

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κατεύθυνσης

ΤΑΞΗ: Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 26 ΜΑΪΟΥ 2016

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

β) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ.**

**ΜΕΡΟΣ Α':** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{2x-1}{x^2-5x+6}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \frac{x-1}{2x+3}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $f$ .

β) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$ .

3. Να υπολογίσετε τα όρια: α)  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{x^2+5x}$

β)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5-3x+2}{x^3+7x^2}$

4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων :

α)  $f(x) = 2x^3 - \frac{3}{x} + 4\sqrt{x} + e$

β)  $g(x) = e^x \cdot (\sin^2 x - \tan 2x)$

5. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης  $2a \text{ cm}$ . Το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας σχηματίζει με το ύψος της πυραμίδας γωνία  $30^\circ$ . Να υπολογίσετε συναρτήσει του  $\alpha$ :
- α) Τον όγκο της πυραμίδας.
- β) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας.

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{2\eta\mu^2 x}{x^2}, & x < 0 \\ x^3 + x + \alpha, & x \geq 0 \end{cases}$

Να βρείτε το  $\alpha \in \mathbb{R}$  ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 0$ .

7. α) Να αποδείξετε ότι  $\log_{\alpha^2} x^2 = \log_{\alpha} x$ , με  $x > 0$  και  $1 \neq \alpha > 0$

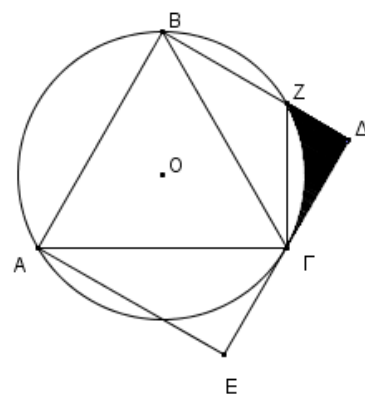
β) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να λύσετε την εξίσωση:  $\log_2(9^{x-1} + 11) = 2 + 2\log_4(3^{x-2} + 4)$

8. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{\frac{x}{2}}, x \in \mathbb{R}$ .

α) Αν  $g(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + f'''(x) + \dots$  να δείξετε ότι  $g(x) = 2e^{\frac{x}{2}}$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $g$  στο σημείο της με τετμημένη  $x = 0$ .

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος  $(O, R)$ , ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σ' αυτόν και ορθογώνιο  $AB\Delta E$ , του οποίου η πλευρά  $\Delta E$  εφάπτεται του κύκλου στο  $\Gamma$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου σκιασμένου τριγώνου  $\Gamma\Delta Z$  (συναρτήσει της ακτίνας  $R$ ).



10. α) Να αποδείξετε την πιο κάτω τριγωνομετρική ταυτότητα:

$$\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 8x}{\eta\mu 8x} + \frac{\eta\mu 8x}{1 - \sigma\upsilon\nu 8x} = \sigma\phi 2x - \epsilon\phi 2x$$

β) Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{1 + \sigma\upsilon\nu 8x}{\eta\mu 8x} + \frac{\eta\mu 8x}{1 - \sigma\upsilon\nu 8x} = 0$  με  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.**

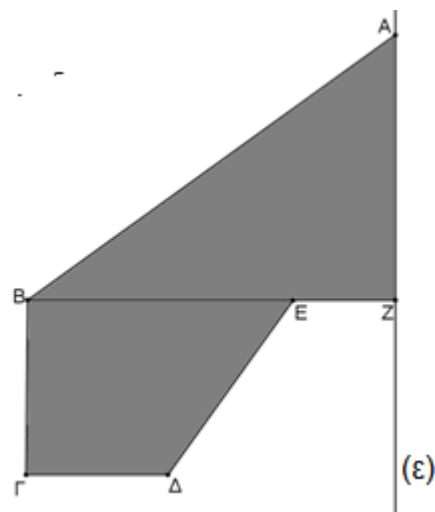
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος (Γ.Π.) και Αριθμητική Πρόοδος (Α.Π.) έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά  $\delta$  της Α.Π. είναι τριπλάσια του λόγου  $\lambda$  της Γ.Π. . Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της Α.Π. είναι ίσο με τον όγδοο όρο της και ο πέμπτος όρος της Α.Π. είναι διπλάσιος του αθροίσματος των απείρων όρων της Γ. Π. , να βρείτε τις δύο προόδους.
2. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με  $A(1, 3)$ ,  $B(4, -1)$  και  $2x - y = -1$  η εξίσωση μιας διαγωνίου του.
  - α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της άλλης διαγωνίου του είναι :  $x + 2y = 2$  και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ .
  - β) Να βρείτε την απόσταση της κορυφής Α από τη διαγώνιο ΔΒ.
  - γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του ρόμβου .
3. Οι πλευρές  $\alpha, \beta, \gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
  - (α) Να αποδείξετε ότι  $\sigmaυν \frac{A-\Gamma}{2} = 2\eta\mu \frac{B}{2}$  .
  - (β) Αν επιπλέον ισχύει  $\beta = 2R\sigmaυν \frac{B}{2}$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισόπλευρο, ( $R$  είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου).
4. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με  $f(x) = \sqrt{x-2}$  και  $g(x) = \frac{x+3}{x-1}$ 
  - α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τιμών των συναρτήσεων  $f$  και  $g$
  - β) Να ορίσετε (πεδίο ορισμού και τύπος) τη συνάρτηση  $f \circ g$
  - γ) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου να δείξετε ότι  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$
  - δ) Να βρείτε το όριο  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(6+h) - f(6)}{h}$
  - ε) Να δείξετε ότι  $(f \circ g)' = \frac{-2}{\sqrt{(5-x)(x-1)^3}}$

5. Στο διπλανό σχήμα το πολύγωνο  $AB\Gamma\Delta EZ$  ( $\hat{A}ZB = \hat{E}B\Gamma = \hat{B}\Gamma\Delta = 90^\circ$ ) με πλευρές  $AB = 10\text{cm}$ ,  $AZ = 6\text{cm}$ ,  $\Gamma\Delta = 3\text{cm}$ ,  $\Delta E = 5\text{cm}$  και  $EZ = 2\text{cm}$  περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία  $(\varepsilon)$  η οποία είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$ .

Να υπολογίσετε:

- το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας
- τον όγκο του στερεού που παράγεται.



Ο Διευθυντής:

.....  
Ορφανίδης Ιωάννης

Ο Εισηγητής

Η Συντονίστρια:

Ο Διευθυντής:

.....  
Νεόφυτου Νεόφυτος

.....  
Ηρακλέους Αναστασία (Β. Δ.)

.....  
Ορφανίδης Ιωάννης

# ΕΜΠΟΡΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΜΙΤΣΗ ΛΕΜΥΘΟΥ

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: 23/05/2016

Διάρκεια: 2 ώρες και 30 λεπτά

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα μόνο με μολύβι).

Επιτρέπεται η χρήση εγκεκριμένης υπολογιστικής μηχανής.

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

Επισυνάπτεται τυπολόγιο εγκεκριμένο από το Υπουργείο Παιδείας και Πολιτισμού.

**ΜΕΡΟΣ Α:** Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Α΄ μέρους.

Κάθε ορθή απάντηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1) Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{2x}{(x^2-1)}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α)  $\psi = \sin x + e^2$

β)  $\psi^2 = 4x \quad x > 0$

3) Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1 = \sin\theta + i\eta\mu\theta$  ,  $z_2 = \sin\varphi + i\eta\mu\varphi$  . Να αποδείξετε ότι  $z_1 z_2 = \sin(\theta + \varphi) + i\eta\mu(\theta + \varphi)$ .

4) Να υπολογίσετε τα όρια : α)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2| + x^2 - 4}{4 - 2x}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{x^2}$

5) Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει κεριά σε κυλινδρικό σχήμα. Η πρώτη ύλη αγοράζεται σε ράβδους από κερί σε σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπίπεδου με διαστάσεις 15,7cm, 10cm και 6cm. Να βρείτε πόσα

κεριά κατασκευάζονται με 100 ράβδους αν το κάθε κεριά έχει διάμετρο βάσης 1 cm και ύψος 12 cm.

6) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης.

β) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  (να δοθεί ο τύπος και το πεδίο ορισμού).

7) Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας, της οποίας όλες οι ακμές είναι ίσες με  $2\alpha$ .

8. Δίνεται κύκλος (K, 5cm) με διάμετρο ΒΓ και χορδή  $AB = 5\sqrt{3}$  cm.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του κυκλικού τομέα ΑΚΓ.

9. ) Δίνεται η συνάρτηση  $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ . Να λύσετε την εξίσωση:

$$g(x) + g(x+1) + g(x+2) + g(x+3) + \dots = 2^{-2x}$$

10. Να βρείτε την τιμή του  $\alpha \in \mathbb{R}$  για την οποία οι γραφικές παραστάσεις των

συναρτήσεων  $f, g$  με  $f(x) = \frac{1}{3} \ln(3x+1)$  και  $g(x) = \eta\mu(\alpha x)$

διέρχονται από το ίδιο σημείο, στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη με κλίση 1.

**ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Σε αριθμητική πρόοδο  $(a_n)$  δίνεται :  $\Sigma_8 = 80$  και  $a_6 - a_4 = 4$ .

α) Να βρείτε τον  $a_{12}$ .

β) Να αποδείξετε ότι  $\Sigma_n = n(n+2) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2. Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται οι συντεταγμένες των κορυφών A (0, 2), B (1, 3) και

οι εξισώσεις δύο πλευρών του:  $x + 3y - 6 = 0$  και  $x + y - 4 = 0$ .

α) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

γ) Να δείξετε ότι η διάμεσος AM είναι παράλληλη στον άξονα  $x'x$

δ) Να βρείτε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου

3α) Να δείξετε  $\frac{1}{\sin 2\theta} + \cos 2\theta = \cos(45^\circ + \theta)$

β) Χρησιμοποιώντας τη πιο πάνω ταυτότητα, να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης

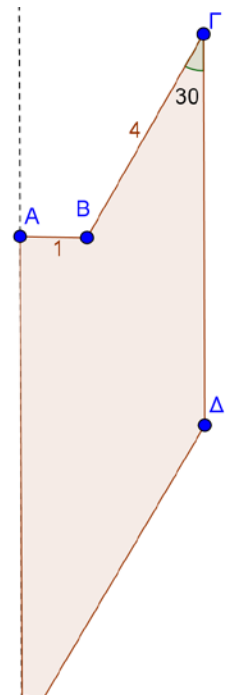
$$\frac{1}{\sin 2\theta} + \cos 2\theta = \cos 4\theta$$

4) Στο διπλανό σχήμα δίνεται το πεντάγωνο ABΓΔΕ

όπου  $AB=1\text{cm}$ ,  $B\Gamma=4\text{cm}$ ,  $AE=6\sqrt{3}\text{cm}$ ,  $B\Gamma \parallel \Delta E$ .

Το πεντάγωνο στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία ΑΕ.

Να υπολογίσετε το **εμβαδόν** και τον **όγκο** του στερεού που παράγεται.



5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$  και η συνάρτηση  $g(x) = x + 1, \quad x > 0$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της σύνθεσης  $f \circ g$ .

β) Αν  $h(x) = \begin{cases} f(x) & x \in (-1, 0] \\ g(x) & x \in (0, \infty) \end{cases}$  να εξετάσετε την συνέχεια της  $h(x)$

στο σημείο  $x_0 = 0$

γ) Να αποδείξετε ότι  $\left(\frac{f}{g}\right)' = -\frac{2}{fg}$

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  είναι παραγωγίσιμη η  $\frac{f}{g}$

### ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Ο

ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....

Αλέξανδρος Σπανός

**ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ**  
**Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

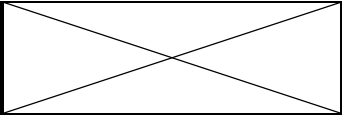
$$\begin{aligned}\eta\mu(A+B) &= \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B \\ \eta\mu(A-B) &= \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B - \sigma\upsilon\nu A \eta\mu B \\ \sigma\upsilon\nu(A+B) &= \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B + \eta\mu A \eta\mu B \\ \sigma\upsilon\nu(A-B) &= \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B - \eta\mu A \eta\mu B\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B &= \eta\mu(A+B) - \eta\mu(A-B) \\ 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B &= \sigma\upsilon\nu(A+B) + \sigma\upsilon\nu(A-B) \\ 2\eta\mu A \eta\mu B &= \sigma\upsilon\nu(A-B) - \sigma\upsilon\nu(A+B)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta\mu^2 A &= 2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu A & \eta\mu^2 A &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2A}{2} \\ \sigma\upsilon\nu^2 A &= \sigma\upsilon\nu^2 A - \eta\mu^2 A & \sigma\upsilon\nu^2 A &= \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2A}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta\mu A + \eta\mu B &= 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \\ \eta\mu A - \eta\mu B &= 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \\ \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B &= 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \\ \sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B &= 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \eta\mu \frac{B-A}{2}\end{aligned}$$

|                      | Εμβαδόν Παράπλευρης<br>Επιφάνειας         | Εμβαδόν Κυρτής<br>Επιφάνειας | Όγκος                             |
|----------------------|-------------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|
| Ορθό πρίσμα          | $E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot v$           |                              | $V = E_{\beta} \cdot v$           |
| Κανονική<br>Πυραμίδα | $E_{\pi} = \frac{\Pi_{\beta} \cdot h}{2}$ |                              | $V = \frac{E_{\beta} \cdot v}{3}$ |
| Κύλινδρος            |                                           | $E_{\kappa} = 2\pi R v$      | $V = \pi R^2 v$                   |
| Κώνος                |                                           | $E_{\kappa} = \pi R \lambda$ | $V = \frac{\pi R^2 v}{3}$         |

|                   |                                                                                   |                                  |                                       |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|
| Κόλουρος<br>κώνος |  | $E_{\kappa} = \pi(R + r)\lambda$ | $V = \frac{\pi v}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ |
|-------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**

**Τάξη:** Β΄ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**Μάθημα:** Μαθηματικά

**Ημερομηνία:** 23 / 05 / 2016

**Αρ. σελίδων:** 5

**Χρόνος εξέτασης:** 2:30 (δύο ώρες και τριάντα λεπτά)

**ΟΔΗΓΙΕΣ**

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες (συμπεριλαμβανομένης και της 1<sup>ης</sup> σελίδας)
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη.
- Το μέρος Α΄ αποτελείται από 10 ασκήσεις. Πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 10.  
(Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **5 μονάδες**)
- Το μέρος Β΄ αποτελείται από 5 ασκήσεις. Πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 5.  
(Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **10 μονάδες**).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικών υλικών.
- Γράφετε μόνο με μελάνι, μπλε ή μαύρου χρώματος. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Δίνεται τυπολόγιο που αποτελείται από μία 1 σελίδα

### **ΜΕΡΟΣ Α΄: ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΚΑΙ ΤΙΣ 10 ΑΣΚΗΣΕΙΣ**

1. Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{2x-1}{x^2-x-6}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός  $z = 3 - 4i$ . Να εκφράσετε την παράσταση  $z^2 - \bar{z}$  στην μορφή  $\alpha + \beta i$ .

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16}$                       β)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{16x^2 - 5}}{8x}$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 2 - 3x$  και  $g(x) = \frac{1}{x}$ .

(α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $g(x)$

(β) το πεδίο ορισμού και τον τύπο της  $g \circ f$  και  $\frac{g}{f}$

5. Σε φθίνουσα γεωμετρική πρόοδο με θετικούς όρους το άθροισμα των απείρων όρων της είναι ίσο με  $\frac{25}{2}$  και το άθροισμα των δύο πρώτων όρων της είναι ίσο με 12. Να σχηματίσετε την πρόοδο.

6. Να βρείτε τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων :

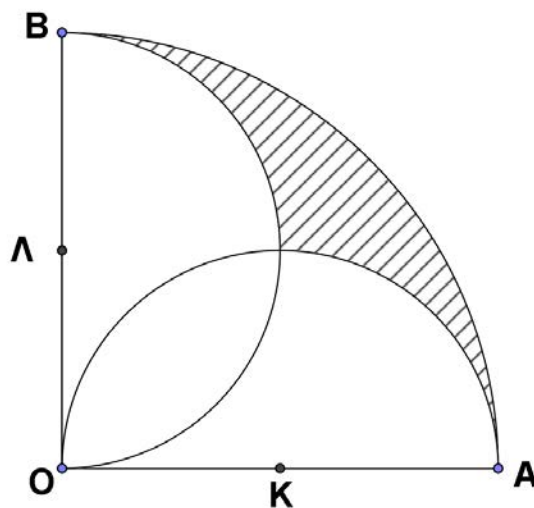
α)  $\psi = e^x \ln(1+2x)$                       β)  $\psi = \frac{1}{x^2 \ln x}$

7. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης  $64\text{cm}^2$ . Το παράπλευρο ύψος της πυραμίδας σχηματίζει με το ύψος της, γωνία  $30^\circ$ . Να βρείτε :

(α) το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας.

(β) τον όγκο της.

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα  $\frac{\eta\mu 2\chi + 1}{\sigma\upsilon\nu\chi + \eta\mu\chi} - \sigma\upsilon\nu\chi = \eta\mu\chi$ .
9. Δίνεται τεταρτοκύκλιο AOB, ακτίνας 2α. Με διαμέτρους τις OA και OB γράφουμε ημικύκλια μέσα στο τεταρτοκύκλιο όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας συναρτήσει του α.



10. Να λύσετε την εξίσωση:  $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$ .

## ΜΕΡΟΣ Β΄: ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΚΑΙ ΤΙΣ 5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση  $x + \psi = 1$  και η ΑΔ έχει εξίσωση  $x - \psi = -3$ .

(α) Αν μια από τις κορυφές έχει συντεταγμένες  $(7, 2)$ , να αποδείξετε ότι είναι η κορυφή Γ.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

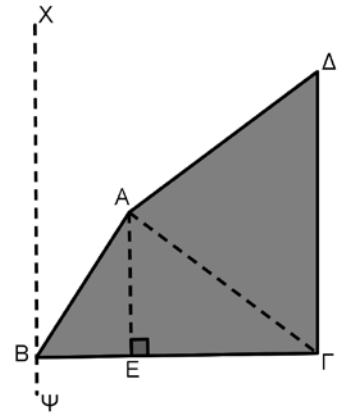
(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών του Α, Β και Δ.

(δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.

2. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ισοσκελές με  $ΑΔ = ΑΓ$  και το τρίγωνο ΑΒΓ έχει πλευρές  $ΑΒ = \sqrt{13}\text{cm}$ ,  $ΒΓ = 6\text{cm}$  και ύψος  $ΑΕ = 3\text{cm}$ . Η ΒΓ είναι κάθετη στον άξονα περιστροφής  $x\psi$  και η ΓΔ είναι παράλληλη προς αυτόν. Το τετράπλευρο ΑΒΓΔΑ περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα  $x\psi$ , να βρείτε:

(α) τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται.

(β) το εμβαδόν της ολικής του επιφάνειας.



3. Δίνεται η συνάρτηση  $y = \ln\sqrt{1+\eta\mu 2\chi}$ ,  $\chi \neq \kappa\pi - \frac{\pi}{4}$

(α) Να δείξετε ότι  $e^{2y}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{d^2y}{dx^2}\right) - \sigma\upsilon\nu 2\chi = 2$ .

(β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της συνάρτησης στο σημείο της με τετμημένη  $\chi = \frac{\pi}{12}$ .

4. (α) Να λύσετε την εξίσωση  $x^{(\log_3 x)-1} = 9$

(β) Αν  $x=9$  είναι η ακέραια ρίζα της εξίσωσης  $x^{(\log_3 x)-1} = 9$  και  $x, y, \omega$  είναι διαδοχικοί όροι

Αριθμητικής Προόδου, ενώ οι  $\chi - 2, y, 2\omega - 10$  είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου, να βρείτε τα  $y, \omega$ .

(βαθμοί.4-6)

5. (α) Αν σε τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  ισχύει η σχέση  $2E = \gamma R(1 + \sin \Gamma)$  να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

(β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu 2x - 5$ ,  $x \in [0, \pi]$ .

Για ποιες τιμές του  $x$  η εξίσωση της εφαπτομένης της πιο πάνω συνάρτησης είναι παράλληλη με την ευθεία  $\psi = 2016$ .

(γ) i.) Να δείξετε ότι :  $\eta\mu 2x - \epsilon\phi x = \epsilon\phi x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x$

ii.) Με τη βοήθεια της πιο πάνω σχέσης ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να λύσετε την εξίσωση:  $\eta\mu 2x - \epsilon\phi x = \sigma\upsilon\nu 2x$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$

(βαθμοί 3-3-4)

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....

Ανδρέας Χριστοδουλίδης

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**

**ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά Κατεύθυνσης

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 18/05/2016

**ΤΑΞΗ:** Β' Ενιαίου Λυκείου

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:** 2,5 ώρες

- Οδηγίες:** α) Να γράφετε με πένα μπλε ή μαύρη (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).  
β) Επιτρέπεται η χρήση προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.  
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.  
δ) Πρέπει να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις αριθμημένες σελίδες.

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

**ΜΕΡΟΣ Α:** (50 μονάδες)

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{5x-3}{(x-3)(x+1)}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α)  $y = 3x^2 - 2x + 4$       (β)  $y = \frac{e^{3x}}{\ln x}$

3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{\ln(x-3)}$

β)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 5x - x^2}{4 + 6x^2}$

4. Με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, να αποδείξετε ότι για κάθε

$n \in \mathbb{N}$  ισχύει:  $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

5. Σε αριθμητική πρόοδο δίνονται  $a_1 = 3$  και  $a_{16} = 3a_5$ .

α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.

β) Να βρείτε το πλήθος των όρων της που έχουν άθροισμα 168.

6. Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με ακμή βάσης ίση με  $8\text{ cm}$  και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας  $E_{\pi} = 64\sqrt{3}\text{ cm}^2$ . Να βρείτε:

α) Τον όγκο της πυραμίδας.

β) Την παράπλευρη ακμή της πυραμίδας.

7. Δίνεται η συνάρτηση  $y = \frac{x-1}{x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της.

β) Αν  $x > 2$  να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης και το πεδίο ορισμού της.

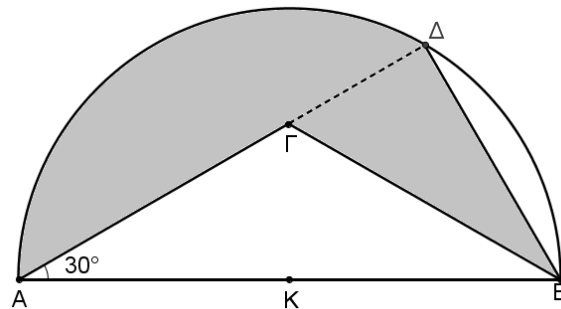
8. Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει η σχέση  $2E = R\beta\sigma\nu\nu(A - \Gamma)$ , να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο.

9. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται ημικύκλιο  $A\Delta B$  με κέντρο  $K$  και ακτίνα  $KA = 6\text{ cm}$ .

Στο εσωτερικό του γράφουμε ισοσκελές τρίγωνο  $A\Gamma B$

( $AG = GB$ ) και  $\hat{\Gamma AB} = 30^\circ$ .

Αν  $\Delta$  είναι το σημείο τομής του ημικυκλίου και της προέκτασης της  $AG$ , να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



10. Αν ο αριθμός  $x$  είναι η μεγαλύτερη ρίζα της εξίσωσης  $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$ , να υπολογίσετε το άθροισμα:  $x + \log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x + \dots$

**ΜΕΡΟΣ Β':** (50 μονάδες)

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Σε τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  δίνονται οι κορυφές του  $A(3, 5)$ ,  $B(-2, 1)$  και οι εξισώσεις των πλευρών του  $AG: 3x - y - 4 = 0$  και  $B\Gamma: 2x + 3y + 1 = 0$ . Να βρείτε:

- α) Την εξίσωση της διαμέσου  $GM$ .
- β) Το μήκος της διαμέσου  $GM$ .
- γ) Την εξίσωση του ύψους  $AD$ .
- δ) Το μήκος του ύψους  $AD$ .
- ε) Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

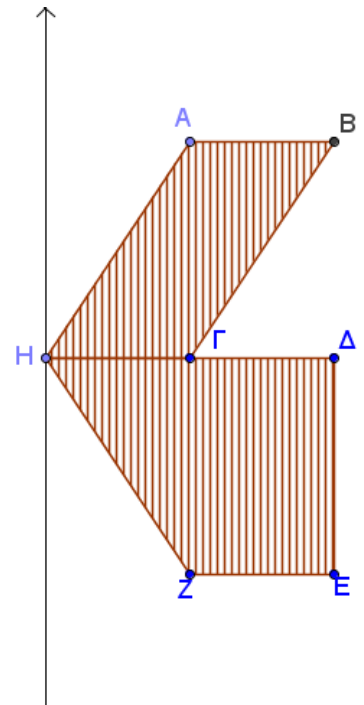
2. α)  $\text{An} x^{\log 2} = 2^{\log x}$  όπου  $x > 0$ , να λύσετε την εξίσωση:  $2^{2\log x} = 3x^{\log 2} + 4$ .

- β) Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{\log_3 x - 1}{\log_3(\frac{x}{3})} = 4 \log_9 x - (\log_3 x)^2 + 4$

3. Το διπλανό σχήμα  $AB\Gamma\Delta EZH$  στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα  $xx'$ .

Το  $AB\Gamma H$  είναι παραλληλόγραμμο, το  $H\Delta EZ$  ορθογώνιο τραπέζιο ( $\hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$ ),  $H\Delta \perp xx'$  και  $(AH) = (ZH)$ . Αν επίσης  $(AB) = 3\text{cm}$ ,  $(AH) = 5\text{cm}$ ,  $(ZE) = 3\text{cm}$ ,  $\Gamma$  μέσο της  $H\Delta$  και  $B, \Delta, E$  συνευθειακά σημεία τότε να υπολογίσετε:

- α) Το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σχήματος.
- β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σχήματος.



4. α) Αν  $\frac{1}{2}\eta\mu 2\theta, \sigma\upsilon\nu \frac{\theta}{2}$ , σφθ είναι αντίστοιχα ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος όρος μιας γεωμετρικής προόδου  $(a_v)$ , να βρείτε τις τιμές της γωνίας  $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ .

β) Για  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  να βρείτε την τιμή του  $v, v \in \mathbb{N}$  ώστε  $a_v = \frac{8}{9}$

5. Δίνεται η καμπύλη  $y = \eta\mu(e^x + \pi) + \sigma\upsilon\nu(e^x + \pi)$

α) Να δείξετε ότι  $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + e^{2x}y = 0$ .

β) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της Α με τετμημένη  $x_A = \ln \pi$  είναι  $y = \pi x - \pi \ln \pi + 1$

γ) Αν η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της Α τέμνει τους άξονες στα σημεία Β και Γ, να δείξετε ότι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ είναι  $(B\Gamma) = \sqrt{\pi^2 + 1} \left( \frac{\pi \ln \pi - 1}{\pi} \right)$

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΕΣ

Η ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΡΙΑ

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Τσιήρτου Ρηγίνα

Γιακουμή Μάγδα (Β.Δ.)

Θεοφάνους Μαρία

.....

.....

.....

Παρασκευά Μαρία

.....

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά κατεύθυνσης

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 24/5/2016

ΤΑΞΗ: Β' κατ.

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 7:45

Οδηγίες:

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- δ) Κατοχή κινητού τηλεφώνου= δολίευση.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τρεις σελίδες

**ΜΕΡΟΣ Α':** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\alpha$  και  $\beta$  έτσι ώστε το πολυώνυμο  $f(x) \equiv (\alpha - 3)x^2 + 2\alpha + \beta - 3$  να είναι το μηδενικό.
2. Να υπολογίσετε τα όρια: (α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^2+x}$  (β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x\ln x + \alpha^2 x^2}{x^2}$
3. Να αποδειχθεί η ταυτότητα:  $\eta\mu 2\alpha + 2\eta\mu^2(45^\circ - \alpha) = 1$ .
4. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{4x^2 - 4x + 1}$  και  $g(x) = -2x + 1$  είναι ίσες.
5. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο  $36 \text{ m}^3$ . Το παράπλευρο ύψος της σχηματίζει με το επίπεδο της βάσης γωνία  $45^\circ$ . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας και την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η παράπλευρη ακμή της με το επίπεδο της βάσης.
6. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x > 0$ . Στη συνέχεια, να βρεθεί η παράγωγος της  $g(x) = \exp^4(f(x))$ .
7. Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι ο αριθμός  $(3^n - 1)$  είναι πολλαπλάσιο του 2,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

8. Αν το  $x$  είναι η μεγαλύτερη από τις ρίζες της εξίσωσης  $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$ , να βρείτε την τιμή της παράστασης  $x + \log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x + \dots$ .
9. Δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο  $AB=2R$ . Στο  $B$  φέρνουμε την εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) και από το  $A$  τη χορδή  $AG=\lambda_4$ . Η προέκταση της  $AG$  τέμνει την εφαπτομένη ( $\epsilon$ ) στο  $\Delta$ . Να βρείτε το εμβαδόν του μεικτογράμμου τριγώνου  $B\Gamma\Delta$  συναρτήσει της ακτίνας  $R$ .
10. Να βρεθεί το σημείο της ευθείας  $3x + 2y = 11$ , το οποίο ισαπέχει από τα σημεία  $A(3,0)$  και  $B(2,1)$ .

**ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες**

1. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = e^x + 1$  και  $g(x) = \ln(x - 2)$ .
- 1) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της σύνθετης συνάρτησης  $f \circ g$
  - 2) Αν η συνάρτηση  $f(x)$  τέμνει τον άξονα  $\psi\psi'$  στο σημείο  $A$  και η συνάρτηση  $g(x)$  τέμνει τον άξονα  $xx'$  στο σημείο  $B$ , να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των σημείων είναι  $A(0,2)$  και  $B(3,0)$ .
  - 3) Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου  $OMB$ , όπου  $O$  η αρχή των αξόνων και  $M$  το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ .
  - 4) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\hat{OMB}$ .
2. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{\eta\mu 4x(1 + \sigma\upsilon\nu 4x)}{\sigma\upsilon\nu^3 2x}$  και  $g(x) = \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 3x$ .
- 1) Να δείξετε ότι: i)  $f(x) = 4\eta\mu 2x$   
ii)  $g(x) = -\eta\mu 2x \cdot \eta\mu 4x$
  - 2) Να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) + g(x) = 0$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ .
  - 3) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης  $f(x) + g(x) = 0$  στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$ .
3. Ορθογώνιο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με γωνίες  $A=\Delta=90^\circ$ ,  $\Gamma=120^\circ$  και πλευρές  $AB=6\text{cm}$ ,  $\Gamma\Delta=3\text{cm}$  περιστρέφεται πλήρως γύρω από την πλευρά  $AB$ .
- 1) Να δείξετε ότι το εμβαδόν που δημιουργείται από την πλευρά  $B\Gamma$  ισούται με το εμβαδόν που δημιουργείται από την πλευρά  $\Gamma\Delta$ .
  - 2) Να βρείτε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πιο πάνω περιστροφή.

4. α) Ένας κυκλικός δίσκος, ακτίνας  $R$ , διαιρείται σε 12 κυκλικούς τομείς, των οποίων τα εμβαδά τους είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Αν το εμβαδόν του μεγαλύτερου τομέα είναι διπλάσιο από το εμβαδόν του μικρότερου, να βρείτε τη γωνιά του μικρότερου τομέα.

β) Αν επιπλέον η ακτίνα του πιο πάνω κυκλικού δίσκου ισούται με 5 cm, να βρεθεί το μήκος της χορδής που αντιστοιχεί στον κυκλικό τομέα με γωνία  $\theta = 20^\circ$ .

5. α) Να δείξετε ότι το άθροισμα  $\Sigma_{30}$  των τριάντα πρώτων διαδοχικών θετικών λύσεων της εξίσωσης  $\epsilon\phi x = -\sqrt{3}$ ,  $x \geq 120^\circ$ , είναι  $\Sigma_{30} = 81900$ .

β) Να βρείτε: i) το νιοστό όρο των παραπάνω θετικών διαδοχικών λύσεων

ii) για ποια τιμή του  $n$  η λύση είναι  $\frac{2015\pi}{3}$  rad.

γ) Αν  $\kappa = 8$ , να βρεθεί για ποια τιμή του  $n$  ισχύει η σχέση

$$\kappa = \ln \left[ (\eta \mu \Sigma_{30})^{3n} + (-\epsilon \sigma \nu \Sigma_{30})^{2n} \right]$$

**ΤΕΛΟΣ**

**Η Διευθύντρια**

.....  
Δρ Αντωνία Λοΐζου

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' Ενιαίου Λυκείου – Κατεύθυνσης**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19/05/2016

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2½ ώρες

Ονοματεπώνυμο: \_\_\_\_\_ Βαθμός: \_\_\_\_\_

Τμήμα: \_\_\_\_\_ Αριθμός: \_\_\_\_\_ Βαθμός ολογράφως: \_\_\_\_\_

Υπογραφή καθηγητή: \_\_\_\_\_

**ΟΔΗΓΙΕΣ :**

- (α) Να γράψετε μόνο με **μπλε** μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).  
(β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.  
(γ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.  
(δ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία διαδικασία.

Το δοκίμιο αποτελείται από 13 σελίδες και τυπολόγιο.

**ΜΕΡΟΣ Α'**

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $g(x) = \frac{2x-3}{x+5}$

2. Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1 = 5 - 3i$  και  $z_2 = 1 + 11i$ . Να βρείτε τα:

(α)  $z_1 + z_2$

(β)  $|z_1 + z_2|$

3. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 12m και όγκο  $384\text{m}^3$ .

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειάς της.

