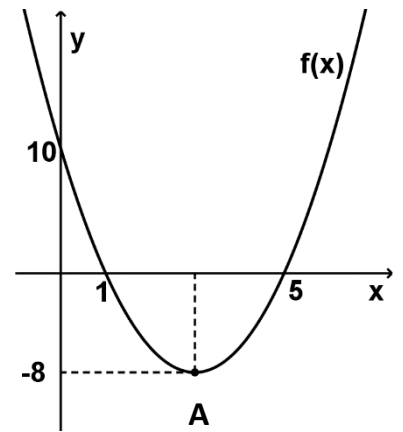
α) να υπολογίσετε, συναρτήσει του κ , τις τιμές των παραστάσεων $x_1 + x_2$ και $x_1 \cdot x_2$

β) αν $x_1 - x_2 = 1$, να δείξετε ότι η παραβολή παρουσιάζει ελάχιστο.

10. Δίνεται οξεία γωνία $\hat{xOy}$ και δύο τυχαία σημεία A και B στην Ox. Από τα A και B φέρνουμε ευθείες παράλληλες μεταξύ τους που τέμνουν την Oy στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Φέρνουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ και από το Δ φέρνουμε ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ παράλληλο προς το ΒΓ, όπου Ε σημείο της Ox. Να δείξετε ότι: $(OB)^2 = (OA) \cdot (OE)$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ με κορυφή το σημείο A.



α) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης, να βρείτε:

- i) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης
- ii) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής και το πρόσημο της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης $f(x) = 0$
- iii) τις τιμές των α , β και γ
- iv) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής $y = 2x^2 - 12x + 10$ με την ευθεία $7x + y = 8$.

2. Αν $3 < x < 7$ και $-4 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

- α) $2x + y$
- β) $x \cdot y$
- γ) $-\frac{4x}{5y} + \frac{2}{5}$

3. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\sin(3\pi + x)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - 1} - \frac{\eta\mu\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{1 + \eta\mu(2\pi - x)}$

α) να αποδείξετε ότι $A = 2\epsilon\mu x$

β) αν ισχύει $A = 4$ και $x \in (0, 2\pi)$, να υπολογίσετε τη γωνία x .

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(0,5)$, $B(-2,1)$ και $\Gamma(2,-3)$.

α) να υπολογίσετε το εμβαδόν E του τριγώνου

β) να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου

γ) να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιάς A του τριγώνου, με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου

δ) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Z , έτσι ώστε το $AZB\Gamma$ να είναι παραλληλόγραμμο.

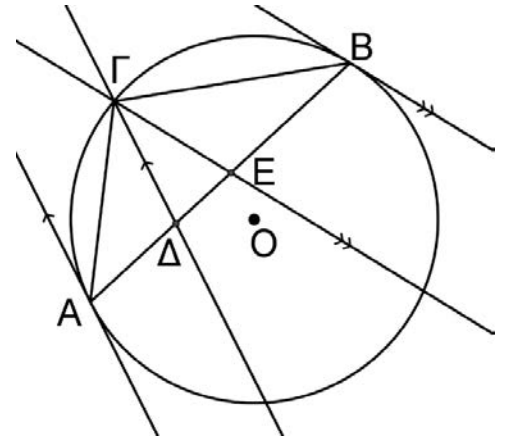
5. Δίνεται κύκλος (O,R) . Φέρνουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία του A και B . Από τυχαίο σημείο Γ του μικρότερου τόξου AB , φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τις εφαπτομένες που τέμνουν τη χορδή AB στα σημεία Δ και E .

Να αποδείξετε ότι :

α) $\square A\Gamma\Delta \approx \square \Gamma B E$

β) $\Gamma E = \Gamma \Delta$

γ) $(A\Delta)(B E) = (\Gamma E)^2$



Οι Εισηγητές

Ο Συντονιστής

Η Διευθύντρια

Καίτη Παναγή

Ανδρέας Στυλιανού

Ζωή Οδυσσέως Πολυδώρου

Χατζησάββας Κωνσταντίνος

Μενελάου Κούλα

Χριστοδουλίδης Λούκας

Νικολάου Παναγιώτα

Κωνσταντίνου Πέτρος

Κερκίδης Βασίλης

Αγαθοκλέους Ρολάνδος

Η Διευθύντρια

Ζωή Οδυσσέως Πολυδώρου

ΛΥΚΕΙΟ ΛΑΤΣΙΩΝ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2015 - 2016

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – 5 ΩΡΟ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 2/6/2016

ΤΑΞΗ: Α'

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Οι απαντήσεις δίνονται μόνο με **μπλε μελάνι**.
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού (υγρού ή ταινίας/Tipp Ex).
3. Τα σχήματα μπορούν να σχεδιαστούν με μολύβι.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής με σφραγίδα του Σχολείου.
5. Να **μεταφέρετε όλα τα σχήματα** στις κόλλες απαντήσεών σας.

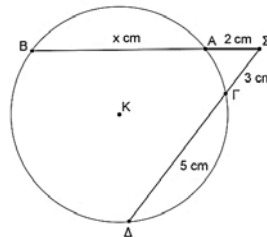
ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ **ΤΡΕΙΣ (03)** ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ **ΟΛΑ** ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ Α': Περιλαμβάνει 10 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την ανίσωση $(x-2)(x+5) \geq 0$.
2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο A (-1,2) και σχηματίζει γωνιά 120° με τον άξονα $x'Ox'$.
3. Από σημείο Σ εκτός κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα R φέρουμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ. Αν $AB = x$ cm, $SA = 2$ cm, $SG = 3$ cm και $GD = 5$ cm, να υπολογίσετε το μήκος του ΑΒ.



4. Δίνεται η εξίσωση $3x^2 - 5x + 6 = 0$ με ρίζες x_1, x_2 .

Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

1) $x_1 + x_2 =$ 2) $x_1 \cdot x_2 =$ 3) $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} =$ 4) $9 \cdot x_1 \cdot x_2^2 + 9 \cdot x_1^2 \cdot x_2 =$

5. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές τα σημεία A (-2,2), B (4,0) και Γ (6,4). Να βρείτε:

1) το μήκος του ύψους ΑΔ

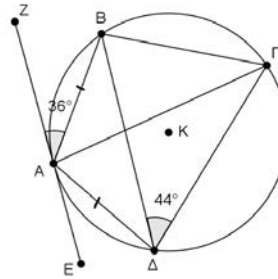
2) την εξίσωση της διαμέσου ΒΜ

6. Στο διπλανό σχήμα η ΕΖ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο

σημείο Α, $AD = BA$, $\hat{\Gamma\Delta B} = 44^\circ$ και $\hat{B\hat{A}Z} = 36^\circ$. Να

υπολογίσετε τις γωνίες: α) $\hat{B\hat{\Gamma}A}$ και β) $\hat{\Delta\hat{A}\Gamma}$

(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



7. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} x - 2\psi = 5 \\ x^2 + \psi^2 = 10 \end{cases}$$

8. Δίνεται $\text{συν}\hat{\omega} = -\frac{4}{5}$, $90^\circ < \hat{\omega} < 180^\circ$. Να δείξετε ότι $\frac{4\epsilon\phi\hat{\omega} + 9\sigma\tau\epsilon\mu\hat{\omega}}{\text{συν}\hat{\omega}} = -15$

9. Δίνεται το τρίγωνο ABΓ με κορυφές A (-1,5), B (2,3) και Γ (2,7). Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να υπολογίσετε:

1) το διάνυσμα $\overline{BM}$

2) το διάνυσμα $\overline{AM}$

3) το μήκος του διανύσματος $\overline{AM}$

4) το εσωτερικό γινόμενο των $\overline{AM}$ και $\overline{BM}$

5) το συνημίτονο της γωνιάς που σχηματίζουν το $\overline{AM}$ και $\overline{BM}$

10. Ο διπλανός πίνακας παρουσιάζει τα χρήματα (σε ευρώ) που ξοδεύουν οι μαθητές ενός σχολείου σε μια μέρα. Να βρείτε:

Χρήματα (ευρώ)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός παιδιών	12	51	48	15	12	12

1) τον αριθμό των μαθητών

2) τη μέση τιμή ($\bar{x}$) των παρατηρήσεων

3) την επικρατούσα τιμή (x_ϵ) των παρατηρήσεων

4) την τυπική απόκλιση (s) των παρατηρήσεων.

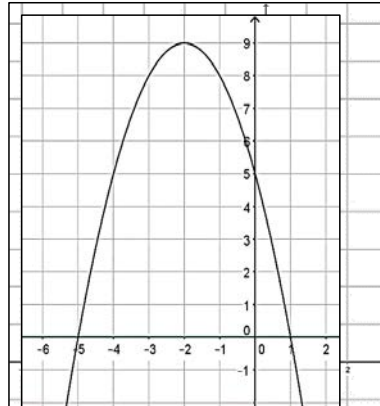
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β'

ΜΕΡΟΣ Β': Περιλαμβάνει 5 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = ax^2 + bx + \gamma$. Να βρείτε:

- 1) Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της
- 2) Το πρόσημο του a και της διακρίνουσας Δ
- 3) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) \geq 0$
- 4) Τις τιμές των $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$, $f(-2)$
- 5) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = 2\alpha + 3\gamma - \beta$.



2. Να λύσετε και να διερευνήσετε το σύστημα $\begin{cases} \mu^2 + 3\psi = \mu \\ 3\chi + \psi = 1 \end{cases}$, για όλες τις πραγματικές τιμές του μ .

3. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Οι συντεταγμένες των κορυφών Α και Γ είναι (2,5) και (1,2) αντίστοιχα. Να βρείτε:

- 1) τις συντεταγμένες του σημείου τομής των διαγωνίων
- 2) την εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ
- 3) τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ
- 4) το εμβαδόν του τετραγώνου.

4. Δίνεται κύκλος (K, R) και σημείο Σ έξω από αυτόν. Φέρουμε την τέμνουσα ΣAB και την εφαπτομένη $\Sigma \Gamma$ του κύκλου έτσι που το σημείο επαφής Γ να βρίσκεται στο μεγάλο τόξο AB . Αν M είναι το μέσο του μικρού τόξου AB και, Δ το σημείο τομής της ΓM με την AB , να δείξετε ότι:

- 1)
 - i. τα τρίγωνα $\triangle \Sigma \Gamma A$ και $\triangle \Sigma B \Gamma$ είναι όμοια
 - ii. $(\Sigma \Gamma)^2 = (\Sigma A) \cdot (\Sigma B)$
- 2) $(\Gamma B) \cdot (MA) = (\Gamma M) \cdot (BD)$

5. (α) Αν ισχύει η σχέση $\frac{\varepsilon\varphi(180^\circ + \hat{\omega}) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \hat{\omega}) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \hat{\omega})}{\eta\mu(180^\circ - \hat{\omega}) \cdot \eta\mu(270^\circ + \hat{\omega}) \cdot \eta\mu(-\hat{\omega})} = -2$, να υπολογίσετε την τιμή της γωνίας $\hat{\omega}$ στο διάστημα $0^\circ < \hat{\omega} < 90^\circ$.

(β) Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα $\frac{\sigma\varphi\theta}{\sigma\tau\epsilon\mu\theta - 1} - \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 + \eta\mu\theta} = 2\varepsilon\varphi\theta$

Η Διευθύντρια

Formatted: Font: (Default) Tahoma, (Asian) Times New Roman, Bold, Greek (Greece)

Ελένη Χαπελή

Formatted: Font: (Default) Tahoma, (Asian) Times New Roman, Greek (Greece)

Ημερομηνία: Τρίτη, 24.05.2016

Ώρα: 7.45 π.μ.

Διάρκεια: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράφετε μόνο με μπλε πένα (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Το γραπτό αποτελείται από 4 (τέσσερις) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄:

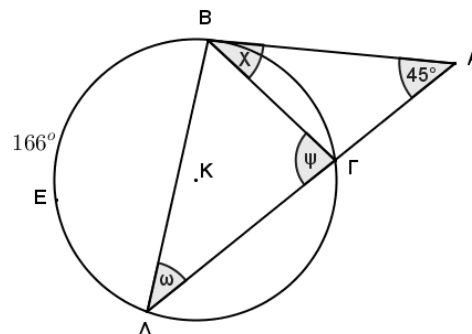
- Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

- (α) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2 \cdot \vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και
(β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$

2. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το σημείο $A(2, -1)$ και σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα των x γωνία 60° .

3. Στο διπλανό σχήμα η AB είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B . Αν $\hat{A} = 45^\circ$ και το τόξο $BE\Delta$ είναι 166° , να υπολογίσετε τις γωνίες χ, ψ και ω δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



4. (α) Να μετατρέψετε το κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής) $\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$

(β) Να γράψετε στην απλούστερη της μορφή την παράσταση $\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[5]{a^2} \cdot a^{\frac{3}{5}}}$

5. Κατά τη διάρκεια μιας μέρας μετρήθηκε η θερμοκρασία μιας πόλης 10 φορές. Τα αποτελέσματα σε ($^{\circ}\text{C}$) φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα

Θερμοκρασία ($^{\circ}\text{C}$)	Αρ. Ημερών
10	1
11	1
12	2
13	1
14	3
15	2

Να βρείτε:

- (α) τη μέση τιμή ($\bar{x}$), τη διάμεσο (x_{δ}), την επικρατούσα τιμή (x_{ϵ}) και
(β) την τυπική απόκλιση (s).

6. Δίνονται $A = 2x - 1$ και $B = 3y + 2$

(α) Αν $1 < A < 13$ και $8 < B < 17$ να αποδείξετε ότι $1 < x < 7$ και $2 < y < 5$

(β) να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις: $\Gamma = x - 2y$ και $\Delta = \frac{x}{y}$

7. Αν $\sin\theta = \frac{12}{13}$ και $\frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{10\sigma\varphi(180^{\circ} + \theta) - 13\sigma\eta\nu(90^{\circ} + \theta)}{24\tau\epsilon\mu(-\theta)}$$

8. Δίνονται τα σημεία $A(3, -2)$, $B(1, 5)$, $\Gamma(-1, 3)$ και $\Delta(2, 6)$. Να υπολογίσετε:

- (α) Το εσωτερικό γινόμενο $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{\Gamma\Delta}$
(β) Τη γωνιά των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

9. Δίνεται το σημείο $K(6, 5)$ και η ευθεία (ϵ): $y - 2x = 2$. Αν A και B είναι τα σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες xx' και yy' αντίστοιχα,

- (α) να δείξετε ότι $(BK) = 3(AB)$
(β) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ABK

10. Για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 - (\mu + 2)x + \mu - 3 = 0$ έχει:

- (α) Άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση $x = -1$
(β) Ρίζες αντίθετες
(γ) Ρίζες αντίστροφες
(δ) Ρίζες x_1, x_2 που να ικανοποιούν τη σχέση $(x_1 + x_2)^{\frac{3}{2}} = 8$

ΜΕΡΟΣ Β΄:

- Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.
 - Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.
-

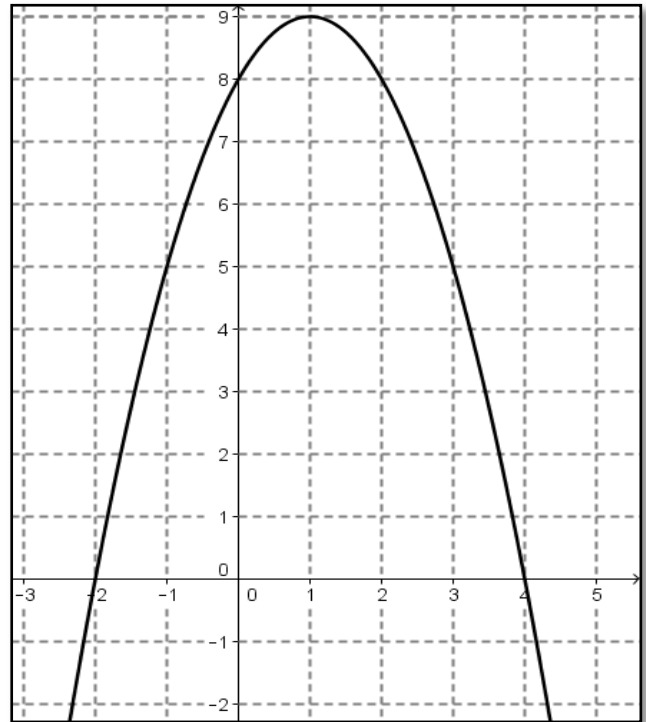
1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

(α) Να βρείτε:

- το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών
- το πρόσημο του a και το πρόσημο της διακρίνουσας Δ (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)
- τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$
- την τιμή των a, b και γ
- τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) = 5$