4. (α) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης  $y = e^x \cdot \ln(\sin x)$

(β) Χρησιμοποιώντας κανόνες παραγωγίσης, να δείξετε ότι αν  $y = e^{\mu x}$  τότε  $\frac{dy}{dx} = \mu e^{\mu x}$

5. Να υπολογίσετε τα όρια:

(α)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} 3^{\frac{1}{x-5}}$

(β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{36-x}-6}{x}$

6. (α) Αν η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 + ax + \beta, & x \leq -1 \\ 3x + 1, & -1 < x < 2 \\ x^2 - \beta x + a - 2, & x \geq 2 \end{cases}$$

είναι συνεχής στα  $x = -1$  και  $x = 2$ , να υπολογίσετε τις τιμές των  $\alpha, \beta$ .

(β) Αφού διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano, να δείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = x - \ln^2 x$  έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα  $(\frac{1}{e}, e)$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{3x+6}{x^2+2x-8}$

(α) Να αναλύσετε την  $f(x)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

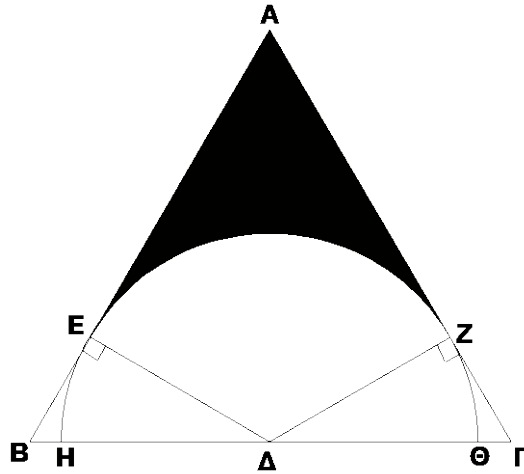
(β) Να δείξετε ότι  $f'(x) = -\frac{2}{(x-2)^2} - \frac{1}{(x+4)^2}$

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x)$  στο σημείο της με  $x = -1$

8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  πλευράς  $4\alpha$  και  $\Delta$  μέσο της  $B\Gamma$ . Αν  $\Delta E \perp AB$ ,  $\Delta Z \perp A\Gamma$  και το  $HEZ\Theta H$  είναι ημικύκλιο ακτίνας  $\Delta E$  να βρείτε :

(α) το εμβαδόν και

(β) την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου.



9. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{\Gamma} < 90^\circ$  ισχύει η σχέση:  $\log(\eta\mu A) - \log 2 = \log(\eta\mu B) + \log(\sigma\upsilon\nu\Gamma)$ .

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

(β) Αν η πλευρά  $\beta = 8$  cm και η γωνία  $\Gamma = 75^\circ$  να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

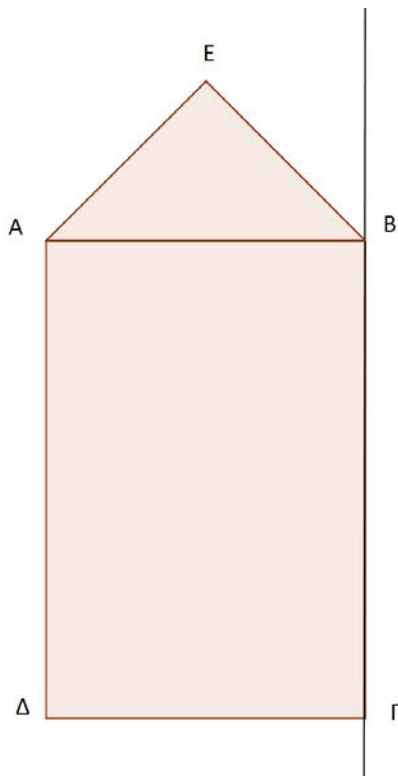
10. Αν  $y = x^\nu$  ( $x \neq 0$ ), να δείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι για κάθε  $\nu \in \mathbf{N}$  ( $\nu \geq 1$ )

ισχύει  $\frac{dy}{dx} = \nu x^{\nu-1}$

### ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 4\text{cm}$  και  $B\Gamma = 6\text{cm}$ . Με υποτείνουσα την  $AB$  κατασκευάζουμε ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο  $AEB$  έξω από το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Το επίπεδο σχήμα  $A\Delta\Gamma B E$  στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία  $B\Gamma$ . Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



2. Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : \lambda x - 3y + \lambda - 3 = 0$  και  $\varepsilon_2 : 7x + y = 17$ . Να βρείτε:

(α) την τιμή του  $\lambda$  ώστε το σημείο  $A(0, 2)$  να απέχει από την  $\varepsilon_1$  μία μονάδα,

(β) για  $\lambda = 4$  την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ ,

(γ) για  $\lambda = 4$  το σημείο  $\Gamma$  (με τετμημένη θετική) της  $\varepsilon_2$  ώστε το εμβαδόν του τριγώνου

$AB\Gamma$  να είναι ίσο με 30 τ.μ., όπου  $B$  το σημείο τομής των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .

3. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$  και  $g(x) = \sqrt{x + 5}$

(α)(i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f(x)$  και  $g(x)$  .

(ii) Να ορίσετε τις συναρτήσεις  $g^{-1}$  και  $f \circ g$  (Τύπος και πεδίο ορισμού).

(β) Να δείξετε ότι:  $f^2(x) \cdot \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - x \cdot \frac{df(x)}{dx} + f(x) = 0$

4. (α) (i) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα  $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$  να αποδείξετε ότι

$$\sin x = 1 - 2\eta\mu^2 \frac{x}{2}$$

(ii) Να αποδείξετε ότι  $\frac{\eta\mu(3x) + \eta\mu(-2x)}{\sin(3x) + \sin(-2x)} = \varepsilon\varphi(\frac{x}{2})$

(β) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω αποτελέσματα, να δείξετε ότι:

$$\frac{1 - \sin x}{\eta\mu x} = \frac{\eta\mu(3x) + \eta\mu(-2x)}{\sin(3x) + \sin(-2x)}$$

(γ) Χρησιμοποιώντας τα πιο πάνω αποτελέσματα, να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{1 - \sin x}{\eta\mu x} = 2\varepsilon\mu^2(\frac{x}{2}) - 5 \quad \text{στο διάστημα } [0^\circ, 360^\circ].$$

5. Ο πέμπτος όρος αριθμητικής προόδου είναι ίσος με  $\log_2(x \cdot y^4)$  και ο όγδοος όρος της είναι ίσος με  $\log_2(x \cdot y^7)$ .

(α) Να δείξετε ότι :  $\alpha_1 = \log_2 x$  και  $\delta = \log_2 y$

(β) Αν τα  $x$  και  $y$  είναι οι λύσεις των εξισώσεων

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-2} = e^{-2\ln 3} \cdot 10^{\log 4} \quad \text{και} \quad \log\left(\frac{1}{5^y + y - 2}\right) = y \cdot (\log 20 - 2) \quad \text{αντίστοιχα,}$$

να βρείτε τον τρίτο και τον έβδομο όρο της πιο πάνω αριθμητικής προόδου.

(γ) Αν οι  $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_7$  είναι ο πρώτος, τρίτος και έβδομος όρος της πιο πάνω

αριθμητικής προόδου, να υπολογίσετε το άθροισμα:  $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_3} + \frac{1}{\alpha_7} + \dots$

## **Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ**

Έλση Μαργερίδου

ΟΙ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ

Αναστασία Ευαγγελίδου  
Χρυστάλλα Αλεξάνδρου  
Δημήτρης Μιχαήλ  
Καρολίνα Παπαχρυσοστόμου  
Ξάνθος Χριστοδούλου

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

Ανδρέας Χειμώνας Β.Δ.

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Έλση Μαργερίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30.5.2016

ΤΑΞΗ: Β΄

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

---

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης και σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής.  
β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).  
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

**ΜΕΡΟΣ Α :** Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{3x+1}{(2x-1)(x+2)}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης  $\eta\mu(2x - 20^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(2,3) και Γ(4,-1). Αν Μ(2,-3) είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ, να βρείτε:

- α) τις συντεταγμένες της κορυφής Β
- β) το εμβαδόν του τριγώνου.

4) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α)  $\psi = \left( x^3 + 5e^{2x} - \eta\mu\frac{\pi}{4} \right)^4$

β)  $\psi = \sigma\upsilon\nu x^2 \cdot \ell n x$

5) Να υπολογίσετε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - 5x}{4x^2 + 6}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|2-x|}{x^2 - 3x + 2}$

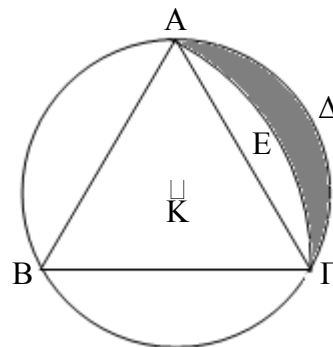
6) Ο όγκος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου είναι τριπλάσιος από τον όγκο κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας. Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας είναι ίσο με  $240 \text{ cm}^2$  και το παράπλευρο ύψος της ίσο με  $10 \text{ cm}$ . Να βρείτε τη διαγώνιο του ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου αν το μήκος της βάσης του είναι ίσο με  $24 \text{ cm}$  και το ύψος του είναι ίσο με το ύψος της πυραμίδας.

7) Φθίνουσας Γεωμετρικής Προόδου ο πρώτος όρος της είναι ίσος με  $2^{2x}$  και ο δεύτερος όρος της ίσος με  $2^{3x-1}$ . Αν το άθροισμα των απείρων όρων της είναι ίσο με  $\frac{1}{3}$ , να σχηματίσετε την πρόοδο.

8) Να αποδείξετε την ταυτότητα  $\frac{\eta\mu 2x + 1}{1 + \eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x} = \frac{1}{2}(\epsilon\phi x + 1)$ .

9) Δίνονται η συνάρτηση  $f(x) = 2 - \sqrt{3-x}$  με πεδίο ορισμού  $A$  και η συνάρτηση  $g(x) = \frac{x-2}{2x+1}$  με πεδίο ορισμού  $B = \left[-5, -\frac{1}{2}\right)$ . Να ορίσετε την συνάρτηση  $f \circ g$ .

10) Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(K, R)$  με κορυφές  $A(3\sqrt{3}, 0)$  και  $B(\sqrt{3}, 6)$ . Με κέντρο το  $B$  και ακτίνα το  $BA$  γράφουμε τόξο  $\widehat{AEG}$  μέσα στον κύκλο. Να βρείτε το εμβαδόν του μηνίσκου που σχηματίζεται από το τόξο  $\widehat{A\Delta\Gamma}$  και το τόξο  $\widehat{AEG}$ .



**ΜΕΡΟΣ Β:** Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Φθίνουσας Αριθμητικής Προόδου, ο τρίτος και ο πέμπτος όρος της έχουν διαφορά 6 και ο τέταρτος όρος της είναι τετραπλάσιος από τον έβδομο όρο της.

α) Να σχηματίσετε την Αριθμητική Πρόοδο. (Να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους)

β) Αν  $\alpha_1 = 21$  και  $\delta = -3$ , να βρείτε την τιμή του  $\beta$  και του  $\gamma$  ώστε το πολυώνυμο

$f(x) \equiv x^2 + (\beta - 1)x + \gamma - 2$  να έχει ρίζα  $\rho = \Sigma_{14} - 22$ , όπου  $\Sigma_{14}$  το άθροισμα των δεκατεσσάρων πρώτων όρων της Αριθμητικής Προόδου και επιπλέον να ισχύει  $f(0) = 1$ .

2) Δίνεται η συνάρτηση  $\psi = f(x)$  με τύπο  $\psi = xe^{2\alpha x}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Αν για  $x = -\frac{1}{4}$  ισχύει  $\frac{d\psi}{dx} = 0$ , να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ .

β) Αν  $\alpha = 2$ ,

ι) Να δείξετε ότι  $e^{-2x} \left( \frac{1}{8} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{d\psi}{dx} + 4\psi \right) = 2xe^{2x}$

ιι) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη  $x = 1$ .

3) Στο διπλανό σχήμα δίνονται:

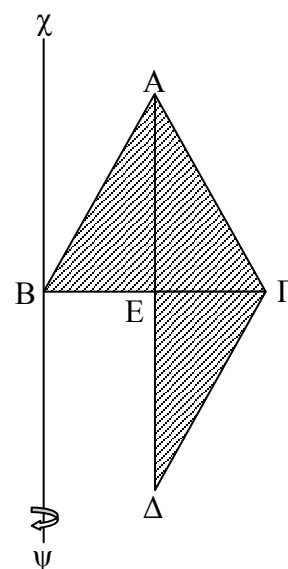
□  
ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο

$AB = 2\alpha \text{ cm}$

$\chi B\psi \parallel A\Delta$

Ε μέσο της ΒΓ και της ΑΔ

Να βρείτε το εμβαδόν και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του ΑΒΕΔΓ γύρω από την ευθεία  $\chi B\psi$  συναρτήσει του  $\alpha$ .



4) α) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση  $\beta + \gamma = 3\alpha$ , να αποδείξετε ότι  $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\beta - \gamma}{2}\right) = 3\eta\mu\frac{\alpha}{2}$ .

β) Αν επιπλέον στο τρίγωνο ισχύει  $3\alpha = 4R\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}$ , να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

5) α) Να δείξετε ότι  $\log_2(3\alpha + 2) - \log_4\alpha^2 = \log_2\frac{3\alpha + 2}{\alpha}$

β) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφή Α  $\left(2\log_2(3\alpha + 2), \log_4\alpha^2\right)$ ,  $\alpha > 1$  και  $\log_2\frac{3\alpha + 2}{\alpha} > 0$   
και η πλευρά του ΒΓ έχει εξίσωση  $x - 2y + 6 = 0$ .

ι) Αν το μήκος του ύψους (ΑΔ)  $= 2\sqrt{5} \text{ cm}$ , να δείξετε ότι  $\alpha = 2$ .

ii) Να βρείτε την εξίσωση του ύψους ΑΔ.

iii) Αν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒ και ΑΓ είναι  $x + y = 7$  και  $7x + y = 43$   
αντίστοιχα, να δείξετε ότι το ύψος ΑΔ είναι και διχοτόμος.

Ο Διευθυντής

Νεόφυτος Παπαϊωάννου

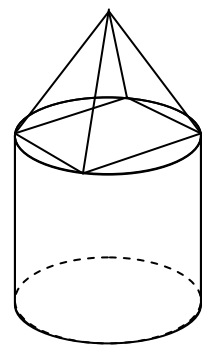
3) Αν  $1, e^{\ell n^2}, \log_x 8$  είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, να βρείτε το  $x$ .

8) Στο διπλανό σχήμα το στερεό αποτελείται από ένα κύλινδρο και μία κανονική τετραγωνική πυραμίδα της οποίας η βάση της είναι εγγεγραμμένη στη βάση του κυλίνδρου.

Ο κύλινδρος έχει εμβαδόν κυρτής επιφάνειας  $48\pi \text{ cm}^2$  και εμβαδόν ολικής επιφάνειας  $64\pi \text{ cm}^2$ . Να βρείτε:

α) Την ακτίνα του κυλίνδρου.

β) Να βρείτε τον ολικό όγκο του στερεού αν η γωνία που σχηματίζει η παράπλευρη έδρα της πυραμίδας με τη βάση της είναι ίση με  $45^\circ$ .



**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016****ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά Κατεύθυνσης**ΤΑΞΗ:** Β' Λυκείου**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 31/05/16**ΔΙΑΡΚΕΙΑ:** 2,5 ώρες**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.  
(β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).  
(γ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.  
(δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.  
(ε) Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ που αποτελείται από μια (1) σελίδα.

**ΜΕΡΟΣ Α':** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α)  $y = e^x + 3x^4 - \pi$

β)  $y = x \cdot \sin x$

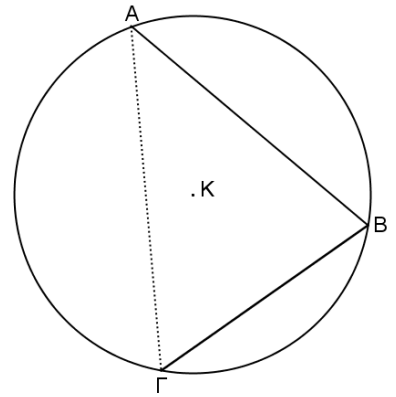
A2. Να υπολογίσετε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 7}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 6x}{x}$

A3. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει  $\sin A = \frac{\gamma}{2\beta}$ , να δείξετε ότι  $\alpha = \beta$ .A4. Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $f(x) = x^2 + 8x + 2$ ,  $x \in [-4, +\infty)$ .Στη συνέχεια να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}(x)$ .A5. Να βρείτε τον αριθμό  $\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ώστε το σημείο  $A(4,2)$  να απέχει απόσταση  $2\sqrt{10}$  μ. από την ευθεία (ε):  $3x - y + \alpha = 0$ .

- A6. Δίνεται κύκλος  $(K, R)$  και οι χορδές του  $AB = \lambda_3$  και  $B\Gamma = \lambda_4$ .  
Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$  συναρτήσει του  $R$ .



- A7. Αν  $\alpha = \sin\theta + 1$ ,  $\beta = \eta\mu\theta + \sin\theta$  και  $\gamma = 1$ , με  $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ , είναι τρεις διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να βρείτε την τιμή της γωνίας  $\theta$ .

- A8. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-2x^2 + x}{x} & , \quad x < 1 \\ 1 & , \quad x = 1 \\ \sqrt{x} - \sqrt{x+3} & , \quad x > 1 \end{cases}$$

- α) Να υπολογίσετε τα όρια :

i.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- β) Να εξετάσετε αν η  $f(x)$  είναι συνεχής στο  $x = 1$ .

- A9. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(2x - x^2)$  και  $g(x) = \sqrt{x-1}$ .

- α) Αφού εξετάσετε αν υπάρχει η  $(f \circ g)(x)$ , να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.

- β) Να δείξετε ότι  $2x^2 + f''(x) \cdot e^{2f(x)} + 8\sqrt{x-1} \cdot g'(x) = 4x$

- A10. Ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  πλευράς  $2\alpha$  περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα που βρίσκεται εκτός του τριγώνου, είναι κάθετος στη  $B\Gamma$  και απέχει  $x$  μονάδες από το  $\Gamma$ .

Αν ο όγκος του παραγόμενου στερεού είναι  $4\pi\alpha^3\sqrt{3}$  κ.μ., να υπολογίσετε το  $x$  συναρτήσει του  $\alpha$ .

---

**ΜΕΡΟΣ Β':** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

---

B1. Δίνεται η ακολουθία  $\alpha_n = 4n - 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία  $(\alpha_n)$  είναι αριθμητική πρόοδος και να γράψετε τους πέντε πρώτους όρους της.
- β) Να βρείτε ποιος όρος της είναι ο αριθμός 99.
- γ) Να δείξετε με την μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι:
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_n = n(2n + 1)$$
- δ) Αν  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$  είναι οι πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου, να βρείτε τον θετικό αριθμό  $x$ , ώστε να ισχύει:

$$\log \frac{1}{x^{\alpha_1}} + \log \frac{1}{x^{\alpha_2}} + \log \frac{1}{x^{\alpha_3}} + \dots + \log \frac{1}{x^{\alpha_n}} = -4n^2 - 2n$$

B2. Ένας ελαιοπαραγωγός βάζει το λάδι του σε δοχείο σχήματος τετραγωνικής πυραμίδας. Το ύψος της πυραμίδας είναι  $3^{x-2}m$ , η πλευρά της βάσης της είναι  $6m$  και το απόστημα της είναι  $\sqrt{6 \cdot 3^{x-2}} m$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- α) Να δείξετε ότι το ύψος ισούται με  $3m$  και το απόστημα με  $3\sqrt{2}m$ .
- β) Να βρείτε πόσο λάδι χρειάζεται για να γεμίσει το δοχείο.
- γ) Αν αδειάσει το λάδι σε άλλο δοχείο σχήματος ορθού πρίσματος με βάση ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς  $3m$  θα γεμίσουν τα  $\frac{2}{3}$  του δοχείου. Να βρείτε το ύψος του.

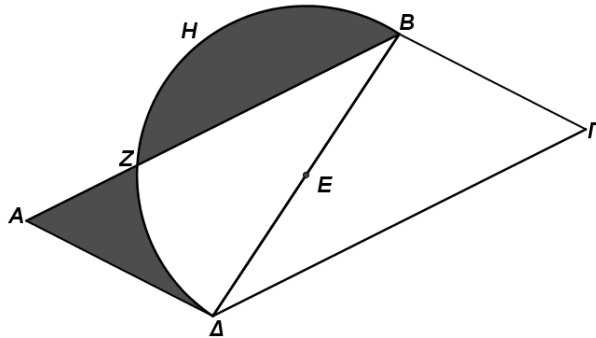
B3. Δίνεται το πολυώνυμο

$$f(x) = \frac{-3x^2 + x - 4}{(x^2 + 1)(x - 1)}$$

- α) Αν  $z_1, z_2$  οι ρίζες της εξίσωσης  $f(x) = 0$  και ισχύει  $(z_1 - z_2)^2 = \alpha + \beta i$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .
- β) Να αναλύσετε το πολυώνυμο σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
- γ) Με τη βοήθεια του (β) ή με όποιονδήποτε άλλο τρόπο, να βρείτε την εξίσωση της καθέτου της καμπύλης της  $f(x)$  στο σημείο με τετμημένη  $x = -1$ .

B4. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Με κέντρο το μέσο Ε της διαγωνίου ΒΔ γράφουμε το ημικύκλιο ΔΖΗΒ, όπως φαίνεται στο σχήμα. Αν οι εξισώσεις των ΑΒ και ΒΔ είναι οι  $x - 2y = -10$  και  $3x - 2y = -6$  αντίστοιχα και  $E(0,3)$ ,  $A(-6,2)$ .

- α) i. Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.  
 ii. Να δείξετε ότι η γωνία ΑΒΔ είναι κατά προσέγγιση ακεραίου  $30^\circ$  και το ευθύγραμμο τμήμα ΔΕ είναι  $\sqrt{13}$  μ.  
 β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



B5. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} + \frac{x}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{x}{2}\right), \quad h(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x + 1} \cdot \frac{2\sigma\upsilon\nu x}{1 - \epsilon\varphi x}$$

και  $g(x) = \sqrt{2}[f(x) - 1]$ .

Να δείξετε ότι:

- α)  $h(x) = \sigma\upsilon\nu x$   
 β)  $g(x) = \eta\mu x$   
 γ)  $g'(x) = h(x)$ , χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου.

Οι διδάσκοντες

Η συντονίστρια

Ο διευθυντής

.....  
Κυριακίδης Κωνσταντίνος

.....  
Πολυκάρπου Ελευθερία

.....  
Σωτήρης Φλουρής

.....  
Μιχαήλ Μύρια

.....  
Χατζηαραλάμπους Γεωργία

.....  
Χρίστου Χρίστια

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.  
Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού και διορθωτικής ταινίας.  
Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρη πένα. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.  
Το γραπτό αποτελείται από 4 σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α' :** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

**A1.** α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$ .  
β) Να εκφράσετε την  $f(x)$  ως άθροισμα απλών κλασμάτων.

**A2.** Να βρείτε τα πιο κάτω όρια συναρτήσεων :

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5x}{3x-2x^2}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$

**A3.** Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α)  $f(x) = e^{3x} \cdot \sin 2x$

β)  $g(x) = \frac{2x}{x^2+1}$

**A4.** Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1+\sin 2\alpha} \cdot \frac{1-\sin 2\alpha}{2\sin^2 \alpha} = \epsilon\varphi^3 \alpha$

**A5.** Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει παράπλευρο ύψος  $2\sqrt{2}$  cm . Αν το ύψος της σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με το παράπλευρο ύψος, να υπολογίσετε:

α) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της πυραμίδας

β) τον όγκο της πυραμίδας.

**A6.** Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης  $y^2 + x^3y - 3x^2 + 3 = 0$  στο σημείο της με  $x = 1$  και  $y < 0$ .

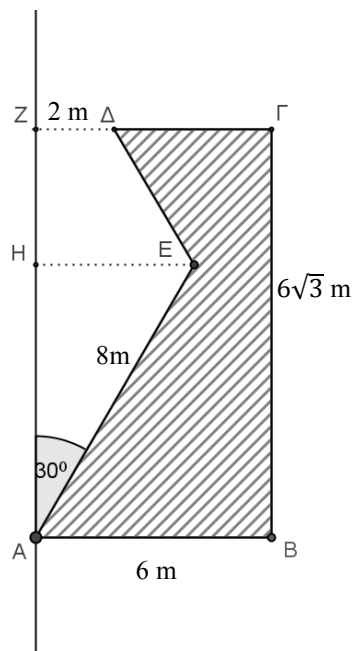
- A7.** Σε μια ευθεία θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία A,B,Γ,Δ,E ώστε τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων AB, BΓ, ΓΔ και ΔE να είναι οι τέσσερις πρώτοι όροι αριθμητικής προόδου. Αν  $(AΓ) = 16 \text{ cm}$  και  $(ΓE) = 24 \text{ cm}$  να βρείτε τα μήκη των AB, BΓ, ΓΔ και ΔE .
- A8.** Με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής να αποδείξετε ότι  $\forall n \in \mathbb{N}$  ισχύει:  

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$
- A9.** Στο ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων δίνονται τα σημεία  $A(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$  και  $B(2, 0)$  .  
 α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.  
 β) Να υπολογιστεί η απόσταση OΓ της αρχής των αξόνων από την ευθεία AB.  
 γ) Με κέντρο το O και ακτίνα την OΓ γράφουμε τόξο ΓΔ στο πρώτο τεταρτημόριο, όπου Δ το σημείο τομής του τόξου με τον άξονα  $x\chi'$  . Να υπολογιστεί το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου BΓΔ.
- A10.** Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση  $\beta + \gamma = \alpha\sqrt{2}\sin(\frac{\beta-\gamma}{2})$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

### **ΜΕΡΟΣ Β΄:**

- B1.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln(2-x)$ ,  $g(x) = \sqrt{x-1}$  και  $h(x) = \ln(x-1)$ .  
 α) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της g .  
 β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις  $f-h$  και  $\frac{f}{h}$  .  
 γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση fog.
- B2.** Δίνεται η συνάρτηση  $y = \ln\sqrt{1+3x^2}$ .  
 α) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x}{1+3x^2}$ .  
 β) Να αποδείξετε ότι:  $e^{2y} \frac{d^2y}{dx^2} + 2e^{2y} (\frac{dy}{dx})^2 - 3 = 0$ .
- B3.** Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Η διαφορά της αριθμητικής προόδου, δ και ο λόγος της γεωμετρικής προόδου, λ συνδέονται με τη σχέση  $\lambda\delta=1$ . Το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου ισούται με το  
 όριο  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{\sqrt{x^2-5}-2}$ .  
 Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου ισούται με το δέκατο όρο της. Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.

- B4.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\Gamma(2,5)$  και πλευρές στις ευθείες  $(\varepsilon_1): x - y + 2\eta\mu\omega\sigma\upsilon\nu\omega = 0$ ,  $(\varepsilon_2): \chi\eta\mu\omega - \gamma\sigma\upsilon\nu\omega - 2\eta\mu^3\omega = 0$ ,  $\eta\mu\omega \neq 0$ ,  $\sigma\upsilon\nu\omega \neq 0$ . Αν τα σημεία τομής των ευθειών με τον άξονα  $yy'$  έχουν αντίθετες τεταγμένες, τότε:
- Να βρείτε τη γωνία  $\omega \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ .
  - Να αποδείξετε ότι το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο.
  - Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών  $A$ ,  $B$  και  $\Delta$ .
  - Να βρείτε το εμβαδόν του  $AB\Gamma\Delta$ .
- B5.** Στο πιο κάτω σχήμα το  $AB\Gamma\Delta E$  περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία  $AZ$ . Η  $B\Gamma$  είναι παράλληλη προς την  $AZ$  και οι  $\Delta Z$ ,  $HE$  και  $BA$  είναι κάθετες στην  $AZ$ . Αν  $(AB) = 6\text{ m}$ ,  $(B\Gamma) = 6\sqrt{3}\text{ m}$ ,  $(\Delta Z) = 2\text{ m}$ ,  $(AE) = 8\text{ m}$  και  $\widehat{EAH} = 30^\circ$ , να βρείτε την επιφάνεια και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜ.: 1 / 6 / 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κατεύθυνσης

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ½ ώρες

ΑΡ. ΣΕΛΙΔΩΝ: 4

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
  2. Να γράφετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
  3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
  4. Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνονται καθαρά τα βήματα επίλυσής τους.
  5. Σύνολο μονάδων δοκιμίου 100.
  6. Επισυνάπτεται τυπολόγιο στο τέλος του γραπτού.

**ΜΕΡΟΣ Α'**

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα  $K \equiv \frac{3x+19}{(x-7)(x+1)}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων

$$(\alpha) f(x) = (x^2 + 3)^5$$

$$(\beta) f(x) = \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x - 1}$$

3. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, να αποδείξετε ότι ισχύει η πρόταση

$$1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο ίσο με  $384 \text{ cm}^3$  και το ύψος της είναι ίσο με τα  $\frac{2}{3}$  της ακμής της βάσης της. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας και τη γωνία που σχηματίζει η παράπλευρη έδρα της πυραμίδας με τη βάση της (η απάντηση να δοθεί με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου).

5. Δίνεται η συνάρτηση  $y = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$ , να δείξετε ότι:

$$(\alpha) \frac{dy}{dx} = \frac{x+3}{y}$$

$$(\beta) y \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1$$

6. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση  $\psi = e^{2x} \cdot \sigma\upsilon\nu x$ .

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη  $x = 0$ .

(β) Αν η πιο πάνω εφαπτομένη σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με την ευθεία  $\psi = \mu x - 5$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , να υπολογίσετε τις τιμές του  $\mu$ .

7. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 2x}$ ,  $g(x) = 1 - \frac{3}{x}$  και  $h(x) = \sqrt{2x-1}$ .

(α) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο για το οποίο οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  είναι ίσες. (μον. 3)

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $g \circ h$  (τύπο και πεδίο ορισμού). (μον. 2)

8. Να λύσετε την εξίσωση:  $\log(3^{1+\log x} - 6) + \log 6 = \log x \cdot \log 3 + \log 14$ .

9. Αν  $A = \eta\mu^2 5x - \eta\mu^2 3x$  και  $B = 2\eta\mu 9x \cdot \eta\mu 4x - 2\eta\mu 12x \cdot \eta\mu x$ .

(α) Να δείξετε ότι  $A = \eta\mu 2x \cdot \eta\mu 8x$  και  $B = 2\eta\mu 3x \cdot \eta\mu 8x$ .

(β) Να λύσετε την εξίσωση  $B = 2A$ .

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1} & , \quad x < 1 \\ 3\mu - 1 & , \quad x = 1 \\ \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2 - x} + kx^3 + 3 & , \quad x > 1 \end{cases}$$

Αν η  $f$  είναι συνεχής,

(α) Να υπολογίσετε τις τιμές των  $k$  και  $\mu$  όπου  $k, \mu \in \mathbb{R}$ . (μον. 3,5)

(β) Για  $k = -2$  και  $\mu = 1$ , να δείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα  $(0, 2)$ . (μον. 1,5)

## ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  έχει κορυφές  $A(2, -1)$ ,  $B(1, 3)$ , εξίσωση μίας πλευράς του τη  $2x - \psi + 1 = 0$  και εξίσωση μίας διαγωνίου του την  $8x - \psi - 17 = 0$ .

(α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών του  $\Gamma$  και  $\Delta$ . (μον. 5)

(β) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής  $A$  από την πλευρά  $B\Gamma$ . (μον. 2)

(γ) Αν η κορυφή  $\Gamma$  έχει συντεταγμένες  $(3, 7)$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ . (μον. 3)

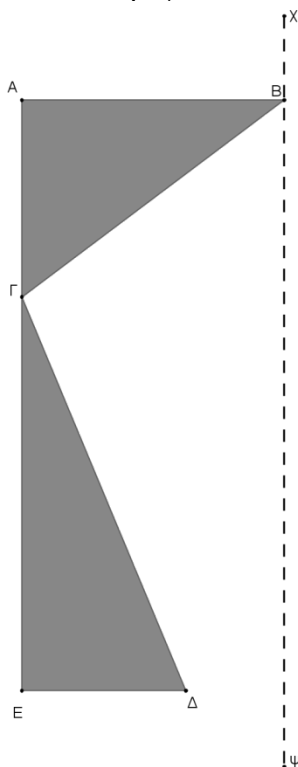
2. Στο πιο κάτω σχήμα, τα τρίγωνα  $\triangle AB\Gamma$  και  $\triangle \Delta E\Gamma$  είναι ορθογώνια ( $\hat{A} = 90^\circ, \hat{E} = 90^\circ$ ) και τα σημεία A, Γ, E είναι συνευθειακά. Δίνονται τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB = 8\text{cm}$ ,  $A\Gamma = 6\text{cm}$ ,  $\Gamma\Delta = 13\text{cm}$  και  $E\Delta = 5\text{cm}$ .

Το  $AB\Gamma\Delta E\Delta$  περιστρέφεται μία πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα  $x\psi$  ( $x\psi \parallel AE$ ).

Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και

(β) τον όγκο του στερεού που παράγεται.