(β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες

$$\frac{f(x) \cdot (3x^2 - 8x + 10)}{(x + 2)} \geq 0$$



2. (α) Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\kappa^2 x - 3\kappa = x - 3$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

(β) Να λύσετε το σύστημα
$$\left. \begin{array}{l} 2\alpha + \beta - 5\gamma = -7 \\ 5\alpha + 4\beta = 1 \\ \beta - \gamma = 3 \end{array} \right\}$$

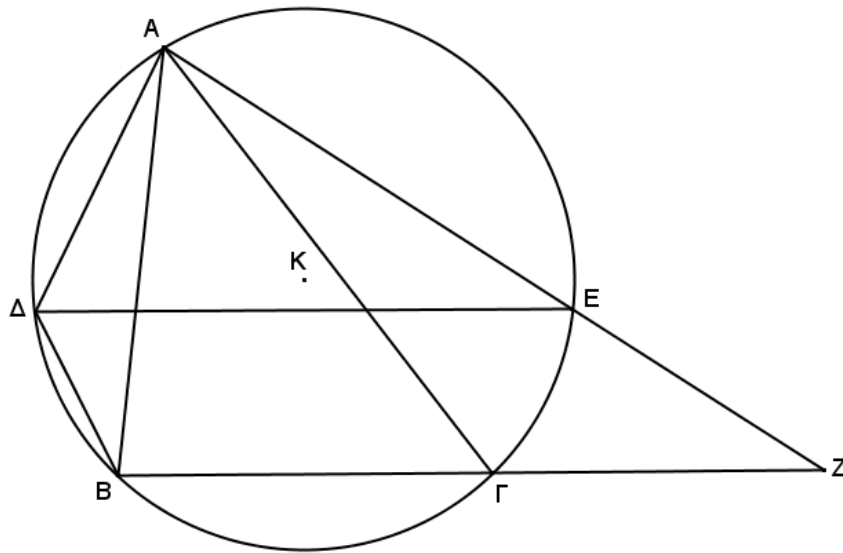
3. Τραπεζίο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) έχει κορυφές $A(-1,1), B(5,4), \Gamma(6,2)$ και εξίσωση μιας διαγωνίου (ε): $7x - 9y = -1$. Να βρείτε:
- την εξίσωση της άλλης διαγωνίου
 - να αποδείξετε ότι η κορυφή Δ έχει συντεταγμένες $(-4, -3)$
 - την γωνία ω που σχηματίζουν οι μη παράλληλες πλευρές του τραπεζίου
 - την απόσταση μεταξύ των παραλλήλων πλευρών του

4. (α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\varepsilon\varphi\omega}{1+\sigma\varphi^2\omega} + \sigma\varphi\omega \cdot \eta\mu^2\omega = \varepsilon\varphi\omega$ (Μ. 4)

(β) i. Να δείξετε ότι η εξίσωση β' βαθμού που έχει ρίζες $x_1 = \frac{1-\eta\mu\theta}{\sigma\eta\theta}$ και $x_2 = \frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\eta\theta}$ είναι η $\sigma\eta\theta \cdot x^2 - 2x + \sigma\eta\theta = 0$ (Μ. 3)

ii. Να υπολογίσετε τη γωνία $\theta \in [0, \pi]$ ώστε η πιο πάνω εξίσωση να έχει δύο ρίζες ίσες. (Μ. 3)

5. Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) . Οι χορδές ΔE και $B\Gamma$ είναι παράλληλες. Αν η ευθεία AE τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο Z , να αποδείξετε ότι $(A\Delta)(AZ) = (AB)(A\Gamma)$.



Ντίσκος Αλέξιος

Οι Εισηγήτριες:

Λαμπράκη Μάρθα

Παντελή Παναγιώτα

Διευθυντής

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού****ΤΑΞΗ: Α΄****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/5/2016****ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 Ώρες**

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
 γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄ Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

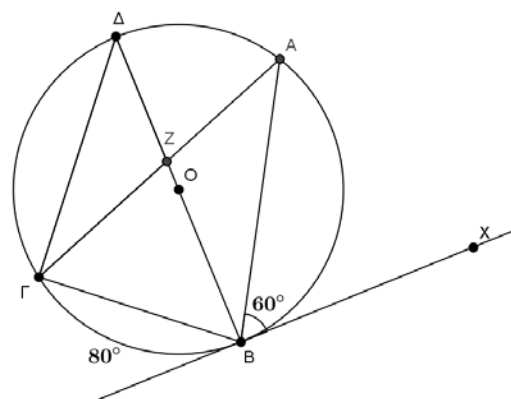
1) Δίνεται η εξίσωση $5x^2 - 3x - 4 = 0$. Να βρείτε:

α) το είδος των ριζών της

β) την τιμή της παράστασης: $A = \frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}$.

2) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x-6}{2-x} \geq 0$.

3) Στο διπλανό σχήμα το $B\Delta$ είναι η διάμετρος του κύκλου (O, R) και η ευθεία BX είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του B . Αν η γωνία $\angle XBA = 60^\circ$ και το μέτρο του τόξου $B\Gamma$ είναι 80° , να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων $\Delta AB\Gamma$ και $\Delta \Delta Z\Gamma$.



4) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

5) α) Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή

$$\alpha = \frac{2}{2 - \sqrt{3}} \quad \text{και} \quad \beta = \frac{2}{2 + \sqrt{3}}$$

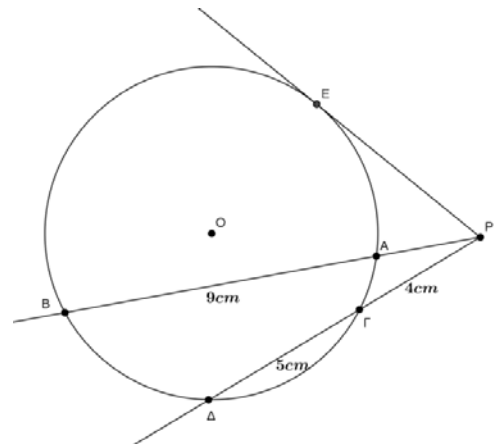
β) Αφού αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 60$, στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $\frac{(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{6}x^5 + 10x^2 = 0$.

6) α) Να υπολογίσετε, συναρτήσει της γωνίας x τους παρακάτω τριγωνομετρικούς αριθμούς:

$$i) \eta\mu(\pi + x) \quad ii) \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad iii) \epsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \quad iv) \tau\epsilon\mu(2\pi - x)$$

β) Αν $0 < x < \pi$, να αποδείξετε ότι: $2 - 2\eta\mu(\pi + x) > \epsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \sigma\upsilon\nu x$.

7) Στο διπλανό σχήμα η ευθεία PE είναι εφαπτομένη του κύκλου. Αν $AB = 9\text{cm}$, $PG = 4\text{cm}$ και $\Gamma\Delta = 5\text{cm}$, να υπολογίσετε το μήκος των τμημάτων PA και PE.



8) Η βαθμολογία 20 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν:

8, 15, 13, 20, 16, 8, 13, 17, 16, 19, 13, 15, 20, 9, 10, 10, 15, 13, 14, 16.

α) Να υπολογίσετε τα τρία βασικά μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσο, επικρατούσα τιμή)

β) να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση.

9) Δίνεται το σύστημα: $\begin{cases} x + 2y = -6 \\ -3x - y = a \end{cases}$, $a, \beta \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $a \in \mathbb{R}$ το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{6 - 2a}{5}, \frac{a - 18}{5} \right)$$

β) και στη συνέχεια να βρείτε για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ είναι $-1 < x_0 - y_0 < 0$.

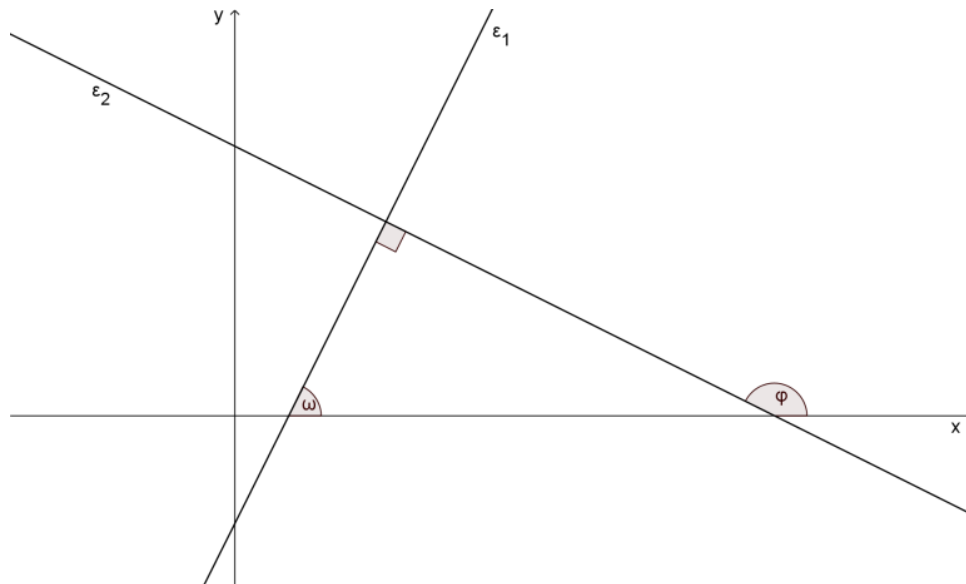
10) Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται δύο κάθετες ευθείες ε_1 και ε_2 .

α) Να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi\varphi = -\sigma\varphi\omega$.

β) Να αποδείξετε ότι το γινόμενο των κλίσεων των δύο ευθειών είναι ίσο με -1

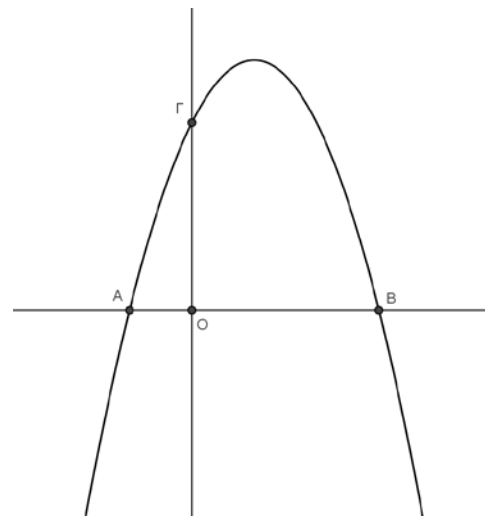
$$(\lambda_1 \cdot \lambda_2 = -1).$$

γ) Αν η ευθεία $ax + by + 13 = 0$ είναι κάθετη στην ευθεία $3x - 4y - 7 = 0$ και περνά από το σημείο $A(5, 2)$, να υπολογίσετε τα a και b .



ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$ η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$, $B(3,0)$ και $\Gamma(0,3)$.



Να βρείτε:

- α) το πρόσημο του a και της διακρίνουσας Δ
- β) τις τιμές των παραμέτρων a, b και γ
- γ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$
- δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής
- ε) να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης f
- στ) να μετασχηματίσετε την f στην μορφή $f(x) = -(x + \delta)^2 + \mu$ και να αναφέρετε το είδος της μετατόπισης (οριζόντια – κατακόρυφη), ώστε η $f(x) = -x^2$ να μετατοπιστεί στην καμπύλη του σχήματος.

2. Δίνεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με κορυφή $A(2,1)$ και $M(3,0)$ το μέσο της πλευράς AB . Αν η εξίσωση του ύψους $\Gamma\Delta$ είναι $x - y + 3 = 0$ και η εξίσωση της διαμέσου ΓM είναι $x - 7y - 3 = 0$, να βρείτε:

- α) την εξίσωση της ευθείας AB
- β) τις συντεταγμένες των κορυφών B και Γ
- γ) την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία AB
- δ) το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.

3. Από σημείο A εκτός κύκλου φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB , $A\Gamma$ και μια τέμνουσα $A\Delta E$ (το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των σημείων A και E) του κύκλου. Να δείξετε ότι :

- α) $\frac{(B\Delta)}{(EB)} = \frac{(A\Delta)}{(AB)}$
- β) $(B\Delta)(\Gamma E) = (BE)(\Gamma\Delta)$.

4. Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΓ} = \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ και $\overrightarrow{ΒΓ} = \vec{v} = 4\vec{i} + \vec{j}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{ΑΒ}$

β) να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο είναι παράλληλο με το $\vec{u}$

γ) να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$

δ) να υπολογίσετε τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ με προσέγγιση δεκάτου.

5. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \begin{vmatrix} \sigma\phi\chi & 1 \\ -\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{1+\eta\mu\chi} & \frac{1}{1+\eta\mu\chi} \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad B = \frac{\sigma\phi(180^\circ - \chi)}{\tau\epsilon\mu(90^\circ - \chi) - 1} - \frac{\eta\mu(90^\circ - \chi)}{1 - \eta\mu(180^\circ + \chi)}$$

α) Να δείξετε ότι: $A = \sigma\phi\chi$ και $B = -2\tau\epsilon\mu\chi$.

β) i) Αν $\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi = \frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι $A - \frac{1}{2}B\eta\mu\chi = \frac{1}{\eta\mu\chi\sigma\upsilon\nu\chi} = -\frac{8}{3}$.

ii) Να βρείτε την εξίσωση 2^{ov} βαθμού που έχει ρίζες $\rho_1 = \epsilon\phi\chi$ και $\rho_2 = \sigma\phi\chi$.

Ο Διευθυντής

Ιωσηφίδης Γιώργος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΤΑΞΗ: Α' (Προσανατολισμού)****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 25.05.2016****ΧΡΟΝΟΣ: 2.30'****ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:****ΒΑΘΜΟΣ ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:**

100	20

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:..... ΤΜΗΜΑ:.....ΑΡ.:**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από (10) σελίδες.**ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

1. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 5x - 14 \leq 0$.
2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:
 - (α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
 - (β) το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}$.
3. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{3x - 20} - 4 = 0$.
4. Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που περνά από την τομή των ευθειών $2x + \psi = 8$ και $3x - 4\psi = 1$ και είναι παράλληλη με την ευθεία $5x + 3\psi = 12$.
5. Αν $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να βρείτε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{13\sigma\upsilon\nu\theta + 10\sigma\tau\epsilon\mu\theta + 6}{24\epsilon\phi\theta}$$

6. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των βιβλίων που έχουν διαβάσει κατά τη διάρκεια των διακοπών τους οι 20 μαθητές ενός τμήματος.

Αριθμός βιβλίων χ_i	Αριθμός μαθητών f_i
0	2
1	1
2	4
3	6
4	2
5	5

Να υπολογίσετε:

(α) τη μέση τιμή .

(β) την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων (κατά προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων) .

7. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\lambda^2(x + 1) + 15 = \lambda(2\lambda - 2) + 9x$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ .

8. Δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα $R=4$ cm. Από σημείο Σ εκτός του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη ΣA του κύκλου (A είναι το σημείο επαφής) και την τέμνουσα $\Sigma B\Gamma$ (B, Γ σημεία του κύκλου), που περνά από το κέντρο K του κύκλου.

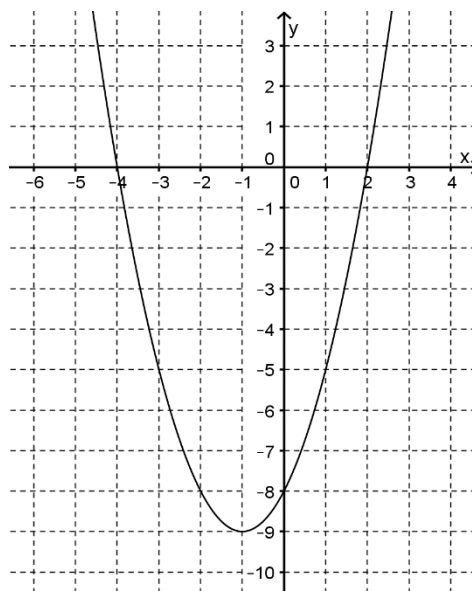
(α) Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $(\Sigma A)^2 = (\Sigma B) \cdot (\Sigma \Gamma)$.

(β) Αν $(\Sigma A) = 2\sqrt{5}$ cm, να υπολογίσετε το μήκος (ΣK) .

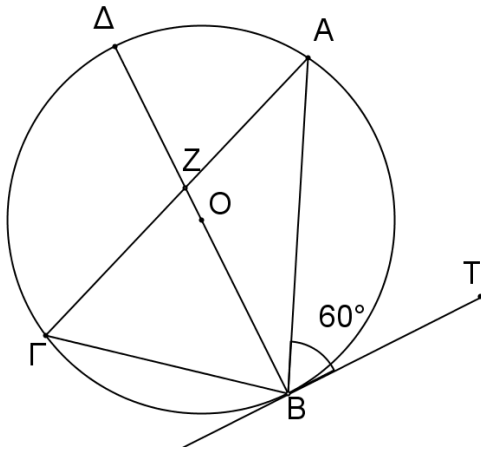
9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$.