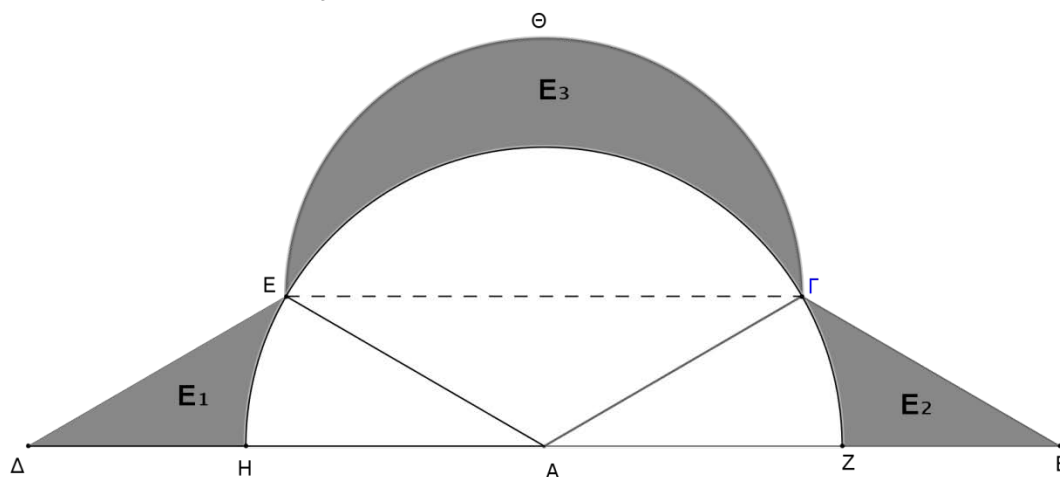
3. Στο σχήμα που ακολουθεί, το τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  έχει εμβαδόν  $E = 4\sqrt{3}\text{cm}^2$ , πλευρά

$AB = 4\sqrt{3}\text{cm}$  και γωνία  $\hat{\Gamma}AB = 30^\circ$ . Να επιλύσετε το τρίγωνο.

Τα τρίγωνα  $\triangle AB\Gamma$  και  $\triangle A\Delta E$  είναι ίσα ( $\triangle AB\Gamma = \triangle A\Delta E$ ). Με κέντρο το A και ακτίνα την AΓ φέρουμε το ημικύκλιο ZΓΕΗ και με διάμετρο τη ΓΕ φέρουμε το ημικύκλιο ΓΘΕ.

Δημιουργούνται τρεις περιοχές με εμβαδά  $E_1$ ,  $E_2$  και  $E_3$ .

Να δείξετε ότι  $E_1 + E_2 + 4E_3 = 24\sqrt{3}\text{cm}^2$ .



4. Δίνεται αριθμητική πρόοδος  $(\alpha_n)$  με πρώτο όρο  $\alpha_1 = \log \alpha$  και διαφορά  $\delta = \frac{1}{2016} \log \frac{\beta}{\alpha}$  με  $0 < \alpha < \beta$ .
- (α) Να αποδείξετε ότι  $\alpha_{2017} = \log \beta$ . (μον. 2)
- (β) Αν  $\alpha\beta = 100$
- (i) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 2017 πρώτων όρων της προόδου. (μον. 3)
- (ii) Αν το  $\alpha$  είναι η λύση της εξίσωσης  $5^{\alpha+1} - 25 \cdot 5^{-\alpha} - 20 = 0$ , να υπολογίσετε τη διαφορά της προόδου. (μον. 5)
5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(x+1)^k$ ,  $x > -1$  και  $k \in \mathbb{B} - \{0\}$ .
- (α) Να δείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  έχει τύπο  $f^{-1}(x) = e^{\frac{1}{k}x} - 1$  και ακολούθως να βρείτε το πεδίο ορισμού της. (μον. 3)
- Αν  $g(x) = (f^{-1}(x))' + (f^{-1}(x))'' + (f^{-1}(x))''' + \dots$  και  $k > 1$ ,
- (β) Να δείξετε ότι  $g(x) = \frac{e^{\frac{1}{k}x}}{k-1}$  (μον. 4)
- (γ) Να υπολογίσετε την τιμή του  $k$  για την οποία ισχύει:
- $$\lim_{x \rightarrow 0} (2\sigma\upsilon\iota\chi + g(x) - 4^x) = f(e-1). \quad (\text{μον. 3})$$

Ο Διευθυντής:

.....

Παπαμιλιτιάδου Δημήτρης

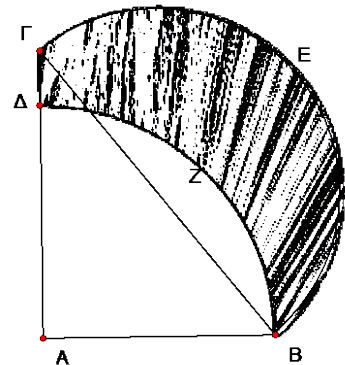
Χρόνος: 2,5 ώρες

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- β) Να γράφετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας .
- ε) Δίνεται τυπολόγιο.

**ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1

5. Σε τρίγωνο ABΓ να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση  $\beta\sigma\upsilon\nu B + \gamma\sigma\upsilon\nu\Gamma = \alpha\sigma\upsilon\nu(B - \Gamma)$
6. Να λύσετε την εξίσωση :  $|\ln x - 2| = 2\ln x + 5$
7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης  $y = -e^{3x} \ln(x^2 - \varepsilon\varphi x + 1)$  στο σημείο της με  $x = 0$ .
8. Αν  $\log(2 + 2\sigma\upsilon\nu 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu^2 2\chi + 2\sigma\upsilon\nu^3 2\chi + \dots) = 2$  με  $\chi \neq \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ , να δείξετε ότι  $\eta\mu\chi = \frac{1}{10}$ .
9. Αν  $\eta\mu\psi = 2\eta\mu\chi$  να δείξετε : α)  $\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = 1 + 3.\tau\epsilon\mu^2\psi$
- β)  $\sigma\phi\psi \cdot \frac{d^2\psi}{dx^2} - \left(\frac{d\psi}{dx}\right)^2 = -1$
10. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ορθογώνιο με  $A=90^\circ$ ,  $AB = 42\text{cm}$  και  $A\Gamma = 56\text{cm}$ . Με διάμετρο την ΒΓ σχηματίζουμε ημικύκλιο έξω από το τρίγωνο και με κέντρο το Α και ακτίνα την ΑΒ σχηματίζουμε τεταρτοκύκλιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου σχήματος ΔΖΒΕΓΔ.



**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄**  
**Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{2x-5}{x-1}$ ,  $x \geq 2$  και  $g(x) = e^x$ . Να βρείτε :

(α) Το πεδίο τιμών της  $f(x)$ . (β.2)

(β) Τον τύπο, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της αντίστροφης συνάρτησης  $f^{-1}(x)$ . (β.1,5)

(γ) Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της  $g(x)$ . (β.1)

(δ) Τον τύπο, το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της αντίστροφης συνάρτησης  $g^{-1}(x)$ . (β.1,5)

(ε) το πεδίο ορισμού και τον τύπο της  $f \circ g$  και  $\frac{g}{f}$ . (β.4)

2. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ) με κορυφές Α(3,1), Β(-3,-5) και Δ(6,5).

Να βρείτε :

α) Τα μήκη των πλευρών ΑΒ, ΑΔ καθώς και το μήκος της διαγωνίου ΒΔ του τραpezίου. (β.1,5)

β) Το μέτρο της γωνίας Α του τραpezίου σε προσέγγιση ακεραίου. (β.2)

γ) Την απόσταση μεταξύ των παραλλήλων πλευρών του. (β.2)

δ) Τις συντεταγμένες της κορυφής Γ του τραpezίου. (β.3)

ε) Αν οι συντεταγμένες της κορυφής Γ είναι Γ(-7,-8), το εμβαδόν του τραpezίου. (β.1,5)

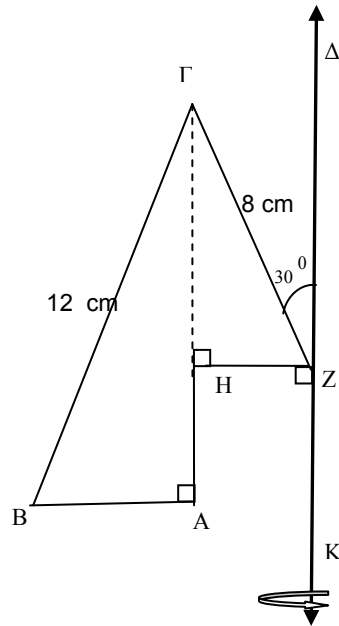
3. i) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x \cdot \eta\mu x - \eta\mu^3 x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ ,  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

α) Να δείξετε ότι  $f(x) = \frac{\eta\mu 4x}{4}$  (β.2,5)

β) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4f(x)}{x^2 + 3x}$  (β.2,5)

ii) Να λύσετε την εξίσωση  $2 \log \left( \sqrt{2} \sigma\upsilon\nu \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \right) = \log(\sigma\upsilon\nu 2x)$  όταν  $x \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$  (β.5)

4. Στο διπλανό σχήμα τα  $\square \Gamma H Z$  και  $\square A B \Gamma$  είναι ορθογώνια τρίγωνα με  $\hat{\Gamma} \hat{H} Z$  και  $\hat{A} \hat{B} \Gamma$  αντίστοιχα. Αν  $\hat{\Gamma} \hat{H} Z = 30^\circ$ ,  $\Gamma Z = 8 \text{ cm}$ ,  $HA = 2\sqrt{3} \text{ cm}$  και  $B\Gamma = 12 \text{ cm}$ , να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από πλήρη περιστροφή του  $Z\Gamma B A H Z$  γύρω από την ευθεία  $\Delta K$ .



5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) \equiv \frac{3x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 17x + 8}{(x^2 - 2x + 3)(x - 1)}$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

α) Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{3x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 17x + 8}{(x^2 - 2x + 3)(x - 1)}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων. (β.5)

β) Χρησιμοποιώντας το πιο πάνω ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να αποδείξετε ότι

$$f'(x) = 3 + \frac{2(1-x)}{x^2 - 2x + 3} - \frac{2}{(x-1)^2} \quad (\beta.2)$$

γ) Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $g(x) \equiv \frac{3x^4 - 10x^3 + 20x^2 - 17x + 8}{(x^2 - 2x + 3)(x - 1)} + 1 - 3x - \frac{2}{x-1}$  (β.3)

Ο Διευθυντής

Λοΐζος Σέπος

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ**  
**ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**

**1. Τριγωνομετρία**

$$\begin{aligned} \eta\mu(A \pm B) &= \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \eta\mu B \sigma\upsilon\nu A & \sigma\upsilon\nu(A \pm B) &= \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B \\ 2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B &= \eta\mu(A - B) + \eta\mu(A + B) & 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B &= \sigma\upsilon\nu(A - B) + \sigma\upsilon\nu(A + B) \\ 2\eta\mu A \eta\mu B &= \sigma\upsilon\nu(A - B) - \sigma\upsilon\nu(A + B) \\ \eta\mu 2A &= 2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu A, & \sigma\upsilon\nu 2A &= \sigma\upsilon\nu^2 A - \eta\mu^2 A \\ \eta\mu^2 A &= \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2A}{2} & \sigma\upsilon\nu^2 A &= \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2A}{2} \\ \eta\mu 2A &= \frac{2\varepsilon\varphi A}{1 + \varepsilon\varphi^2 A} & \sigma\upsilon\nu 2A &= \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 A}{1 + \varepsilon\varphi^2 A} \\ \eta\mu A + \eta\mu B &= 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} & \eta\mu A - \eta\mu B &= 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \\ \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B &= 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} & \sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B &= 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \cdot \eta\mu \frac{A+B}{2} \\ \alpha &= 2R \cdot \eta\mu A & \alpha^2 &= \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A & E &= \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma}{2} \end{aligned}$$

**2. Στερεομετρία**

|                          |                                                   |                                                                  |
|--------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| <b>Ορθό πρίσμα</b>       | $E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$            | $V = E_{\beta} \cdot \upsilon$                                   |
| <b>Κανονική πυραμίδα</b> | $E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$       | $V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$                         |
| <b>Κύλινδρος</b>         | $E_{\kappa} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \upsilon$ | $V = \pi \cdot R^2 \cdot \upsilon$                               |
| <b>Κώνος</b>             | $E_{\kappa} = \pi \cdot R \cdot \lambda$          | $V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \upsilon}{3}$                     |
| <b>Κόλινδρος Κώνος</b>   | $E_{\kappa} = \pi \cdot (R + \rho) \cdot \lambda$ | $V = \frac{\pi \cdot \upsilon}{3} (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2)$ |

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: 19 / 5 / 2016

**ΤΑΞΗ:** Β΄

Διάρκεια: 2,5 ώρες

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.  
Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού .  
Να γράφετε με μελάνι μπλε. Τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι.  
Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.  
Μαζί με το εξεταστικό δοκίμιο δίνεται τυπολόγιο.

**ΜΕΡΟΣ Α:** Να λυθούν όλες οι ασκήσεις

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

**1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{x+2}{|x+5|-6} \quad \beta) f(x) = \frac{3}{\sqrt{2x+1}}$$

**2.** Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων

$$\alpha) y = e^{-3x} \cdot \eta\mu 2x$$

$$\beta) y = \frac{x}{x^2+1} + \sqrt{x}$$

**3.** Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:  $\alpha = \beta = 2\gamma$ .

$$\alpha) \text{ Να δείξετε ότι } \sigma\upsilon\nu\beta = \frac{1}{4}.$$

β) Αν επιπρόσθετα ισχύει ότι  $R = 4\sqrt{15}\text{ cm}$ , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

**4.** Δίνεται ο μιγαδικός αριθμός:  $z = 1 + 2i$ .

$$\alpha) \text{ Να αποδείξετε ότι: } z + \frac{1}{z} = \frac{6+8i}{5}$$

β) Αν ισχύει η ισότητα:  $z + (x + \psi i) = 6 + 10i$  να βρείτε τα  $x$  και  $\psi$ .

**5.** Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, ότι ισχύει η πρόταση:

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2\nu-1)(2\nu+1)} = \frac{\nu}{2\nu+1} \quad \forall \nu \in \mathbb{N}^*$$

**6.** Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης ίση με 24m. Το παράπλευρο ύψος της σχηματίζει με το επίπεδο της βάσης γωνία  $60^\circ$ . Να βρείτε:

- α) τον όγκο της
- β) την παράπλευρη ακμή της.

**7.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \kappa \\ \lambda \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -\kappa - \lambda \\ \kappa - \lambda \end{pmatrix}$  με  $\kappa \neq \lambda$ .

α) Να δείξετε ότι:  $|\vec{\beta}| = \sqrt{2} \cdot |\vec{\alpha}|$

β) Να υπολογιστεί η γωνία  $\phi$  των  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$ .

**8.** Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 8x + 16, & 0 < x < 5 \\ (\alpha^2 + \beta^2) \ln(x - 5 + e) + 2(\alpha + 1)e^{5-x}, & x \geq 5 \end{cases}$$

α) Να βρεθούν τα  $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$ .

β) Αν ισχύει  $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ , να βρεθούν τα  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , ώστε η συνάρτηση  $f$  να είναι συνεχής στο  $x=5$ .

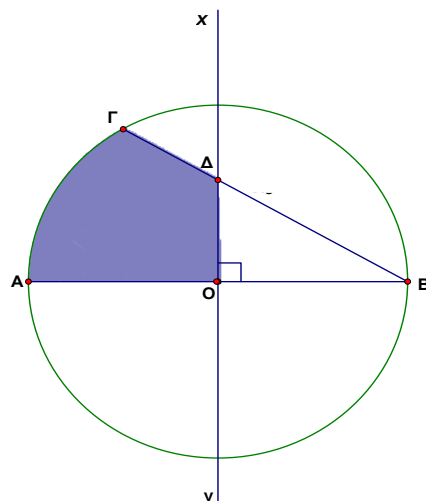
**9.** Η εξίσωση:  $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$  έχει ρίζες  $x_1, x_2$  με  $x_1 > x_2$ .

Να σχηματίσετε την Αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο το  $x_1$  και όγδοο όρο το  $(x_2)^2$ .

**10.** Σε κύκλο  $(O, R)$  φέρουμε τη διάμετρο  $AB$  και χορδή  $B\Gamma = \lambda_3$  και την ευθεία  $XO\Upsilon$  κάθετη στην  $AB$  που τέμνει την  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ .

α) Να δείξετε ότι  $O\Delta = \Delta\Gamma = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

β) Να βρείτε, συναρτήσει του  $R$ , το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος.



**ΜΕΡΟΣ Β: Να λυθούν όλες οι ασκήσεις**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

**1.** Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση:  $x^2 - \psi^3 - \chi\psi - 1 = 0$ .

- i. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{d\psi}{dx} = \frac{2x - \psi}{3\psi^2 + \chi}$  (μον.4)
- ii. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με  $\psi=1$  και  $\chi>0$ . (μον.3)
- iii. Αν η πιο πάνω κάθετη σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  με την ευθεία  $\chi\psi=3$ , να βρείτε τις τιμές του  $\chi$ . (μον.3)

**2.** Δίνεται η ακολουθία:  $\alpha_n = 4 \varepsilon\phi\theta(\sigma\upsilon\nu\theta)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$

- i. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.
- ii. Να αποδείξετε ότι ο τρίτος όρος της είναι ίσος με  $\eta\mu 3\theta + \eta\mu\theta$ .
- iii. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των άπειρων όρων της ισούται με  $4\sigma\phi\frac{\theta}{2}$ .
- iv. Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{4\eta\mu\theta}{1 - \sigma\upsilon\nu\theta} = 4\sqrt{3}$  στο διάστημα  $(0, 2\pi)$ .

**3.** Δίνεται το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ ίσο με 21 τετραγωνικές μονάδες, οι συντεταγμένες των κορυφών Α(1,-3) και Β(4,5) και το μέσο της πλευράς ΒΓ είναι το σημείο Μ (1,ψ) με  $\psi>0$ .

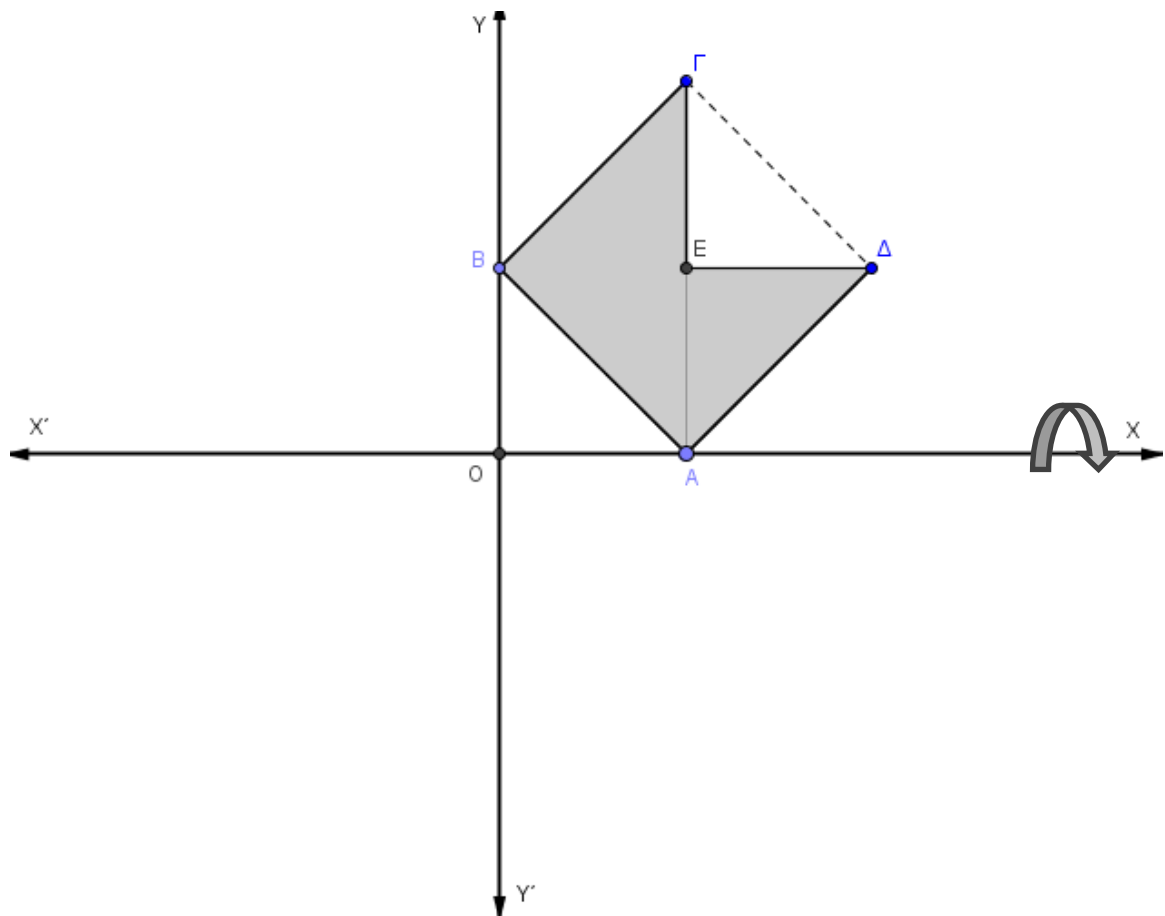
- i. Να αποδείξετε ότι το σημείο Γ έχει συντεταγμένες (-2,3). (μον.3)
- ii. Να βρείτε το μήκος του ύψους ΑΔ. (μον.3)
- iii. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Ε έτσι ώστε να σχηματίζεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΔΓΕ. (μον.4)

**4.** Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = \sqrt{x-1}$ ,  $g(x) = x^2$  και  $h(x) = \frac{2x}{x-5}$ .

- i. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f \circ g$
- ii. Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $\frac{f}{h}$ .
- iii. Αν  $h(x) = \frac{2x}{x-5}$ ,  $x \in [6, +\infty)$  να αποδείξετε ότι είναι 1-1 και να ορίσετε την αντίστροφη της. ( Τύπο και Πεδίο ορισμού)
- iv. Να βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 8x}{g(x) + 4x}$ .

5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται το τετράγωνο ΑΒΓΔ και οι συντεταγμένες των κορυφών Α(κ,0) και Β(0,κ).

- i. Το **πολύγωνο** ΑΒΓΕΔ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω **από τον άξονα χχ'**.  
Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι  $V=72\pi \text{ cm}^3$ , να δείξετε ότι  $\kappa=3$ .
- ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας(  $E_{ολ}$ ) του στερεού που παράγεται.



Ο Διευθυντής

.....

Ανδρέας Ιωσήφ

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/05/2016

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.  
 (β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.  
 (γ) Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι.  
 (δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στις κόλλες (όπου χρειάζεται).  
 (ε) Το γραπτό αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.  
 (στ) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

**ΜΕΡΟΣ Α' : (Μονάδες 50/100)**

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100 μονάδες.

**A1.** Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα  $\frac{2x-4}{(x+2)(x-3)}$

**A2.** Να βρείτε την παράγωγο  $\frac{d\psi}{dx}$  των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α)  $\psi = x^2 \ln x - \sqrt{x} + 4$

(β)  $2x^3 - \psi^2 = 3x\psi - 2$

**A3.** Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  ισχύει

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

**A4.** Να λύσετε την εξίσωση  $\log_2(x-1) - \log_{(x-1)} 8 = -2$

**A5.** Δίνεται κύκλος με κέντρο  $(K, 2\text{cm})$  και οι χορδές του  $AB = \lambda_4$  και  $AG = \lambda_3$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**A6.** Να αποδείξετε την ταυτότητα  $\left(\frac{\eta\mu 3\omega}{\eta\mu\omega}\right)^2 - \left(\frac{\sigma\upsilon\nu 3\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}\right)^2 = 8\sigma\upsilon\nu 2\omega$

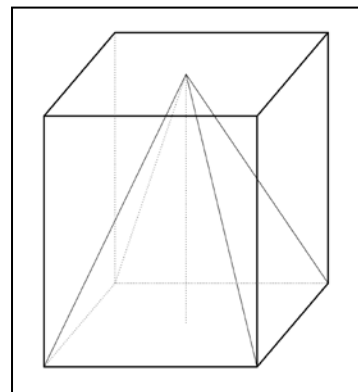
**A7.** Δίνεται η ευθεία  $(\varepsilon_1): x\sigma\upsilon\nu\theta + \psi\eta\mu\theta - 1 = 0$  με  $0^\circ < \theta < 180^\circ$ . Αν η απόσταση του σημείου  $M(4,0)$  από την ευθεία  $\varepsilon_1$  είναι ίση με 3 να βρείτε την τιμή της γωνίας  $\theta$ .

**A8.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(2x-6)}{x-3} - \alpha, & x < 3 \\ x - \beta, & x = 3 \\ \frac{|x^2 - 9|}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$

Να βρείτε την τιμή των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ώστε η  $f(x)$  να είναι συνεχής στο  $x_0 = 3$

- A9.** Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθό τετραγωνικό πρίσμα και τετραγωνική πυραμίδα με κοινή βάση και κοινό ύψος. Αν το ύψος τους είναι ίσο με 12m και οι όγκοι των δυο στερεών έχουν διαφορά  $800\text{m}^3$  να υπολογίσετε:

- (α) Την ακμή της βάσης του πρίσματος. (μον. 2)  
 (β) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας. (μον. 2)  
 (γ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του πρίσματος. (μον. 1)



- A10.** Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  οι γωνίες του  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και ισχύει η σχέση  $\frac{\beta}{4\gamma} = \sin\left(30^\circ + \frac{A}{2}\right) \cdot \sin\left(30^\circ - \frac{A}{2}\right)$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ .

### ΜΕΡΟΣ Β' : (Μονάδες 50/100)

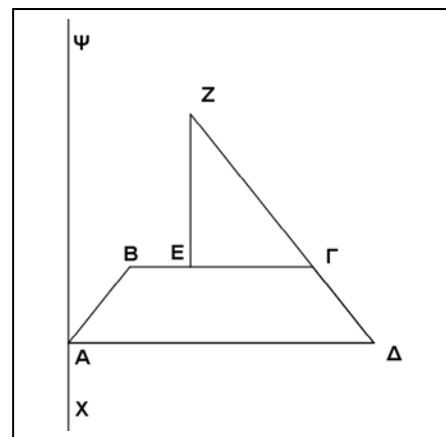
**Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100 μονάδες.**

- B1.** Στο παράπλευρο σχήμα, το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ισοσκελές τραπέζιο ( $B\Gamma \parallel A\Delta$ ) και  $ZE \perp B\Gamma$ . Δίνονται  $AB = 5\text{m}$ ,  $BE = 3\text{m}$ ,  $EZ = 8\text{m}$  και  $Z\Delta = 15\text{m}$ . Αν το πεντάγωνο  $ABEZ\Delta$  περιστραφεί πλήρως γύρω από τον άξονα  $XA\Psi \perp A\Delta$ , τότε το εμβαδόν που δημιουργεί το ευθύγραμμο τμήμα  $Z\Gamma$  είναι 12 φορές μεγαλύτερο από το εμβαδόν που δημιουργεί το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .

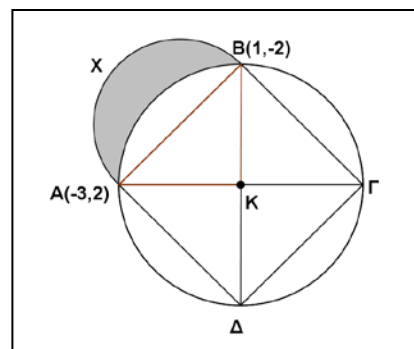
- (α) Να δείξετε ότι η απόσταση του σημείου  $B$  από τον άξονα  $X\Psi$  είναι 3m (μον. 4)

- (β) Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του  $ABEZ\Delta$  γύρω από τον άξονα  $XA\Psi$ . (μον. 6)



- B2.** Ο πρώτος όρος αριθμητικής προόδου (Α.Π.)  $(\alpha_n)$  είναι ίσος με  $\log 5$  και ο τρίτος όρος της είναι ίσος με  $\log 125$
- (α) Να δείξετε ότι η διαφορά  $\delta$  της Α.Π. είναι ίση με τον πρώτο όρο της. (μον. 2)
- (β) Να βρείτε πόσους όρους της πιο πάνω Α.Π. πρέπει να προσθέσουμε για να έχουμε άθροισμα  $30 \log 625$  (μον. 3)
- (γ) Έστω  $(\beta_n)$  μια ακολουθία με γενικό όρο  $\beta_n = 2^{1-n} \cdot \alpha_1$ ,  $n \in \mathbb{N}$  όπου  $\alpha_1$  ο πρώτος όρος της παραπάνω αριθμητικής προόδου.
- (i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία  $(\beta_n)$  είναι φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος. (μον. 2)
- (ii) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $B = \beta_1 + \beta_3 + \beta_5 + \beta_7 + \dots$  (μον. 3)

- B3.** Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(K, KA)$  με κορυφές  $A(-3,2)$ ,  $B(1,-2)$  και εξίσωση της διαγωνίου του  $B\Delta$ :  $x - 1 = 0$
- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου  $K$  και των κορυφών  $\Gamma$  και  $\Delta$  (μον. 4)
- (β) Αν  $E$  το μέσο του  $AB$  να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AKE$  (μον. 2)
- (γ) Αν  $AXB$  ημικύκλιο με διάμετρο την  $AB$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου. (μον. 4)



- B4.** Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = 1 - \frac{x}{x+3}$ ,  $g(x) = \sqrt{x+3}$  και  $h(x) = \frac{-3x^2 + 6x - 3}{x^2 - x}$
- (α) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f(x) \cdot g(x)$  (τύπο και πεδίο ορισμού).
- (β) Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.
- (γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις  $f^{-1}(x)$  και  $h(x)$  είναι ίσες. Αν δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο για το οποίο  $f^{-1}(x) = h(x)$
- (δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $g \circ f$  (πεδίο ορισμού και τύπο)
- (ε) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - \sqrt{x}]$

- B5.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = (x + \alpha)e^{\frac{1}{x}}$ ,  $x \neq 0$
- (α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης  $f(x) = (x + \alpha)e^{\frac{1}{x}}$  στο σημείο της  $A$  με τετμημένη  $x = -1$  είναι η  $e\psi + (\alpha - 2)x = 1$  (μον. 4)
- (β) Να βρείτε την τιμή του  $\alpha$ , αν η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της  $A$  είναι κάθετη με την ευθεία  $\epsilon_1: \psi = ex - \ln 2016$  (μον. 1)
- (γ) Αν  $\alpha = 3$  να δείξετε ότι  $x^3 f''(x) + x f'(x) - f(x) = 3e^{\frac{1}{x}}$  (μον. 5)

-ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ-

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

.....  
Παναγιώτης Λαμπίσης

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ–ΙΟΥΝΙΟΥ 2016****ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά Κατεύθυνσης**ΤΑΞΗ:** Β΄ Λυκείου**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 31/05/ 2016**ΧΡΟΝΟΣ:** 2 ώρες και 30 λεπτά**ΩΡΑ:** 7:45 – 10:15**ΒΑΘΜΟΣ**

Αριθμητικώς: .....

Ολογράφως: .....

Υπογραφή: .....

Ονοματεπώνυμο: ..... Τμήμα: ..... Αρ.: ....

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

---

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 5 ΣΕΛΙΔΕΣ**

---

**ΕΠΙΣΥΝΑΠΤΕΤΑΙ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΠΟΥ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 1 ΣΕΛΙΔΑ**

---

**ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα  $\frac{2x+7}{(x+2)(x-1)}$ .

2. Να υπολογίσετε τα όρια:

(1)  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$

(2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 1}}{x}$

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

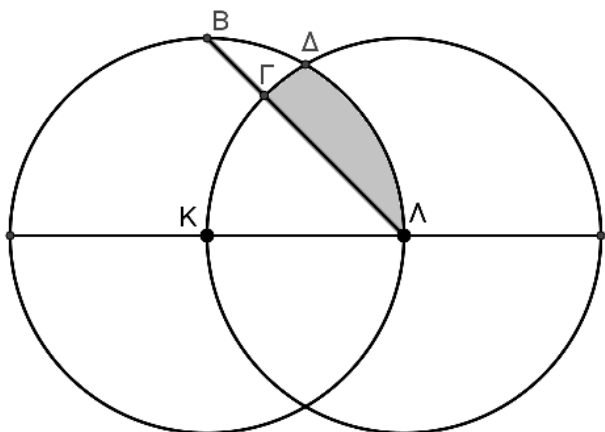
(1)  $y = 2x^5 - \frac{3}{x} + 4\sqrt{x} + e$

(2)  $y = x \cdot \eta\mu^3 6x$

4. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης ίση με  $24m$ . Το παράπλευρο ύψος της σχηματίζει με το επίπεδο της βάσης γωνία  $45^\circ$ .  
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της και το μήκος της παράπλευρης ακμής της.
5. Να επιλύσετε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  αν  $\hat{A} = 60^\circ$ ,  $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$  και ισχύει η σχέση  $\beta = 2\gamma$ .
6. Να υπολογίσετε το μέτρο της οξείας γωνίας  $\theta$  αν ισχύει:  

$$6 - 12\sigma\eta\nu\theta + 2 + 6\sigma\eta\nu\theta + \frac{2}{3} - 3\sigma\eta\nu\theta + \dots = 5.$$
7. Να λύσετε την εξίσωση:  $4\log^2_2 x + \log_{\sqrt{2}} x = 2.$
8. Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, ότι  $\forall n \in \mathbb{N}$  ισχύει η πιο κάτω πρόταση:  

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2.$$
9. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{x} - 1$  με πεδίο ορισμού  $A = [9, 49]$   
και  $g(x) = \frac{\sqrt{25-x^2}}{x-4}$ . Να βρείτε το πεδίο τιμών της  $f(x)$ , το πεδίο ορισμού της  $g(x)$   
και να ορίσετε τη σύνθεση  $g \circ f$ .
10. Δίνονται δυο ίσοι κύκλοι  $(K, R)$  και  $(\Lambda, R)$ . Αν  $B\Lambda = \lambda_4$  να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου  $\Gamma\Delta\Lambda$ .