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $f(x)$.
- (β) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής και να τη χαρακτηρίσετε (μέγιστο ή ελάχιστο) .
- (γ) την τιμή του γ .
- (δ) τις τιμές των α και β .
- (ε) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$.



10. Στο πιο κάτω σχήμα η BD είναι διάμετρος του κύκλου (O, R) , η BT εφάπτεται του κύκλου στο B και Z είναι το σημείο τομής της BD και της AG . Αν η γωνία $\widehat{TBA} = 60^\circ$ και το τόξο $B\Gamma = 80^\circ$, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου $B\Gamma Z$.



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (\mu + 3)x + 3\mu - 16 = 0$. Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της και $\mu \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε για ποιες τιμές του μ :

(α) η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες .

(β) η εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες .

(γ) ισχύει $x_1^2 x_2 + x_2^2 x_1 > 4x_1 + 9 + 4x_2$.

(δ) ισχύει $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 0$.

2. (α) Δίνεται η εξίσωση
$$\frac{\sin(180^\circ - \theta)\eta\mu(90^\circ + \theta) + \epsilon\varphi(-\theta) - \eta\mu(180^\circ + \theta)\sigma\upsilon\nu(270^\circ - \theta) + 1}{\tau\epsilon\mu(360^\circ - \theta)} = \frac{1}{2}$$

Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ αν ισχύει $90^\circ < \theta < 270^\circ$.

(β) Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\frac{\sigma\varphi\omega}{\sigma\tau\epsilon\mu\omega - 1} - \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \eta\mu\omega} = 2\epsilon\varphi\omega$$

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κορυφή $A(-1,1)$. Φέρουμε τη διαγώνιο $A\Gamma$ και στο σχηματιζόμενο τρίγωνο $AB\Gamma$ η εξίσωση του ύψους BE είναι $y = -4x + 3$ και η εξίσωση της διαμέσου BM είναι $3x + 2y - 6 = 0$.
- (α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου B είναι $B(0,3)$.
- (β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της διαγωνίου $A\Gamma$ είναι $x - 4y + 5 = 0$.
- (γ) Να βρείτε το μήκος του ύψους BE του τριγώνου $AB\Gamma$.
- (δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .
- (ε) Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου ABM .
4. (α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\kappa} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix}$. Να βρείτε ένα **μοναδιαίο** διάνυσμα ομόρροπο του διανύσματος $\vec{\omega} = 4\vec{\kappa} + 2\vec{\mu}$.
- (β) Για δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δίνονται ότι $|\vec{\alpha}| = 2$, $|\vec{\beta}| = 3$ και η γωνία μεταξύ των δυο αυτών διανυσμάτων είναι ίση με 60° . Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} - \lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους.
5. Δίνεται τρίγωνο $K\Lambda M$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) με ΛM διάμετρο. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο M , η οποία τέμνει την προέκταση της ΛK στο σημείο Z .
- (α) Να δείξετε ότι $(K\Lambda)(KZ) = (KM)^2$.
- (β) Να δείξετε ότι $(K\Lambda)(\Lambda Z) = 4R^2$.

- ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ -

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

Μάθημα: **Μαθηματικά Β κατ.**Διάρκεια: **2,5 ώρες**Ημερομηνία: **23.05.2016****Οδηγίες:**

1. Να γράφετε με μελάνι μπλε ή μαύρο (για τα σχήματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι).
2. Τα σχήματα των ασκήσεων να αντιγράφονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
5. Το δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
6. Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **πέντε** μονάδες από τις **εκατό**.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{6}{x \cdot (x + 3)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να υπολογίσετε το όριο της συνάρτησης: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{3x^2 - 27}$.

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

1) $\psi = 2e^{5x} + \sqrt{x}$

2) $\psi = \frac{\eta\mu 3x}{x^2 + 7}$

4. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης 24cm. Αν το παράπλευρο ύψος ισούται με την ακμή της βάσης της, να υπολογίσετε:

- 1) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
- 2) τον όγκο της πυραμίδας.

5. Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\Sigma = -5 - 2 + 1 + \dots + 52$.

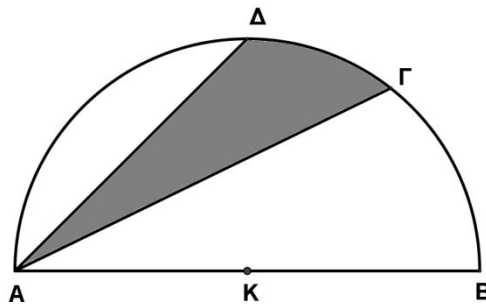
6. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{2\eta\mu 5x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x - \eta\mu 8x}{2\sigma\upsilon\nu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu 5x} = 2\eta\mu x$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x + 5}$ και $g(x) = \frac{x}{x-1}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις: (τύπο και Πεδίο Ορισμού)

1) $f + g$, β) $\frac{f}{g}$

8. Το ημικύκλιο στο πιο κάτω σχήμα έχει διάμετρο $AB = 8 \text{ cm}$ και χορδές $AD = \lambda_4$ και $AG = \lambda_3$. Να υπολογίσετε συναρτήσει του π :

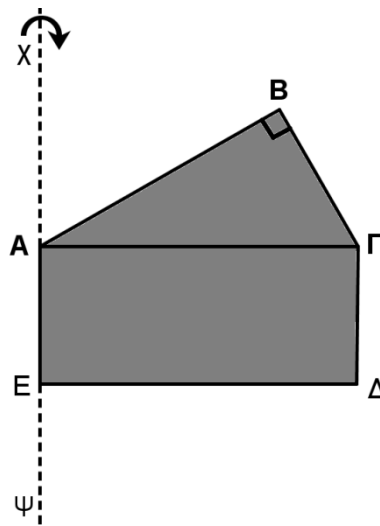
- 1) Το εμβαδόν και
2) την περίμετρο του σκιασμένου μέρους.



9. Η εφαπτόμενη της καμπύλης $a^2 \cdot \psi = x^3$ ($a \neq 0$) στο σημείο της A με $x=a$, τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B και τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο Γ. Να δείξετε ότι $(AG) = 3(AB)$.

10. Στο πιο κάτω σχήμα το $A\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, $B\Gamma = \Gamma\Delta = 4 \text{ cm}$, $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 90^\circ$ και $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Αν η σκιασμένη επιφάνεια $AB\Gamma\Delta E$ περιστραφεί πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία $\chi\psi$, να υπολογίσετε:

- 1) Το εμβαδόν και
2) τον όγκο του στερεού που παράγεται.



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **δέκα** μονάδες από τις **εκατό**.

1. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $\ln \psi = \chi \ln 2 + \ln \chi$.

1) Αν η γραφική παράσταση της καμπύλης περνά από το σημείο (3, α), να βρείτε την τιμή του α.

2) Να δείξετε ότι $\frac{d\psi}{d\chi} = \ln 2^\psi + 2^\chi$.

3) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{d\psi}{d\chi} - \psi \ln 2 + 30 = 4^\chi$.

2. Τραπεζίο ΑΒΓΔ με ΑΒ//ΓΔ έχει εξίσωση της πλευράς ΓΔ: $6\chi + 7\psi - 30 = 0$, κορυφές Β(-3, 2), Γ(-2, 6) και $\hat{\Delta B \Gamma} = 90^\circ$. Να βρείτε:

1) Τις συντεταγμένες της κορυφής Δ.

2) Την απόσταση των παράλληλων πλευρών του τραπεζίου.

3) Το εμβαδόν του τριγώνου ΔΒΓ.

4) Τις τιμές του κ για τις οποίες η ευθεία $\psi = \kappa\chi - 5$ σχηματίζει με την πλευρά ΓΔ γωνία 45° .

3. Δίνεται η ακολουθία: $\log_2 \chi, \log_4 \chi, \log_{16} \chi, \dots$.

1) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι απόλυτα φθίνουσα Γεωμετρική πρόοδος με λόγο $\lambda = \frac{1}{2}$.

2) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_2 \chi + \log_4 \chi + \log_{16} \chi + \dots = 2$

3) Να λύσετε την εξίσωση $\eta \mu \chi = \frac{\lambda}{\sigma \nu \chi}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

4.

1) Να δείξετε ότι σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:

$$(\sigma \nu \alpha + \sigma \nu \beta)^2 + (\eta \mu \alpha - \eta \mu \beta)^2 = 4\eta \mu^2 \frac{\Gamma}{2}$$

2) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\frac{\eta \mu \alpha}{\epsilon \phi \beta + \epsilon \phi \Gamma} = \frac{\beta \cdot \gamma}{4R^2}$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \frac{2x+1}{x-3}$, $x < 3$ και

$$g(x) = x^2 - 79, x \in (-\infty, 4].$$

- 1) Να βρείτε το Πεδίο Τιμών της f .
- 2) Αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} , να βρείτε τον τύπο και το Πεδίο Ορισμού της.
- 3) Να ορίσετε την συνάρτηση $f^{-1} \circ g$. (Πεδίο Ορισμού και τύπο)

- 4) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{g(x) + 80}}{2x}$

Ο Διευθυντής:

Ευάγγελος Ευαγγέλου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 07 /06 /16

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ (5-ωρο)

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι).
Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **4 σελίδες**.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **5 μονάδες από τις εκατό**.

1. Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού που να έχει ρίζες: $x_1 = 3 + \sqrt{2}$ και $x_2 = 3 - \sqrt{2}$.

2. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x - 2y = 3 \\ xy - y^2 = -2 \end{cases}$$

3. Να απλοποιήσετε το κλάσμα: $\frac{3x^2 - 5x - 8}{x^2 - 1}$.

4. Αν $\eta\mu\theta = \frac{12}{13}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 12\sigma\tau\epsilon\mu\theta - 5\epsilon\phi\theta.$$

5. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - 4x + 6 = 0$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$\alpha) x_1 + x_2, \quad \beta) x_1 \cdot x_2 \quad \text{και} \quad \gamma) 4x_1^2 x_2 + 4x_1 x_2^2.$$

6. Να λύσετε την ανίσωση: $(x-3) \cdot (x^2 - 2x) \geq 0$.

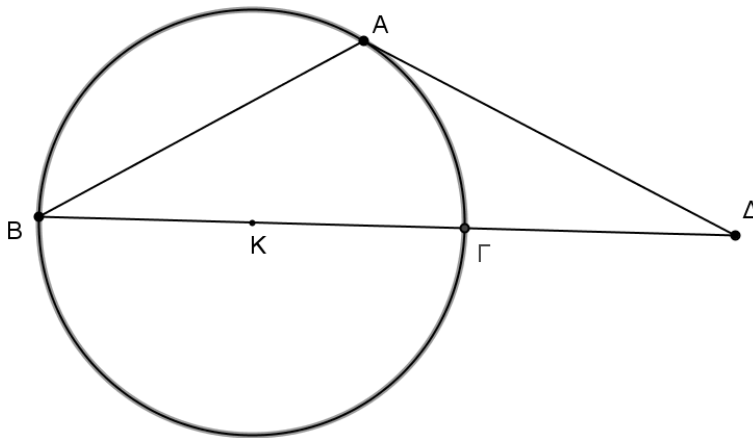
7. Αν $3 < \chi < 7$ και $-5 < \psi < -2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $2\chi + \psi$,

β) $\frac{\chi}{\psi}$.

8. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση: $\kappa^2 \chi - 6 = 2\kappa \chi - 3\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

9. Στο σχήμα η ΒΓ είναι διάμετρος του κύκλου (Κ, R) και το τόξο $\widehat{AG} = 54^\circ$. Αν ΑΔ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ. (να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



10. Δίνονται τα σημεία $A(5,3)$, $B(1,-1)$. Αν $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των Α και Β, να βρείτε :

α) Τις διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$.

β) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

γ) Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

δ) Τη διανυσματική ακτίνα του μέσου Μ του ΑΒ.

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα μονάδες από τις εκατό.

1. Δίνεται η εξίσωση $(\kappa-1)\chi^2 - (\kappa+1)\chi - \kappa = 0$, $\kappa \neq 1$.

α) Να βρείτε την τιμή του κ για την οποία η εξίσωση έχει:

i) Ρίζες αντίθετες.

ii) Ρίζες αντίστροφες.

iii) Μία ρίζα τον αριθμό -1.

β) Να βρείτε τις τιμές του κ για τις οποίες ισχύει η σχέση: $\frac{1}{\chi_1} + \frac{1}{\chi_2} \geq 3$.

2. Το διπλανό σχήμα παριστάνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$\psi = -\chi^2 + \beta\chi + \gamma \text{ .}$$

Να βρείτε:

α) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.

β) Τις συντεταγμένες της κορυφής της.

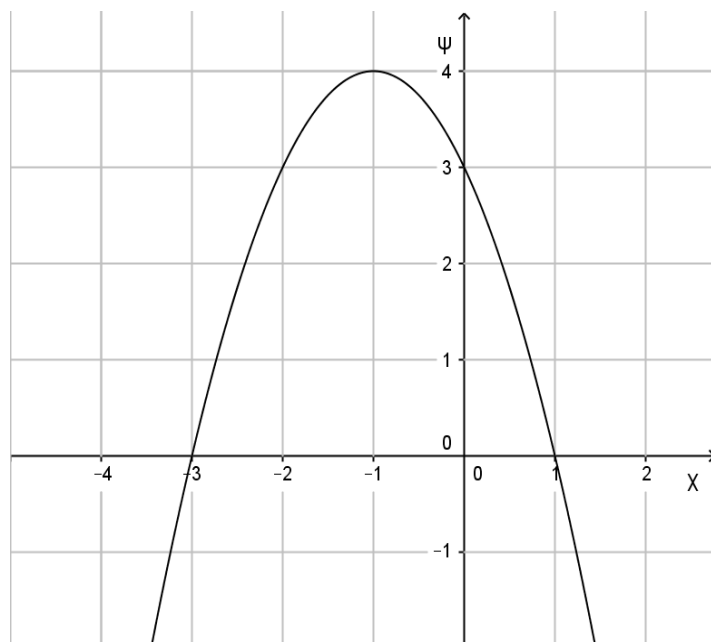
γ) Το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

δ) Τις ρίζες της εξίσωσης: $-\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$.

ε) Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης: $-\chi^2 + \beta\chi + \gamma = 0$.

στ) Τις τιμές των β και γ .

ζ) Τις τιμές του χ για τις οποίες ισχύει: $\psi \leq 0$.



3. Δίνονται οι εξισώσεις των ευθειών $(\varepsilon_1): \psi = \chi$ και $(\varepsilon_2): \chi + \psi = 8$. Το σημείο τομής των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ είναι το Α, το σημείο τομής της (ε_2) με τον άξονα των χ είναι το Β και Ο είναι η αρχή των αξόνων.
- α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων Α και Β.
- β) Αν $A(4,4)$:
- Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ορθογώνιο.
 - Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου ΟΑΒ.
 - Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΜ.
 - Να βρείτε τη γωνία ΑΒΟ του τριγώνου ΟΑΒ.
 - Να βρείτε την απόσταση του σημείου Μ από την ευθεία ΑΒ.
4. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\tan \theta - \frac{\sin \theta}{1 - \eta \mu \theta} = -\varepsilon \phi \theta$.
- β) Αν $90^\circ < \theta < 180^\circ$ και $\frac{\sin(90^\circ + \theta) \cdot \varepsilon \phi(180^\circ + \theta) \cdot \eta \mu(270^\circ - \theta)}{\sin(-\theta) \cdot \eta \mu(180^\circ - \theta)} = -1$,
να υπολογίσετε τη γωνία θ .
5. Δίνεται κύκλος (Κ,Ρ). Από σημείο Ρ εκτός του κύκλου να φέρετε εφαπτομένη ΡΑ και τέμνουσα ΡΒΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας ΓΡΑ, τέμνει τις χορδές ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Η και Δ αντίστοιχα,
α) να δείξετε ότι : $(ΑΗ)(ΔΡ) = (ΗΡ)(ΓΔ)$.
β) Αν $(ΑΡ) = 4\text{cm}$, $(ΡΒ) = \chi$, και $(ΒΓ) = 6\text{cm}$, να υπολογίσετε την τιμή του χ .

Ο Διευθυντής

Ευάγγελος Ευαγγέλου



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30/5/ 2016

ΤΑΞΗ : Α' (5-ωρο)

ΧΡΟΝΟΣ: 2.30'

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
(β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
(γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
(δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
(ε) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

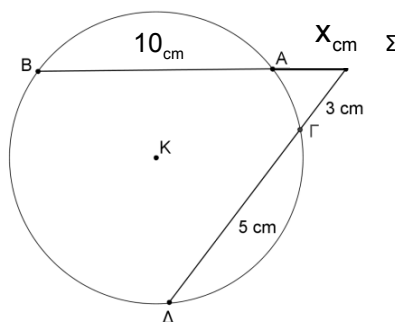
ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 8x + 15 \leq 0$.

2. (α) Να μετατρέψετε το κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή: $\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$
(χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής).

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $(3x - 2)^{\frac{5}{4}} = 32$, $x \geq \frac{2}{3}$.

3. Από σημείο Σ εκτός κύκλου με κέντρο Κ και ακτίνα R φέρουμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ.
Αν $AB = 10\text{cm}$, $SA = x\text{cm}$, $SG = 3\text{cm}$ και $GD = 5\text{cm}$,
να υπολογίσετε το x .



4. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sigma\phi\theta - \sigma\upsilon\nu\theta}{\sigma\phi\theta \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta} = \frac{1}{1 + \eta\mu\theta}$.

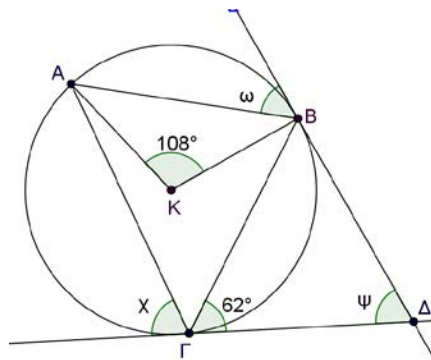
5. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των βιβλίων που έχουν διαβάσει κατά τη διάρκεια των διακοπών τους οι 20 μαθητές ενός τμήματος.

Αριθμός βιβλίων x_i	0	1	2	3	4	5
Αριθμός μαθητών f_i	2	1	4	6	2	5

Να υπολογίσετε:

- (α) τη μέση τιμή
(β) την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

6. Στο διπλανό σχήμα οι ΓΔ και ΒΔ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (Κ,Ρ). Να υπολογίσετε τις γωνίες χ , ψ , ω , δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



7. Να δείξετε ότι το σύστημα:
$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \\ \frac{x}{\sin^2 \theta} + (2\epsilon \phi^2 \theta)y = 2 \end{cases}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$
 είναι συμβιβαστό.

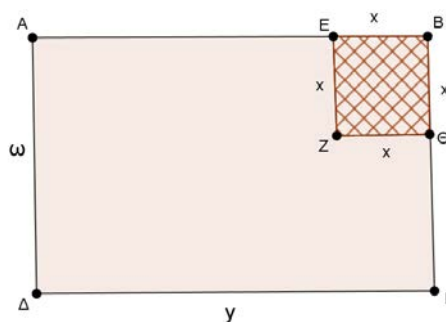
8. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\lambda^2 x + 16 = \lambda^2 + 4\lambda x$ για τις διάφορες πραγματικές τιμές του λ .

9. Ο κύριος Γιώργος βρίσκεται σε ένα ορθογώνιο σαλόνι όπου υπάρχει ένα τετράγωνο ενυδρείο, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έστω $EB = B\Theta = \Theta Z = ZE = x$, $AB = \Gamma\Delta = y$ και $A\Delta = B\Gamma = \omega$.

Δίνεται ότι $2 < x < 4$ και $10 < y < 15$.

Να δείξετε ότι: (α) $6 < AE < 13$

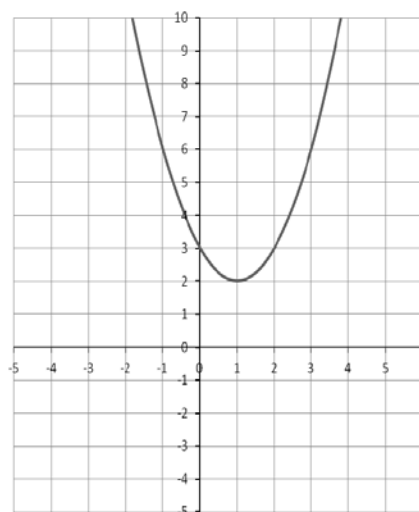
$$(\beta) \frac{2}{15} < \frac{EB}{\Delta\Gamma} < \frac{2}{5}$$



10. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

- (α) Να βρείτε το πρόσημο του a και το πρόσημο της διακρίνουσας Δ .
- (β) Να σχεδιάσετε στο φύλλο απαντήσεων σας τη γραφική παράσταση της $g(x) = 3 - f(x)$.
- (γ) Να βρείτε το πεδίο τιμών της $g(x)$.



ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\sin(270^\circ - \omega) \cdot \varepsilon\phi(180^\circ + \omega) \cdot \eta\mu(360^\circ - \omega)}{\sigma\phi(90^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(-\omega)}$

$$B = \frac{\eta\mu\omega}{1 - \sigma\eta\omega} - \sigma\phi\omega$$

(α) Να δείξετε ότι: $A = -\eta\mu\omega$ και $B = \sigma\tau\epsilon\mu\omega$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $A^2 \cdot B = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $(0^\circ, 180^\circ)$.

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 1)$ και $\Gamma(-3, 3)$. Αν η διάμεσος AM έχει εξίσωση $2x + \psi - 3 = 0$ και η πλευρά $B\Gamma$ έχει εξίσωση $4x + 5\psi - 3 = 0$, να βρείτε :

- (α) τις συντεταγμένες του σημείου M
- (β) τις συντεταγμένες της κορυφής B
- (γ) την εξίσωση της $A\Gamma$
- (δ) το μήκος του ύψους $B\Delta$
- (ε) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\lambda + \mu)x + (5\lambda + \mu) = 0$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

(α) Να υπολογίσετε τις αριθμητικές τιμές των παραμέτρων λ και μ έτσι ώστε η πιο πάνω εξίσωση να έχει το άθροισμα των ριζών της ίσο με 5 και το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της ίσο με 3.

(β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - (4 + \mu)x + (10 + \mu) = 0$, να υπολογίσετε τις τιμές του μ για τις οποίες ισχύει η σχέση: $\frac{x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2 - 54}{x_1 + x_2} \leq 3$.

4. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 4\kappa^2 - \mu \\ \mu + \kappa \end{pmatrix}$ με $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$.

(α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

(β) Να βρείτε τις τιμές των κ και μ έτσι ώστε τα διανύσματα $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ να είναι ίσα.

(γ) Να βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα το οποίο να είναι παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{u} = -2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$.

(δ) Να υπολογίσετε το $\sin\theta$, όπου θ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

5. Η AB είναι διάμετρος κύκλου (K,R) και η $A\Gamma$ χορδή του. Από τυχαίο σημείο Δ της $A\Gamma$ φέρουμε την ΔE κάθετη στην AB (E σημείο της AB). Αν η εφαπτομένη του κύκλου στο A τέμνει την προέκταση της $B\Gamma$ στο σημείο Z , να δείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα $AZ\Gamma$ και $BA\Gamma$ είναι όμοια

(β) $(AE)(BZ) = (A\Delta)(AZ)$

(γ) $\frac{A\Delta}{AE} = \sqrt{\frac{ZB}{Z\Gamma}}$.

ΤΕΛΟΣ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Σόλων Χαραλάμπους

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – 5 ΩΡΟ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/05/2016

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 07:45 π.μ.

- ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν και με μολύβι.)
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το Σχολείο.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

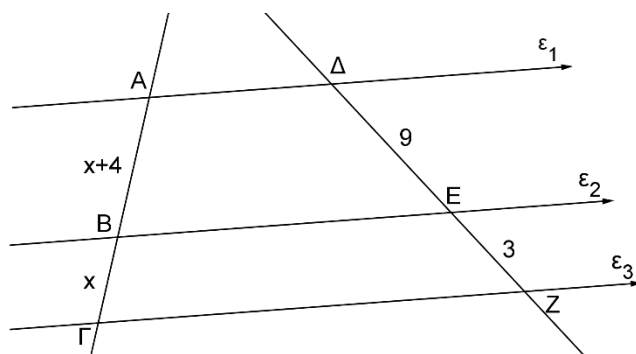
1. Να κατασκευάσετε εξίσωση β΄ βαθμού με ρίζες χ_1, χ_2 , όπου $\chi_1 = -5$ και $\chi_2 = 2$.

2. α) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \sqrt[3]{\kappa^7} \cdot \sqrt[3]{\kappa^5}$

β) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{4}{\sqrt{13}-3}$ σε ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.

3. Να λύσετε την ανίσωση: $\chi^2 - 5\chi + 6 < 0$

4. Αν $\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$, να βρείτε την τιμή του x στο πιο κάτω σχήμα:



5. Σε παιχνίδι στο διαδίκτυο, η συνολική βαθμολογία υπολογίζεται ως εξής:
Οι βαθμοί που παίρνει ένας παίκτης στο α' στάδιο έχουν βαρύτητα 20% της συνολικής βαθμολογίας, στο β' στάδιο 30% και στο γ' στάδιο 50%. Ο Μιχάλης πήρε 160 βαθμούς στο α' στάδιο, 180 βαθμούς στο β' στάδιο και 140 βαθμούς στο γ' στάδιο. Να υπολογίσετε τη συνολική βαθμολογία του Μιχάλη.

6. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \chi - 2\psi = 5 \\ \psi^2 + 2\chi = 10 \end{cases}$$

7. Αν $\sin\theta = -\frac{4}{5}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{10\eta\mu\theta - 8\tau\epsilon\mu\theta}{4\epsilon\phi\theta + 1}, \text{ χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.}$$

8. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 17 \\ -6 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

α) Να υπολογίσετε: i) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$

ii) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$

β) Αν $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, να υπολογίσετε: i) το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}$

ii) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$

9. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\lambda^2\chi - 4\lambda\chi + 3 = \lambda - 3\chi$, για τις διάφορες τιμές του λ , $\lambda \in \mathbb{R}$.

10. Για τους αριθμούς μ και ν ισχύουν οι σχέσεις $2 < \mu < 3$ και $-4 < \nu < -2$.

Να αποδείξετε ότι:

α) $6 < 2\mu - \nu < 10$

β) $-12 < \mu\nu < -4$

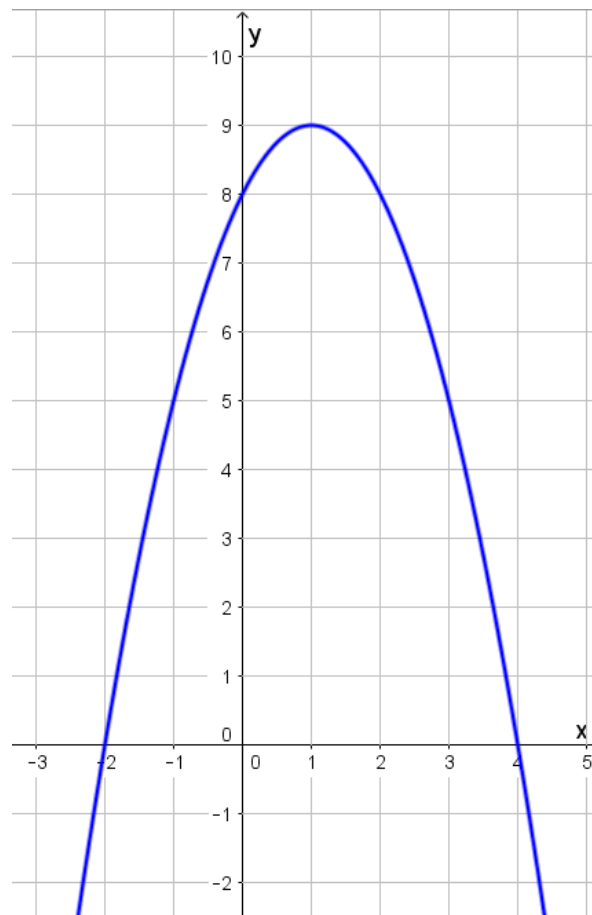
ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
- β) το πεδίο τιμών της συνάρτησης
- γ) το πρόσημο του a
- δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- ε) την τιμή του c
- στ) τη μέγιστη τιμή της συνάρτησης
- ζ) τις τιμές $f(-1)$ και $f(4)$
- η) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$
- θ) το πρόσημο της διακρίνουσας Δ
και του $f(2016)$
- ι) την αριθμητική τιμή της παράστασης

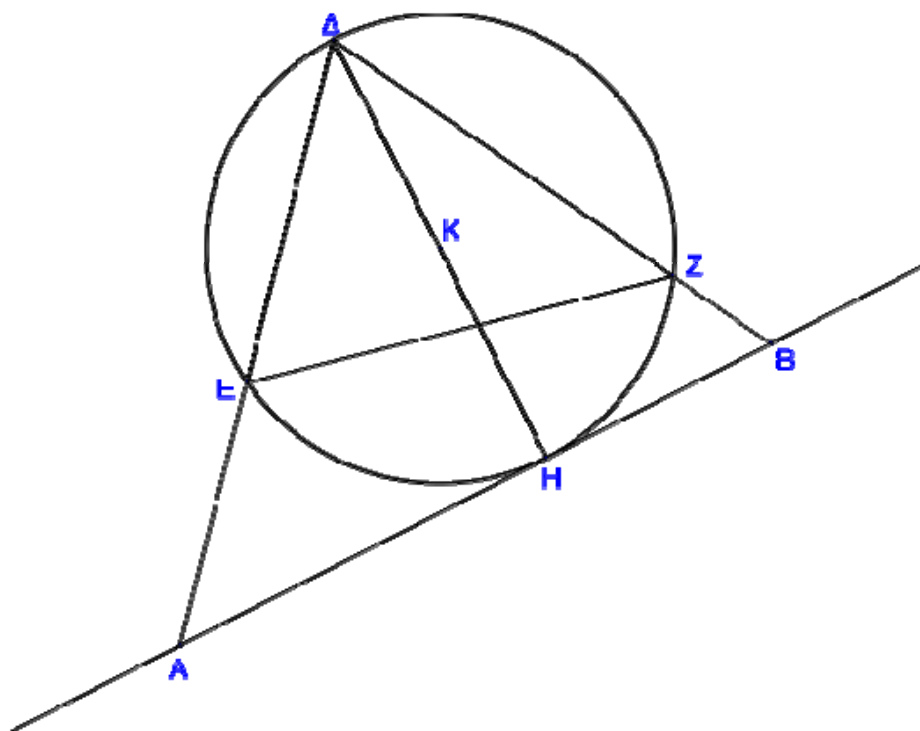
$$A = \frac{c - 4b}{a}$$



2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με κορυφές τα σημεία $A(3, -2)$, $B(-1, 2)$ και $\Gamma(1, 5)$.

- α) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΓH του τριγώνου $AB\Gamma$.
- β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου A από την ευθεία $B\Gamma$.
- γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ , ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$, να είναι παραλληλόγραμμο.
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

3. Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 + (2\lambda - 1)\chi + \lambda^2 - 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ , για τις οποίες η πιο πάνω εξίσωση έχει:
- ρίζες αντίστροφες
 - ρίζα τον αριθμό -3
 - ρίζες πραγματικές και ίσες
- β) Αν χ_1 και χ_2 είναι οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης,
- να αποδείξετε ότι: $\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} + 2 = \frac{(2\lambda - 1)^2}{\lambda^2 - 4}$
 - να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ , για τις οποίες ισχύει: $\frac{\chi_1}{\chi_2} + \frac{\chi_2}{\chi_1} \geq -2$
4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $\triangle EZ$, εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο το σημείο K . Από την κορυφή Δ φέρουμε τη διάμετρο ΔH και στο H φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου, που τέμνει τις προεκτάσεις των ΔE και ΔZ στα σημεία A και B αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
- τα τρίγωνα $\triangle HZ$ και $\triangle HZB$ είναι όμοια
 - $(HZ)^2 = (BZ) \cdot (\Delta Z)$
 - $(\Delta E) \cdot (AB) = (\Delta B) \cdot (EZ)$



5. α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(180^\circ + x)\epsilon\varphi(270^\circ - x)\eta\mu(-x)\tau\epsilon\mu(90^\circ + x)}{\epsilon\varphi(180^\circ + x)\sigma\upsilon\nu(360^\circ - x)} = -\sigma\varphi x, \quad 0^\circ < x < 90^\circ$$

β) i) Να αποδείξετε ότι: $(\tau\epsilon\mu\theta - \epsilon\varphi\theta)^2 = \frac{1 - \eta\mu\theta}{1 + \eta\mu\theta}$

ii) Αν $\frac{1 - \eta\mu\theta}{1 + \eta\mu\theta} = \frac{1}{3}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να βρείτε τη γωνία θ .