**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.**

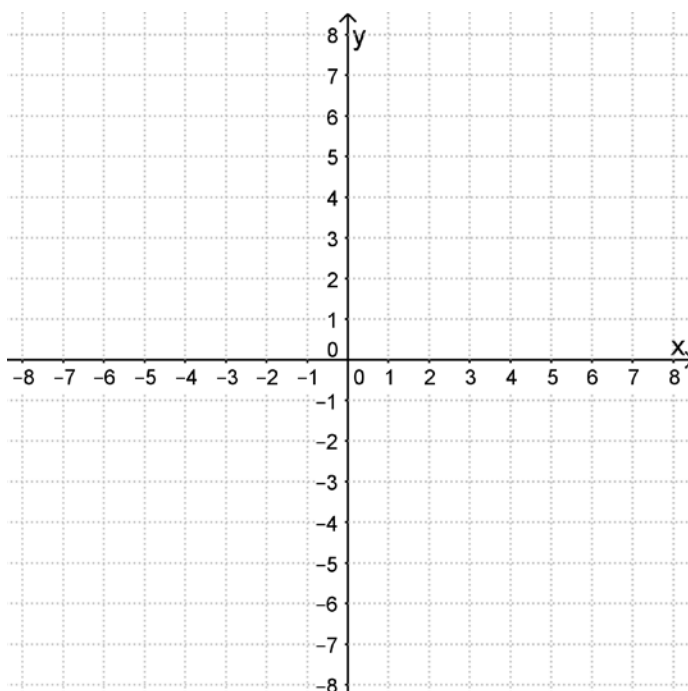
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  έχει κορυφές  $B(-3, -1)$  και  $\Delta(3, -3)$ . Η  $A\Delta$  έχει εξίσωση  $y = -2x + 3$  και η  $AB$  έχει εξίσωση  $4x - 3y + 9 = 0$ .

(1) Να αποδείξετε ότι οι κορυφές  $A$  και  $\Gamma$  βρίσκονται στον άξονα των  $y$ .

Να υπολογίσετε:

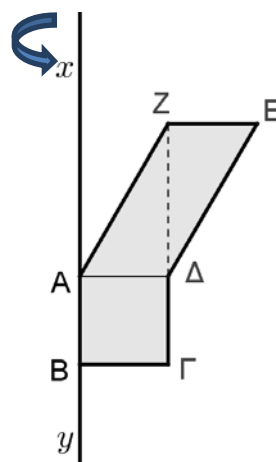
- (2) το μήκος της πλευράς  $\Gamma\Delta$   
(3) τη γωνία  $\Gamma$  του παραλληλόγραμμου με προσέγγιση ακέραιας μονάδας  
(4) την απόσταση της κορυφής  $\Delta$  από την πλευρά  $AB$   
(5) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.



2. Στο πιο κάτω σχήμα τα σημεία  $Z$ ,  $\Delta$  και  $\Gamma$  είναι συνευθειακά, το  $A\Delta\Gamma B$  τετράγωνο, το  $ZE\Delta A$  παραλληλόγραμμο με πλευρά  $E\Delta = 8\text{cm}$  και η γωνία  $\Delta AZ = 60^\circ$ .

Το σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα  $xy$ .

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



3. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln(e^{2ax} + 1) - ax$ ,  $a \in \mathbb{R}$

(1) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης  $f(x)$

στο σημείο της με τετμημένη  $x = 0$ .

(3 μον.)

(2) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{d^2f}{dx^2} + \left(\frac{df}{dx}\right)^2 = a^2$ .

(7 μον.)

4. (α) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση  $\eta\mu A + \sigma\upsilon\nu A \cdot \varepsilon\varphi\Gamma = \frac{\eta\mu\Gamma}{\sigma\upsilon\nu B}$ .

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

(β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu 8x - 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu 7x}{1 - \sigma\upsilon\nu 6x}$ .

i. Να αποδείξετε ότι  $f(x) = \sigma\varphi 3x$ .

ii. Στη συνέχεια να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης

$f(x) = \varepsilon\varphi(\pi - x)$ , στο διάστημα  $(0, 2\pi)$ .

5. Δίνεται ακολουθία με γενικό όρο  $a_n = \ln(\sqrt{2^n} \cdot e)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(1) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τη διαφορά (δ).

(2) Να υπολογίσετε ποιος όρος της ακολουθίας ισούται με  $\ln(16\sqrt{e})$ .

(3) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της είναι:  $\sum_{k=1}^n a_k = \frac{n}{2} + \ln 2^{\frac{n^2+n}{4}}$ .

# ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

## ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ ΓΙΑ ΤΗ Β΄ ΤΑΞΗ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

### 1. Τριγωνομετρία

$$\begin{aligned} \eta\mu(A \pm B) &= \eta\mu A \cdot \sigma\upsilon\nu B \pm \sigma\upsilon\nu A \cdot \eta\mu B & \sigma\upsilon\nu(A \pm B) &= \sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \cdot \eta\mu B \\ 2\eta\mu A \cdot \sigma\upsilon\nu B &= \eta\mu(A-B) + \eta\mu(A+B) & 2\sigma\upsilon\nu A \cdot \sigma\upsilon\nu B &= \sigma\upsilon\nu(A-B) + \sigma\upsilon\nu(A+B) \\ 2\eta\mu A \cdot \eta\mu B &= \sigma\upsilon\nu(A-B) - \sigma\upsilon\nu(A+B) & \eta\mu 2A &= 2\eta\mu A \cdot \sigma\upsilon\nu A \\ & & \sigma\upsilon\nu 2A &= \sigma\upsilon\nu^2 A - \eta\mu^2 A \end{aligned}$$

$$\eta\mu^2 A = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2A}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu^2 A = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2A}{2}$$

$$\eta\mu 2A = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \sigma\upsilon\nu 2A = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \epsilon\phi A = t$$

$$\begin{aligned} \eta\mu A + \eta\mu B &= 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} & \eta\mu A - \eta\mu B &= 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \\ \sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B &= 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} & \sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B &= 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \cdot \eta\mu \frac{A+B}{2} \end{aligned}$$

$$\alpha = 2R\eta\mu A \qquad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A \qquad E = \frac{\alpha\beta\eta\mu\Gamma}{2}$$

### 2. Στερεομετρία

|                   |                                             |                                                    |
|-------------------|---------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Ορθό Πρίσμα       | $E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot u$             | $V = E_{\beta} \cdot u$                            |
| Κανονική Πυραμίδα | $E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$ | $V = \frac{E_{\beta} \cdot u}{3}$                  |
| Κύλινδρος         | $E_{\kappa} = 2\pi R u$                     | $V = \pi R^2 u$                                    |
| Κώνος             | $E_{\kappa} = \pi R \lambda$                | $V = \frac{\pi R^2 u}{3}$                          |
| Κόλινδρος Κώνος   | $E_{\kappa} = \pi(R+\rho) \cdot \lambda$    | $V = \frac{\pi u}{3} \cdot (R^2 + R\rho + \rho^2)$ |
| Σφαίρα            | $E = 4\pi R^2$                              | $V = \frac{4}{3} \pi R^3$                          |

5. Δίνεται ακολουθία με γενικό όρο  $\alpha_n = \ln(\sqrt{2^n} \cdot e)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

- (1) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος και να βρείτε τη διαφορά (δ).
- (2) Να υπολογίσετε ποιος όρος της ακολουθίας ισούται με  $\ln(16\sqrt{e})$ .
- (3) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της είναι:  $\sum_{k=1}^n = \frac{n}{2} + \ln 2^{\frac{n^2+n}{4}}$ .

**Ο Διευθυντής**

**Ανδρέας Λοΐζου**

**Οι εισηγητές:**

**Γιάννος Μίτσιου**

**Ολβία Παυλίδου**

**Μαρία Παπαδημητρίου**

**Μάριος Νέρουππος**

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Κατεύθυνσης

ΤΑΞΗ: Β' Ενιαίου Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: Τρίτη, 24 Μαΐου 2016

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ  
ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ ΕΠΙΣΥΝΑΠΤΕΤΑΙ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Να γράφετε με μελάνι χρώματος μπλε. Για τα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται καθαρά και επιμελημένα όλη η αναγκαία εργασία.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

**ΜΕΡΟΣ Α':** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα:  $\frac{5x - 4}{(x - 2)(x + 1)}$
2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:
  - α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5x + 4}{3x^2 + 4}$
  - β)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 4x}$
3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
  - α)  $y = 3\sqrt{x} + \varepsilon\varphi 2x$
  - β)  $y = x^2 \cdot e^{\eta\mu 3x}$
4. Να αποδείξετε ότι:  $\frac{1 - 2\sigma\upsilon\nu\theta + \sigma\upsilon\nu 2\theta}{\eta\mu 2\theta - 2\eta\mu\theta} = \sigma\varphi\theta$
5. Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, ότι  $\forall n \in \mathbb{N}$ , ισχύει η πιο κάτω πρόταση:  
 $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$

6. Δίνονται τρεις διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου:  $\log_3 \frac{1}{x+1}$ ,  $\log_3 \sqrt{2x}$ ,  $1+3\log_3 2$ ,  $x > 0$ .

Να βρείτε τις τιμές του  $x$ .

7. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{4x-3}{x+2}$  και  $g(x) = 2x+3$ .

1) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης  $f^{-1}(x)$ .

2) Να ορίσετε την  $f^{-1} \circ g$  (πεδίο ορισμού και τύπο).

8. Να λύσετε την εξίσωση:  $\frac{1}{2^{2\eta\mu x}} + \frac{1}{2^{4\eta\mu x}} + \frac{1}{2^{6\eta\mu x}} + \frac{1}{2^{8\eta\mu x}} + \dots = 1$ ,  $0 < x < \pi$ .

9. Μια κανονική τετραγωνική πυραμίδα ΚΑΒΓΔ έχει ύψος ΚΛ =  $a$  και η παράπλευρη έδρα της σχηματίζει με το επίπεδο της βάσης γωνία  $\hat{\omega}$ . Να αποδείξετε ότι:

1) Το παράπλευρο ύψος  $h$  της πυραμίδα είναι  $h = a \sigmaτεμω$

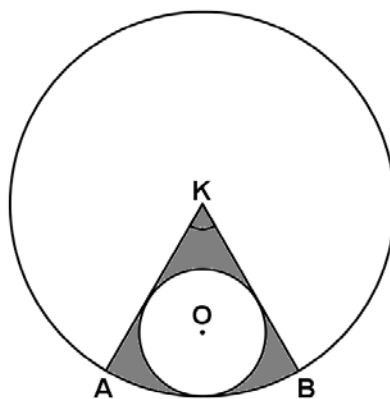
2) Το εμβαδόν ολικής επιφάνειας είναι  $E_{ολ} = 4a^2 \sigmaφω(\sigmaτεμω + \sigmaφω)$

10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται κύκλοι  $(K, R)$ ,  $(O, \rho)$  με  $R > \rho$  και τόξο  $\widehat{AB} = 60^\circ$ .

Να βρείτε συναρτήσει της ακτίνας  $R$ :

α) Την ακτίνα  $\rho$  του εγγεγραμμένου κύκλου στον κυκλικό τομέα ΚΑΒ.

β) Το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας.



**ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ Α΄**

**ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄**

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.**

1. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{x}{1-x}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f(x)$

β) Να δείξετε ότι:  $\frac{df}{dx} = \frac{1}{x(1-x)}$

γ) Να δείξετε ότι:  $e^{f(x)} \frac{df}{dx} - \frac{d^2f}{dx^2} = \frac{1}{x^2}$

2. Αριθμητική πρόοδος με διαφορά  $\delta$  και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με λόγο  $\lambda$ ,

έχουν για πρώτο όρο την τιμή του ορίου  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 4x}{x(x+2)}$ . Ο έκτος όρος της αριθμητικής προόδου

είναι διπλάσιος του τρίτου όρου της και επιπλέον ισχύει η σχέση  $\lambda = \frac{1}{\delta}$ .

α) Να δείξετε ότι:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 4x}{x(x+2)} = 2$

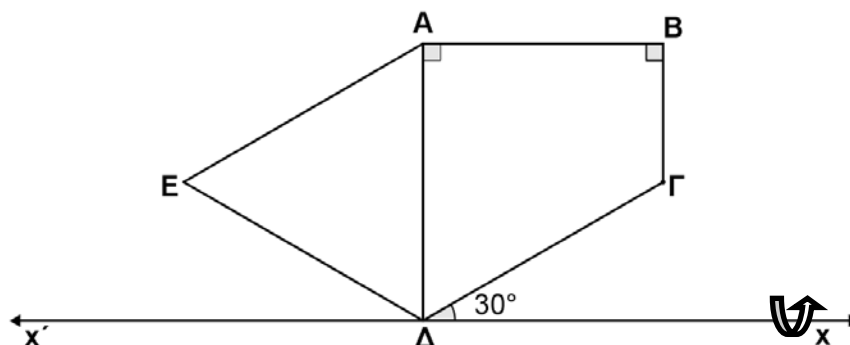
β) Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.

γ) Να βρείτε πόσους όρους της γεωμετρικής προόδου πρέπει να προσθέσουμε για να έχουμε άθροισμα  $\frac{63}{16}$ .

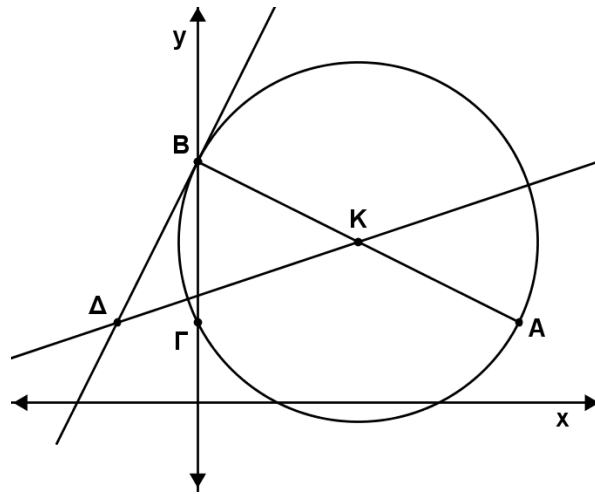
3. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ ,  $\Gamma\Delta = 2\alpha$ . Η πλευρά  $\Gamma\Delta$  σχηματίζει γωνία  $30^\circ$  με τον άξονα των  $xx'$ . Το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισόπλευρο πλευράς  $2\alpha$ . Το πολύγωνο  $AB\Gamma\Delta E$  περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα  $xx'$ , ο οποίος περνά από το σημείο  $\Delta$  και είναι κάθετος στην  $A\Delta$ . Να υπολογίσετε, συναρτήσει του  $\alpha$ :

α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας.

β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται.



4. Ο κύκλος στο πιο κάτω σχήμα έχει εξίσωση  $x^2 + y^2 - 4x - 4y = -3$  και τέμνει τον άξονα  $yy'$  στα σημεία  $B(0,3)$  και  $\Gamma$ . Το σημείο  $K(2,2)$  είναι το κέντρο του κύκλου και  $AB$  η διάμετρος του. Το σημείο  $\Delta$  ανήκει πάνω στην εφαπτομένη του κύκλου που φέρουμε στο σημείο του  $B$  και έχει τετμημένη  $x_{\Delta} = -1$ .
- 1) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου  $\Gamma$  είναι  $\Gamma(0,1)$ .
  - 2) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του κύκλου στο  $B$  έχει εξίσωση  $y = 2x + 3$
  - 3) Να δείξετε ότι τα σημεία  $A, \Gamma$  και  $\Delta$  είναι συνευθειακά.
  - 4) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $BK\Delta$ .



5. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει η σχέση  $\sigma\phi \frac{B}{2} = \frac{\alpha + \gamma}{\beta}$
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με  $\hat{A} = 90^\circ$
  - β) Αν επιπλέον ισχύει η σχέση  $\eta\mu B \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{1}{4}$ , να δείξετε ότι  $\hat{B} = 30^\circ$

----- ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ -----

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** Πέμπτη, 19/05/2016

**ΧΡΟΝΟΣ :** 2 ΩΡΕΣ ΚΑΙ 30 ΛΕΠΤΑ

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις(4) σελίδες.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο.
- Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

---

**ΜΕΡΟΣ Α΄** Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

---

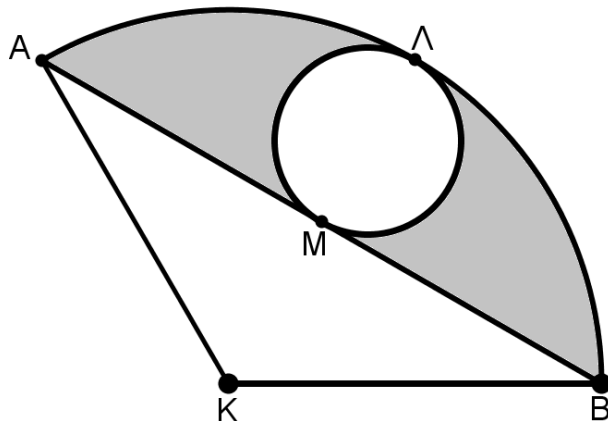
1. Να αναλύσετε το κλάσμα σε άθροισμα απλών κλασμάτων:  $\frac{2\chi - 4}{\chi^2 - 1}$
2. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:  
α)  $f(\chi) = \chi \cdot e^{3\chi}$   
β)  $g(\chi) = \ln(\eta\mu 5\chi) + \varepsilon\varphi^3 \chi$
3. Να δείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:  $\alpha \sigma\upsilon\nu\Gamma - \gamma \sigma\upsilon\nu\Lambda = \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\beta}$
4. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα το παράπλευρο ύψος σχηματίζει με το ύψος της γωνία  $45^\circ$ . Αν η περίμετρος βάσης της πυραμίδας είναι 24cm, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας και τον όγκο της.
5. Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\frac{\eta\mu^2\chi + \eta\mu\chi}{1 + \sigma\upsilon\nu 2\chi + \sigma\upsilon\nu\chi} = \varepsilon\varphi\chi$

6. Αν οι αριθμοί  $\ln 19$ ,  $\ln \sqrt{8(2^x - 3^x)}$ ,  $x \ln 3$  είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου, να υπολογίσετε την τιμή του  $x$ ,  $x < 0$ .

7. Να αποδείξετε ότι: 
$$\frac{\sin 2\theta - \sin 6\theta}{2\sin 5\theta \cdot \sin 3\theta - \sin 8\theta} = 4\eta\mu^2 2\theta$$

8. Δίνεται ο κυκλικός τομέας KAB με ακτίνα  $2a$  και  $M$  μέσο της χορδής του  $AB$ . Αν  $AB$  εφαπτόμενη του κύκλου με διάμετρο  $ML$  στο σημείο του  $M$  και  $KM = a \sin(\angle K, M, L)$  (συνευθειακά σημεία), να δείξετε ότι το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής είναι ίσο με

$$E = \frac{a^2(13\pi - 12\sqrt{3})}{12}.$$



9. Δίνεται η συνάρτηση: 
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x|x-4|}{4-x}, & x < 4 \\ 3, & x = 4 \\ \frac{x-4}{\sqrt{x}-a}, & x > 4 \end{cases}$$

α) Αν  $f(16) = 6$  να βρείτε την τιμή του  $a \in \mathbb{R}$ . (β. 2)

β) i) Αν  $a = 2$  να εξετάσετε αν υπάρχει το  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ . (β.3)

ii) Είναι συνεχής η  $f(x)$  στο  $x=4$ ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

10. α) Να δείξετε ότι:  $\log_{\eta\mu x} \sqrt{\sigma\upsilon\nu x} + \log_{\eta\mu x} \sqrt[4]{\sigma\upsilon\nu x} + \log_{\eta\mu x} \sqrt[8]{\sigma\upsilon\nu x} + \dots = \log_{\eta\mu x} \sigma\upsilon\nu x$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  (β.2)

β) Χρησιμοποιώντας το α) ερώτημα να λύσετε την εξίσωση:

$$2 - \log_{\sigma\upsilon\nu x} \eta\mu x = \log_{\eta\mu x} \sqrt{\sigma\upsilon\nu x} + \log_{\eta\mu x} \sqrt[4]{\sigma\upsilon\nu x} + \log_{\eta\mu x} \sqrt[8]{\sigma\upsilon\nu x} + \dots \text{ στο διάστημα } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

(β.3)

---

**ΜΕΡΟΣ Β΄** Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις .

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

---

1. Αριθμητική Πρόοδος με διαφορά  $\delta$  και φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος με λόγο  $\lambda$  έχουν τον ίδιο πρώτο όρο . Το άθροισμα των απείρων όρων της Γεωμετρικής Προόδου ισούται με 16 και το άθροισμα των 4 πρώτων όρων της Αριθμητικής Προόδου είναι ίσο με 56 .

Αν ισχύει ότι  $\log_{\delta} 8 = 1 - \log_{\delta} \lambda$  με  $\delta > 0, \lambda > 0$  τότε :

α) να δείξετε ότι  $\delta = 8\lambda$  (β. 2)

β) να σχηματίσετε τις δύο προόδους.(β. 8)

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ ( $\hat{A} < 90^\circ$ ) με κορυφή Γ(-2,1) και  $\chi - 2\psi = -10$ ,  $2\chi - \psi = 1$  οι εξισώσεις των πλευρών ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα . Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες της κορυφής Α και την εξίσωση της ΒΓ,

β) τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ ,

γ) το μέτρο της γωνίας  $\widehat{B\Gamma A}$  με ακρίβεια ενός δεκαδικού ψηφίου,

δ) τις συντεταγμένες του σημείου Ε (στο α' τεταρτημόριο) το οποίο βρίσκεται στην προέκταση της πλευράς ΒΑ, ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΓΕ, να είναι ίσο με  $E_{\text{ΑΓΕ}} = 9\tau.μ.$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{\kappa x + \mu}{x - 2}$  και  $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x}$  με  $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$  .

α) i) Να οριστεί η συνάρτηση  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  (τύπος και πεδίο ορισμού).

ii) Αν το  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 2$  και  $f'(1) = -1$  , να βρεθούν οι τιμές των  $\kappa$  και  $\mu$  .

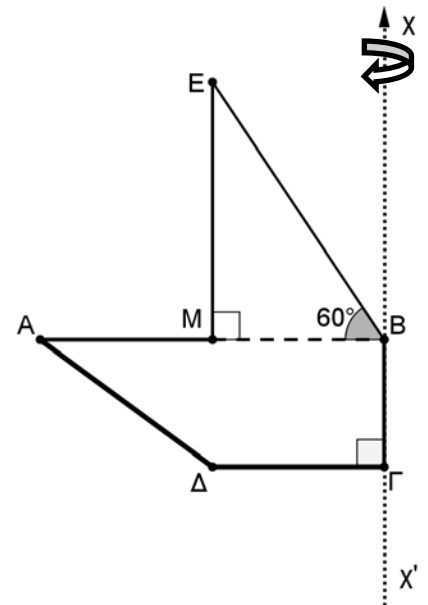
β) Αν  $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 2}$  τότε:

i) Να δείξετε ότι  $f^{-1}(x) = f(x)$

ii) Να δείξετε ότι  $(f \circ f^{-1})(x) = x$

4. Στο διπλανό σχήμα το  $AB\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο τραπέζιο ( $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Gamma} = 90^\circ$ ) και το  $BME$  ορθογώνιο τρίγωνο ( $\widehat{M} = 90^\circ$ )  
 Δίνονται  $AB = 8\text{cm}$ ,  $A\Delta = 5\text{cm}$ ,  $M$  μέσο  $AB$ ,  
 $\widehat{EBM} = 60^\circ$  και  $E, M, \Delta$  συνευθειακά σημεία.

Το πολύγωνο  $ΒΕΜΑΔΓ$  περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα  $\chi\chi'$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



5. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση  $f(x) = \left(x + \sqrt{3 + x^2}\right)^\kappa$  με  $\kappa \in \mathbb{R}$ .

α) Να δείξετε ότι:

$$\text{i) } \sqrt{3 + x^2} \cdot f'(x) = \kappa \cdot f(x) \quad \text{και} \quad (\beta.4)$$

$$\text{ii) } (3 + x^2) \cdot f''(x) + x \cdot f'(x) = \kappa^2 \cdot f(x) \quad (\beta. 3)$$

- β) Αν η  $f(x)$  περνά από το σημείο  $A(1,9)$ , να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $f(x)$  στο σημείο  $A$ . (β. 3)

Η Διευθύντρια

Ελένη Αντωνίου Τσιελεπή

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.  
(β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας .  
(γ) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).  
(δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 ( πέντε) μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{3}{(x-1)(x+2)}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α)  $\psi = \frac{x^2 + 7x}{3x^2 - 1}$       (β)  $\psi = e^{3x+1} + \varepsilon\phi 5x$

3. Να υπολογίσετε τα όρια: α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 5}{2x^2 + 1}$       β)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x^2 + 3x|}{x}$

4. Γεωμετρικής προόδου ο δεύτερος όρος είναι 4 και ο έβδομος όρος  $\frac{1}{8}$ . Να υπολογίσετε το άθροισμα των άπειρων όρων της.

5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τα σημεία Α(2,3) , Β(1,-4) και Γ(4,2). Να βρείτε :

α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

β) Τη γωνία Α του τριγώνου , με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων.

6. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της  $f$  με τύπο

$f(x) = x^2 - 4x + 5$ ,  $x \in [2, +\infty)$ . Αν ορίζεται η  $f^{-1}$  να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

7. Αν  $N = \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x}$  και  $M = \frac{\eta\mu 7x + \eta\mu x}{2\eta\mu 4x}$

α) Να δείξετε ότι  $N = 2$  και  $M = \sigma\upsilon\nu 3x$

β) Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{N}{M} = 4$  στο διάστημα  $[0, \pi]$ .

8. Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι  $\forall n \in \mathbb{N}$  ισχύει :

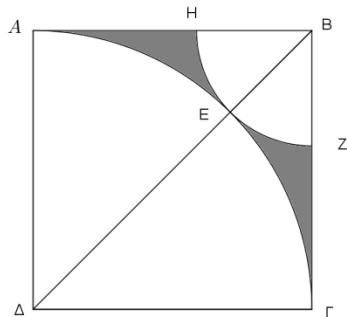
$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

9. Δίνεται η καμπύλη  $3x^2 + 4xy - 2y - 7 = 0$

α) Να δείξετε ότι:  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x+2y}{1-2x}$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο P, με τεταγμένη  $-2$  και τετμημένη θετική.

10. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς  $a\sqrt{2}cm$ . Με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΑ γράφουμε τόξο ΑΓ μέσα στο τετράγωνο. Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει το τόξο ΑΓ στο σημείο Ε. Με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΕ γράφουμε τόξο ΗΖ επίσης μέσα στο τετράγωνο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης περιοχής.




---

#### **ΜΕΡΟΣ Β΄**

**Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 (δέκα) μονάδες.**

---

1. Ρόμβος ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 4α και γωνία  $\hat{\Gamma} = 60^\circ$ . Ο ρόμβος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα χΒψ παράλληλο με τη διαγώνιο ΑΓ.

α) Να κάνετε το σχήμα και να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται συναρτήσει του α.

β) Αν ο όγκος του στερεού είναι  $256\pi\sqrt{3}cm^3$  να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις  $g(x) = x - 3$  με  $x > 0$  και  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 3}$ .

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $\frac{g}{f}$ . (τύπο και πεδίο ορισμού)

β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση  $f \circ g$ . Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

γ) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 6} (f \circ g)(x) \cdot \eta\mu(x - 6)$ .

3. Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση  $2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu^2 \frac{\Gamma}{2} + 2\eta\mu \Gamma \sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = 3\eta\mu B$ . Να δείξετε ότι :

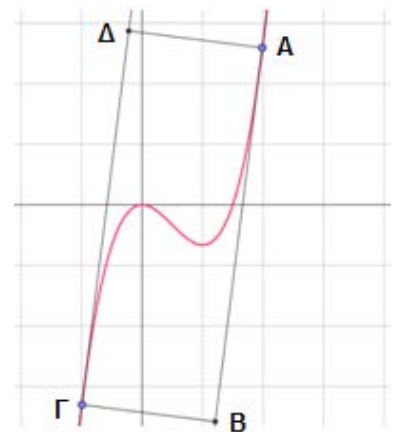
α)  $2\beta = \alpha + \gamma$ , όπου  $\alpha, \beta, \gamma$  οι πλευρές του τριγώνου.

β) Αν  $\hat{A} = 60^\circ$  τότε το τρίγωνο ABΓ είναι ισόπλευρο.

4. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{4x^3}{3} - 2x^2$ . Στα σημεία

A και Γ φέρουμε εφαπτόμενες ευθείες με κλίση 8.

Αν τα σημεία B και Δ ανήκουν στις εφαπτόμενες ευθείες ώστε το ABΓΔ να είναι ορθογώνιο, να υπολογίσετε το μήκος του AB.



5. Σε μια αριθμητική πρόοδο ο τρίτος όρος είναι  $\log_2(x\psi^2)$  και ο δέκατος όρος της είναι  $\log_2(x\psi^9)$ .

α) Να δείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι  $a_1 = \log_2 x$  και η διαφορά της  $\delta = \log_2 \psi$ .

β) Αν τα  $x$  και  $\psi$  είναι οι λύσεις των εξισώσεων  $\left(\frac{3}{2}\right)^{-x+2} = e^{-2\ln 3} \cdot 10^{\log 4}$  και

$\log\left(\frac{1}{4^\psi + 4\psi - 8}\right) = \psi - \psi \log 40$  αντίστοιχα, να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της πιο πάνω αριθμητικής προόδου.

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Ηλίας Ζήκκος  
Κούλα Παναγή  
Χριστίνα Κουμπάρου

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Ανδρούλα Χρίστου

ΛΥΚΕΙΟ ΑΓΙΟΥ ΙΩΑΝΝΗ ΛΕΜΕΣΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2015-2016

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ**

ΤΑΞΗ: Β' Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 20/05/2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΩΡΑ: 10:30 – 13:00

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.  
 (β) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.  
 (γ) Να γράφετε με μελάνι μπλε ή μαύρο (με μολύβι μόνο τα σχήματα)  
 (δ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τρεις σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α': (50 μονάδες)****Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.****A1.** Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$  και  $\vec{v} = \vec{i} + 3\vec{j}$ . Να υπολογίσετε:

- (α) το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{u} \cdot \vec{v}$   
 (β) τη γωνία των διανυσμάτων  $\vec{u}, \vec{v}$ .

**A2.** Να λύσετε την εξίσωση:  $(\log x)^2 - 3 \log x + 2 = 0$ **A3.** Αν  $\log_{18} 2 = \alpha$ , να δείξετε ότι:  $\log_2 9 = \frac{1-\alpha}{\alpha}$ **A4.** Αν  $\sin \psi, \eta \mu \chi, \sin \chi, \eta \mu \psi$ ,  $\chi, \psi \in \mathbb{R}$  είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι:  $\sin(\chi - \psi) = 1$ .**A5.** Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης 24 cm και οι παράπλευρες έδρες της σχηματίζουν γωνία  $30^\circ$  με τη βάση της. Να βρείτε τον όγκο της πυραμίδας και το εμβαδό της ολικής επιφάνειάς της.**A6.** Αν σε τρίγωνο ABΓ,  $\hat{A} = 60^\circ$  και ισχύει η σχέση  $4\eta \mu B \eta \mu \Gamma = 3$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.**A7.** Δύο πλευρές ενός τετραγώνου ανήκουν στις ευθείες  $5x - 12y - 13 = 0$  και  $5x - 12y - 78 = 0$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου.

**A8.** Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ , ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 + x^2 - \eta\mu x}{x^2 - x} & , x < 0 \\ x + a & , x \geq 0 \end{cases}$$

**A9.** Κώνος και κύλινδρος έχουν τον ίδιο όγκο. Ο κώνος έχει περίμετρο βάσης  $\Pi_\beta = 6\pi \text{ cm}$  και ύψος  $u = 4 \text{ cm}$ . Αν το ύψος του κυλίνδρου είναι τα  $\frac{3}{2}$  της ακτίνας της βάσης του, να υπολογίσετε τον όγκο και την ολική επιφάνεια του κυλίνδρου.

**A10.** Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με τύπους  $f(x) = \sqrt{x}$  και  $g(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$  Να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .
- (β) την  $f \circ g$  και να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ορίζεται η  $f \circ g$ .

**ΜΕΡΟΣ Β': (50 μονάδες)**

**Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.**

**B1.** Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = \ln(x-1)$  και  $g(x) = \ln \frac{1}{x-1}$ .

- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $g(x)$ .
- (β) Να δείξετε ότι οι πιο πάνω συναρτήσεις τέμνονται στο σημείο  $A(2,0)$
- (γ) Να υπολογίσετε την  $f(x) + g(x)$
- (δ) Αν η  $\varepsilon_1$  είναι η εφαπτομένη της  $f(x)$  στο σημείο  $A$  και η  $\varepsilon_2$  εφαπτομένη της  $g(x)$  στο σημείο  $A$ , να βρείτε τις εξισώσεις των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και τη γωνία που σχηματίζουν.

**B2.** Σε Αριθμητική Πρόοδο ο έκτος όρος της ισούται με 11 και το άθροισμα των 20 πρώτων είναι ίσο με 400.

- (α) Να βρείτε τους τρεις πρώτους όρους της προόδου.
- (β) Να υπολογίσετε το άθροισμα όλων των περιττών αριθμών που είναι μικρότεροι από το 1000 και μεγαλύτεροι από το 100.
- (γ) Να δείξετε ότι  $\sum_{v+2} a_{v+2} = (v+1)^2$ .

**B3.** Δίνεται ρόμβος με εξισώσεις της πλευράς  $\Gamma\Delta$ :  $5x + \psi = 14$  και της διαγωνίου  $B\Delta$ :  $x - \psi = -2$ .

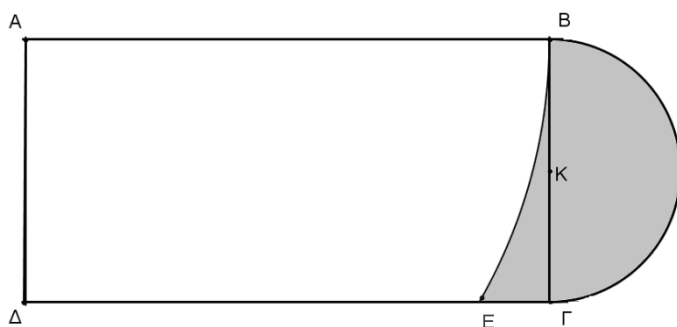
Αν μια κορυφή του ρόμβου έχει συντεταγμένες  $(7,3)$  να βρείτε:

- (α) την εξίσωση της διαγωνίου  $A\Gamma$
- (β) τις συντεταγμένες των άλλων κορυφών.

**B4.** Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\sigma\varphi^2 \frac{x}{2} - 1}{\sigma\varphi^2 \frac{x}{2} + 1}$ .

- (α) Να δείξετε ότι:  $f(x) = \sin x$   
 (β) Να υπολογίσετε την παράγωγο της  $f(x) = \sin x$  με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου.  
 (γ) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) - f'(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  στο διάστημα  $[0, \pi]$

**B5.** Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB = 16\text{cm}$  και  $A\Delta = 8\text{cm}$ . Με κέντρο το  $K$  και ακτίνα  $KB$  γράφουμε τόξο  $B\Gamma$  ( $K$  το μέσο της  $B\Gamma$ ) και με κέντρο το  $A$  και ακτίνα  $AB$  γράφουμε τόξο  $BE$  όπως φαίνονται στο πιο κάτω σχήμα. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας.



**Διευθύντρια**

Οικονομίδου Σύλβια

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016****ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά Κατεύθυνσης**ΤΑΞΗ:** Β΄ Λυκείου**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 23 / 05 / 2016**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ:** 2,5 ώρες**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να γράψετε μόνο με **μπλε** μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
2. Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο, που αποτελείται από μία σελίδα.
3. Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
4. Τα προσωπικά σας στοιχεία και οι λύσεις των ασκήσεων να γραφτούν στα φύλλα εξέτασης.
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού/ταινίας.
6. Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).

**Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.**

**ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του ΜΕΡΟΥΣ Α΄.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

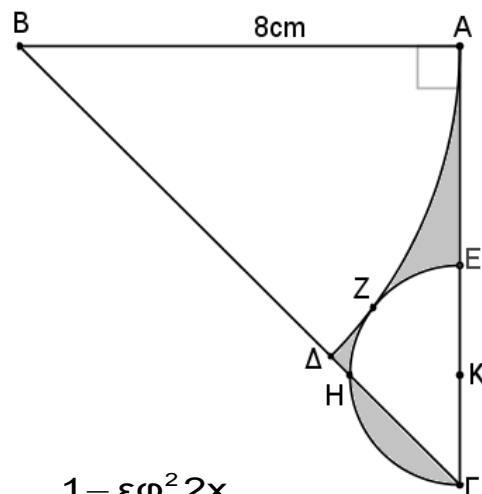
1. Σε γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι 3 και ο έκτος 96. Να βρείτε το άθροισμα των έξι πρώτων όρων της.
2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(2, 1), Β(-1, -2) και Γ(-6, 3). Να βρείτε:  
(α) την εξίσωση της μεσοκάθετης της πλευράς ΑΓ  
(β) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:  
(α)  $\psi = \ln(5x - 1) - \eta\mu 7x + 8^{-x}$                       (β)  $\psi = \frac{\epsilon\phi 3x}{x^3 + 2}$
4. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα:  $\frac{5x - 2}{(x - 2)(x^2 + 4)}$ .

5. Ορθό πρίσμα έχει ύψος 8 cm και βάση ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές  $(x + 2)$  cm,  $2x$  cm και  $(4x - 6)$  cm, οι οποίες αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.  
Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειάς του.

6. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, ότι για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό  $n$  ισχύει η σχέση:  $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \dots + \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$ ,  $\alpha \neq 1$ .

7. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \sqrt{x^2 + 1}$ ,  $x \leq 0$ . Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης  $f^{-1}(x)$ .

8. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $AB = A\Gamma = 8$  cm και  $E$  το μέσο της πλευράς  $A\Gamma$ . Με κέντρο την κορυφή  $B$  και ακτίνα  $BA$ , γράφουμε τόξο  $AD$  μέσα στο τρίγωνο. Το  $EH\Gamma$  είναι ημικύκλιο, το οποίο εφάπτεται του τόξου  $AD$  στο  $Z$ .  
Να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας.



9. Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = \frac{\sin 6x}{\sin 2x} - \frac{\eta\mu 6x}{\eta\mu 2x}$  και  $B = \frac{1 - \epsilon\phi^2 2x}{1 + \epsilon\phi^2 2x}$

(α) Να δείξετε ότι:  $A = -2$  και  $B = \sin 4x$

(β) Να λύσετε την εξίσωση  $A - B = \eta\mu 2x$ , στο διάστημα  $(0, 360^\circ)$ .

10. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 2 + \sqrt{x}$  και  $g(x) = x^2 - 1$ .

(α) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\sigma(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{και} \quad h(x) = (f \circ g)(x)$$

(β) Να βρείτε το  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x^2+3}-2}$ .

**ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄**  
**ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄**

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του ΜΕΡΟΥΣ Β΄.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.**

1. Αριθμητική πρόοδος (Α.Π.) και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος (Φ.Γ.Π.) έχουν τον ίδιο πρώτο όρο. Η διαφορά της Α.Π. είναι εξαπλάσια του λόγου της Φ.Γ.Π. και το άθροισμα των πέντε πρώτων όρων της Α.Π. είναι ίσο με 50. Το άθροισμα των άπειρων όρων της Φ.Γ.Π.

είναι ίσο με τα  $\frac{8}{3}$  της διαφοράς της Α.Π..

(α) Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.

(β) Αν η διαφορά της Α.Π. είναι 3, να υπολογίσετε το άθροισμα των δέκα όρων που ακολουθούν τον όγδοο όρο της.

2. Δίνεται η συνάρτηση  $\psi - e^{-\psi} = x - 2$ .

(α) Να δείξετε ότι:  $\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{1 + e^{-\psi}}$  και  $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{e^{2\psi}}{(1 + e^{\psi})^3}$

(β) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της συνάρτησης  $\psi - e^{-\psi} = x - 2$  στο σημείο της  $A(x_0, \psi_0)$ , στο οποίο η κλίση της εφαπτομένης είναι  $\frac{1}{2}$ .

(γ) Αν η οξεία γωνία που σχηματίζει η κάθετη με την ευθεία (ε):  $ax - \psi = -1$  είναι  $45^\circ$ , να υπολογίσετε τις τιμές του α.

3. (α) Να λύσετε την εξίσωση:  $\log_2(5^{x+1} - 3^{x+2}) = 2 + \log_2(4 \cdot 3^x - 5^x)$

(β) Αν η λύση της πιο πάνω εξίσωσης είναι 2,

(i) να δείξετε ότι:  $\log_x 2 + \log_{x^2} 2 + \log_{x^4} 2 + \dots = x$

(ii) να υπολογίσετε την τιμή του κ στην εξίσωση:

$$\left[ 50(\log_x 2 + \log_{x^2} 2 + \log_{x^4} 2 + \dots) \right]^{\log_k} = \log 1000^k + 10$$

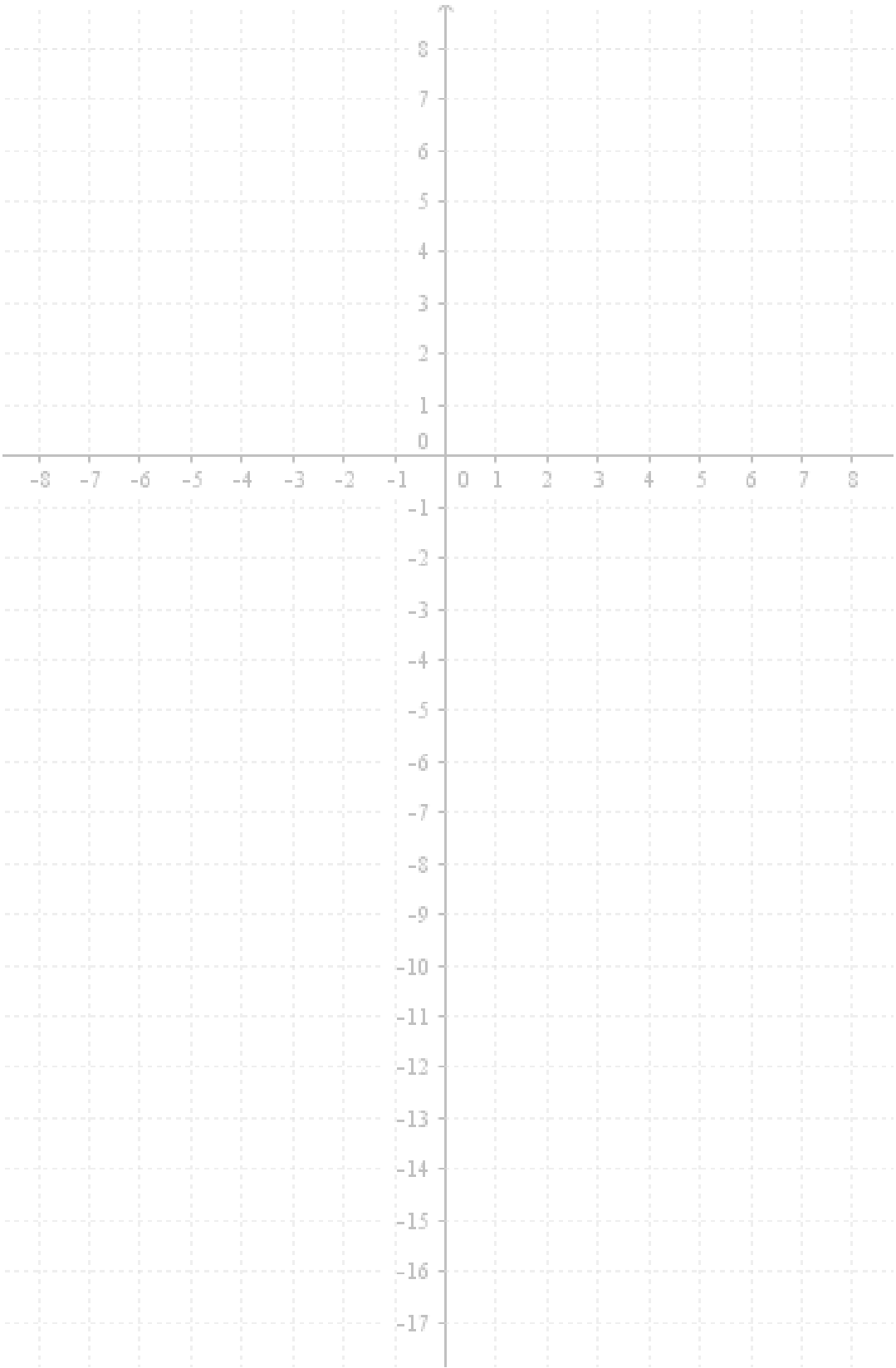
4. (α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f(x) = (\ln x)^3 \cdot \sin^2 A - \ln x^2 \cdot \sin A \cdot \eta\mu A + \eta\mu^2 A$  περνά από το σημείο  $E(e, 1 - \eta\mu 2B)$ . Αν  $A, B$  και  $\Gamma$  είναι γωνίες τριγώνου  $AB\Gamma$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές ή ορθογώνιο.
- (β) Στην περίπτωση που το πιο πάνω τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: 
$$\frac{\eta\mu A + \eta\mu B}{\sin A + \sin B} = \eta\mu \Gamma$$
5. Ευθεία  $(\epsilon_1)$  περνά από τα σημεία  $A(-1, 2)$  και  $B(2, 8)$  και η ευθεία  $(\epsilon_2)$  περνά από το σημείο  $\Gamma(3, 2)$  κι έχει κλίση  $-2$ .
- (α) Να βρείτε τις εξισώσεις των δύο ευθειών και να δείξετε ότι, το σημείο τομής τους  $T$ , έχει συντεταγμένες  $(1, 6)$ .
- (β) Οι ευθείες  $(\epsilon_1)$  και  $(\epsilon_2)$  τέμνουν τον άξονα των τετμημένων στα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $TK\Lambda$  είναι ισοσκελές και να το κατασκευάσετε στο τετραγωνισμένο χαρτί που σας δίνεται στα φύλλα εξέτασης.
- (γ) Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τριγώνου  $TK\Lambda$  γύρω από την ευθεία  $\psi = -2$ .

**ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ**

**Ο Διευθυντής**

Γεωργίου Ανδρέας

Άσκηση 5 Μέρους Β΄



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30/5/2016

ΤΑΞΗ: Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
3. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
4. Δίνεται τυπολόγιο.
5. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε το  $\lim_{\chi \rightarrow +\infty} \frac{3\chi^2 + 2\chi - 1}{\chi^2 + 5\chi}$ .

2. Να βρείτε την παράγωγο  $\frac{d\Psi}{dx}$  των συναρτήσεων:

α)  $\Psi = \chi^3 + e^{2\chi} - \ln(\chi + 4) + \eta\mu 5\chi$       β)  $\Psi = \frac{\chi^2 + 2\chi}{\chi - 1}$

3. Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται  $\alpha = \sqrt{3} \text{ cm}$ ,  $\gamma = 1 \text{ cm}$  και  $\Gamma = 30^\circ$ .  
Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου.

4. α) Να δείξετε ότι  $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\chi - \sigma\upsilon\nu 3\chi}{\eta\mu 2\chi + \eta\mu 3\chi} = \varepsilon\varphi \frac{\chi}{2}$ .

β) Να λυθεί η εξίσωση  $\frac{\sigma\upsilon\nu 2\chi - \sigma\upsilon\nu 3\chi}{\eta\mu 2\chi + \eta\mu 3\chi} - 1 = 0$ , στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

5. Δίνεται η ακολουθία  $\log \chi, \log \chi^2, \log \chi^4, \dots$  όπου  $\chi > 0$ .

α) Να δείξετε ότι είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθεί ο λόγος της.

β) Αν το άθροισμα των έξι πρώτων όρων της ισούται με 126 να βρεθεί η τιμή του  $\chi$ .

6. α) Δίνεται το πολυώνυμο  $P(x) = (2\kappa - 1)x^2 + (3\lambda - 2)x + (2\lambda + \kappa - \mu)$ .

Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων  $\kappa, \lambda, \mu$  ώστε το πολυώνυμο  $P(x)$  να είναι μηδενικό.

- β) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα  $\frac{5x-4}{(x+1)(x-2)}$ .

7. Δίνονται τα σημεία  $A(3, 4)$ ,  $B(3, 6)$ ,  $\Gamma(3 + \sqrt{3}, 7)$  και η ευθεία  $(\varepsilon): |\kappa - 2|x - \psi - 1 = 0$ .

Να βρείτε:

- α) Την οξεία γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα  $\overrightarrow{AB}$  και  $\overrightarrow{B\Gamma}$ .  
β) Την τιμή του  $\kappa$ , ώστε η ευθεία  $(\varepsilon)$  να περνά από το μέσο του  $AB$ .

8. Σε κανονική τετραγωνική πυραμίδα το ύψος και το παράπλευρο ύψος της σχηματίζουν γωνία  $30^\circ$ . Αν το παράπλευρο ύψος είναι ίσο με  $6\kappa$ , να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας, συναρτήσει του  $\kappa$ .

9. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό  $n$  ισχύει ότι:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

10. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \ln x$  και  $g(x) = x^2 - x - 6$ .

Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α)  $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

β)  $(f \circ g)(x)$

**ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Α' ΜΕΡΟΥΣ**

**ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ Β' ΜΕΡΟΣ**

**ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Αν οι γωνίες A, B, Γ τριγώνου ABΓ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι

$$\frac{\eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma}{\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B + \sigma\upsilon\nu \Gamma} = \sqrt{3} \quad .$$

2. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{x+1}$  .

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα

$$\frac{1}{f(1)} + \frac{1}{f'(2)} + \frac{1}{f''(3)} + \frac{1}{f'''(4)} + \dots \quad (\acute{\alpha}\pi\epsilon\iota\rho\iota \acute{o}\rho\iota)$$

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f^2(x) + f'(x) = 2$  .

3. Δίνεται η συνάρτηση  $\Psi = \ln(\ln x)$ .

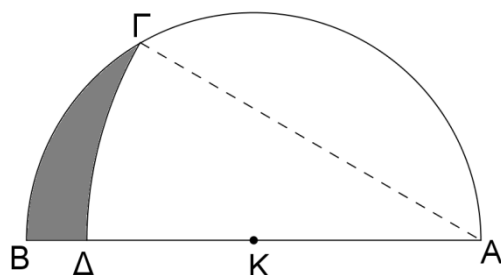
α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.

β) Να δείξετε ότι  $\frac{d^2\Psi}{dx^2} + (1 + e^\Psi) \left(\frac{d\Psi}{dx}\right)^2 = 0$  .

γ) Να βρεθεί η εξίσωση της κάθετης της καμπύλης της  $\Psi = \ln(\ln x)$  στο σημείο της με  $x = e$  .

δ) Η κάθετη της παραπάνω καμπύλης στο σημείο της  $A(e, 0)$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο B και τον άξονα  $y'y$  στο σημείο Γ. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου BOΓ.

4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο  $K$  και ακτίνα  $R$ . Με κέντρο το  $A$  και ακτίνα  $A\Gamma = \lambda R$  φέρουμε τόξο  $\Gamma\Delta$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου  $B\Gamma\Delta$  συναρτήσει του  $R$ .



5. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφές  $A(2, 2)$  και  $B(2, 5)$ .  
 Δύο από τις πλευρές του βρίσκονται πάνω στις ευθείες:  
 $(\varepsilon_1): 3\chi - 4\psi + 14 = 0$  και  $(\varepsilon_2): 3\chi - 2\psi - 2 = 0$ .  
 α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής  $\Gamma$ .  
 β) Να βρείτε το εμβαδό της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται όταν το τρίγωνο  $AB\Gamma$  κάνει πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα  $\psi'\psi$ .

### ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Οι Εισηγητές

Η Συντονίστρια Β.Δ.

Ο Διευθυντής

.....  
 Ιωακείμ Μάριος

.....  
 Χρίστου Ροΐδη Μάρω

.....  
 Θεμιστοκλέους Αλέκος

.....  
 Καττιμέρης Χαράλαμπος

.....  
 Νεάρχου Παναγιώτης

## ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ

### ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

#### 1. Τριγωνομετρία

$$\eta\mu(A \pm B) = \eta\mu A \sigma\upsilon\nu B \pm \eta\mu B \sigma\upsilon\nu A \qquad \sigma\upsilon\nu(A \pm B) = \sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B \mp \eta\mu A \eta\mu B$$

$$2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu B = \eta\mu(A - B) + \eta\mu(A + B) \qquad 2\sigma\upsilon\nu A \sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu(A - B) + \sigma\upsilon\nu(A + B)$$

$$2\eta\mu A \eta\mu B = \sigma\upsilon\nu(A - B) - \sigma\upsilon\nu(A + B)$$

$$\eta\mu 2A = 2\eta\mu A \sigma\upsilon\nu A, \qquad \sigma\upsilon\nu 2A = \sigma\upsilon\nu^2 A - \eta\mu^2 A$$

$$\eta\mu^2 A = \frac{1 - \sigma\upsilon\nu 2A}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu^2 A = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2A}{2}$$

$$\eta\mu 2A = \frac{2\varepsilon\varphi A}{1 + \varepsilon\varphi^2 A} \qquad \sigma\upsilon\nu 2A = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2 A}{1 + \varepsilon\varphi^2 A}$$

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A+B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \qquad \eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu \frac{A-B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu A + \sigma\upsilon\nu B = 2\sigma\upsilon\nu \frac{A+B}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A-B}{2} \qquad \sigma\upsilon\nu A - \sigma\upsilon\nu B = 2\eta\mu \frac{B-A}{2} \cdot \eta\mu \frac{A+B}{2}$$

$$\alpha = 2R \cdot \eta\mu A \qquad \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2 \cdot \beta \cdot \gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \qquad E = \frac{\alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu \Gamma}{2}$$

#### 2. Στερεομετρία

|                          |                                                   |                                                                  |
|--------------------------|---------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------|
| <b>Ορθό πρίσμα</b>       | $E_{\pi} = \Pi_{\beta} \cdot \upsilon$            | $V = E_{\beta} \cdot \upsilon$                                   |
| <b>Κανονική πυραμίδα</b> | $E_{\pi} = \frac{1}{2} \Pi_{\beta} \cdot h$       | $V = \frac{E_{\beta} \cdot \upsilon}{3}$                         |
| <b>Κύλινδρος</b>         | $E_{\kappa} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \upsilon$ | $V = \pi \cdot R^2 \cdot \upsilon$                               |
| <b>Κώνος</b>             | $E_{\kappa} = \pi \cdot R \cdot \lambda$          | $V = \frac{\pi \cdot R^2 \cdot \upsilon}{3}$                     |
| <b>Κόλουρος Κώνος</b>    | $E_{\kappa} = \pi \cdot (R + \rho) \cdot \lambda$ | $V = \frac{\pi \cdot \upsilon}{3} (R^2 + R \cdot \rho + \rho^2)$ |

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΜΑΪΟΥ/ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**

**Τάξη: Β΄**  
**Μάθημα: Μαθηματικά Κατεύθυνσης**

**Ημερομηνία: 19/05/2016**  
**Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες**

**Ονοματεπώνυμο:..... Τμήμα:.....**

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.  
 (β) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).  
 (γ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.  
 (δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.  
 (ε) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.  
 (στ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα:  $\frac{x-6}{x(x-3)}$

2. Να βρείτε τα όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2+2x}{x^4-x+4}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}$$

3. (α) Να λύσετε την εξίσωση:  $\log(4x+2) - \log 9 = \log 2 + \log x$

$$(\beta) \text{ Να αποδείξετε ότι } \frac{2 + \log_5 8 - 2 \log_5 10}{\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{2}} = 1$$

4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = 2x^4 + 5\sqrt{x} - \ln(6x+2)$$

$$(\beta) g(x) = e^{3x} \cdot \eta\mu 4x$$

5. Να αποδείξετε ότι

$$(\alpha) \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha-\sigma\upsilon\nu\alpha}{\eta\mu 2\alpha-\eta\mu\alpha} = \sigma\varphi\alpha$$

$$(\beta) \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 2\varepsilon\varphi 2x$$

6. Δίνεται η καμπύλη  $\psi^2 + 3x\psi = 4$ . Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με τετμημένη  $x = -1$  και  $\psi > 0$ .

7. Να δείξετε ότι οι αριθμοί  $\alpha$  και  $\beta$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ ,  $\beta \neq 0$  είναι ομόσημοι αν ισχύει

$$\left| \frac{\alpha|\beta| + \beta|\alpha|}{\alpha\beta} \right| = 2.$$

8. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύουν οι σχέσεις  $\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\alpha+\gamma} = 1$  και  $\sin\Gamma \cdot \eta\mu A = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Να δείξετε ότι είναι ισόπλευρο.

9. Αν οι αριθμοί  $\ln(3^x - 1)$ ,  $\ln(3^x + 1)$ ,  $3\ln 2$  αποτελούν διαδοχικούς όρους Αριθμητικής Προόδου και ο έβδομος όρος της είναι ίσος με  $\ln 8$ ,

(α) να δείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι  $-3\ln 2$

(β) να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης  $A = \alpha_{21} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{28}$

10. Σε κύκλο  $(O, R)$  θεωρούμε τα διαδοχικά σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$  έτσι ώστε  $AB = \lambda_6$ ,  $\widehat{B\Gamma} = 120^\circ$  και  $\Gamma\Delta = R\sqrt{2}$ . Με διάμετρο τη χορδή  $B\Gamma$  γράφουμε ημικύκλιο έξω από τον κύκλο  $(O, R)$ .

(α) Να δείξετε ότι  $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{A\Delta\Gamma} = 90^\circ$

(β) Να βρείτε, συναρτήσει του  $R$ , το εμβαδόν και την περίμετρο του μηνίσκου που περικλείεται από το μικρότερο τόξο  $B\Gamma$  και από το ημικύκλιο με διάμετρο  $B\Gamma$ .

**ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει κορυφές  $A(2, 3)$ ,  $B(5, 2)$  και  $\Gamma(\kappa, \lambda)$  και είναι ισοσκελές και ορθογώνιο στο  $A$ .

(α) Να βρείτε τα  $\kappa, \lambda$  αν  $\lambda > 0$

(β) Αν  $\Gamma(3, 6)$  να δείξετε ότι η πλευρά  $B\Gamma$  έχει εξίσωση  $2x + \psi - 12 = 0$

(γ) Να βρείτε το μήκος του ύψους  $AD$

(δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $E$  ώστε το τετράπλευρο  $ABE\Gamma$  να είναι τετράγωνο.

2. Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης:  $\eta\mu^4 x + \eta\mu^4 \left( \frac{\pi}{4} + x \right) = \frac{1}{4}$

3. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4}$  και  $g(x) = x + \frac{1}{x}$

(α) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$  (Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της)

(β) Να δείξετε ότι  $f''(x) \cdot [f(x) - x] + \left(\frac{f'(x)}{f(x)}\right)^2 + \frac{3}{[f(x)-x]^2} = 0$

4. Σε Αριθμητική Πρόοδο ο πρώτος όρος είναι μεγαλύτερος από τη διαφορά  $\delta$  κατά 6.

Ο δέκατος, ο έκτος και ο τέταρτος όρος της Α.Π. αποτελούν τους τρεις πρώτους όρους αντίστοιχα, μιας Απολύτως Φθίνουσας Γεωμετρικής Προόδου.

(α) Να σχηματίσετε τις δύο προόδους

(β) Αν ισχύει η σχέση:  $\Sigma_n + \Sigma_\infty = -93$ , όπου  $\Sigma_n$  είναι το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της Γεωμετρικής προόδου και  $\Sigma_\infty$  το άθροισμα των απείρων όρων της Γεωμετρικής Προόδου, να βρείτε το  $n$ .

5. Στο διπλανό σχήμα δίνονται:

ΑΒΓΔ ορθογώνιο τραπέζιο ( $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$ ),

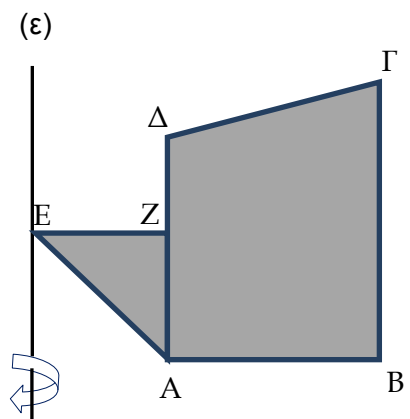
ΖΕΑ ορθογώνιο τρίγωνο ( $\hat{Z} = 90^\circ$ ),

$\hat{\Gamma} = 60^\circ$ ,

Ζ μέσο της ΑΔ,

$\Delta\Gamma = 4\text{cm}$ ,

$ZE = ZA = 3\text{cm}$



Το σκιασμένο σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) που είναι παράλληλη προς την ΓΒ. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την περιστροφή.

**Ο Διευθυντής**

Γιώργος Χρυσόστομου



$$\begin{aligned}
 \eta\mu A + \eta\mu B + \eta\mu \Gamma &= 2 \eta\mu A + B^2 \sigma\upsilon\nu A - B^2 + 2 \eta\mu \Gamma^2 \sigma\upsilon\nu \Gamma^2 \\
 &= 2 \sigma\upsilon\nu \Gamma^2 \sigma\upsilon\nu A - B^2 + 2 \sigma\upsilon\nu A + B^2 \sigma\upsilon\nu \Gamma^2 \quad (\text{γιατί } A + B^2 + \Gamma^2 = \pi^2) \\
 &= 2 \sigma\upsilon\nu \Gamma^2 [\sigma\upsilon\nu A - B^2 + \sigma\upsilon\nu A + B^2] \\
 &= 2 \sigma\upsilon\nu \Gamma^2 2 \sigma\upsilon\nu A^2 \sigma\upsilon\nu B^2 = 4 \sigma\upsilon\nu A^2 \sigma\upsilon\nu B^2 \sigma\upsilon\nu \Gamma^2
 \end{aligned}$$

---

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΤΑΞΗ: Β' ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 26 /05/2016  
ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

Βαθμός: .....

Ολογράφως: .....

Υπογραφή: .....

Ονοματεπώνυμο: ..... Τμήμα: ..... Αριθ.: .....

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΤΕΚΑ (11) ΣΕΛΙΔΕΣ**

**ΜΕΡΟΣ Α':** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος

$$\frac{3}{4}, \frac{1}{12}, -\frac{7}{12}, -\frac{5}{4}, \dots$$

- α) Να βρείτε τον δέκατο όρο της προόδου.
- β) Να βρείτε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της προόδου.

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - x + 1}{x^2 - 4x + 1}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{2x - 6}$

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

α)  $y = 3x^2 - \frac{x}{2} + \sqrt{3x}$

β)  $y = \frac{\eta\mu 2x}{x+1}$

4. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης  $36\text{cm}^2$  . Αν το παράπλευρο ύψος της είναι  $5\text{cm}$  , να υπολογίσετε:
- α) Το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας της πυραμίδας.
  - β) Τον όγκο της πυραμίδας.

5. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα:  $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)}$

6. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x-2}{3-x}$ ,  $x \neq 3$ . Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης  $f^{-1}(x)$ .

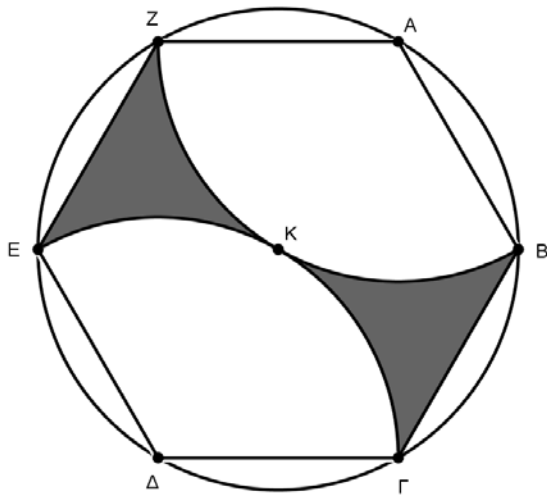
7. Να λύσετε την εξίσωση:  $\log_2(3^{2x} + 3) = 2 + x \log_2 3$

8. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sin(2\alpha - \beta) - \sin(2\alpha + \beta)}{\eta\mu(\alpha + \beta) - \eta\mu(\alpha - \beta)} = 2\eta\mu\alpha$$

9. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης  $y^2 + xy + x = 4$  στο σημείο της με  $x = 4$  και  $y > -1$ .

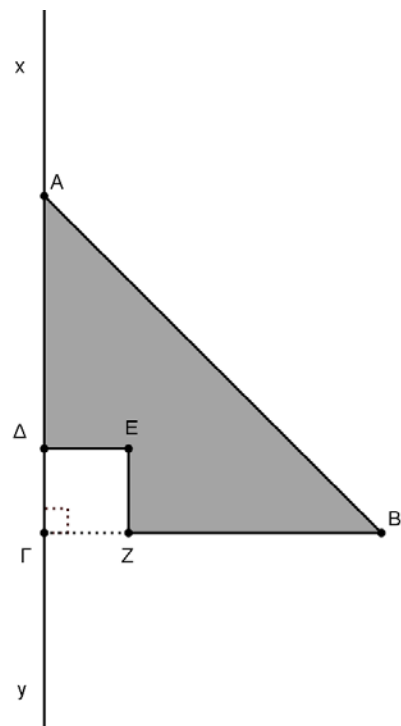
10. Στο πιο κάτω σχήμα το  $ΑΒΓΔΕΖ$  είναι κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο  $K$  και ακτίνα  $R = 8\text{ cm}$ . Με κέντρο το  $A$  γράφουμε τόξο  $BKZ$  και με κέντρο το  $\Delta$  τόξο  $\GammaΚΕ$  μέσα στο εξάγωνο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Τρίγωνο  $AB\Gamma$  έχει κορυφές  $A(0,3)$ ,  $B(-1,0)$  και  $\Gamma(2,1)$ .
  - α) Να βρείτε την εξίσωση της  $A\Gamma$ .
  - β) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής  $B$  από την ευθεία  $A\Gamma$ .
  - γ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου  $BM$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
  - δ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.
  - ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

2. Στο πιο κάτω σχήμα το  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο ( $\hat{\Gamma} = 90^\circ$ ) και το  $\Gamma\Delta EZ$  είναι τετράγωνο. Το σχήμα  $ABZE\Delta$  περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα  $xy$ . Αν  $AB = 4\sqrt{2}$  cm και  $EZ = 1$  cm, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται.



3. Δίνονται  $A = 2\eta\mu^2 x - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 2x - 2\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^3 2x + \dots$  ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

και  $B = \frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x - \eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu 2x}$ .

α) Να δείξετε ότι:  $A = \epsilon\phi^2 x$  και  $B = \epsilon\phi 2x$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση  $3B \cdot (1 - A) = 2\sqrt{3}$  στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ .

4. Ο πρώτος όρος απολύτως αύξουσας γεωμετρικής προόδου είναι διπλάσιος από τον πρώτο όρο αριθμητικής προόδου. Ο λόγος ( $\lambda$ ) της γεωμετρικής προόδου είναι ίσος με τη διαφορά ( $\delta$ ) της αριθμητικής προόδου. Το άθροισμα των τεσσάρων πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με τον τέταρτο όρο της γεωμετρικής προόδου. Αν ο τρίτος όρος της γεωμετρικής προόδου είναι 8, να σχηματίσετε τις δύο προόδους.

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = -\frac{1}{2\alpha} \cdot \ln\left(\frac{1+e^{-\alpha x}}{1-e^{-\alpha x}}\right)$ ,  $\alpha \neq 0$ .

α) Να δείξετε ότι  $f'(x) = \frac{e^{\alpha x}}{e^{2\alpha x} - 1}$ .