Ο Διευθυντής

Νίκος Πρωτοπαπάς

ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΛΟΥΡΙΩΤΙΣΣΑΣ

ΣΧ. ΧΡΟΝΙΑ: 2015-2016

Βαθμός:.....

Ολογράφως:.....

Υπογραφή:.....

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Τάξη: Β΄

Ημερομηνία: 19-05-16

Ώρα: 7.45 - 10.15

Ημέρα: Πέμπτη .

Χρόνος: 2.30΄

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....

ΤΜΗΜΑ:..... ΑΡΙΘΜΟΣ.....

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες
2. Κατοχή κινητού τηλεφώνου = Δολίευση
3. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού
4. Δεν επιτρέπεται να γράφετε με μολύβι παρά μόνο με μπλε πένα
5. Δεν επιτρέπεται να δανείζεστε οτιδήποτε από συμμαθητές σας

ΜΕΡΟΣ Α΄ (50 μονάδες)

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα $\frac{3x+1}{x^2(x+1)}$ σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του τρίτου όρου και του έκτου όρου είναι 13 και ο ένατος όρος είναι ίσος με -7. Να βρείτε τους τέσσερις πρώτους όρους της προόδου.
3. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(-2,3) , Β(3,1) και Γ(2,5). Να βρείτε:
(α) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ
(β) την εξίσωση του ύψους ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ.

4. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x + 2}{3x^2 + x}$

5. Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με παράπλευρο ύψος ίσο με τα $\frac{5}{6}$ της ακμής της βάσης της και εμβαδό ολικής επιφάνειας ίσο με 384 cm^2 .

Να βρείτε: α) Την ακμή της βάσης της

β) Τον όγκο της πυραμίδας.

6. Να λύσετε τη λογαριθμική εξίσωση : $\log_x 27 - 3\log_3 x = 8$.

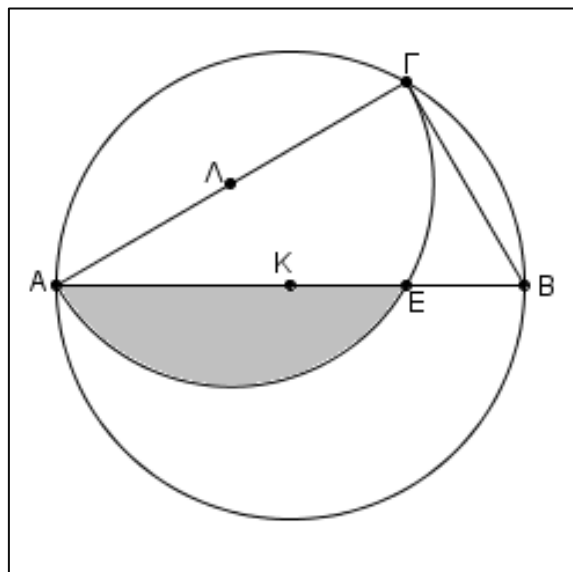
7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης

$y = \ln(1+x^2)$ στο σημείο της με $x=1$

8. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει $\beta = 2\gamma$ και $\hat{A} = 60^\circ$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

9. Να λύσετε την εξίσωση $\left[4 \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81} - \frac{1}{243} + \dots \right) \right]^{2\log_3 x} = \log 100^x + 3$.

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα $2a \text{ cm}$. Φέρουμε ημικύκλιο $\widehat{A\Gamma}$ με κέντρο το σημείο Λ και διάμετρο τη $A\Gamma$ το οποίο τέμνει τη διάμετρο AB στο σημείο E . Αν η γωνία $BAG = 30^\circ$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



ΜΕΡΟΣ Β': (50 μονάδες)

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ όπου Β(1,2) , ύψος : ΑΔ : $3x + y - 11 = 0$ και διάμεσος

ΑΜ : $x + y - 7 = 0$. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της ΒΓ
- β) τις συντεταγμένες των σημείων Μ, Γ και Α
- γ) την εξίσωση της ΑΒ
- δ) την απόσταση του σημείου Β από:
 - ι) την ευθεία ΑΜ ιι) το σημείο Α

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - \frac{5}{x+2}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$, $h(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 + 3x + 2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και $h(x)$.

β)) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f(x)$ και $h(x)$ είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο για το οποίο ισχύει ότι $f(x) = h(x)$.

γ) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο της $(g \circ f)(x)$

3. α) Να δείξετε ότι $\frac{1 - \epsilon\phi^2\theta}{1 + \epsilon\phi^2\theta} = \sigma\upsilon\nu 2\theta$.

β) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω ταυτότητα ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να δείξετε ότι:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\theta} + \epsilon\phi 2\theta = \epsilon\phi\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

γ) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\theta} + \epsilon\phi 2\theta = \epsilon\phi 4\theta$.

4. (α) Αν $e^y = e^x + e^{-x}$ να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$.

(β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $\alpha x^2 + \beta xy - \ln(x^2 - 3) + 1 = 0$ στο σημείο $A(2, -1)$ είναι παράλληλη με την $x + y = 5$. Να βρείτε τα α και β .

5. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά $AB = 13\text{ cm}$ και διαγώνιο $BD = 2\alpha\text{ cm}$. Ο ρόμβος περιστρέφεται πλήρως γύρω από άξονα που περνά από το σημείο Δ και είναι παράλληλος με τη διαγώνιο ΑΓ. Αν το εμβαδό του στερεού που παράγεται είναι ίσο με $520\pi\text{ cm}^2$ τότε

α) να υπολογίσετε την τιμή του α ,

β) αν $\alpha = 5$, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.

Ο Διευθυντής

Τάσος Τάσου

4. (α) Αν $e^y = e^x + e^{-x}$ να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$.

(β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $\alpha x^2 + \beta xy - \ln(x^2 - 3) + 1 = 0$ στο σημείο $A(2, -1)$ είναι παράλληλη με την $x + y = 5$. Να βρείτε τα α και β .

5. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με πλευρά $AB = 13\text{ cm}$ και διαγώνιο $BD = 2\alpha\text{ cm}$. Ο ρόμβος περιστρέφεται πλήρως γύρω από άξονα που περνά από το σημείο Δ και είναι παράλληλος με τη διαγώνιο ΑΓ. Αν το εμβαδό του στερεού που παράγεται είναι ίσο με $520\pi\text{ cm}^2$ τότε
- α) να υπολογίσετε την τιμή του α ,
- β) αν $\alpha = 5$, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού.

Οι εισηγήτριες

Ο Διευθυντής

Κάλλη Χριστοφόρου

Ελένη Γεωργίου

Τάσος Τάσου

ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΛΟΥΡΙΩΤΙΣΣΑΣ

ΣΧ. ΧΡΟΝΙΑ: 2015-2016

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (5 - ΩΡΟ)

Τάξη: Α΄

Ημερομηνία: 23-05-16.

Ώρα: 7.45 - 10.15

Ημέρα: Δευτέρα

Χρόνος: 2:30΄

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες
2. Κατοχή κινητού τηλεφώνου = Δολίευση
3. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού
4. Δεν επιτρέπεται να γράφετε με μολύβι παρά μόνο με μπλε πένα
5. Δεν επιτρέπεται να δανείτε οτιδήποτε από συμμαθητές σας

Μέρος Α΄: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες

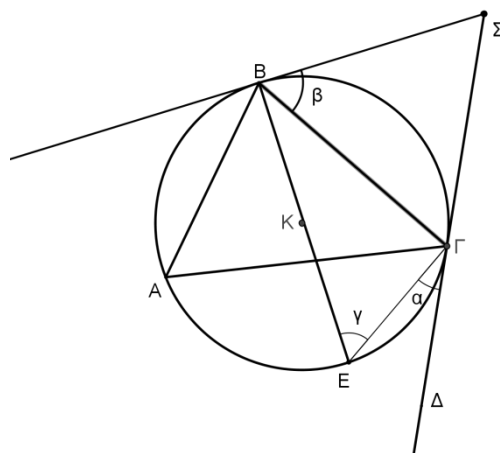
1. Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $x_1 = \frac{1}{2}$ και $x_2 = \frac{2}{5}$.
2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -6 \\ -1 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε :
(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$
(β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$.

3. Δίνονται τα σημεία $A(-2, -5)$ και $B(0, 7)$. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB .
4. Στα διαγωνίσματα του μαθήματος των ηλεκτρονικών υπολογιστών κάποιος μαθητής πήρε τους ακόλουθους βαθμούς: 15, 19, 16, 18, 13, 14, 17, 16. Να υπολογίσετε:
- (α) τη μέση τιμή της βαθμολογίας των διαγωνισμάτων του.
- (β) την τυπική απόκλιση.
5. Αν $\sin \theta = \frac{3}{5}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της

πιο κάτω παράστασης :

$$A = \frac{15\eta\mu\theta - 3\tau\epsilon\mu\theta}{9\epsilon\varphi\theta - 20\sigma\varphi\theta}$$

6. Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) και τα ΣB και $\Sigma\Gamma$ είναι εφαπτόμενα τμήματα. Αν οι γωνίες $BA\Gamma = 58^\circ$ και $EB\Gamma = 32^\circ$ να υπολογίσετε τις άγνωστες γωνίες α , β και γ .
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



7. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 5x + 2 = 0$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

(α) $x_1 + x_2$ (β) $x_1 \cdot x_2$ (γ) $\frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2}$ (δ) $(3x_1 + 2)(3x_2 + 2)$

8. Δίνονται οι αριθμοί $A = \frac{1}{3+\sqrt{2}}$ και $B = \frac{\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}$. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

(α) $K = A + B$

(β) $\Lambda = A \cdot B$

(γ) $M = K^2 + 2K\Lambda + \Lambda^2$

9. Για ποιες τιμές της παραμέτρου λ , $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $\lambda^2(x-1) = x - 2\lambda - 3$

(α) είναι αδύνατη

(β) είναι αόριστη

(γ) έχει μοναδική λύση

10. Αν $3 < x < 5$ και $-5 < y < -3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις :

(α) $x + y$

(β) $-xy$

(γ) $2x - y$

(δ) $\frac{x}{y}$

Μέρος Β': (α) Να λύσετε όλες τις ασκήσεις .

(β) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.

Να βρείτε:

(α) Το πεδίο τιμών της συνάρτησης $f(x)$.

(β) Το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης $f(x) = 0$.

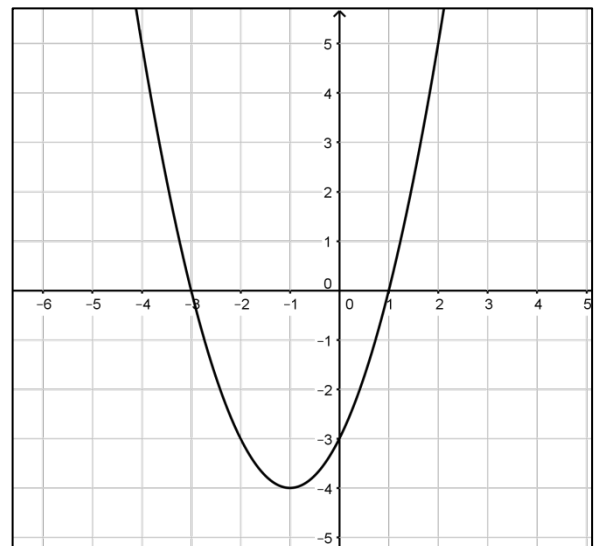
(γ) Τις συντεταγμένες της κορυφής της $f(x)$.

(δ) Την αριθμητική τιμή του $f(1)$.

(ε) Το πρόσημο του $f(-100)$.

(στ) Τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(ζ) Τις τιμές των α , β και γ .



2.(α) Να λύσετε την ανίσωση :

$$\frac{(x-3) \cdot (x^2 - 10x + 25)}{(x^2 + 9) \cdot (x^2 - 4x)} \leq 0$$

(β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = -\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$ και $\vec{v} = 3\vec{i} + 3\sqrt{3}\vec{j}$. Να βρείτε:

- i. Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.
- ii. Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

3.(α) Αν ισχύει

$$\frac{\sigma\phi(270^\circ - \omega)\eta\mu(\omega - 90^\circ)\sigma\upsilon\nu(360^\circ - \omega)}{\epsilon\phi(180^\circ - \omega)\eta\mu(-\omega)\sigma\upsilon\nu(-\omega)} = \sqrt{3}$$

να βρείτε τη γωνία ω αν $270^\circ < \omega < 360^\circ$.

(β) Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 - \epsilon\phi\theta} + \frac{\eta\mu\theta}{1 - \sigma\phi\theta} = \eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta$$

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1, 1)$, $B(4, -1)$ και $\Gamma(6, 4)$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο .

(β) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής B από την πλευρά $A\Gamma$.

(γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(δ) Αν οι συντεταγμένες της κορυφής είναι $\Delta(1, 6)$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο.

5. Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) και Δ το μέσο του τόξου $B\Gamma$.

Αν η $A\Delta$ τέμνει τη $B\Gamma$ στο E , να δείξετε ότι:

(α) $(AB)(A\Gamma) = (A\Delta)(AE)$

(β) $(\Delta B)^2 = (A\Delta)(\Delta E)$

Ο Διευθυντής

Τάσος Τάσου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α' (5-ωρο)

Ημερομηνία: 02/06/2016

Χρόνος: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που

φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

β) Να γράψετε με **μπλε** ή **μαύρο** μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.**ΜΕΡΟΣ Α':** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

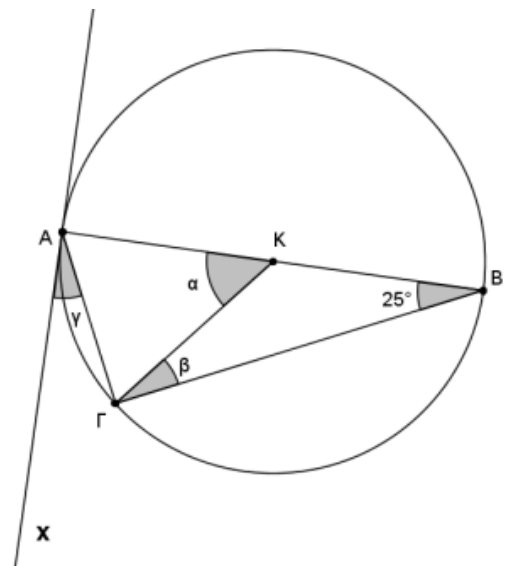
α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$. (μον.3)β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{w}$. (μον.2)

2. α) Πότε ένα σύστημα λέγεται συμβιβαστό; (μον.1)

β) Να εξετάσετε κατά πόσο το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 2x - y = 0 \\ 3y - 5x = 2 \end{cases}$$
 είναι συμβιβαστό. (μον.4)

3. Δίνεται κύκλος (Κ, R). Αν ΑΒ διάμετρος του κύκλου,

Αχ εφαπτομένη του κύκλου και ΒΓ χορδή ώστε

 $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = 25^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

4. Να λύσετε την ανίσωση: $(x-2)(x^2-2x) < 0$.

5. α) Να εξετάσετε αν τα σημεία $A(3,-1)$, $B(1,3)$ και $\Gamma(4,7)$ είναι συνευθειακά. (μον.3)

β) Αν δεν είναι συνευθειακά, να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$. (μον.2)

6. Αν $\sin \omega = -\frac{3}{5}$, $90^\circ < \omega < 180^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{15\eta\mu\omega + 12\varepsilon\varphi\omega}{6\tau\epsilon\mu\omega + 20\sigma\varphi\omega}$$

7. α) Να μετατρέψετε το πιο κάτω κλάσμα σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή δείχνοντας

όλα τα βήματά σας: $\frac{21}{3-\sqrt{2}} =$ (μον.2)

β) Αν $4 < x < 6$ και $-3 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις δείχνοντας όλα τα βήματά σας:

i) $A = 2x + y$

ii) $B = x \cdot y$

(μον.3)

8. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι βαθμοί δεκαπέντε μαθητών στο μάθημα της Φυσικής.

Βαθμός	Αριθμός Μαθητών
4	2
7	2
12	4
14	3
15	1
16	1
18	1
19	1

α) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή.

(μον.2)

β) Να αποδείξετε ότι η τυπική απόκλιση

είναι $\sigma = 2\sqrt{5}$.

(μον.2)

γ) Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας

CV σε ποσοστό.

(μον.1)

9. Δίνεται η παραβολή $f(x) = 3x^2 - (4\kappa + \lambda)x + \kappa + 2\lambda$. Να υπολογίσετε τις τιμές των κ και λ , αν η παραβολή έχει κορυφή το σημείο $K(1,2)$.