β) Αν  $\alpha = 1$ , να λύσετε την εξίσωση  $f'(x) = \frac{2}{3}$ .

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Σοφούλα Αχεριώτου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ/ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΤΑΞΗ : Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 24/05/2016

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2,5 ώρες

Βαθμός: .....

Ολογράφως: .....

Υπογραφή: .....

Όνομα: ..... Τμήμα: ..... Αριθμός: .....

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (μολύβι επιτρέπεται μόνο στα σχήματα).
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Επιτρέπεται η χρήση ΜΗ προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες και περιλαμβάνει δύο μέρη.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο.
- Να μεταφέρεται τα σχήματα στο τετράδιο απαντήσεων.

**ΜΕΡΟΣ Α' :** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλυθεί το κλάσμα  $\frac{x-2}{x^2+2x}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να υπολογιστούν τα πιο κάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x}{3x^2 + 1} \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

3. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} \qquad \text{και} \qquad g(x) = e^{2x} \ln 3x$$

4. Τετραγωνική πυραμίδα έχει πλευρά βάσης 8 cm και  $E_p = 2E_b$ . Να βρεθεί ο όγκος της.

5. α) Να λυθεί η εξίσωση :  $e^x - 2e^{-x} + 1 = 0$

β) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $f(x) = \frac{x^2}{3-x}$

6. Δίνεται η παράσταση  $A(x) = 2\sin x \cos x - 1$ .

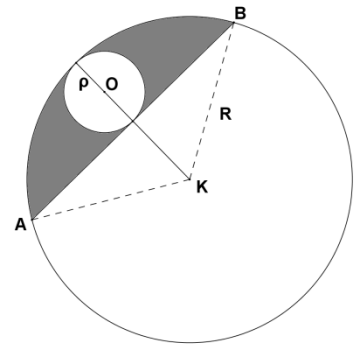
α) Να αποδειχθεί ότι :  $A(x) = \sin 2x (1 - 2\sin 2x)$ .

β) Να λυθεί η εξίσωση  $A(x) = 0$ .

7. Σε κύκλο  $(K, R)$  φέρουμε χορδή  $AB = l$ . Κύκλος με κέντρο  $O$  και ακτίνα  $\rho$  εφάπτεται της χορδής  $AB$  και του μικρότερου τόξου  $\widehat{AB}$ .

α) Να αποδειχθεί ότι η ακτίνα  $r = \frac{R}{4}$ .

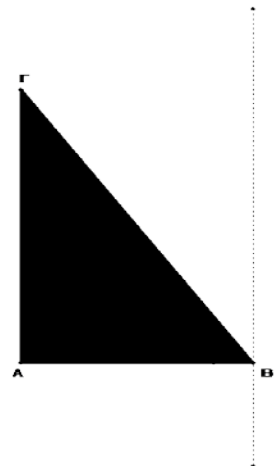
β) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου, συναρτήσει του  $R$ .



8. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  δίνεται  $a = 2\text{cm}$ ,  $b = \sqrt{3}\text{cm}$  και  $\angle \Gamma = 60^\circ$ .

α) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με  $\angle \Lambda = 90^\circ$ .

β) Το πιο πάνω τρίγωνο  $AB\Gamma$  περιστρέφεται γύρω από άξονα κάθετο στην πλευρά του  $AB$ . Να υπολογισθεί το εμβαδόν του στερεού που παράγεται.



9. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \sqrt{1-x}$  και  $g(x) = \ln(e-x)$ .

α) Να οριστεί και να βρεθεί ο τύπος της  $y = (f \circ g)(x)$ .

β) Να αποδειχθεί ότι :  $2y' = \frac{1}{e-x}$ .

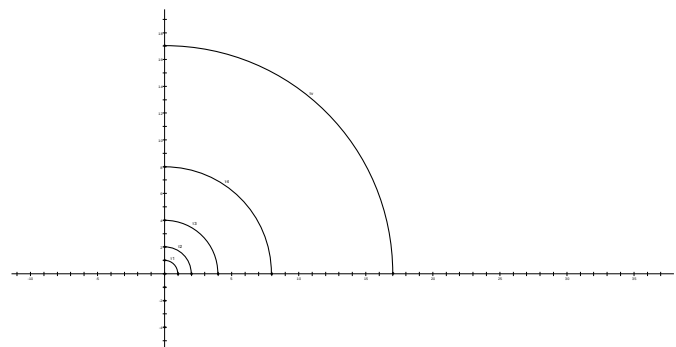
10. α) Με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ή με άλλο τρόπο, να αποδειχθεί ότι :

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \quad n \in \mathbb{N}$$

β) Με κέντρο την κορυφή ορθής γωνίας και ακτίνα 1 μονάδα γράφουμε τόξο στο εσωτερικό της γωνίας. Διπλασιάζοντας κάθε φορά την ακτίνα, γράφουμε διαδοχικά τόξα στο εσωτερικό της γωνίας. Ναδειχθεί ότι το άθροισμα του μήκους των  $n$  πρώτων τόξων δίνεται από

$$S_n = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_n = \frac{\rho}{2}(2^n - 1)$$

$$[\text{Δίνεται : } t_{\widehat{AB}} = \frac{2\rho R \angle \theta}{360^\circ}]$$



## ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του δεύτερου και όγδοου όρου της είναι ίσο με 24 , ενώ η διαφορά του τρίτου από το διπλάσιο του έκτου όρου της ισούται με 32.

α) Να σχηματιστεί η Α.Π.

β) Να αποδειχθεί ότι το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της είναι:  $S_n = \frac{(5n-21)n}{2}$

γ) Να βρεθεί το άθροισμα των όρων της από τον εικοστό πρώτο ( $a_{21}$ ) μέχρι και τον τριακοστό ( $a_{30}$ ).

2. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{ax}{x-1}$  ,  $a \in \mathbb{R}$  και  $g(x) = \frac{3}{x^2-1}$ .

α) Να οριστεί και να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης  $y = \frac{f \circ g}{g \circ f}(x)$ .

β) Να αποδειχθεί ότι η εφαπτομένη της  $y = \frac{f \circ g}{g \circ f}(x)$  στο σημείο της Α για  $x = 2$  έχει εξίσωση:

$$5ax - 3y = 4a.$$

γ) Η εφαπτομένη τέμνει τον άξονα των  $x$  στο σημείο Β. Να βρεθούν οι τιμές του  $a \in \mathbb{R}$  , ώστε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ να είναι ίσο με  $\frac{8}{5}$  τ.μ.

3. Δίνονται οι παραστάσεις:  $A = \sin^2(30^\circ - a) - \sin^2(30^\circ + a)$  και  $B = \frac{\sin p}{4} + a + \frac{\sin p}{4} - a$

Να αποδειχθεί ότι:

α)  $B = \frac{2}{\sin 2a}$  και

β)  $A = \frac{1}{B}$

4. α) Να υπολογιστεί το όριο:  $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h \ln x}{\sqrt{1-3x}-1}$

β) Να σχηματιστεί γεωμετρική πρόοδος που έχει λόγο  $I = -\frac{2}{3}$  και πρώτο όρο τη λύση της εξίσωσης:

$$\log(2 \cdot 3^x + 2^x) + \log 81 = x \log 3 + \log 178.$$

γ) Να υπολογισθεί το άθροισμα των θετικών όρων της προόδου .

5. α) Να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών  $(e_1)$  και  $(e_2)$  που περνούν από το σημείο  $K(0, 2)$  και η αρχή των αξόνων  $O$  απέχει από αυτές  $\sqrt{2}$  μονάδες.
- β) Οι ευθείες  $(e_1)$  και  $(e_2)$  με εξισώσεις  $x - y + 2 = 0$  και  $x + y - 2 = 0$  είναι οι διαγώνιοι τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$  με μια κορυφή του το σημείο  $(4, 6)$ . Να βρεθούν οι συντεταγμένες των άλλων κορυφών του.

**Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ**

**Παρασκευούλα Κωνσταντινίδου**

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΟ ΛΥΚΕΙΟ  
ΑΠΟΣΤΟΛΟΥ ΛΟΥΚΑ ΚΟΛΟΣΣΙΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2015 - 2016

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΕΙΡΑ: Α΄

ΤΑΞΗ: Β΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30/05/2016

ΧΡΟΝΟΣ: 8:00 π.μ. – 10:30 π.μ.

**Οδηγίες:**

- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.
  - Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο (2) μέρη.
  - Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.  
(επισυνάπτεται τυπολόγιο)
  - Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (με μολύβι μόνο τα σχήματα).
  - Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής σφραγισμένης από το σχολείο.
  - Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
  - Όλες οι απαντήσεις να δοθούν σε σφραγισμένες κόλλες.
- 

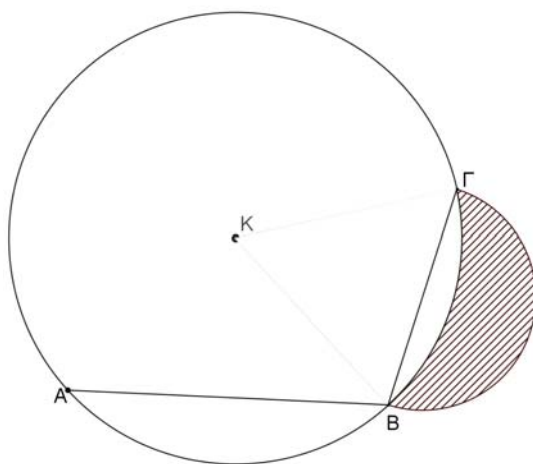
**ΜΕΡΟΣ Α΄:** (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

1. Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου: 7, 10, 13, ...
2. Να λύσετε την εξίσωση:  $\ln(6 - x) - \ln x = \ln 5$
3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές:  $\alpha = 8\text{m}$ ,  $\beta = 5\text{m}$  και εμβαδόν:  $E = 10\sqrt{3}\text{m}^2$ .  
Να υπολογίσετε τη γωνιά  $\hat{\Gamma}$ , ( $\hat{\Gamma} < 90^\circ$ ) και την πλευρά  $\gamma$ .
4. Να υπολογίσετε τον όγκο και την επιφάνεια κύβου με περίμετρο βάσης 20 m.
5. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α)  $f(x) = 6x^5 + \sqrt{x} - \sin \frac{\pi}{3}$

β)  $f(x) = e^{5x}(\text{τεμ}x - \sigma\phi x)$

6. Να λύσετε την εξίσωση:  $\sin 2x - 3\eta\mu x + 1 = 0$ , στο διάστημα  $(0, 2\pi)$
7. Να λύσετε την εξίσωση:  $\log_2(9^{x-1} + 7) = \log_3 9 + \log_2(3^{x-1} + 1)$
8. Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{3x^2 + 3x + 1}{x(x^2 + 1)}$ ,  $x \neq 0$
- α) Να αναλύσετε την  $f(x)$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
- β) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης  $f(x)$  στο σημείο με τετμημένη  $-1$ , περνά από την αρχή των αξόνων.
9. Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης:  $f(x) = \eta\mu x + 5$ , εφαρμόζοντας τον ορισμό της παραγώγου.
10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος  $(K, R)$ , με χορδές  $AB$  και  $B\Gamma$ , έτσι ώστε  $AB = \lambda_4$  και  $\hat{AB\Gamma} = 105^\circ$ .  
Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας  $R$ , την περίμετρο και το εμβαδόν του μηνίσκου που γράφεται με διάμετρο  $B\Gamma$ .



**ΜΕΡΟΣ Β΄: (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες (10/100).**

1. Σε αριθμητική και γεωμετρική πρόοδο με θετικούς όρους, η διαφορά της αριθμητικής προόδου ισούται με το λόγο της γεωμετρικής προόδου. Ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου είναι διπλάσιος του πρώτου όρου της γεωμετρικής και ο  $17^{\text{ος}}$  όρος της αριθμητικής προόδου ισούται με το τετράγωνο του πρώτου όρου της γεωμετρικής. Το άθροισμα των απείρων όρων της γεωμετρικής προόδου ισούται με τον πρώτον όρο της αριθμητικής.
  - α) Να βρείτε τις δύο προόδους.
  - β) Αν η γεωμετρική πρόοδος έχει είκοσι όρους και το άθροισμα των δέκα τελευταίων όρων της ισούται με  $\frac{2^k - 1}{2^{2k-3}}$ , να υπολογίσετε την τιμή του  $k$ .
  
2. Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = \log_x \left( \frac{3-x}{3+x} \right)$  και  $g(x) = x^2 - 4x + 5$ , η οποία ορίζεται για  $x \in [2, +\infty)$ .
  - α) να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$
  - β) να βρείτε το πεδίο τιμών της  $g$
  - γ) να ορίσετε τη συνάρτηση:  $h(x) = f(x) + g(x)$
  - δ) να υπολογίσετε τα όρια:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{f(x)}$  και  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{g(x) - 26}{(x+3)\eta\mu(x-7)}$
  
3. Ορθογώνιο τραπέζιο  $ΑΒΓΔ$  ( $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$ ) έχει οξεία γωνία ίση με  $45^\circ$ , ύψος 8 cm και μεγάλη βάση 12 cm.
  - α) Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του τραπεζίου γύρω από τη μεγαλύτερη βάση του.
  - β) Εξαγωνική πυραμίδα εγγράφεται στο πιο πάνω παραγόμενο στερεό, (η κορυφή του στερεού και της πυραμίδας συμπίπτουν και η βάση της πυραμίδας είναι εγγεγραμμένη στη βάση του στερεού). Να υπολογίσετε το εμβαδόν της πυραμίδας.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$g(x) = \frac{1 + \eta\mu 12x - \sigma\upsilon\nu 12x}{1 + \eta\mu 12x + \sigma\upsilon\nu 12x} \quad \text{και} \quad f(x) = \ln(\epsilon\phi x + \epsilon\phi 2x) - \ln(1 - \epsilon\phi x \epsilon\phi 2x),$$

οι οποίες ορίζονται στο διάστημα  $\left(0, \frac{\pi}{24}\right)$ .

Να δείξετε ότι:

$$\alpha) \quad g(x) = \frac{2e^{f(x)}}{1 - e^{2f(x)}}$$

$$\beta) \quad \frac{g''(x)}{f''(x)} = -2\epsilon\phi^3 6x \text{ τεμ} 6x$$

5. Τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  έχει κορυφή Α το σημείο (1,3) και δύο από τις διαμέσους του, έχουν εξισώσεις:

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad y = 1$$

α) Να δείξετε ότι τα ίχνη των δύο διαμέσων στις πλευρές του τριγώνου, είναι τα σημεία: (-1,1) και (3,2).

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

γ) Έστω Ν το σημείο τομής των διαμέσων του τριγώνου και  $\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ) η απόσταση του από την πλευρά ΒΓ. Αν η ΒΓ έχει μήκος  $\beta$  ( $\beta \in \mathbb{R}^+$ ), να δείξετε ότι  $\alpha\beta = 8$ .

δ) Να δείξετε ότι η πλευρά του τριγώνου στην οποία ανήκει το σημείο (-1,1),

σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία ίση με  $\frac{\pi}{4}$ .

Οι Εισηγητές

Η Συντονίστρια

Η Διευθύντρια

Άντρη Χριστοδούλου

Μαρία Πολυκάρπου Β.Δ.

Νεοφύτα Ευαγγέλου

Αιμιλία Ζαντή

Μαρία Παπαπέτρου

## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ : Β΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19/ 5/ 2016

ΧΡΟΝΟΣ: 2½ ώρες

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- β) Να γράφετε μόνο με μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- δ) Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο.

**Το δοκίμιο αποτελείται από 3 (τρεις) σελίδες****ΜΕΡΟΣ Α΄:**

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

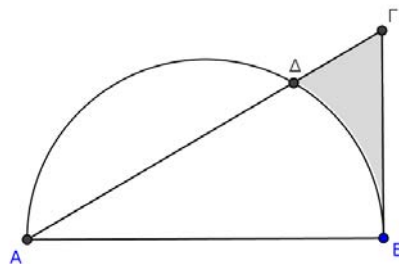
1. Να αναλύσετε το  $\frac{2x-3}{(x+1)(x+2)^2}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  δίνονται  $B\Gamma = 12\text{ cm}$ ,  $A\Gamma = 6\sqrt{3}\text{ cm}$  και γωνία  $\Gamma = 30^\circ$ . Να υπολογίσετε: α) το εμβαδόν του τριγώνου και β) το μέτρο της πλευράς  $AB$ .
3. Αύξουσας Α. Π. ο  $1^{\text{ος}}$ , ο  $3^{\text{ος}}$  και ο  $6^{\text{ος}}$  όρος είναι διαδοχικοί όροι Γ. Π.. Αν ο  $1^{\text{ος}}$  όρος της Α. Π. ισούται με 8, να βρείτε: (α) τη διαφορά δ της Α. Π. και (β) τον λόγο λ της Γ. Π. .
4. Αν  $f(x) = \ln(x-1)^2$  να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ .
5. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{|x|-1}}$ .
6. Να λύσετε την εξίσωση  $\sin 4x = 9\eta\mu 2x - 4$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .
7. Να αποδείξετε την ταυτότητα  $\sigma\tau\epsilon\mu\theta \cdot \eta\mu 5\theta - \tau\epsilon\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\upsilon\eta 5\theta = 4 - 8 \cdot \eta\mu^2\theta$ .

8. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν βάσης  $144 \text{ cm}^2$ . Αν το παράπλευρο ύψος σχηματίζει με τη βάση γωνία  $60^\circ$  και το ύψος της πυραμίδας είναι ίσο με τη διαγώνιο κύβου ακμής  $\beta$ , να υπολογίσετε: α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της πυραμίδας και β) τον όγκο του κύβου.

9. Αν  $\alpha$  είναι η μεγαλύτερη από τις ρίζες της εξίσωσης  $\log_2(3^{\alpha-1} + 1) = \log_2(9^{\alpha-1} + 7) - 2$ ,

να υπολογίσετε το άθροισμα:  $A = \alpha + \log_2 \alpha + \log_4 \alpha + \log_{16} \alpha + \dots$ .

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο  $A\Delta B$  με διάμετρο  $AB = 2R$ ,  $A\Delta = \lambda_3$  και  $B\Gamma$  εφαπτομένη στο σημείο  $B$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους συναρτήσει του  $R$ .



**ΜΕΡΟΣ Β':** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση  $y = \ln \sqrt{\frac{2x}{4-x}}$ .

α) Να δείξετε ότι  $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x(4-x)}$

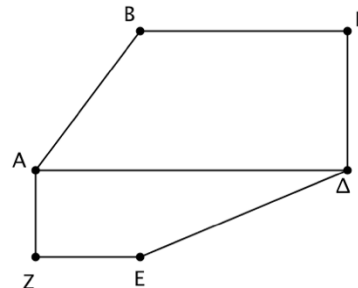
β) Να υπολογίσετε την τιμή του  $x$  αν  $\frac{e^{2y}}{y'} + \frac{y''}{2(y')^2} = 0$ .

2. α) Να δείξετε ότι  $\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha + \sigma\upsilon\nu 5\alpha}{\eta\mu\alpha + \eta\mu 3\alpha + \eta\mu 5\alpha} = \sigma\phi 3\alpha$

β) Να δώσετε τη γενική λύση της εξίσωσης  $\eta\mu 2\alpha(4\eta\mu\alpha + 4\sigma\phi 2\alpha) = 4$ .

3. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 3x - 2$  και  $g(x) = \sqrt{x - 3}$  με πεδία ορισμού  $(1, +\infty)$  και  $[3, +\infty)$  αντίστοιχα. Να ορίσετε (να δώσετε τύπο και πεδίο ορισμού) τις συναρτήσεις  $f/g$ ,  $f^{-1}$ ,  $g \circ f$  και  $f \circ g$ .

4. Το πολύγωνο  $AB\Gamma\Delta EZ$  περιστρέφεται πλήρως γύρω από τη  $\Gamma\Delta$ . Να υπολογίσετε τον όγκο και την επιφάνεια του στερεού, που παράγεται, αν δίνονται:  $AB\Gamma\Delta$  και  $A\Delta EZ$  ορθογώνια τραπέζια με  $B\Gamma \parallel A\Delta \parallel EZ$ ,  $AB = 10\text{cm}$ ,  $B\Gamma = 12\text{cm}$ ,  $\Gamma\Delta = 8\text{cm}$ ,  $\Delta E = 13\text{cm}$  και  $ZA = 5\text{cm}$ .



5. Δίνεται κύκλος με κέντρο  $K(-2, -3)$ , που εφάπτεται της ευθείας  $(\varepsilon): x + y = 3$  στο σημείο  $A$ .
- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $A$  και το μήκος της ακτίνας  $R$  του κύκλου.
- (β) Έστω  $B$  σημείο της ευθείας  $(\varepsilon)$  με θετική τετμημένη, τέτοιο ώστε το εμβαδόν του τριγώνου  $KAB$  να ισούται με 16 τετραγωνικές μονάδες. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $B$ .
- (γ) Έστω  $\Gamma$  το σημείο τομής της  $KB$  με τον κύκλο. Να βρείτε το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

Ο Διευθυντής

Ο Συντονιστής Βοηθός Διευθυντής

Ταύρου Ζήνων

Οι Εισηγητές

Ζαμπακίδης Πόλυς

Δημήτρης Ταλιαδώρας

Λοϊζίδης Μιχαήλ

ΛΑΝΙΤΕΙΟ ΛΥΚΕΙΟ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2015-2016

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19-05-2016

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΤΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΒΑΘΜΟΛΟΓΕΙΤΑΙ ΜΕ 100 ΜΟΝΑΔΕΣ.

**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τα μέρη Α' και Β'
- Να γράφετε με μελάνι μπλε (με μολύβι μόνο τα σχήματα)
- Να λύσετε όλες τις ασκήσεις
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής

**ΜΕΡΟΣ Α':** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)}$ , σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

α)  $\psi = x^3 + \sqrt{x}$

β)  $\psi = 5\sin 3x$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 7x}{3x^2 + 2x - 4}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{4x - 12}$

4. Δίνονται τα σημεία A(1,6), B(4,2) και Γ(10,κ).

α) να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB

β) να βρείτε την τιμή του κ έτσι ώστε τα σημεία A,B και Γ να είναι συνευθειακά.

5. Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση:  $\alpha + \beta = 4R \sin \frac{\Gamma}{2}$ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές.

6. Κανονική τριγωνική πυραμίδα έχει ακμή βάσης 12cm και παράπλευρο ύψος 8cm.  
α) να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας  
β) να αποδείξετε ότι το ύψος της πυραμίδας ισούται με  $2\sqrt{13}$  cm και να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

7. Να δείξετε, με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, ότι ισχύει η πρόταση:

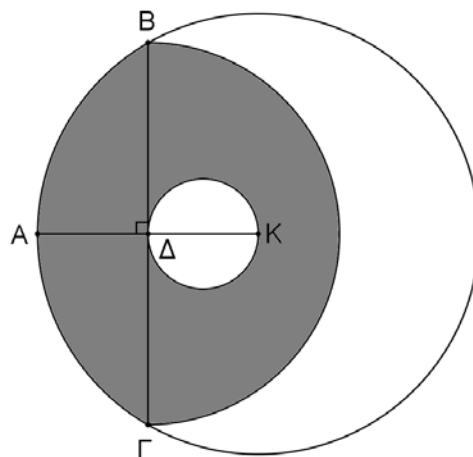
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + v^3 = \frac{v^2(v+1)^2}{4}, \quad \forall v \in \mathbb{N}$$

8. Να λύσετε την πιο κάτω εξίσωση, στο διάστημα  $[-\pi, \pi]$

$$(810 \cdot \epsilon\phi^2 x + 270 \cdot \epsilon\phi^2 x + 90 \cdot \epsilon\phi^2 x + \dots) - (11 \cdot \epsilon\phi x + 21 \cdot \epsilon\phi x + 31 \cdot \epsilon\phi x + \dots + 151 \cdot \epsilon\phi x) = 0$$

9. Να λύσετε την εξίσωση:  $\log_2(9^{x-1} + 11) - 2 = \log_2(3^x - 4)$

10. Δίνεται κύκλος (K, R) και τυχαίο σημείο A στην περιφέρειά του. Η μεσοκάθετη της AK τέμνει τον κύκλο στα σημεία B και Γ. Φέρουμε ημικύκλιο στο εσωτερικό του κύκλου, με κέντρο το μέσο Δ της AK και διάμετρο ΒΓ. Στη συνέχεια, φέρουμε κύκλο με διάμετρο ΚΔ. Να βρείτε συναρτήσας του R, το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.



**ΜΕΡΟΣ Β΄:** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Με βάση τον ορισμό της παραγώγου, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu x$ .

β) Δίνεται η συνάρτηση  $\psi = \ln \sqrt{\eta\mu x}$ . Να δείξετε ότι:

ι)  $2e^{2\psi} \frac{d\psi}{dx} = \sigma\upsilon\nu x$

ιι)  $2e^{2\psi} \frac{d^2\psi}{dx^2} + 4e^{2\psi} \left( \frac{d\psi}{dx} \right)^2 = -\eta\mu x$

2. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με κορυφή  $\Gamma(2,7)$ . Αν το ύψος  $AD$  έχει εξίσωση  $(\epsilon_1): 2x - 5y = 9$  και η διάμεσος  $AM$  έχει εξίσωση  $(\epsilon_2): 3x - 2y = 8$ , να βρείτε:
- τις συντεταγμένες των κορυφών  $A$  και  $B$
  - τις συντεταγμένες σημείου  $E$ , έτσι ώστε το τετράπλευρο  $ABE\Gamma$  να είναι παραλληλόγραμμο
  - το μήκος του ύψους  $AD$
  - το μέτρο της γωνίας  $\hat{A}\Gamma B$
  - το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

3. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$

β) Με τη βοήθεια της πιο πάνω ταυτότητας ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να αποδείξετε

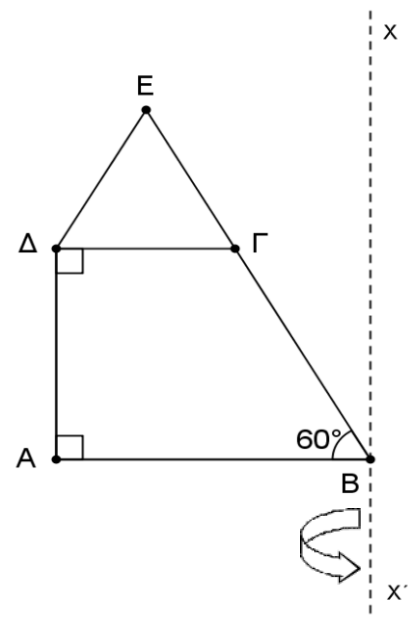
ότι: 
$$\frac{\sigma\upsilon\nu\alpha}{2\epsilon\phi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) - \sigma\upsilon\nu\alpha} = \frac{1 + \eta\mu\alpha}{1 - \eta\mu\alpha}$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = x + 1, x > 0$  και  $g(x) = \sqrt{3 + 2x - x^2}$ .

α) να ορίσετε τη συνάρτηση  $g \circ f$  (πεδίο ορισμού και τύπο)

β) να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{2 - (g \circ f)(x)}$

5. Δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $\hat{B} = 60^\circ$  και  $B\Gamma = 2\alpha \text{ cm}$ . Έξω από το τραπέζιο υπάρχει ισόπλευρο τρίγωνο  $\Delta E\Gamma$  πλευράς  $\alpha \text{ cm}$ . Το πολύγωνο  $AB\Gamma E\Delta$  περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα  $x x'$ , ο οποίος περνά από το σημείο  $B$  και είναι κάθετος στην  $AB$ .  
Να υπολογίσετε, συναρτήσει του  $\alpha$ , τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



**Οι Εισηγητές**

**Ο Συντονιστής**

**Η Διευθύντρια**

**Κούλα Μενελάου**

**Ανδρέας Στυλιανού**

**Ζωή Οδυσσέως Πολυδώρου**

**Παναγιώτα Νικολάου**

**Ολυμπία Ορφανίδου**

**Πέτρος Κωνσταντίνου**

**Βασίλης Κερκίδης**

**Ρολάνδος Αγαθοκλέους**

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/5/2016

ΤΑΞΗ: Β'

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Οι απαντήσεις δίνονται μόνο με **μπλε μελάνι**.
  2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού (υγρού ή ταινίας/Tipp Ex).
  3. Τα σχήματα μπορούν να σχεδιαστούν με μολύβι.
  4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής με σφραγίδα του σχολείου.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (04) ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ **ΟΛΑ** ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ

**ΜΕΡΟΣ Α':** Περιλαμβάνει 10 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{3x-1}{(x-2) \cdot (x+3)}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:  
(1)  $y = 6x^3 + \tau\epsilon\mu x + \eta\mu 3x$       (2)  $y = \frac{2x-1}{x^2+3x}$
3. Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\frac{\sigma\upsilon\nu 6\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha + 1}{\eta\mu 3\alpha + \eta\mu 6\alpha} = \sigma\phi 3\alpha$ .
4. Αριθμητική Πρόοδος έχει άθροισμα των οκτώ πρώτων όρων της ίσο με 64, ενώ το άθροισμα του δεύτερου με τον τέταρτο όρο της είναι ίσο με το πενταπλάσιο της διαφοράς της.  
(1) Να σχηματίσετε την πρόοδο.  
(2) Να βρείτε το πλήθος των όρων της προόδου που δίνουν άθροισμα ίσο με 400.
5. Να υπολογίσετε τα όρια:  
(1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+5}{x^3+5x-2}$       (2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x^2+2x}$
6. Να λύσετε την εξίσωση:  $\log_3(4^{x+1} + 2) = 2 + x \cdot \log_3 2$ .

7. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 - 4$ ,  $x \geq 0$  και  $g(x) = \sqrt{5-x}$ .

(1) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της  $f(x)$ . Αν ορίζεται, να γράψετε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.

(2) Να ορίσετε τις συναρτήσεις (τύπος και πεδίο ορισμού):

(i)  $\frac{g}{f}$

(ii)  $g \circ f$

8. Μία ράβδος από κεριά σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου έχει διαστάσεις 4cm, 4cm και 8cm. Λιώνουμε τη ράβδο και με το κεριά της κατασκευάζουμε 2 ίδιες κανονικές τετραγωνικές πυραμίδες. Αν οι πυραμίδες έχουν ύψος 3cm, να υπολογίσετε:

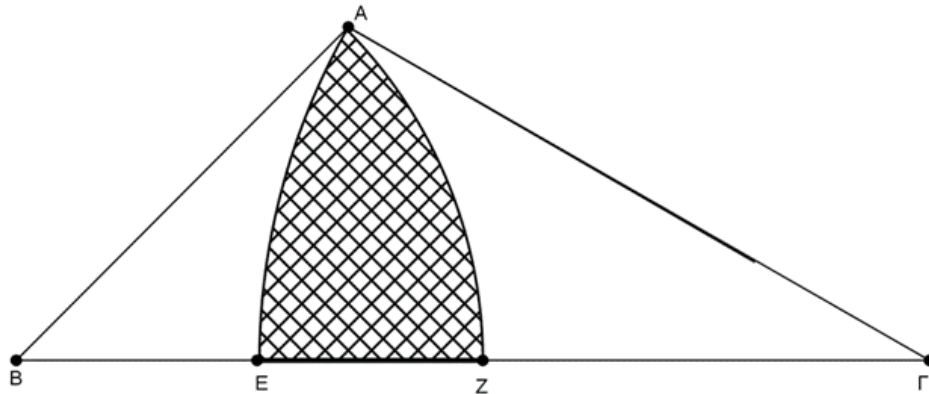
(1) την ακμή της βάσης της πυραμίδας,

(2) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας της πυραμίδας,

(3) τη γωνία που σχηματίζει η παράπλευρη ακμή με τη βάση της πυραμίδας.

9. Δίνεται τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  με  $\hat{B}\hat{A}\hat{\Gamma} = 105^\circ$ ,  $\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 30^\circ$  και  $AB = 4\sqrt{2}\text{cm}$ . Με κέντρο την κορυφή  $\Gamma$  και ακτίνα  $\Gamma A$ , γράφουμε τόξο  $A\epsilon$  και, με κέντρο την κορυφή  $B$  και ακτίνα  $BA$ , γράφουμε τόξο  $AZ$ .

Να υπολογίσετε το **εμβαδόν** και την **περίμετρο** του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



10. Δίνεται η καμπύλη  $y = e^{2x+1}$ .

(1) Να αποδείξετε ότι:  $y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \dots + \frac{d^{\nu}y}{dx^{\nu}} = (2^{\nu+1} - 1) \cdot e^{2x+1}$ ,  $\nu \in \mathbb{N}$ .

(2) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου  $A$  της καμπύλης, στο οποίο η κλίση της καθέτου ισούται με  $-\frac{e}{2}$ .