10. Αν η εξίσωση $\lambda^2(x-1) - 6 = \lambda(2x-5)$ είναι αόριστη, να αποδείξετε ότι το σύστημα

$$\begin{cases} x + \lambda y = 7 \\ \lambda x + 4y = 11 \end{cases} \text{ είναι αδύνατο.}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Η εξίσωση $x^2 + 2x + 1 - \lambda = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 .

α) i) Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων: $A = x_1 + x_2$ και $B = x_1 \cdot x_2$.

ii) Να βρείτε την τιμή του λ αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι αντίστροφες. (μον.3)

β) i) Να αποδείξετε ότι: $(x_1 - x_2)^2 = 4\lambda$. (μον.2)

ii) Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες $\rho_1 = (x_1 - x_2)^2$ και $\rho_2 = x_1^2 + x_2^2$. (μον.2)

iii) Αν η εξίσωση που σχηματίστηκε είναι η $x^2 - 2(3\lambda + 1)x + 8\lambda(\lambda + 1) = 0$, να βρείτε τις

τιμές του λ , ώστε να ισχύει: $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \geq 0$. (μον.3)

2. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \tau\epsilon\mu(360^\circ - \theta) \cdot \epsilon\phi(270^\circ + \theta)}{\sigma\upsilon\nu(-\theta) \cdot \epsilon\phi(720^\circ - \theta) \tau\epsilon\mu(\theta - 90^\circ)} \text{ και}$$

$$B = \frac{1 - \sigma\phi\theta}{1 + \sigma\phi^2\theta} + \frac{1 + \epsilon\phi\theta}{1 + \epsilon\phi^2\theta}$$

α) Να δείξετε ότι η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του θ . (μον.4)

β) Να δείξετε ότι $A = B$. (μον.4)

γ) Αν $\frac{1 - \sigma\phi\theta}{1 + \sigma\phi^2\theta} + \frac{1 + \epsilon\phi\theta}{1 + \epsilon\phi^2\theta} = 2\sigma\upsilon\nu\chi$, $0^\circ < \chi < 360^\circ$, να βρείτε τις τιμές του χ . (μον.2)

3. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κορυφές Α(1, 2) και Γ(0, 1).

α) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ. (μον.3)

β) Αν η πλευρά ΒΓ έχει εξίσωση $x + 2y = 2$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών

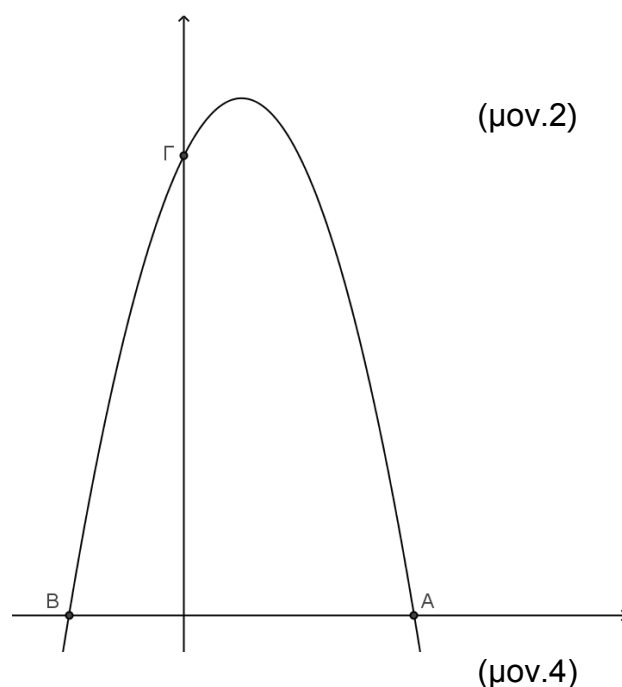
Β και Δ. (μον.3)

γ) Να υπολογίσετε την απόσταση των παραλλήλων πλευρών ΑΔ και ΒΓ. (μον.2)

δ) Αν Β(2, 0), να υπολογίσετε κατά προσέγγιση δεκάτου τη γωνία $\hat{A}\Gamma B$. (μον.2)

4. α) Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με τύπο $f(x) = -x^2 + \beta x + \gamma$. Αν $A(4, 0)$ και $\Gamma(0, 8)$. Να βρείτε:

- i) τις τιμές των β και γ
 ii) τις συντεταγμένες του σημείου B.



- β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3-\mu \\ -2 \end{pmatrix}$, $\mu \in \mathbb{R}$.

- i) Να βρείτε τις τιμές του μ αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα.
 ii) Να βρείτε την τιμή του μ αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.
 iii) Αν $\mu = -1$, να βρείτε τη γωνία των δύο διανυσμάτων κατά προσέγγιση ακεραίου.

(μον.6)

5. Στο διπλανό σχήμα δίνονται η ΣΑ εφαπτομένη του κύκλου και η ΣΡ διχοτόμος της $\widehat{\Gamma\hat{\Sigma}A}$.

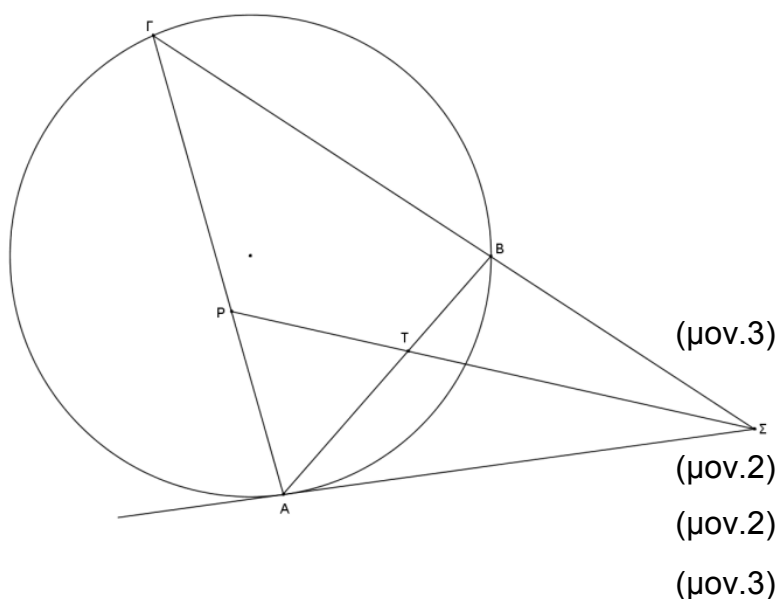
- α) Αν $\Sigma A = 6\text{cm}$ και $B\Gamma = 5\text{cm}$, να βρείτε το μήκος του ΒΣ.

- β) Να αποδείξετε ότι:

i) $\triangle AS\Gamma \approx \triangle \Gamma P\Gamma$

ii) $AP = AT$

iii) $(\Sigma A)(\Sigma T) = (\Sigma B)(\Sigma P)$



Εισηγητές

Κυπρούλα Καραολιά Β.Δ.

Νίκος Δημητρίου

Χαράλαμπος Πιτσιλλίδης

Διευθυντής

Γρηγόρης Χατζημάρκου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ(5-ΩΡΟ)****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19/05/2016****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.30'****ΩΡΑ: 10:45 – 1:15****Οδηγίες:**

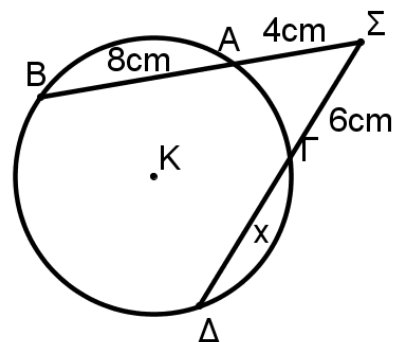
- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- β) Να γράφετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- ε) Σε όλες τις ερωτήσεις να φαίνεται ο τρόπος απάντησής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης αιτιολόγησης δεν θα λαμβάνονται υπόψη .
- ζ) Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- στ) Η ΔΟΛΙΕΥΣΗ ΤΙΜΩΡΕΙΤΑΙ ΑΥΣΤΗΡΑ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α' και το ΜΕΡΟΣ Β' .

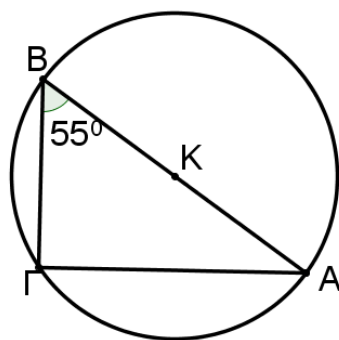
Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 ερωτήματα. Κάθε ερώτημα βαθμολογείται με 5/100.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$.
2. Αν η εξίσωση $2x^2 + 5x - 4 = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $x_1 + x_2 - x_1x_2$.
3. Στο διπλανό σχήμα ΣΑΒ και ΣΓΔ είναι δυο τυχαίες τέμνουσες του κύκλου. Να υπολογίσετε την τιμή του x .



4. Δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο AB και η γωνία $\widehat{GBA} = 55^\circ$. Να υπολογίσετε, με πλήρη αιτιολόγηση των απαντήσεων σας
 α) το μέτρο των γωνιών του τριγώνου $AB\Gamma$
 β) το μέτρο του τόξου $A\Gamma$.



5. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα $\begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ x + 2y = 3 \\ 3x + \lambda y = 1 \end{cases}$ να είναι συμβιβαστό.
6. Αν $2 < x < 4$ και $3 < y < 5$, να αποδείξετε ότι:
 α) $13 < 2x + 3y < 23$
 β) $-3 < x - y < 1$
7. Να δείξετε ότι: $\sin^2(90^\circ + x) + \sin(180^\circ - x) \cdot \cos(270^\circ - x) \cdot \sin(-x) = 1$
8. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 + 2\lambda - 3)x = \lambda^2 - 9$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
 α) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε η εξίσωση να έχει λύση τη $x = 2$.
 β) Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση είναι αόριστη;
9. Αν στο διπλανό πίνακα η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 2$,
 α) να υπολογίσετε το ψ
 β) αν $\psi = 3$, να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση των τιμών
 γ) να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας (CV).

Αριθμός παιδιών χ_i	Οικογένειες f_i
0	5
1	10
2	7
3	4
4	ψ
5	2
6	1

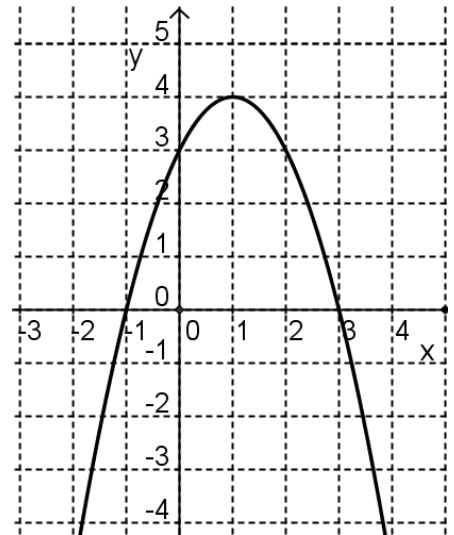
10. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η παράσταση $A = \sqrt{\frac{x \cdot (x+4)}{(x-6)^2 \cdot (x^2+1)}}$ έχει νόημα πραγματικού αριθμού;

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 ερωτήματα. Κάθε ερώτημα βαθμολογείται με 10/100.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.

Να βρείτε:

- α)** Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της f .
β) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής.
γ) i) Τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$
ii) Τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 3$
δ) Τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) < 0$
ε) Τις τιμές των a, b, γ .



2. Δίνονται τα σημεία $A(-1, 1)$, $B(1, 4)$, $\Gamma(7, 0)$.

- α)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
β) Να δείξετε ότι η γωνία B είναι ορθή.
γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση της πλευράς $A\Gamma$ είναι: $x + 8y - 7 = 0$.
δ) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους BZ .

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- α)** Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$
β) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $\hat{\theta}$ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
γ) Αν τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\vec{v} = \vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους να δείξετε ότι $\lambda = \frac{8}{21}$.
δ) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{w}$, το οποίο είναι αντίρροπο του διανύσματος $\vec{\beta}$.

4. **α)** Δίνεται $\sin\theta = -\frac{5}{13}$ και $\eta\mu\theta > 0$. Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης με

χρήση ταυτοτήτων:
$$A = \frac{13\eta\mu\theta + 26\sin\theta}{5\epsilon\varphi\theta - 12\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

β) Αν $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, να αποδείξετε ότι:
$$\sqrt{\frac{1-\eta\mu x}{1+\eta\mu x}} - \sqrt{\frac{1+\eta\mu x}{1-\eta\mu x}} = -2\epsilon\varphi x.$$

5. ίνεται κύκλος (O, R) , η διάμετρος του AB και χορδή $A\Gamma$. Φέρουμε την εφαπτόμενη του κύκλου στο B , η οποία τέμνει την προέκταση της χορδής $A\Gamma$ στο σημείο P .

- α)** Να αποδείξετε ότι:
i) τα τρίγωνα ABP και $B\Gamma P$ είναι όμοια
ii) $(PB)^2 = (PA)(P\Gamma)$

β) Αν η εξίσωση του κύκλου είναι (κ): $x^2 + y^2 = 1$ και η εξίσωση της ΑΡ είναι (ε): $x - \sqrt{3}y = -1$, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων Γ και Α.

Τέλος Δοκιμίου

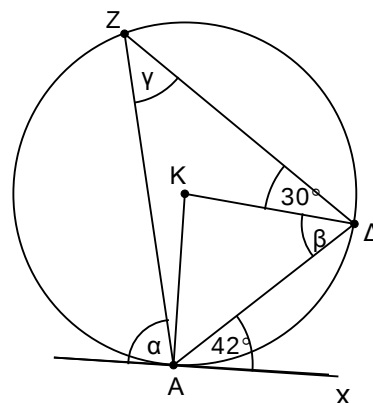
ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**ΤΑΞΗ:** Α΄ Λυκείου**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** Πέμπτη, 26 Μαΐου 2016**ΔΙΑΡΚΕΙΑ:** 2,5 ώρες**ΟΔΗΓΙΕΣ**

- Γράφετε με πένα μπλε. Τα σχήματα αν θέλετε με μολύβι.
- Επιτρέπεται η χρήση **μη προγραμματιζόμενης** υπολογιστικής μηχανής.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Γράφετε καθαρά και ευανάγνωστα γράμματα.
- Να φαίνονται όλες οι ενέργειες που κάνετε.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄**Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες από τις 100.**

1. Να λύσετε την εξίσωση $3x^3 - 24 = 0$.
2. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu x - \sqrt{3} = 0$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$.
3. Να βρείτε την απόσταση του σημείου $A(1, -3)$ από την ευθεία με εξίσωση $4x - 3y + 2 = 0$.

4. Στο διπλανό σχήμα το Κ είναι το κέντρο του κύκλου και η Αχ εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Α.
Να βρείτε τις γωνίες α , β , γ , δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 2)x + \lambda - 4 = 0$ έχει ρίζες πραγματικές και άνισες, για κάθε τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

6. Αν $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{4\tau\epsilon\mu(-\theta) - \sigma\upsilon\nu(\theta - 90^\circ) \cdot \eta\mu(270^\circ - \theta)}{\epsilon\varphi(180^\circ - \theta) \cdot \epsilon\varphi(90^\circ - \theta)}$$

7. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = x^2 - 6x - 7$. Να την παραστήσετε γραφικά και να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$.

8. Αν $-4 < x < -1$ και $4 < \psi < 9$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις

$$A = x^2 - 2\psi$$

$$B = \frac{3 - x}{2\psi}$$

9. Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{1-2\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} - \frac{1-3\eta\mu x}{1-\eta\mu x} = 3\epsilon\phi^2 x$.

10. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \vec{i} - 3\vec{j}$, $\vec{\beta} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$ και $\vec{\gamma} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Να βρείτε:

- το γινόμενο $4(\vec{\beta} + \vec{\gamma})$
- το συνημίτονο της γωνιάς των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$
- την προβολή του διανύσματος $\vec{\gamma}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες από τις 100.

1. Σε δείγμα 100 οικογενειών καταγράφηκε ο αριθμός των παιδιών τους, όπως φαίνεται στον πίνακα:

αριθμός παιδιών (x_i)	0	1	2	3	4	5	6
αριθμός οικογενειών (f_i)	1	8	34	26	15	10	6

Να βρείτε τη μέση τιμή ($\bar{x}$), την τυπική απόκλιση (s) και τον συντελεστή μεταβολής (CV).

2. (α) Να διερευνήσετε και να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} 2x - \lambda\psi = 4 \\ (\lambda - 1)x - \psi = \lambda \end{cases}$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in R$

$$(β) \text{ Αν το σύστημα } \begin{cases} 2x - \lambda\psi = 4 \\ (\lambda - 1)x - \psi = \lambda \\ x + \psi = 3 \end{cases} \text{ είναι συμβιβαστό, να υπολογίσετε την τιμή της}$$

παραμέτρου $\lambda \in R$

3. Μία κορυφή ενός ρόμβου είναι η $(5, 3)$. Η εξίσωση μίας διαγωνίου του ρόμβου είναι $x = 1$ και η εξίσωση μίας πλευράς του ρόμβου είναι $x - 2y = -1$. Να βρείτε:
- (α) την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του ρόμβου
 - (β) το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου
 - (γ) τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών του ρόμβου
 - (δ) το εμβαδόν του ρόμβου.
4. Δίνεται η εξίσωση: $\mu x^2 - (3\mu - 1)x - (\mu + 4) = 0$, με παράμετρο $\mu \in \mathbb{R} - \{0\}$ και ρίζες x_1, x_2 .
- (α) Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση:
 - (i) έχει ρίζες αντίστροφες,
 - (ii) έχει άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της ίσο με 10,
 - (iii) έχει ρίζες που ικανοποιούν τη σχέση $P > S + 1$, όπου P και S το γινόμενο και το άθροισμα των ριζών της, αντίστοιχα.
 - (β) Αν $\mu = -1$, να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες $\rho_1 = 3x_1 - 1$ και $\rho_2 = 3x_2 - 1$.
5. Από σημείο A εκτός κύκλου φέρουμε δυο εφαπτόμενα ευθύγραμμα τμήματα AB, AG και μια τέμνουσα ADE του κύκλου. Να δείξετε ότι :
- (α) Τα τρίγωνα ABD και AEB έχουν ανάλογες πλευρές
 - (β) $(AG)(GD) = (EG)(AD)$.
 - (γ) $(BD)(GE) = (BE)(GD)$.

Οι Εισηγητές

.....
Ζαντής Αντρέας

.....
Αλεξάνδρου Μάριος

.....
Ευστρατίου Αντρέας

.....
Ευριπίδου Γιώργος

Ο Συντονιστής

.....

Καραντάνος Δημήτριος

Ο Διευθυντής

.....

Νικολαΐδης Μελής

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (5-ΩΡΟ)

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 7:45

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 24/05/16

ΩΡΑ ΛΗΞΗΣ: 10:15

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ: (α) Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής .

(β) Να γράφεται **μόνο** με μπλε ή μαύρο μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι)

(γ) **Δεν** επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού

ΜΕΡΟΣ Α'

Το μέρος Α αποτελείται από 10 θέματα. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών οι μαθητές του Α3 πήραν τους πιο κάτω βαθμούς :
15, 18, 12, 17, 15, 19, 16, 20, 13, 15, 14, 18.

Να βρείτε την μέση τιμή, την επικρατούσα και την διάμεσο.

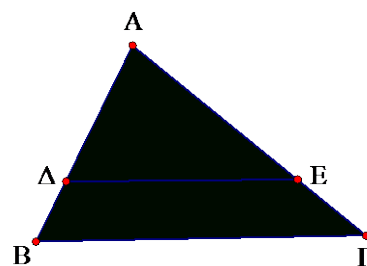
2. Αν $\Delta E \parallel B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

$$\alpha) \frac{\Delta B}{E\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

$$\beta) \frac{A\Delta}{\Delta B} = \frac{E\Gamma}{A\Gamma}$$

$$\gamma) \frac{AB}{A\Delta} = \frac{A\Gamma}{E\Gamma}$$

$$\delta) \frac{A\Delta}{AB} = \frac{A\Gamma}{A\Gamma}$$



3. Δίνονται τα σημεία A(1,4) και M(3, -2). Αν το M είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB, να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του B.

4. Δίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση $\chi^2 - 3\chi + 5 = 0$. Χωρίς να λύσετε την εξίσωση να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

$$(\alpha) 3\chi_1 + 3\chi_2 =$$

$$(\beta) \chi_1^2 + \chi_2^2 =$$

5. Να αποδείξετε ότι $(\sqrt{7-2\sqrt{6}} + \sqrt{7+2\sqrt{6}})^2 = 24$

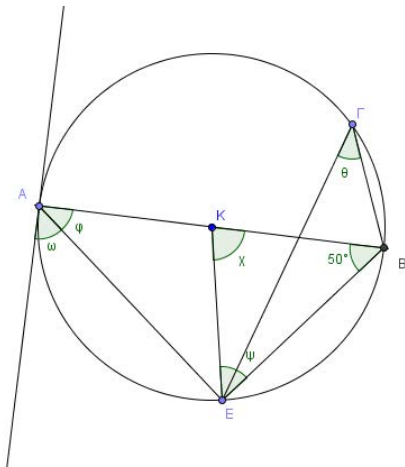
6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ -2\lambda - \mu \end{pmatrix}$.

I. Αν ισχύει ότι $\vec{a} = 3 \cdot \vec{\beta}$, να υπολογίσετε τα λ και μ.

II. Αν $\lambda = -1$ και $\mu = 4$ τότε να υπολογίσετε την τιμή του κ ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 6 \\ \kappa - 5 \end{pmatrix}$ να είναι κάθετο με το διάνυσμα $\vec{\beta}$.

7. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x+2}{x^2+3x} \leq \frac{x}{x+3}$

8. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K, διάμετρο AB, (ε) εφαπτομένη του κύκλου στο A και $\angle KBE = 50^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες: ω, φ, χ, ψ και θ. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



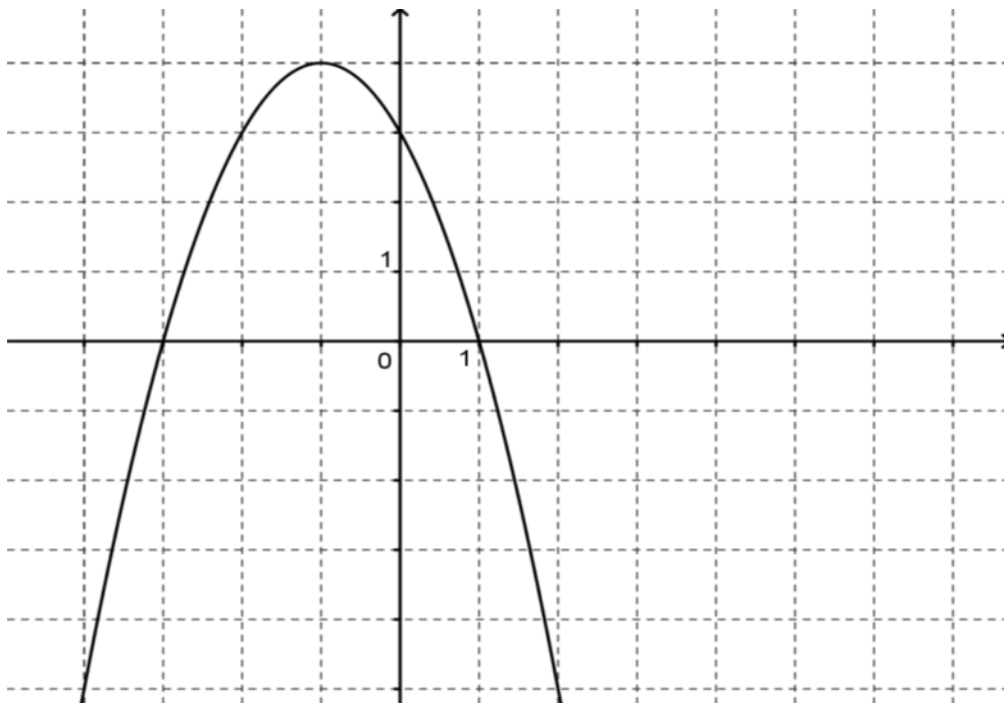
9. Αν $f(x) = \begin{vmatrix} \sin x & 0 & 1 \\ 1 & \sin x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ να βρείτε την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η f(x).

10. Αν $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $x = \sqrt{\eta\mu^2(\pi - \theta) + 2\eta\mu(2\pi + \theta)\sigma\upsilon\nu(-\theta) + \sigma\upsilon\nu^2(\pi + \theta)}$ και $\psi = \frac{\eta\mu^2\theta - \sigma\upsilon\nu^2\theta}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta}$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $x^2 + \psi^2$

ΜΕΡΟΣ Β΄

Το μέρος Β αποτελείται από 5 θέματα. Να λύσετε όλα τα θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:
- (α) το πεδίο ορισμού της,
 - (β) το πεδίο τιμών της,
 - (γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της,
 - (δ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x)=0$
 - (ε) τις τιμές των a , b και γ ,
 - (στ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) > 0$
 - (ζ) το πρόσημο της παράστασης $\frac{f(-\sqrt{3}) \cdot f(\sqrt{2017})}{f(-2016)}$



2. Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων $Ox\psi$ θεωρούμε τα σημεία $A(2,-3)$, $B(-6,4)$, $\Gamma(-5,3)$
- (α) να γράψετε τα διανύσματα θέσης των A, B, Γ συναρτήσει των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}, \vec{j}$
αν θεωρήσουμε ως αρχή το $O(0,0)$
 - (β) να δείξετε ότι τα διανύσματα θέσης των A, B δεν είναι συγγραμμικά
 - (γ) να βρείτε τα μέτρα των $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{O\Gamma}$
 - (δ) να βρείτε το συνημίτονο της γωνιάς των $\vec{OA}, \vec{OB}$
 - (ε) να βρείτε τα $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\vec{O\Gamma} = \kappa \cdot \vec{OA} + \lambda \cdot \vec{OB}$

3. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με Β(3,-2) και εξίσωση ΑΔ: $4x-3y+2=0$. Αν το σημείο Ο είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του με συντεταγμένες, Ο(2,0) να βρείτε:

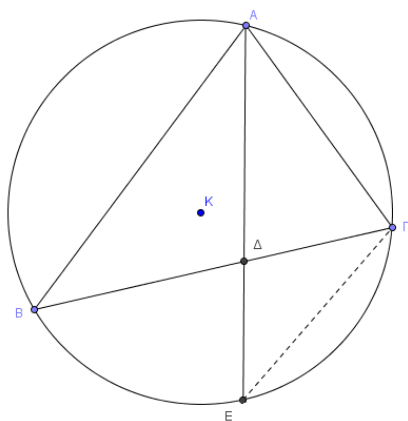
α) τις συντεταγμένες των σημείων Α, Γ

β) το εμβαδόν του ρόμβου

γ) την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η διαγώνιος ΑΓ με την πλευρά ΑΔ.

4. Δίνεται η εξίσωση : $(\tan\theta)x^2 + 2(1+\epsilon\phi\theta)x + 2\eta\mu\theta + \tan\theta = 0$ με ρίζες χ_1 και χ_2 . Να δείξετε ότι:
 $\chi_1^2 + \chi_2^2 + 4\chi_1\chi_2 - 12\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = 6$

5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (Κ,Ρ). Αν ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνιάς $\widehat{ΒΑΓ}$ και ισχύει $(ΑΔ)^2 = (ΔΒ)(ΔΓ)$ να δείξετε ότι: $(ΑΕ)^2 = 2(ΕΓ)^2$



ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

.....

Τάσος Ευαγόρου

.....

Μαρίνα Στυλιανίδη

.....

Γεωργία Γεωργία

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

.....

Γεώργιος Λούβαρης

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

.....

Φοινίκη Χριστοδούλου

3. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με Β(3,-2) και εξίσωση ΑΔ: $4x-3y+2=0$. Αν το σημείο Κ είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του με συντεταγμένες, Κ(2,0) να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των σημείων Α, Γ

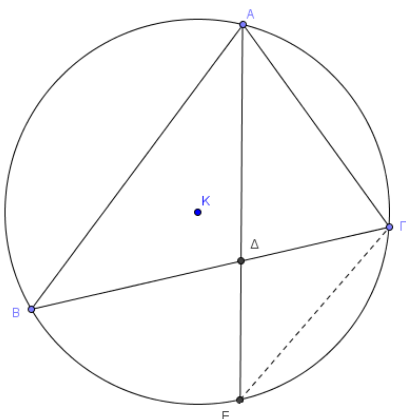
β) το εμβαδόν του ρόμβου

γ) την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η διαγώνιος ΑΓ με την πλευρά ΑΔ.

4. Δίνεται η εξίσωση : $(\tan\theta)x^2 + 2(1+\epsilon\phi\theta)x + 2\eta\mu\theta + \tan\theta = 0$ με ρίζες χ_1 και χ_2 . Να δείξετε ότι:

$$\chi_1^2 + \chi_2^2 + 4\chi_1\chi_2 - 12\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta = 6$$

6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (Κ,Ρ). Αν ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνιάς και ισχύει $(ΑΔ)^2 = (ΔΒ)(ΔΓ)$ να δείξετε ότι: $(ΑΕ)^2 = 2(ΕΓ)^2$



Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

.....

Φοινίκη Χριστοδούλου



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

Μάθημα: Μαθηματικά

Τάξη: Α΄

Χρόνος: 2,5 ώρες

Ημερομηνία: 3 Ιουνίου 2016

Ονοματεπώνυμο:

Τμήμα: Αριθμός:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

Τα θέματα του εξεταστικού δοκιμίου είναι γραμμένα στις σελίδες 2-4.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, Α΄ και Β΄.

ΜΕΡΟΣ Α΄ – Αποτελείται από δέκα (10) ερωτήσεις. Να απαντηθούν **όλες οι ερωτήσεις**. Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

ΜΕΡΟΣ Β΄ – Αποτελείται από πέντε (5) ερωτήσεις. Να απαντηθούν **όλες οι ερωτήσεις**. Κάθε σωστή απάντηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- Να γράφετε μόνο με πένα μαύρη ή μπλε.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου .
- Τα διαγράμματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Όλες οι απαντήσεις και τα σχήματα να μεταφέρονται στο φύλλο απαντήσεων.

ΜΕΡΟΣ Α :

1. Στο διπλανό σχήμα το ευθύγραμμο τμήμα ΣΥ είναι

εφαπτόμενο του κύκλου στο Γ, το Ο είναι το κέντρο

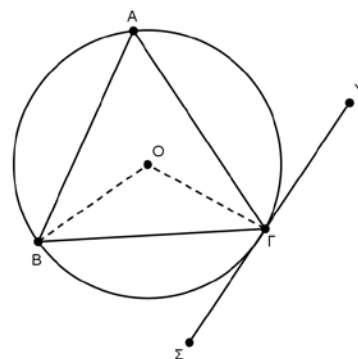
του κύκλου και δίνονται οι γωνίες:

$$\widehat{A\Gamma Y} = 70^\circ \text{ και } \widehat{B\hat{O}\Gamma} = 130^\circ.$$

Να βρείτε: α) τις τρεις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ

β) τη γωνιά ΒΓΣ

(Να δικαιολογήσετε όλες σας τις απαντήσεις)



2. Να λύσετε την ανίσωση : $6x - 3x^2 \leq 0$.

3. Να κάνετε τις πράξεις και να απλοποιήσετε τις παραστάσεις :

α) $(\sqrt{2} - x)^2$, β) $\sqrt[6]{4x^4} \cdot \sqrt[6]{16x^2}$, $x > 0$.

4. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με $A(-2, -2)$, $B(-1, -7)$ και $\Gamma(-11, -3)$. Να

υπολογίσετε : α) Το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$, όπου Μ το μέσο της ΒΓ.

β) Το μήκος της διαμέσου ΑΜ .

5. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - 3x - 4 = 0$ με ρίζες x_1, x_2 . Χωρίς να λύσετε την εξίσωση να βρείτε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

α) $5x_1^3x_2 + 5x_1x_2^3$, β) $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{2}{x_1x_2}$

6. Ένας φοιτητής πήρε σε 5 διαφορετικά μαθήματα για το πρώτο εξάμηνο τους βαθμούς 7, 8, 9, 10 και 6 . Ποια θα είναι η τελική του βαθμολογία αν τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ανάλογη με τους περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος , που είναι αντίστοιχα 2,3,1,4 και 5 .

7. Αν $1 < x < 2$ και $-2 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις : α) $2x + y$ και β) $-\frac{2x}{3y}$.

8. α) Να εξηγήσετε τι παριστάνει η εξίσωση :

$$2x + y - 3 + \mu(2x + y - 5) = 0 \text{ με } \mu \in \mathbb{R}$$

- β) Να λύσετε και να διερευνήσετε το πιο κάτω σύστημα για τις διάφορες

τιμές της παραμέτρου $\lambda, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \lambda x + y = 4 \\ x + y = 4\lambda \end{cases}$$

9. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \eta\mu(-\omega) \cdot \tau\epsilon\mu(180^\circ + \omega) - \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) \cdot \epsilon\phi(2\pi - \omega) \cdot \tau\epsilon\mu(270^\circ + \omega).$$

- α) Να δείξετε ότι $A = 2\epsilon\phi\omega$.