**ΜΕΡΟΣ Β': Περιλαμβάνει 5 θέματα.**

**Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

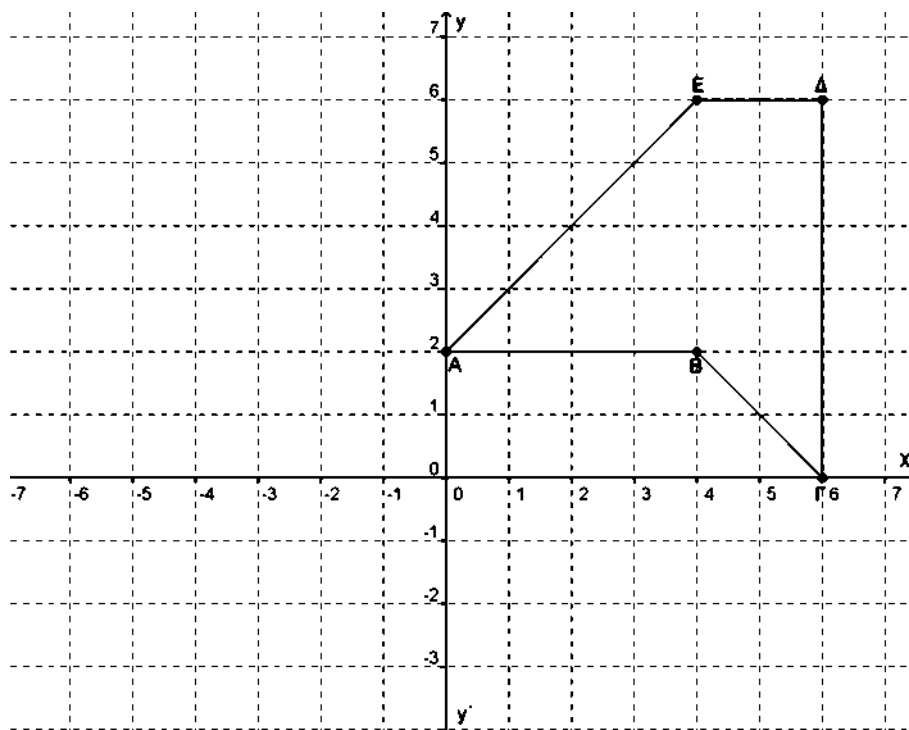
1. Στο πιο κάτω σχήμα το πολύγωνο ΑΒΓΔΕ κάνει πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα  $yy'$

Να υπολογίσετε: (1) τον όγκο του στερεού που παράγεται,

(2) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

(Οι απαντήσεις να δοθούν σε κυβικές και τετραγωνικές μονάδες αντίστοιχα)

**Σημείωση:** Να λύσετε την άσκηση στη σελίδα με το σχήμα, που επισυνάπτεται στις κόλλες απαντήσεων.



2. Τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  έχει πλευρά (ΑΒ):  $y = 3x - 3$  και το ύψος (ΑΔ):  $2x + y = 12$ . Επιπλέον, η πλευρά ΑΓ έχει κλίση  $-\frac{1}{3}$  και η κορυφή Γ ανήκει στην ευθεία (ε):  $y = x - 1$ .

(1) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Α, Β και Γ.

(2) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου  $\triangle AB\Gamma$ .

(3) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{AB\Gamma}$ .

3. (1) Δίνεται η παράσταση  $A = \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{8} - x\right) + \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{8} + x\right)$ .

(i) Να δείξετε ότι:  $A = 1 - \sqrt{2} \cdot \eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ .

(ii) Να λύσετε την εξίσωση:  $A = \frac{1}{2}$ ,  $x \in (0, 2\pi)$ .

(2) Σε τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  ισχύουν οι σχέσεις:  $\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - \alpha\gamma$  και  $2\alpha \cdot \eta\mu\Gamma = \beta \cdot \sigma\varphi\left(\frac{B}{2}\right)$ .

Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

4. Δίνεται η Γεωμετρική Πρόοδος με  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = 3$ ,  $\alpha_3 = 9$ , ...

(1) Να δείξετε, με την μέθοδο της τέλειας επαγωγής, ότι για το άθροισμα των  $n$  πρώτων όρων της ισχύει η σχέση:  $1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

(2) Να βρείτε τις τιμές του  $n$  ώστε:  $|\alpha_n - 15| = 12$ .

(3) Να υπολογίσετε το άθροισμα:  $\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha_3}\right)^2 + \dots$

(4) Να δείξετε ότι η ακολουθία με γενικό όρο  $\beta_n = \log\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)$  είναι Αριθμητική Πρόοδος.

5. Δίνεται η καμπύλη με τύπο:  $\ln(e + \sigma\upsilon\nu y) = x + \ln x$ ,  $x > 0$  και  $y \in (0, \pi)$ .

Να δείξετε ότι:

(1)  $x \cdot e^x - \sigma\upsilon\nu y = e$

(2)  $\eta\mu y \cdot \frac{dy}{dx} = -(x+1) \cdot e^x$

(3) Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της με  $x = 1$  έχει εξίσωση:  $4e \cdot x + 2y = 4e + \pi$

(4)  $-\sigma\upsilon\nu y \cdot (x+1)e^x \cdot \frac{dy}{dx} + \eta\mu^2 y \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = -e^x(x+2) \cdot \eta\mu y$

Η Διευθύντρια

Ελένη Χαπελή

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**ΤΑΞΗ: Β' **Ενιαίου Λυκείου**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 31/5/2016

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 Ώρες

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
  - β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
  - γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
  - δ) Δίνεται τυπολόγιο.

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ**

**ΜΕΡΟΣ Α':** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{12-3x}{(x-2)(x+1)}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $\left(\frac{dy}{dx}\right)$  των συναρτήσεων που δίνονται από τους τύπους:  
  - (α)  $y = x^3 + 5x - \frac{1}{x^2} + e^x + \sin \pi$
  - (β)  $y = x \cdot \sqrt{2-x^2}$
3. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση:  
$$\frac{\alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2}{\beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2} = \varepsilon\phi A \cdot \sigma\phi B, \quad \beta^2 + \gamma^2 \neq \alpha^2$$
4. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους  $f(x) = \sqrt{x+1}$  και  $g(x) = \frac{1}{x+1}$   
  - (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g.
  - (β) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$  (τύπο και πεδίο ορισμού).

5. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

$$(β) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - \eta \mu x} - 2}{x}$$

6. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι  $432 \text{ cm}^2$ . Αν οι παράπλευρες έδρες σχηματίζουν γωνία  $60^\circ$  με τη βάση, να υπολογίσετε τον όγκο της πυραμίδας.

7. (α) Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των λογαρίθμων, να υπολογίσετε τον αριθμό:  $100^{\log \sqrt{3}}$

$$(β) \text{ Να λύσετε την εξίσωση: } 3^{2 \log x} - 2 \cdot 3^{\log x} - 100^{\log \sqrt{3}} = 0$$

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$ ,  $AB = 6 \text{ cm}$  και  $A\Gamma = 8 \text{ cm}$ . Το τρίγωνο  $AB\Gamma$  στρέφεται πλήρως γύρω από μια ευθεία  $\chi\gamma$  παράλληλη προς την πλευρά του  $A\Gamma$ , η οποία είναι έξω από το τρίγωνο και σε απόσταση  $1 \text{ cm}$  από την  $A\Gamma$ . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

$$9. (α) \text{ Να αποδείξετε ότι } \epsilon\phi(A+B) = \frac{\epsilon\phi A + \epsilon\phi B}{1 - \epsilon\phi A \cdot \epsilon\phi B}$$

$$(β) \text{ Αν } A + B + \Gamma = \pi, \text{ να αποδείξετε ότι } \epsilon\phi A + \epsilon\phi B + \epsilon\phi \Gamma = \epsilon\phi A \cdot \epsilon\phi B \cdot \epsilon\phi \Gamma$$

10. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση  $x = \ln(y^v)$  με  $y > 0$  και  $v \in \mathbb{N}$ . Να βρείτε τις συναρτήσεις:

$$\alpha_1(x) = \frac{dy}{dx}, \alpha_2(x) = \frac{d^2y}{dx^2} \text{ και } \alpha_3(x) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

(α) Να δείξετε ότι οι  $\alpha_1(x)$ ,  $\alpha_2(x)$ ,  $\alpha_3(x)$ , για κάθε τιμή του  $v$ , αποτελούν διαδοχικούς όρους φθίνουσας γεωμετρικής προόδου.

(β) Αν οι  $\alpha_1(x)$ ,  $\alpha_2(x)$ ,  $\alpha_3(x)$  αποτελούν τους τρεις πρώτους όρους της ακολουθίας  $(\alpha_v)$ ,  $v \in \mathbb{N}$ ,

με τη σειρά που δίνονται, να υπολογίσετε το άθροισμα  $\sum_{v=1}^{\infty} \alpha_v$

**ΜΕΡΟΣ Β':** Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.  
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο  $f(x) = \ln\left(\frac{7-x}{7+x}\right)$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

(β) Να δείξετε ότι  $f(-x) + f(x) = 0$ .

(γ) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση ένα προς ένα και να προσδιορίσετε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}$ .

(δ) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $f'$  της  $f$ .

(ε) Αν  $g(x) = \frac{x}{x-7}$ , να ορίσετε τη συνάρτηση  $h(x) = \frac{f'(x)}{g(x)}$  (τύπο και πεδίο ορισμού).

2. Δίνονται οι αριθμοί  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = \frac{1}{2} \sin 2\theta$  και  $\alpha_3 = -2\eta \mu^2 \theta$ .

(α) Να δείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, για κάθε τιμή του  $\theta$ , αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. (μον. 4)

(β) Έστω  $(\alpha_n)$  η αριθμητική πρόοδος της οποίας οι παραπάνω αριθμοί,  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  αποτελούν με τη σειρά που δίνονται, τους τρεις πρώτους όρους της.

i. Αν  $\delta = -1$ , όπου  $\delta$  είναι η διαφορά της αριθμητικής προόδου  $(\alpha_n)$ , να βρείτε την τιμή του  $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

ii. Αν  $\theta = \frac{\pi}{4}$ , να υπολογίσετε το άθροισμα:

$$S = (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + (\alpha_3^2 - \alpha_4^2) + \dots + (\alpha_{63}^2 - \alpha_{64}^2)$$

όπου  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{64}$  είναι οι 64 πρώτοι όροι της αριθμητικής προόδου  $(\alpha_n)$ .

(μον. 6)

3. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Η κορυφή του Α έχει συντεταγμένες  $(-7, 6)$  και οι διαγώνιοι του τέμνονται στο σημείο  $K(1, 5)$ .

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ του ΑΒΓΔ.

(β) Να δείξετε ότι η διαγώνιος ΒΔ του τετραγώνου ανήκει στην ευθεία με εξίσωση  $y = 8x - 3$

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ του τετραγώνου.

(δ) Αν η ευθεία (ΒΔ) είναι εφαπτομένη της παραβολής  $f(x) = ax^2 + bx$ ,  $a \neq 0$  στο σημείο της  $K(1, 5)$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

4. Δίνεται τρίγωνο ABΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας  $R = 4 \text{ cm}$  τέτοιο ώστε η πλευρά του AB να είναι ίση με την πλευρά εγγεγραμμένου τετραγώνου στον ίδιο κύκλο, ενώ η πλευρά του ΑΓ είναι ίση με την πλευρά ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον ίδιο κύκλο.

(α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABΓ. (μον. 1.5)

(β) Να αποδείξετε ότι  $\eta\mu 75^\circ = \frac{1}{4}(\sqrt{2} + \sqrt{6})$  (μον. 1.5)

(γ) Να αποδείξετε ότι  $B\Gamma = 2(\sqrt{2} + \sqrt{6})\text{cm}$  (μον. 3)

(δ) Με διάμετρο τη ΒΓ γράφουμε ημικύκλιο έξω από τον κύκλο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σχηματιζόμενου μηνίσκου. (μον. 4)

5. (α) (i) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 5x}{\eta\mu x + 2\eta\mu 3x + \eta\mu 5x} = \epsilon\phi x$

(μον. 3)

(ii) Να αποδείξετε ότι:  $\eta\mu 2x = \frac{2\epsilon\phi x}{1 + \epsilon\phi^2 x}$

(μον. 3)

(β) Αν  $\frac{\sigma\upsilon\nu x - \sigma\upsilon\nu 5x}{\eta\mu x + 2\eta\mu 3x + \eta\mu 5x} = \frac{1 + \sigma\upsilon\nu y}{\eta\mu y}$  να αποδείξετε ότι  $\eta\mu 2x = \eta\mu y$

(μον. 4)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Ο Διευθυντής:

Ιωσηφίδης Γιώργος

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2016****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΤΑΞΗ: Β' ΚΑΤ****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19.05.2016****ΧΡΟΝΟΣ: 2.30'****ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:****ΒΑΘΜΟΣ ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:**

|     |    |
|-----|----|
|     |    |
| 100 | 20 |

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:****ΤΜΗΜΑ:****ΑΡ.:**

- ΟΔΗΓΙΕΣ :** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει σφραγίδα δημόσιου σχολείου.  
 β) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.  
 γ) Να γράφετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).  
 δ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από έντεκα (11) σελίδες.  
 ε) Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο.

**ΜΕΡΟΣ Α':** Αποτελείται από δέκα (10) ασκήσεις.  
 Να λύσετε ΟΛΕΣ τις ασκήσεις.  
 Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

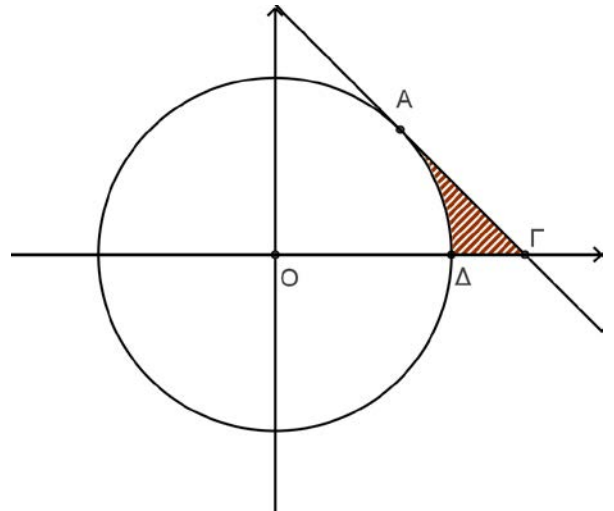
- 1) Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα:  $\frac{x+10}{(x+2)(x-2)}$
- 2) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:  
 α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x + 1}{x^2 + x + 1}$       β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4\eta\mu x}{x(x-2)}$
- 3) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της  $f(x) = \frac{2x-3}{x+5}, x \neq -5$ .  
 Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το Π.Ο. της.
- 4) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει περίμετρο βάσης  $\Pi_\beta = 48 \text{ cm}$  και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας  $E_\pi = 240 \text{ cm}^2$ .  
 Να υπολογιστούν:  
 α) το παράπλευρο ύψος της ( $h$ ),  
 β) το εμβαδόν της ολικής της επιφάνειας ( $E_{ολ}$ )  
 γ) ο όγκος της ( $V$ ).
- 5) Να σχηματίσετε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα του 3ου και του 6ου όρου είναι 30, ενώ ο 12ος όρος ισούται με το τριπλάσιο του 2ου όρου.

- 6) Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\beta = 2\alpha \text{ συν}\Gamma$ , να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.
- 7) Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι η σχέση  $1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}$ , ισχύει  $\forall n \in \mathbb{N}$ .
- 8) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης  $f(x) = \sqrt{x}$  με βάση τον ορισμό της παραγώγου.
- 9) Αν  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , να λύσετε την εξίσωση  $\log_3(3^{1+\text{συν}x+\text{συν}^2x+\dots}) = \log_2 4$ .

- 10) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η καμπύλη με εξίσωση  $x^2 + y^2 = 18$ , η οποία παριστάνει κύκλο με κέντρο  $O(0,0)$ .

Στο σημείο  $A$ , με τετμημένη  $x = 3$ , και  $y > 0$ , φέρουμε την εφαπτόμενη της καμπύλης (η οποία τέμνει τον άξονα των τετμημένων στο σημείο  $\Gamma$ ).

- 1) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $OAG$  είναι ορθογώνιο ισοσκελές.
- 2) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μικτόγραμμου χωρίου  $A\Delta\Gamma$ .



**ΜΕΡΟΣ Β':** Αποτελείται από πέντε (5) ασκήσεις.  
 Να λύσετε ΟΛΕΣ τις ασκήσεις.  
 Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 5 - x$  και  $g(x) = \sqrt{3 - x}$ .
- 1) Να προσδιορίσετε την  $g \circ f$  (να βρείτε τον τύπο και το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$  στο οποίο ορίζεται).
  - 2) Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{|f(x)| + x^2 - 5|x|}{x - 5}$ .
  - 3) Να εξετάσετε αν η πιο κάτω συνάρτηση είναι συνεχής στο  $x_0 = 5$ .

$$h(x) = \begin{cases} \frac{|f(x)| + x^2 - 5|x|}{x - 5}, & x \neq 5 \\ 6, & x = 5 \end{cases}$$

2) Δίνεται η συνάρτηση  $y = e^{2x} \sin 2x$

1) Να δείξετε ότι:  $y'' - 4y' + 8y = 0$ .

2) Να βρεθούν όλες οι λύσεις της εξίσωσης  $\frac{y''}{4e^{2x}} = -1$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$ .

(οι λύσεις να δοθούν συναρτήσει του  $\pi$ )

3) Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , με  $\Gamma(-2, -1)$ . Η πλευρά  $AB$  έχει εξίσωση  $2x + y - 10 = 0$  και το ύψος  $A\Delta$  έχει εξίσωση  $x + 3y - 15 = 0$ . Να βρείτε:

1) Τις συντεταγμένες των κορυφών  $A$  και  $B$ .

2) Το μέτρο της οξείας γωνίας  $B$ .

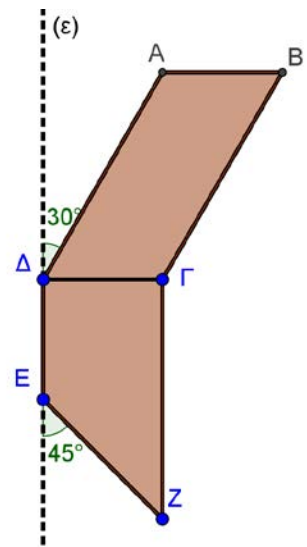
3) Το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

4) Τα σημεία του άξονα των τετμημένων ( $x$ ) που απέχουν από την ευθεία  $B\Gamma$  απόσταση ίση με  $\sqrt{10}$ .

4) Το πιο κάτω σχήμα αποτελείται από ένα παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με πλευρές  $B\Gamma = 10 \text{ cm}$ ,  $\Gamma\Delta = 5 \text{ cm}$  και ένα ορθογώνιο τραπέζιο  $\Gamma\Delta EZ$  με πλευρά  $\Gamma Z = 10 \text{ cm}$ .

Το σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία  $(\varepsilon)$ , η οποία σχηματίζει γωνίες  $30^\circ$  και  $45^\circ$  με τις πλευρές  $A\Delta$  και  $EZ$  αντίστοιχα όπως φαίνεται στο σχήμα.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



5) α) Αν  $A = \frac{1 + \eta \mu 2\theta + \sigma \nu \nu^2 \theta - \eta \mu^2 \theta}{1 + \eta \mu 2\theta - \sigma \nu \nu 2\theta}$ , να αποδείξετε ότι  $A = \sigma \varphi \theta$ .

β) Για  $\theta = \frac{\pi}{6}$ , ορίζουμε τις παραμέτρους  $\kappa = A \cdot \sqrt{3}$  και  $\lambda = \frac{20 \cdot \kappa}{3}$ . Να λύσετε την εξίσωση:

$$\left[ \kappa \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots \right) \right]^{\log_5 x} = \left[ \lambda \cdot \left( 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \dots \right) \right]^{\log_x 5}$$



## ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/ 05 / 2016

ΤΑΞΗ: Β' Ενιαίου Λυκείου

ΧΡΟΝΟΣ: 2:30' ώρες

ΩΡΑ: 7:45' - 10:15'

## ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ : (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

(β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).

(γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

(δ) Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσης τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσης τους δε θα λαμβάνονται υπόψη.

(ε) Επισυνάπτεται σχετικό τυπολόγιο.

**ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα:  $\frac{2x+7}{(x-1)(x+2)}$ .

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων ή καμπύλων:

(α)  $y = 4\sqrt{x} - \frac{1}{x} + x + 2$

(β)  $y = \cos x + e^{\frac{1}{x}}$

3. Να αποδείξετε ότι:  $(\cos^2 x + \sin^2 x)^2 = 1$ .

4. Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης με τύπο:  $y = \frac{x^2 + 4}{2x - 3}$ .

5. Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας ενός κύβου είναι  $864 \text{ cm}^2$ . Η ακμή της βάσης μιας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας είναι ίση με την ακμή του κύβου. Οι παράπλευρες έδρες της πυραμίδας σχηματίζουν με τη βάση της γωνία  $60^\circ$ . Να βρείτε:

(α) Το μήκος της παράπλευρης ακμής.

(β) Τον όγκο της.

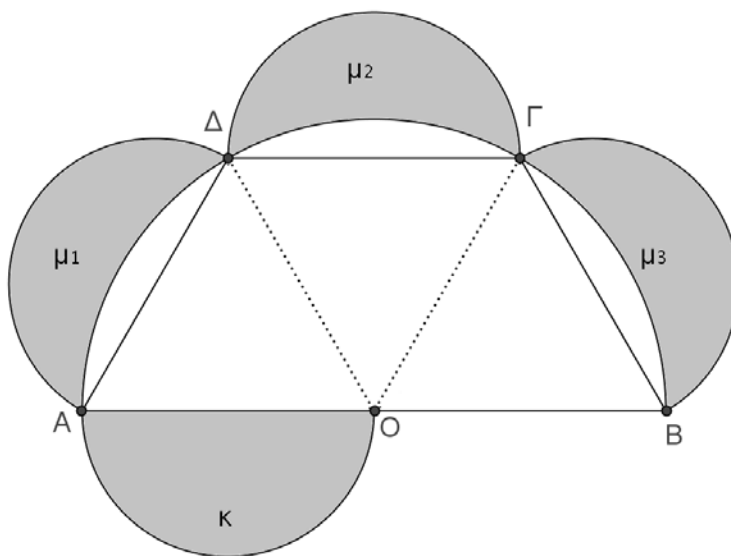
6. Να βρείτε την πραγματική τιμή του  $a$  ώστε η συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a + e^{\frac{1}{x-1}}}, & x \leq 1 \\ \frac{\ln(x-1)}{x^2 - 1}, & x > 1 \end{cases}$

να είναι συνεχής στο  $x_0 = 1$ .

7. Σε τρίγωνο με πλευρές  $a, b, c$  και  $b \neq 1, a + c \neq 1, a - c \neq 1, a > c$  ισχύει η σχέση :

$\log_a b + \log_a c = 2 \log_a \frac{a}{b+c}$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο στο Α.

8. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κορυφές Α(1,5) , Γ(3,1) και η πλευρά του ΑΒ έχει εξίσωση  $3x - \Xi + 2 = 0$  . Να βρείτε:  
 (α) Την εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ.  
 (β) Την περίμετρο του ρόμβου.
9. Δίνεται η καμπύλη  $\psi^2 = 16x$  και το σημείο της  $A\left(\frac{1}{4}, 2\right)$  . Να βρείτε σημείο Β της καμπύλης ώστε οι εφαπτόμενες της στα Α και Β να είναι κάθετες .
10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο το Ο και διάμετρο ΑΒ = 2R. Εκτός του ημικυκλίου γράφουμε τα τόξα ΑΔ, ΔΓ και ΓΒ , τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους, καθώς και το τόξο ΑΟ. Να αποδείξετε ότι ισχύει :  $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = \kappa$ , όπου  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  και  $\kappa$  είναι τα εμβαδά των σκιασμένων επιφανειών όπως φαίνονται στο σχήμα και  $E_{AB\Gamma\Delta}$  είναι το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.




---

**ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

---

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:  $f(x) = 4 - x$  ,  $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$  ,  $\kappa(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$  και  $\varphi(x) = \ln(\kappa(x))$   
 (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $\varphi(x)$  .  
 (β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η  $g \circ f$  . Αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.  
 (γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της  $\kappa(x)$  και να βρείτε το όριο:  
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} \kappa^{-1}(x)$  .
2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(2,3) και Β(3,5). Η κορυφή Γ βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο και ανήκει στην καμπύλη με εξίσωση  $\Xi = x^2$  . Να βρείτε:  
 (α) Τις συντεταγμένες της κορυφής Γ δεδομένου ότι το τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν 18 τ.μ.  
 (β) Τις συντεταγμένες της κορυφής Δ, έτσι ώστε το τετράπλευρο ΑΒΓΔ να είναι παραλληλόγραμμο, δεδομένου ότι Γ(-5,25).  
 (γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου που βρίσκεται στον άξονα  $x'x$  , ώστε η απόσταση του από την πλευρά ΑΒ να είναι  $\frac{9\sqrt{5}}{5}$  .

3. (α) Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει:  $\alpha + \beta = 4R \sin \frac{\Gamma}{2}$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

(β) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{2 \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} - 1} = 2 \sin \frac{x}{2}$ . Ακολουθώντας χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ταυτότητα ή με οποιονδήποτε άλλον τρόπο να λύσετε την εξίσωση:

$$\frac{2 \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} - 1} = \frac{1}{x} \quad \text{στο διάστημα } x \in [0, 2\pi].$$

4. Η λύση της εξίσωσης:  $g'(x) - 17f'(x) - 9 \ln 3 = 0$  με  $f(x) = 3^x$  και  $g(x) = 9^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , είναι η διαφορά  $\delta$  αριθμητικής προόδου. Ο αντίστροφος της διαφοράς  $\delta$  είναι ο λόγος  $\lambda$  γεωμετρικής προόδου. Ο δεύτερος όρος της γεωμετρικής προόδου είναι ίσος με 4, ενώ η διαφορά του πέμπτου όρου της αριθμητικής προόδου από τον τρίτο όρο της γεωμετρικής προόδου είναι 41.

(α) Να σχηματίσετε τις δύο προόδους και να βρείτε το άθροισμα των αρνητικών όρων της αριθμητικής προόδου.

(β) Να αποδείξετε ότι για την πιο πάνω γεωμετρική πρόοδο ισχύει:

$$\left( \frac{1}{8} \omega_{\infty} \right)^{2016} \cdot \omega_{2016} = 16 \cdot (2^{2016} - 1).$$

5. Οι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου  $AB\Gamma$ , με  $\hat{\alpha} = 90^\circ$  και  $(AB) < (A\Gamma)$ , είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και έχουν γινόμενο 60. Το τρίγωνο αυτό περιστρέφεται πλήρως γύρω από ευθεία ( $\epsilon$ ) η οποία είναι εκτός του τριγώνου, είναι παράλληλη με την πλευρά  $AB$  και απέχει από αυτήν απόσταση  $\psi$  cm. Ο όγκος του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή είναι  $40\pi \text{ cm}^3$ . Δίνεται ότι  $\psi < (A\Gamma)$ . Να βρείτε:

(α) Τις πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(β) Την τιμή του  $\psi$ .

(γ) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

**ΤΕΛΟΣ**

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Σόλων Χαραλάμπους

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2016**  
**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
**ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 24/05/2016**

**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες**

**ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 07:45 π.μ.**

- **ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ.**
- Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο, το οποίο αποτελείται από μία (1) σελίδα.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν και με μολύβι.)
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το Σχολείο.

**ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α'.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

1) Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{x+5}{(x+2)(x-1)}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $\frac{dy}{dx}$  των πιο κάτω συναρτήσεων:

α)  $y = x^4 + \sqrt{x} + 7$       β)  $y = e^x \cdot \eta\mu x$

3) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\hat{B}$ , τριγώνου  $AB\Gamma$ , με πλευρές  $\alpha = 6 \text{ cm}$ ,  $\beta = 3\sqrt{3} \text{ cm}$  και  $\gamma = 3 \text{ cm}$ .

4) Σε φθίνουσα γεωμετρική προόδου ο πέμπτος όρος της ισούται με 2 και ο δεύτερος όρος της με 16. Να υπολογίσετε το άθροισμα των άπειρων όρων της ( $\Sigma_{\infty}$ ).

5) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 6}{7x - 1}$       β)  $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x^2 - 5x}{|5 - x|}$

6) Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας ίσο με  $260 \text{ cm}^2$  και η περίμετρος της βάσης της είναι  $40 \text{ cm}$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο της πυραμίδας.

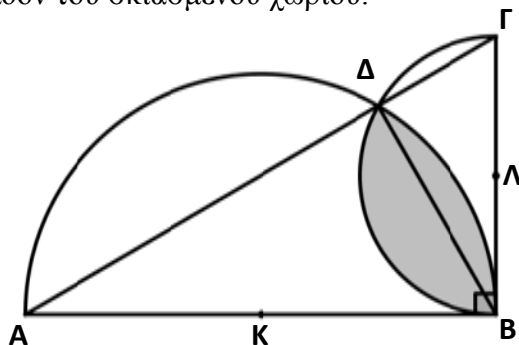
7) Να αποδείξετε την ταυτότητα:  $\frac{\sin 8\alpha + \sin 4\alpha}{\sin 10\alpha - \sin 2\alpha} = \frac{1}{2} \cot 2\alpha$

8) Να λύσετε την εξίσωση:  $\log(9 \cdot 2^x + 18 \cdot 3^x) = x \log 3 + \log 22$

9) α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης  $x^2 - 2y = 5$  στο σημείο της  $(1, -2)$ .

β) Αν η εφαπτομένη της καμπύλης είναι η ευθεία  $x - y = 3$ , να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου  $\kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$ , ώστε το σημείο  $(\kappa, 2)$  να απέχει από την ευθεία απόσταση ίση με  $\sqrt{2}$  μονάδες.

10) Στο πιο κάτω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο ( $\hat{B} = 90^\circ$ ) με  $AB = 6 \text{ m}$  και  $B\Gamma = 2\sqrt{3} \text{ m}$ . Με διαμέτρους τις πλευρές  $AB$  και  $B\Gamma$  γράφουμε ημικύκλια τα οποία τέμνονται στο σημείο  $\Delta$ . Αν  $B\Delta$  είναι η κοινή τους χορδή και  $B\Delta = 3 \text{ m}$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



**ΜΕΡΟΣ Β':** Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1) Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{2}{3-x}$ ,  $g(x) = \sqrt{x+4}$  και  $h(x) = \frac{2x+6}{9-x^2}$ .

α) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f^{-1}(x)$ .

β) Να εξετάσετε αν  $f = h$ . Αν  $f \neq h$ , να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , για το οποίο είναι  $f(x) = h(x)$ .

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $f \circ g$  (τύπος και πεδίο ορισμού).

δ) Να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x}{g(x) - 2}$ .

2) Σε τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  η εξίσωση της πλευράς  $AB$  είναι  $3x + 4y = 20$  και η εξίσωση της διαγωνίου  $A\Gamma$  είναι  $7x + y = 5$ . Αν οι συντεταγμένες μιας κορυφής του είναι  $(-3, 1)$ , να βρείτε:

α) την εξίσωση της πλευράς  $\Gamma\Delta$

β) την εξίσωση της διαγωνίου  $B\Delta$

γ) τις συντεταγμένες των υπόλοιπων κορυφών

δ) το εμβαδόν του

3) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln \frac{x}{2x+3}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f(x)$ .

β) Να λύσετε την εξίσωση:  $f(e^x) = -x$

γ) Να δείξετε ότι:  $\frac{df(x)}{dx} - 3e^{f(x)} \cdot \frac{1}{x^2} = 0$

δ) Να βρείτε την  $\frac{d^2f(x)}{dx^2}$ .

4) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{\eta\mu 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 2x}{(1 + \sigma\upsilon\nu 4x)(1 + \sigma\upsilon\nu 2x)}$ ,  $0^\circ < x < 90^\circ$ .

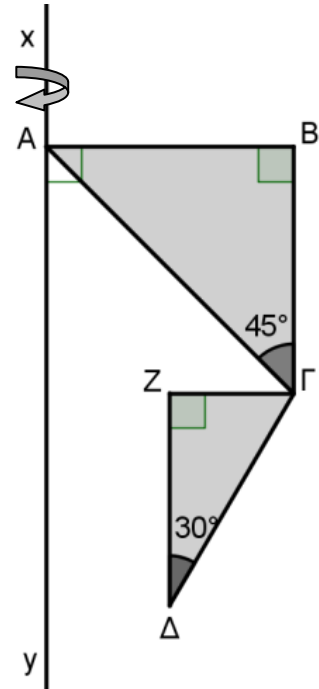
α) Να αποδείξετε ότι:  $f(x) = \epsilon\phi x$

β) Να αποδείξετε ότι:  $\frac{2}{\eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x + 1} = \frac{1 + f^2(x)}{1 + f(x)}$

γ) Αν  $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} - 2 \frac{df(x)}{dx} = 0$ , να υπολογίσετε τη γωνία  $x$ .

δ) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $\frac{dy}{dx}$  της συνάρτησης  $y = x^{f(x)}$ .

- 5) Στο διπλανό σχήμα  $AB\Gamma$  και  $\Gamma\Delta Z$  είναι ορθογώνια τρίγωνα ( $\hat{B} = \hat{Z} = 90^\circ$ ), με  $B\Gamma = \Gamma\Delta = 2 \text{ cm}$ ,  $A\hat{\Gamma}B = 45^\circ$ ,  $\Gamma\hat{\Delta}Z = 30^\circ$  και  $AB \parallel \Gamma Z$ . Το σκιασμένο πολύγωνο  $AB\Gamma\Delta Z$  περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα  $xAy$ , που είναι κάθετος στην  $AB$ , στο σημείο  $A$ .  
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.  
(Να γίνει σχήμα στο φύλλο απαντήσεων και να φαίνεται η περιστροφή.)



Ο Διευθυντής

Νίκος Πρωτοπαπάς

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Β' κατεύθυνσης

Ημερομηνία: 31/5/2016

Χρόνος: 2 ώρες και 30 λεπτά

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που

φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

**ΜΕΡΟΣ Α':** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα:  $\frac{5-x}{(x-2)(x-1)}$ .

2. (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $f(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$ . [3 μον.]

(β) Αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της. [2 μον.]

3. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω:

(α)  $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$  [2 μον.]

(β)  $g(x) = \sqrt{x^4 - 2} + \eta\mu^3 2x$  [3 μον.]

4. Δίνεται τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  με πλευρές  $\alpha = (\sqrt{5}-1)\text{cm}$ ,  $\beta = (\sqrt{5}+1)\text{cm}$  και  $\gamma = 2\sqrt{2}\text{cm}$ .

Να βρείτε τη γωνία  $\hat{\Gamma}$  και το εμβαδόν του τριγώνου.