- β) Αν $A = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ και $180^\circ < \omega < 270^\circ$ να βρείτε την τιμή της γωνιάς ω .

10. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Φέρουμε το ύψος AD και την DE κάθετη στην $A\Gamma$. Να δείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ABD και $DE\Gamma$ είναι όμοια

- β) ισχύει η σχέση $(BD)(\Delta\Gamma) = (AB)(DE)$.

ΜΕΡΟΣ Β :

1. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ είναι η πιο κάτω παραβολή. Από το διάγραμμά της, να βρείτε :

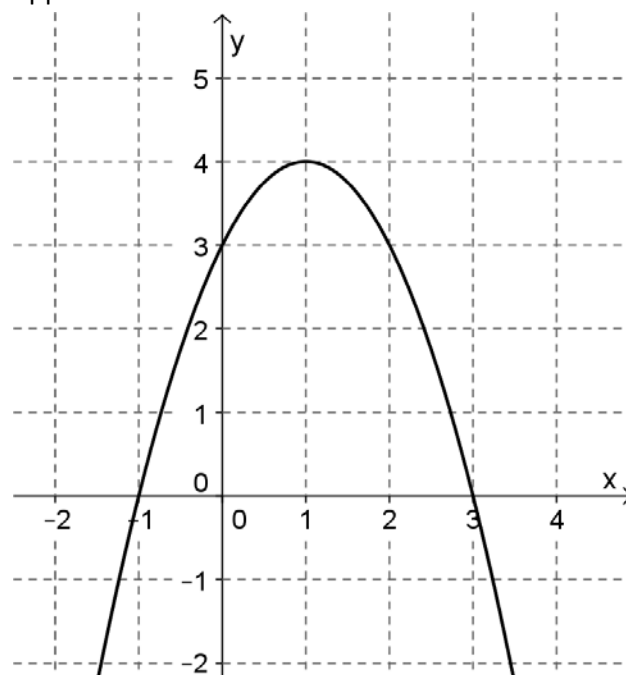
- α) το πρόσημο του a και της διακρίνουσας Δ .

- β) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της f .

- γ) τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της παραβολής.

- δ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$.

- ε) τις τιμές των a, b και γ .



2. Δίνεται η εξίσωση: $(\kappa - 1)x^2 + (4\kappa + 2)x + \kappa^2 - 7 = 0$, $\kappa \neq 1$

Να βρείτε για ποιες τιμές του κ η εξίσωση έχει:

α) ρίζες αντίθετες.

β) ρίζες αντίστροφες.

γ) μια ρίζα τον αριθμό 1.

δ) αν χ_1, χ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να ισχύει η σχέση $\chi_1 \cdot \chi_2 + \chi_1 + \chi_2 \geq 2$

3. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση $x + y = 1$ και η ΑΔ έχει εξίσωση $x - y = -3$.

α) Αν μια από τις κορυφές έχει συντεταγμένες $(7, 2)$, να αποδείξετε ότι είναι η κορυφή Γ.

β) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Α, Β και Δ.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

4. Α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = (3, 4)$ και $\vec{v} = (-2, 1)$. Να βρείτε:

i) Το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

ii) Το συνημίτονο της γωνίας των $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

Β) Αν $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = \vec{i} - 3\vec{j}$ και $\vec{w} = 8\vec{i} + 10\vec{j}$ να βρείτε την τιμή του λ έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{u} + \lambda\vec{v}$ να είναι κάθετο στο $\vec{w}$.

5. Να αποδείξετε τις ταυτότητες : α) $\frac{1}{\tan\theta - 1} - \frac{\sec\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{2}{\sec^2\theta}$.

β) $\eta\mu^4 x + \sigma\upsilon\nu^4 x = 1 - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x$

Η Διευθύντρια :

Δέσποινα Παπαγιάννη

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

Μάθημα: Μαθηματικά

Ημερομηνία: 30/05/2016

Τάξη : Α΄ Λυκείου Κατεύθυνση 5 – ωρο

Χρόνος : 2:30΄

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
4. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο (Τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
5. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

Μέρος Α΄: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Οι παρακάτω παρατηρήσεις παρουσιάζουν τον αριθμό των παιδιών σε 12 οικογένειες.
2, 1, 3, 5, 4, 3, 0, 4, 5, 3, 4, 2. Αν η τυπική απόκλιση είναι 1,47 να βρείτε:
α) Το εύρος των παρατηρήσεων.
β) Τον συντελεστή μεταβλητότητας.
2. α) Να λύσετε την εξίσωση: $(3x - 8)^{\frac{3}{2}} = 8$, $x \geq \frac{8}{3}$.
β) Να κάνετε τις πράξεις: $\sqrt[4]{32x^6y^3\omega^8} : \sqrt[4]{2x^2y^3}$, με $x, y > 0$.
3. Δίνονται τα σημεία A(2 , -3) και B(1 , -5).
α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.
β) Αν $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j}$, να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\vec{v} + \vec{u}$.

$$2x + y + \omega = 4$$

4. Να λύσετε το σύστημα:

$$3x + 2y - \omega = 14$$

$$x + y + 2\omega = -2$$

5. Τρίγωνο ABΓ με συντεταγμένες κορυφών A(-1,10) , B(7, 4) και Γ(-2,7) είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου και το μήκος της ακτίνας του.

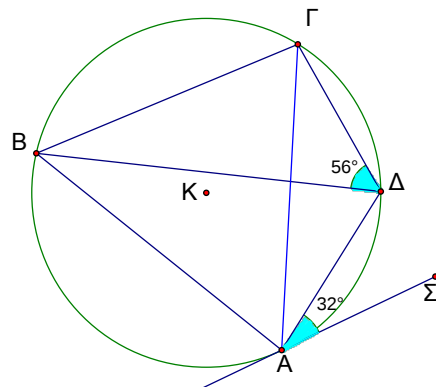
6. Στο διπλανό σχήμα δίνονται κύκλος (Κ,Ρ),

BΓ=AB και ΑΣ εφαπτομένη του κύκλου.

Δίνονται οι γωνίες ΣΑΔ = 32° και ΒΔΓ = 56°.

Να βρείτε τις γωνίες ΒΓΑ και ΓΒΔ.

(Να δικαιολογείσετε τις απαντήσεις σας)



7. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2\mu x + \mu + 3 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ να βρείτε για ποιες τιμές

του μ ισχύει η σχέση $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq -1$.

8. Δίνεται η παράσταση:
$$A = \frac{\sigma\phi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi + \theta)}{\eta\mu^2(-\theta) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} + \sigma\phi(2\pi - \theta) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right).$$

α) Να αποδείξετε ότι: $A = -\sigma\phi\theta\sigma\upsilon\nu\theta$.

β) Σε ποια τεταρτημόρια πρέπει να ανήκει η θ ώστε η $\sqrt{A}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

9. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ ($\hat{A} = 90^\circ$). Εξωτερικά του τριγώνου ABΓ σχεδιάζουμε τετράγωνο BΓΔΕ. Αν οι ευθείες AB και ΑΓ τέμνουν την ευθεία ΔΕ στα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα να δείξετε ότι $(\Delta E)^2 = (E Z) \cdot (\Delta H)$.

10. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (3\lambda - 5)x + 6 - 4\kappa$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις πραγματικές τιμές των κ, λ , ώστε η γραφική παράσταση της f , να έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -3$ και να τέμνει τον άξονα των τεταγμένων στο $(0, 5)$.
- β) Να βρείτε την τιμή του μ ώστε η συνάρτηση $f(x) = \mu x^2 + \sqrt{\mu} \cdot x + \mu$, όπου $\mu \neq 0$ να έχει ελάχιστο το μηδέν.

Μέρος Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + x - 6$. Αφού βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης, την κορυφή και τα σημεία τομής με τους άξονες των συντεταγμένων να την παραστήσετε γραφικά. Στην συνέχεια να βρείτε:
- α) Το πεδίο τιμών της συνάρτησης.
- β) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) > 0$.
2. Οι $\varepsilon_1: 3x - \psi - 5 = 0$ και $\varepsilon_2: x + 2\psi - 4 = 0$ είναι οι εξισώσεις δύο πλευρών ενός παραλληλόγραμμου ΑΒΓΔ και το σημείο $(8, 5)$ μια κορυφή του. Να βρείτε:
- α) Τις συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλογράμμου.
- β) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.
- γ) Το μήκος του ύψους ΒΕ.
- δ) Τη γωνία $\widehat{ΑΒΓ}$.

3. α) Δίνεται η εξίσωση $4x^2 - 4(1 + 2\eta\mu\theta)x + \eta\mu\theta = 0$, με ρίζες x_1, x_2 .

i) Να δείξετε ότι $-1 \leq x_1 + x_2 \leq 3$.

ii) Να βρείτε τη γωνία θ , αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες και $\pi \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\epsilon\phi x \cdot \eta\mu^2 x}{\epsilon\phi x - \eta\mu x} = 1 + \sigma\upsilon\nu x$.

4. α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$. Να βρείτε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ για την

οποία τα διανύσματα $(\vec{\alpha} - \vec{\beta})$ και $(\mu\vec{\alpha} + \vec{\beta})$ είναι κάθετα.

β) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και M σημείο της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε: $\overline{BM} = \frac{1}{3}\overline{M\Gamma}$. Αν

$\overline{AB} = \vec{\alpha}$ και $\overline{A\Gamma} = \vec{\beta}$, να γράψετε το διάνυσμα $\overline{AM}$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

5. Δίνεται κύκλος με κέντρο K . Από σημείο P εκτός του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη $P\Gamma$ και την τέμνουσα PBA . Το E είναι μέσο του μικρότερου τόξου AB και η ΓE τέμνει την AB στο Δ . Η $BZ \parallel \Gamma E$, όπου Z σημείο της $P\Gamma$.
Να δείξετε ότι:

α) $(A\Gamma) \cdot (\Gamma Z) = (A\Delta) \cdot (B\Gamma)$

β) i) $P\Gamma = P\Delta$

ii) $\Gamma Z = \Delta B$

γ) $(\Gamma Z)^2 = (\Delta E) \cdot (ZB)$

Ο Διευθυντής

Ανδρέας Ματσικάρης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου (5-ωρο)

ΩΡΑ: 7:45

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: Δευτέρα 23/ 5 /2016

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- 1) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- 2) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- 3) Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (Μόνο τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
- 4) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στα φύλλα των λύσεών σας.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.**ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

- 1) Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση της υπολογιστικής μηχανής.
 - 1) $\frac{8}{\sqrt{2}}$
 - 2) $\frac{7}{2-\sqrt{3}}$
- 2) Η μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) στη Λευκωσία τις πρώτες δέκα μέρες του Απριλίου ήταν: 20, 18, 20, 17, 18, 17, 16, 18, 16, 10. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβλητότητας των θερμοκρασιών.
- 3) Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) . Αν A, B, Γ είναι σημεία του κύκλου έτσι ώστε $B\hat{\Gamma}A = 65^\circ$ και η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A , να υπολογίσετε με πλήρη αιτιολόγηση των απαντήσεών σας, τις γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, O\hat{A}H$, καθώς και το μέτρο του τόξου $\widehat{AZB}$.

4) Αν $\sin\theta = \frac{5}{13}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = 13\eta\mu\theta - 15\varepsilon\varphi\theta - 5\tau\epsilon\mu\theta.$$

5) Αν $-3 < \chi < 5$ και $-2 < \psi < 7$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

1) 2χ

2) $2\chi - 3\psi + 4$

6) Το σύστημα
$$\begin{cases} \chi + 3\psi = -1 \\ 2\chi - 3\psi = 7 \\ \lambda^2\chi + 4\mu^2\psi = 28 \end{cases}$$
 είναι συμβιβαστό.

1) Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $\lambda^2 - 2\mu^2 = 14$.

2) Αν επιπρόσθετα ισχύει η σχέση $\lambda - 3\mu = 0$ να υπολογίσετε τις τιμές των λ και μ .

7) Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - (\mu + 3)\chi + 7 - \mu = 0$ με ρίζες χ_1, χ_2 .

Να βρείτε στην κάθε περίπτωση για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$:

1) η πιο πάνω εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

2) ισχύει η σχέση $\chi_1 + \chi_2 = \chi_1\chi_2$.

3) ισχύει η σχέση $\chi_1^2\chi_2 + \chi_1\chi_2^2 \leq 0$.

8) Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\lambda^2\chi - 2\lambda + 1 = 49\chi - 13$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

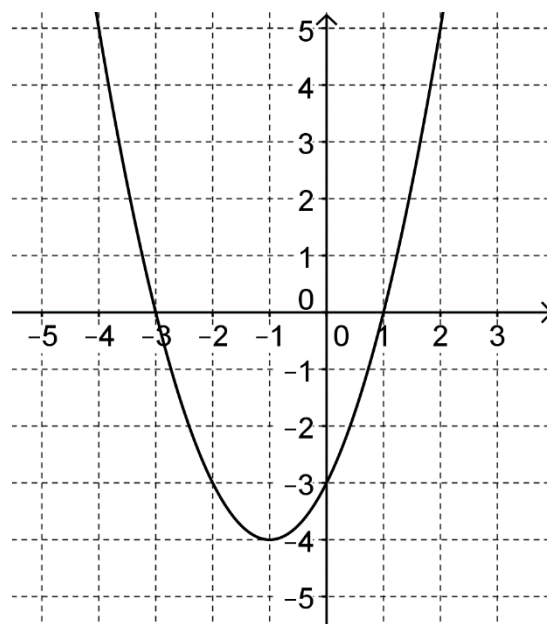
9) Να λύσετε την ανίσωση:
$$\frac{(3-\chi)(\chi^2+3\chi+6)(\chi^2-9)}{\chi^2-8\chi+7} \geq 0$$

10) Να δείξετε ότι οι εξισώσεις
$$\begin{vmatrix} \chi & \psi & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3 \quad \text{και} \quad \begin{vmatrix} \chi & \psi \\ -7 & 3 \end{vmatrix} = 2$$
 παριστάνουν ευθείες κάθετες.

- 1) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

Να βρείτε:

- 1) το πεδίο τιμών της $f(x)$.
- 2) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.
- 3) τις συντεταγμένες της κορυφής και να χαρακτηρίσετε το είδος του ακρότατου (μέγιστο ή ελάχιστο).
- 4) τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$.
- 5) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) < 0$.
- 6) το πρόσημο της διακρίνουσας Δ .
- ζ) τις τιμές των a , b , c .



- 2) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:

- 1) το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.
- 2) το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.
- 3) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- 4) τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{u} = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 4 \\ -\lambda \end{pmatrix}$.

- 3) Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση $3x - 2y - 12 = 0$ και η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $x + 4y - 4 = 0$. Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K(3,2)$.

- 1) Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(2,4)$.
- 2) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ΑΒ.
- 3) Να βρείτε τις εξισώσεις της πλευράς ΒΓ και της διαγωνίου ΑΓ.
- 4) Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

4) Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \theta) \cdot \epsilon\varphi(270^\circ + \theta)}{\tau\epsilon\mu(360^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(360^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ + \theta)}$

και $B = \sigma\tau\epsilon\mu\theta - \sigma\upsilon\nu\theta \cdot \sigma\varphi\theta$.

1) Να δείξετε ότι: $A = \sigma\upsilon\nu\theta$ και $B = \eta\mu\theta$.

2) Εάν ισχύει $7A^2 + 3B^2 = 6$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να δείξετε ότι $\epsilon\varphi^2\theta = \frac{1}{3}$.

Στη συνέχεια να υπολογίσετε τη γωνία θ .

5) Από σημείο Σ εκτός κύκλου να φέρετε τυχαία τέμνουσα ΣAB και την εφαπτομένη $\Sigma\Gamma$ του κύκλου που αντιστοιχεί στο μεγάλο τόξο $\widehat{AB}$ (το σημείο επαφής Γ βρίσκεται στο μεγάλο τόξο $\widehat{AB}$).

1) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\triangle \Gamma\hat{A}\Sigma$ και $\triangle \Gamma\hat{\Sigma}B$ είναι όμοια.

2) Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $(\Gamma\Sigma)^2 = (A\Sigma) \cdot (B\Sigma)$

3) Αν $\Gamma\Sigma = \sqrt{3}$ cm και $AB = 2$ cm, να υπολογίσετε το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος $A\Sigma$.

4) Από το μέσο M του μικρού τόξου $\widehat{AB}$ να φέρετε τη ΓM , η οποία τέμνει την AB στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $(AM) \cdot (B\Gamma) = (\Gamma M) \cdot (B\Delta)$

Ο Διευθύνων

Γιώργος Ιωαννίδης