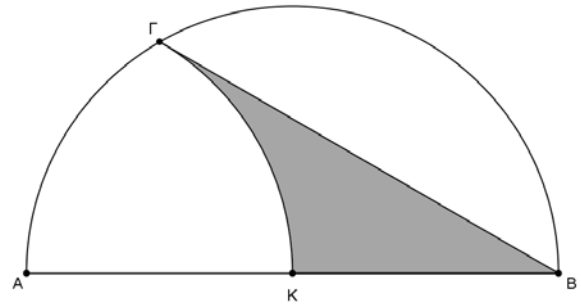
5. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής ότι:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + v^3 = \frac{v^2(v+1)^2}{4}, \quad \forall v \in \mathbb{N}.$$

6. Κανονική τετραγωνική πυραμίδα έχει όγκο  $288 \text{ cm}^3$  και το παράπλευρο ύψος της σχηματίζει με τη βάση γωνιά  $45^\circ$ . Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας της.

7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο K, ακτίνα R και χορδή  $B\Gamma = \lambda_3$ .

Με κέντρο A και ακτίνα AK φέρουμε τόξο  $\overset{\frown}{K\Gamma}$  μέσα στο ημικύκλιο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου συναρτήσει του R.



8. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x - 2x^2}{|x^2 + 2x - 3|}, & x < 1 \\ \frac{1 - \sqrt{x}}{1 - x}, & x > 1 \end{cases}, \quad \text{στο } x = 1$$

9. Να αποδείξετε ότι:

$$(\alpha) 8\eta\mu\alpha \sin^3\alpha - 4\eta\mu\alpha \sin\alpha = \eta\mu 4\alpha \quad [2 \text{ μον.}]$$

$$(\beta) \frac{\eta\mu 3\alpha - \eta\mu 4\alpha + \eta\mu 5\alpha}{\left(1 - 4\eta\mu^2 \frac{\alpha}{2}\right)(8\eta\mu\alpha \sin^3\alpha - 4\eta\mu\alpha \sin\alpha)} = 1 \quad [3 \text{ μον.}]$$

10. (α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης  $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$  στο σημείο της (4, 3) και την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης  $y = x \ln x$  στο σημείο της με  $x = e$ . [4 μον.]

(β) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι πιο πάνω ευθείες. [1 μον.]

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄**  
**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Δίνονται τα σημεία  $B(4,2)$  και  $\Gamma(6,-2)$ . Η μεσοκάθετη  $(\varepsilon_1)$  της  $B\Gamma$  τέμνει την ευθεία  $y = x$  στο σημείο  $A$ .
- (α) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου  $(\varepsilon_1)$  της  $B\Gamma$ . [2 μον.]
- (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου  $A$ . [2 μον.]
- (γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του  $\triangle AB\Gamma$ . [2 μον.]
- (δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων της  $(\varepsilon_1)$  που απέχουν από την ευθεία  $(\varepsilon_2): y = x$  απόσταση  $\sqrt{2}$  μονάδες. [4 μον.]
2. (α) Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) με  $AB = \alpha$ ,  $\Gamma\Delta = 3\alpha$  και  $\hat{A} = 60^\circ$ . Η ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι κάθετη στην  $\Delta\Gamma$ , στο σημείο  $\Gamma$ . Αν ο όγκος του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$  γύρω από την ευθεία  $(\varepsilon)$  είναι ίσος με  $162\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3$ , να υπολογίσετε την τιμή του  $\alpha$ . [6 μον.]
- (β) Αν  $\alpha = 3$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται. [4 μον.]
3. (α) Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$  και  $g$  με τύπους  $f(x) = \sqrt{x-4}$  και  $g(x) = \sqrt{x^2+6x}$ .
- (i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ . [2 μον.]
- (ii) Να ορίσετε (πεδίο ορισμού και τύπο) τη συνάρτηση  $f \circ g$ . [3 μον.]
- (β) Αν σε τρίγωνο  $\triangle AB\Gamma$  ισχύει η σχέση:
- $$1 + \varepsilon\phi(45^\circ + B) = \frac{2}{1 - \sigma\phi\Gamma}.$$
- Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο. [5 μον.]

4. (α) Να λύσετε την εξίσωση: [4 μον.]

$$3\log_8 (9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2 (3^{x-1} + 1)$$

(β) Αν οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης είναι  $x_1, x_2$  με  $x_1 < x_2$ . [6 μον.]

Φθίνουσα Γεωμετρική πρόοδος έχει  $\alpha_4 = x_2$  και ο λόγος της  $\lambda$  ικανοποιεί την εξίσωση:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda + x_1}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{\lambda + x_2}\right) = -\ln\frac{1}{7}.$$

Να αποδείξετε ότι ισχύει:  $\alpha_6 + \alpha_7 + \alpha_8 + \alpha_9 + \dots = x_1$

5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{-x} \cdot \eta\mu x$ .

(α) Να δείξετε ότι  $\frac{d^2f}{dx^2} + 2\frac{df}{dx} + 2f(x) = 0$ . [2 μον.]

(β) (i) Να λύσετε την εξίσωση  $\frac{df}{dx} = 0$ ,  $x \in \left[0, \frac{9\pi}{4}\right]$ . [3 μον.]

(ii) Να δείξετε ότι οι ρίζες  $x_1, x_2, x_3$  της εξίσωσης  $\frac{df}{dx} = 0$  είναι διαδοχικοί όροι

Αριθμητικής Προόδου ενώ οι αντίστοιχες τιμές  $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$  της συνάρτησης είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου. [3 μον.]

(γ) Να υπολογίσετε το όριο:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + f(x)}{\sqrt{x + 25} - 5}$ . [2 μον.]

**Εισηγητές**

Νίκος Δημητρίου

Δήμητρα Βωβίδου

Χαράλαμπος Πιτσιλλίδης

**Διευθυντής**

Γρηγόρης Χατζημάρκου

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016****ΤΑΞΗ: Β' Ενιαίου Λυκείου****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 24/05/2016****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ****ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 2:30'****ΩΡΑ: 7:45 – 10:15 π.μ****Οδηγίες:**

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- β) Να γράφετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- ε) Σε όλες τις ερωτήσεις να φαίνεται ο τρόπος απάντησής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης αιτιολόγησης δεν θα λαμβάνονται υπόψη .
- ζ) Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- στ) Η ΔΟΛΙΕΥΣΗ ΤΙΜΩΡΕΙΤΑΙ ΑΥΣΤΗΡΑ.

**Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α' και το Μέρος Β'.**

**Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.**

**Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από μία (1) σελίδα.**

**ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.**

1. Να υπολογίσετε τον όγκο ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με διαστάσεις  $\alpha = 4cm$  ,  $\beta = 5cm$  ,  $\gamma = 3cm$ .
2. Να βρείτε το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$  αν  $a = 8cm$  ,  $\beta = 6cm$  ,  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ .
3. Να βρείτε την παράγωγο  $\frac{dy}{dx}$  της συνάρτησης  $y = x^3 + \eta\mu x + e^x + \sqrt{x} + 2$  .
4. Να αναλύσετε σε άθροισμα απλών κλασμάτων το κλάσμα  $\frac{x+1}{(x-2)(x-1)}$  .

5. Να υπολογίσετε τα όρια:  $\alpha) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x + 1}{x^2 + 1}$  ,  $\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4}$
6. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{a} = (1, 2)$  και  $\vec{\beta} = (\kappa^2 - 3\kappa, 1)$  . Να υπολογίσετε τις τιμές του  $\kappa$ ,  $\kappa \in \mathbb{R}$  , ώστε τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{\beta}$  να είναι κάθετα.
7. Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια στο  $x_0 = 0$  τη συνάρτηση
- $$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x + x^2}{x}, & x > 0 \end{cases}$$
8. Με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, να δείξετε ότι:
- $$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{v \cdot (v+1)} = \frac{v}{v+1} , \quad v \in \mathbb{N} .$$
9. Δίνεται η φθίνουσα Γεωμετρική Πρόοδος  $\log_x 256$  ,  $\log_x 16$  ,  $\log_x 4$  , ...  $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ .  
Αν ισχύει ότι  $\Sigma_{\infty} = 2 + \log_4 x$  , να υπολογίσετε τις τιμές του  $x$ .
10. Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και ακτίνα του  $OA$ . Στην προέκταση της  $OA$  προς το  $A$  παίρνουμε σημείο  $B$  , ώστε  $OA = AB$ . Αν  $B\Gamma$  είναι το εφαπτόμενο τμήμα που άγεται από το  $B$  προς τον κύκλο, να βρείτε συναρτήσει του  $R$  :
- α) Την περίμετρο του μικτόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .  
β) Το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου  $AB\Gamma$ .

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.**

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με κορυφή  $B(-2, 2)$  , εξίσωση πλευράς  $AB$ :  $-2\chi + 3\psi = 10$  και σημείο  $M\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$  το μέσο της πλευράς  $B\Gamma$ .
- α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες των κορυφών  $A$  και  $\Gamma$  είναι  $A(1, 4)$  και  $\Gamma(3, 1)$  .
- β) i) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\hat{AB\Gamma}$   
ii) το εμβαδό του τριγώνου  $AB\Gamma$
- γ) Αν  $\Delta$  σημείο τέτοιο ώστε  $AB\Delta\Gamma$  παραλληλόγραμμο, να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής  $\Delta$  .

2. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = \frac{2}{|x|}$  και  $g(x) = \eta\mu x$ .

α) Να λύσετε την εξίσωση  $g(7x) - g(x) = g(3x)$  στο διάστημα  $[0, \frac{\pi}{2}]$ .

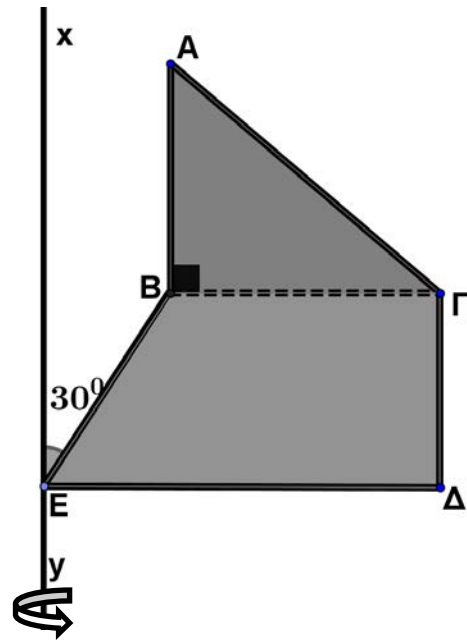
β) i) Να ορίσετε τη συνάρτηση  $(f \circ g)(x)$ .

ii) Αν  $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ , να δείξετε ότι:  $\frac{\eta\mu 2x}{1 - \sigma\upsilon\nu 2x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x} = \frac{f(g(x))}{\tau\epsilon\mu x}$ .

3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{B} = 90^\circ$ ) με  $A\Gamma = 10\text{cm}$ ,  $B\Gamma = 8\text{cm}$  και  $\Gamma\Delta \parallel xy$ . Το  $B\Gamma\Delta E$  είναι ορθογώνιο τραπέζιο ( $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ) με  $BE = AB$  και η πλευρά  $BE$  σχηματίζει γωνιά  $30^\circ$  με τον άξονα περιστροφής. Το σκιασμένο πολύγωνο στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα περιστροφής  $xy$ . Να υπολογίσετε:

α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραγόμενου στερεού.

β) Τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



4. Δίνονται οι συναρτήσεις  $f$ ,  $g$  με αντίστοιχους τύπους

$$f(x) = \frac{(\ln x - 1) \cdot (e^{2x} - 1)}{e^x} \text{ και } g(x) = \frac{(e^x + 1) \cdot (e^x - 1)}{e^x}.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων  $f$  και  $g$ .

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i)  $(f + g)(x)$

ii)  $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

γ) Αν  $h(x) = g(\ln x)$ ,  $x > 0$ , να δείξετε ότι:

i)  $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$

ii)  $x^4 \cdot \frac{d^2 h}{dx^2} + x \cdot \frac{dh}{dx} + h(x) = 0$ .

5. α) Δίνεται η συνάρτηση  $x \cdot y = 4$  και το σημείο της  $P\left(2t, \frac{2}{t}\right), t \neq 0$ .

Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης  $x \cdot y = 4$  στο σημείο της  $P\left(2t, \frac{2}{t}\right)$  είναι  $(\varepsilon): x + t^2 y = 4t$ .

β) Αν  $g$  είναι συνάρτηση συνεχής και παραγωγίσιμη στο  $x = 0$  για την οποία ισχύει  $x \cdot g(x) - g^2(x) + x + 1 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$  και  $g(0) > 0$  να δείξετε ότι:

i)  $g(0) = 1$

ii)  $\frac{dg}{dx} = \frac{g(x) + 1}{2 \cdot g(x) - x}$

iii) Αν η εφαπτομένη της συνάρτησης  $g$  στο σημείο της  $A(0, g(0))$  είναι κάθετη με την ευθεία  $(\varepsilon)$  του (α) ερωτήματος, να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου  $t$ .

**Τέλος Δοκιμίου**

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2016****ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**ΤΑΞΗ:** Β΄ Λυκείου**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** Πέμπτη, 2 Ιουνίου 2016**ΔΙΑΡΚΕΙΑ:** 2,5 ώρες**ΟΔΗΓΙΕΣ**

- Γράφετε με πένα μπλε. Τα σχήματα αν θέλετε με μολύβι.
- Επιτρέπεται η χρήση **μη προγραμματιζόμενης** υπολογιστικής μηχανής.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Γράφετε καθαρά και ευανάγνωστα γράμματα.
- Να φαίνονται όλες οι ενέργειες που κάνετε.
- Χορηγείται τυπολόγιο.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες & 1 σελίδα τυπολόγιο.

**ΜΕΡΟΣ Α΄****Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες στις 100.**

1. Δίνεται η Πρόοδος : -4, -1, 2, 5, ...

Να βρείτε: (α) Τον έβδομο όρο της.

(β) Το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της.

2. Δίνονται τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$

Να αποδείξετε ότι τα διανύσματα (α) έχουν το ίδιο μέτρο

(β) είναι κάθετα.

3. Ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο έχει πλάτος διπλάσιο του μήκους, ύψος τριπλάσιο του μήκους και όγκο  $48\text{cm}^3$ . Να βρείτε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τη διαγώνιο του παραλληλεπιπέδου.

4. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας με πλευρά βάσης  $8\text{cm}$  και ύψος  $3\text{cm}$ .

5. Δίνονται οι μιγαδικοί  $w = \alpha + \beta i$  και  $z = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} i$ , με  $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ .

Να βρείτε όλους τους μιγαδικούς  $z, w$  για τους οποίους ισχύει  $w = \bar{z}$ .

6. Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης  $f$ , με τύπο

$$f(x) = \varepsilon\varphi(4x + 3).$$

7. (α) Να αποδείξετε ότι  $x^3 - x^2 + 6x - 6 \equiv (x - 1)(x^2 + 6)$

(β) Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{3x^3 + 17x - 6}{x^3 - x^2 + 6x - 6}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

8. Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει η σχέση  $\beta\gamma = 4R^2 \cdot \sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{A}{2}\right)$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές ( $R$  είναι η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου).

9. Να βρείτε τα όρια: (α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - \left(\frac{7}{x}\right)^x}{x^2 - 5x}$  και (β)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3 - 9x}{|x^3 - 6x^2 + 9x|}$

10. (α) Να βρείτε ποιου κανονικού πολυγώνου η γωνία του είναι κατά  $60^\circ$  μεγαλύτερη από το τριπλάσιο της κεντρικής γωνίας του.

(β) Να βρείτε το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου.

(γ) Να βρείτε την πλευρά και το απόστημα του πολυγώνου, αν είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 10cm.

## **ΜΕΡΟΣ Β΄**

**Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες στις 100.**

1. (α) Να εκφράσετε ως γινόμενο την παράσταση  $f(x) = \eta\mu 9x - \eta\mu 3x$

(β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης  $\log(\log(\log(f(x) + 10^{10}))) = 0$

στο διάστημα  $(0, \pi)$ .

2. (α) Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $f$  με

$$f(x) = \frac{1}{x-3}, \quad x \in [2, 3)$$

- (β) Να βρείτε το πεδίο τιμών της συνάρτησης  $g$  με

$$g(x) = \sqrt{x-2}, \quad x \in [2, +\infty)$$

- (γ) Να ορίσετε (εφόσον ορίζονται) τις συναρτήσεις  $f \circ g$ ,  $g \circ f$ .

3. Δίνονται τα σημεία  $A(1, 4), B(7, 4), \Gamma(4, 1)$ .

- (α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές.

- (β) Να βρείτε το μέτρο της γωνιάς  $\angle AB\Gamma$ .

- (γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου  $\Gamma$  από την πλευρά  $AB$ .

- (δ) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

- (ε) Να βρείτε την κορυφή  $E$  ώστε το τετράπλευρο  $A\Gamma BE$  να είναι τετράγωνο.

- (στ) Με κέντρο το σημείο  $A$  και ακτίνα  $A\Gamma$  γράφουμε τεταρτοκύκλιο μέσα στο τετράγωνο  $A\Gamma BE$ . Να υπολογίσετε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου  $BEG$ .

4. (α) Δίνεται ότι η συνάρτηση  $f$  με  $f(x) = x^x$  με  $x > 0$ . Να αποδείξετε ότι οι όροι

$$\frac{f(x)}{1 + \ln x}, f(x), f'(x)$$

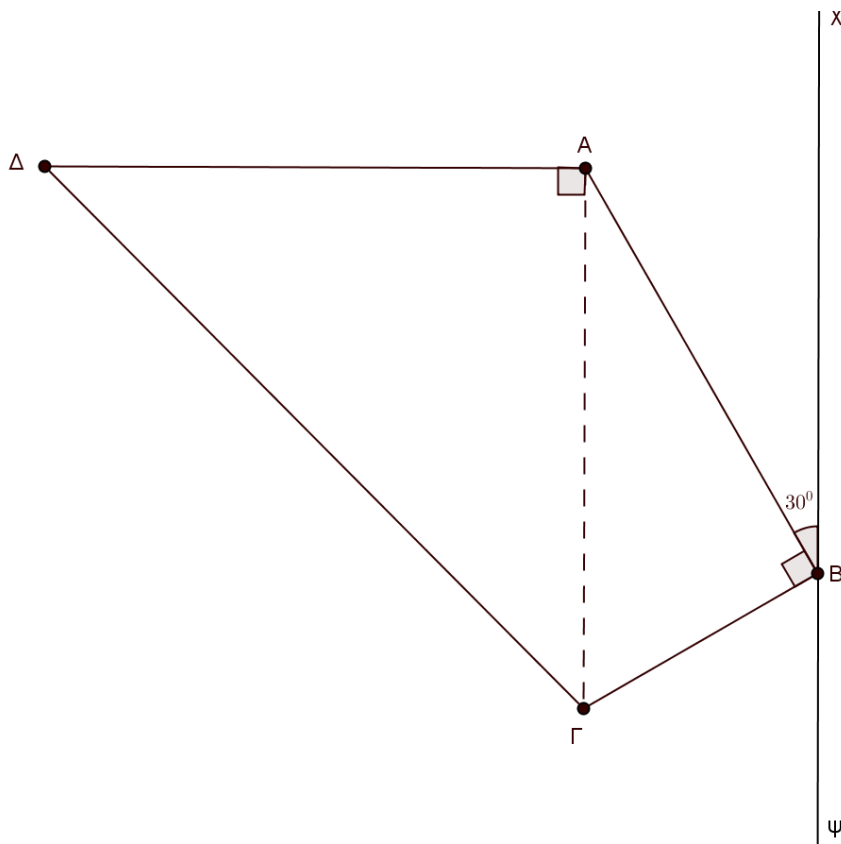
είναι διαδοχικοί Γεωμετρικής Προόδου.

- (β) Να βρείτε την εξίσωση της καθέτου στην καμπύλη  $y = f(x)$ , στο σημείο της με τετμημένη  $x = 1$ .

- (γ) Αν  $g(x) = \ln f(x)$ , να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει

$$x^2 g''(x) - x g'(x) + g(x) = 0.$$

5. Το τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  του παρακάτω σχήματος περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ευθεία  $x\psi$ , που είναι παράλληλη με τη διαγώνιο  $A\Gamma$  και σχηματίζει με την πλευρά  $BA$  γωνία  $30^\circ$ . Αν έχει  $\angle\Delta A\Gamma = \angle A B\Gamma = 90^\circ$ , και  $AD = A\Gamma = 4\text{cm}$ , να βρείτε **τον όγκο** και **το εμβαδόν της επιφάνειας** του παραγόμενου στερεού.



Οι Εισηγητές

.....  
Καραντάνος Δημήτριος

.....  
Αλεξάνδρου Μάριος

.....  
Ευριπίδου Γιώργος

Ο Συντονιστής

.....  
Καραντάνος Δημήτριος

Ο Διευθυντής

.....  
Νικολαΐδης Μελής

ΛΥΚΕΙΟ ΚΑΙ ΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΠΟΛΗΣ ΧΡΥΣΟΧΟΥΣ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ: 2015-16

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Κατεύθυνσης

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 07:45

Ημερομηνία: 31/ 05/ 2016

ΩΡΑ ΛΗΞΗΣ:10:15

ΤΑΞΗ: Β΄

**ΟΔΗΓΙΕΣ:** Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Να γράφετε με μελάνι μπλε ( τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).

Δίνεται τυπολόγιο που αποτελείται από 1 (μία) σελίδα

**ΜΕΡΟΣ Α΄:** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 1 (μία) μονάδα.

1. α) Να γράψετε την ικανή και αναγκαία συνθήκη ώστε 2 διανύσματα να είναι κάθετα

β) Να βρείτε την τιμή του  $\kappa$  ώστε τα διανύσματα  $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  και  $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} \kappa - 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  να είναι κάθετα.

2. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

I.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 3x + 4}{5 - 2x^2}$

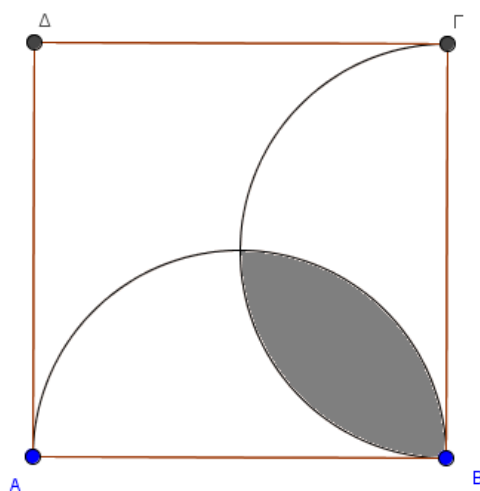
II.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 5x - \eta\mu 3x}{\eta\mu 7x + \eta\mu 4x}$

3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο  $\left(\frac{dy}{dx}\right)$  των συναρτήσεων

I.  $y = x^2 \sigma\upsilon\nu 3x$

II.  $y = \ln \frac{x^2}{4x - 1}$

4. Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου μέρους του πιο κάτω σχήματος αν το  $AB\Gamma\Delta$  είναι τετράγωνο πλευράς  $8\text{cm}$ .



5. Δίνεται κανονική τετραγωνική πυραμίδα με εμβαδόν βάσης  $E_{\beta} = 100\text{cm}^2$  και εμβαδόν παράπλευρης επιφάνειας  $E_{\pi} = 260\text{cm}^2$ . Να υπολογίσετε:  
 (α) την ακμή της βάσης της πυραμίδας,  
 (β) το παράπλευρο ύψος της,  
 (γ) τον όγκο της.
6. Δίνεται η συνάρτηση  $f$  με τύπο  $f(x) = (x-1)^5(x-2)^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .  
 α) Να δείξετε ότι  $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{8x-13}{(x-1)(x-2)}$ .  
 β) Να αναλύσετε τη συνάρτηση  $\frac{f'(x)}{f(x)}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.
7. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f(x) = \eta\mu 2x - 2\eta\mu^2 x$ ,  $x \in [0, \pi]$  στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με τον άξονα των  $x$ .
8. Έστω οι συναρτήσεις  $f(x) = x^2 - \alpha x + \beta$  και  $g(x) = x + \beta$  με  $\alpha, \beta, x \in \mathbb{R}$ . Να βρείτε τα  $\alpha, \beta$  εάν είναι γνωστό πως  $(f \circ g)(x) = x^2 + x - 8$ .

9. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με εμβαδόν  $E$  και ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου  $R$ , στο οποίο ισχύει η σχέση  $2E = \beta \cdot R \cdot \sigma\upsilon\nu(A - \Gamma)$ . Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο

10. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

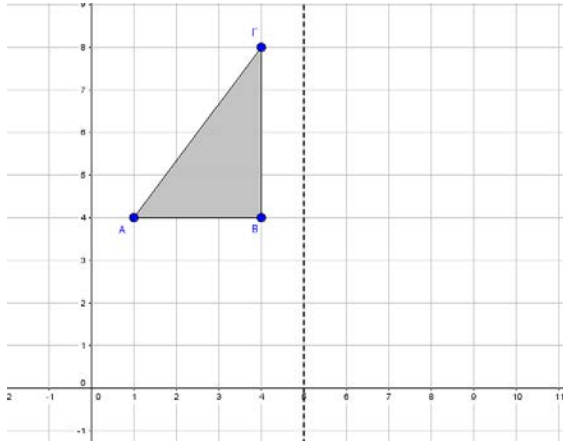
- I. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της
- II. Να αποδείξετε ότι  $f(-x) = -f(x)$
- III. Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) + \ln 9 = f(-x)$

**ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 2 (δύο) μονάδες.**

1. Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : 4x + 3y = 26$  και  $\varepsilon_2 : y = 7x - 33$  οι οποίες τέμνονται στο σημείο  $A$  και έστω  $B$  να είναι το σημείο τομής της  $\varepsilon_2$  με την ευθεία  $x=4$ .
  - i. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου  $A$ .
  - ii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $\varepsilon_3$  που περνά από το  $B$  και είναι κάθετη στην  $\varepsilon_1$ .
  - iii. Να βρείτε το σημείο τομής  $\Gamma$  των  $\varepsilon_1, \varepsilon_3$ .
  - iv. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ισοσκελές και ορθογώνιο.
  - v. Να προσδιορίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής  $\Delta$  έτσι ώστε το τετράπλευρο  $ΑΓΒΔ$  να είναι τετράγωνο.
2. Να δείξετε ότι:  $\frac{\eta\mu 3x + \eta\mu x}{2\eta\mu 2x} = \sigma\upsilon\nu x$ . Στη συνέχεια να δείξετε ότι η ακολουθία  $4\eta\mu x, 2\eta\mu 2x, \eta\mu 3x + \eta\mu x, \dots$ , όπου  $x \neq k\pi$  και  $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ , είναι απόλυτα φθίνουσα  
Γ.Π. Να δείξετε επίσης ότι:  $\Sigma_{\infty} = 4\sigma\phi \frac{x}{2}$ .
3. α. Να γράψετε τότε μία συνάρτηση είναι '1-1'.  
β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{3 - \sqrt{2 - x}}$  είναι '1-1'  
γ. Να βρείτε την συνάρτηση  $f^{-1}(x)$  καθώς και το πεδίο ορισμού της (της  $f^{-1}(x)$ )

4. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές Α(1,4) , Β(4,4) και Γ(4,8). Εάν το τρίγωνο περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία  $x=5$  να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραγόμενου στερεού



5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{kx}$ ,  $k \in (0,1)$ .

- I. Να βρείτε το άθροισμα  $\sum_{m=1}^v \frac{d^m y}{dx^m}$
- II. Να βρείτε το όριο  $S = \lim_{v \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^v \frac{d^m y}{dx^m}$
- III. Εάν  $S = \frac{3}{4} e^{kx}$  να βρείτε την τιμή του  $k$ .

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Ο ΣΥΝΟΝΙΣΤΗΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Λούβαρης Γιώργος

Λούβαρης Γιώργος

Χριστοδούλου Φοινίκη

.....

.....

.....

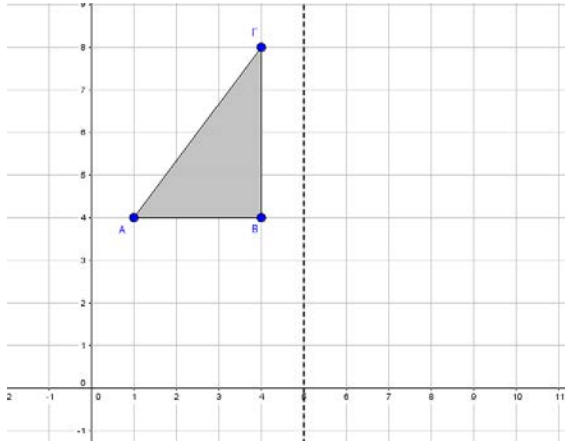
Ευαγόρου Τάσος

.....

Γεωργίου Γεωργία

.....

4. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές Α(1,4) , Β(4,4) και Γ(4,8). Εάν το τρίγωνο περιστραφεί πλήρως γύρω από την ευθεία  $x=5$  να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του παραγόμενου στερεού



5. Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = e^{kx}$ ,  $k \in (0,1)$ .

- IV. Να βρείτε το άθροισμα  $\sum_{m=1}^v \frac{d^m y}{dx^m}$
- V. Να βρείτε το όριο  $S = \lim_{v \rightarrow +\infty} \sum_{m=1}^v \frac{d^m y}{dx^m}$
- VI. Εάν  $S = \frac{3}{4} e^{kx}$  να βρείτε την τιμή του  $k$ .

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Χριστοδούλου Φοινίκη

.....

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2016****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΤΑΞΗ : Β΄ Κατεύθυνσης****Ημερομηνία: 26 / 5 / 2016****Χρόνος : 2,5 ώρες****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Επιτρέπεται η χρήση ΜΗ προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

**ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1) Να αναλύσετε το κλάσμα  $\frac{x+3}{x^2+2x}$  σε άθροισμα απλών κλασμάτων.

2) Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = 4x + \frac{1}{x}$  και  $g(x) = 4x - \frac{1}{x}$ .

Να ορίσετε τις συναρτήσεις  $f+g$  και  $\frac{f}{g}$  (τύπο και πεδίο ορισμού).

3) Να υπολογίσετε τα όρια:

α)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-2x^2}{x^2-2x}$

β)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2+x-6|}{4-x^2}$

4) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

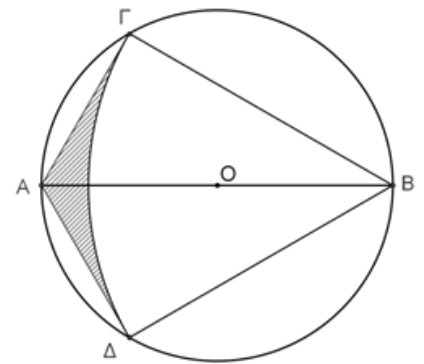
α)  $y = (3x + 2)^2 + \eta\mu 5x + e^x$       β)  $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$  .

5) Να δείξετε ότι:  $\frac{2\eta\mu 3x \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu^2 2x} = 2\varepsilon\varphi 2x$  .

6) Να λύσετε την εξίσωση  $2\log_4(x^2 + 3) - \log_2(x + 3) = 1$ .

7) Κανονικής τετραγωνικής πυραμίδας η παράπλευρη έδρα σχηματίζει με τη βάση γωνία  $60^\circ$  . Αν η παράπλευρη επιφάνεια της πυραμίδας είναι ίση με  $200 \text{ cm}^2$  , να υπολογίσετε τον όγκο της.

8) Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος  $(O, R)$  και τόξα  $AG = AD = 60^\circ$  . Με κέντρο το B και ακτίνα BΓ γράφεται τόξο ΓΔ μέσα στον κύκλο.



α) Να δείξετε ότι  $B\Gamma = R\sqrt{3}$  μονάδες.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.

9) Αν για το τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση  $2E = \beta R(1 + \sigma\upsilon\nu B)$ , όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του ABΓ, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Στη συνέχεια, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ~~α~~ αν  $\frac{1}{2}\eta\mu 2B$ ,  $\sigma\upsilon\nu \frac{B}{2}$  και

$\sigma\varphi B$ , όπου  $\hat{B} \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , είναι αντίστοιχα ο δεύτερος, τρίτος και τέταρτος όρος

γεωμετρικής προόδου.

10) Αν το πολυώνυμο

$$P(x) = (4^{\alpha+1} + 12 \cdot 2^{\alpha-2} - 1) \cdot x^4 - (\alpha + 1) \cdot x^3 + (1 + \ln \kappa) \cdot x^2 - (2 + \ln \kappa^3) \cdot x - 6, \text{ όπου } \kappa > 0,$$

είναι τρίτου βαθμού και ο αριθμός 2 είναι ρίζα του, να δείξετε ότι  $\alpha = -2$  και  $\kappa = e$  .

**ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β.**

**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

**1)** Στο διπλανό σχήμα δίνονται:

ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με  $AB=2\alpha$  cm και  $\widehat{HB\Gamma} = 30^\circ$  .

ΗΓΕΖ τετράγωνο και Η μέσο της ΔΓ.

Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας

και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την

πλήρη περιστροφή του ΑΒΓΕΖΗΔΑ γύρω από την

ευθεία ΓΕ.



**2)** Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές Α(-2,1) , Β(1,4) και Γ(κ,-5).

α) Να βρείτε τις τιμές του κ , ώστε το εμβαδόν του τριγώνου να ισούται με 18 τετραγωνικές μονάδες .

β) Για  $\kappa=4$

i) να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο,

ii) να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ ώστε το ΑΒΔΓ να είναι ορθογώνιο,

iii) να βρείτε την απόσταση της κορυφής Β από την διαγώνιο ΑΔ του ορθογώνιου παραλληλογράμμου ΑΒΔΓ.

**3)** Αν  $\psi^2 - x\psi = 4$  ,

α) να δείξετε ότι : i)  $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{8}{(2\psi - x)^3}$

ii) Η εξίσωση της εφαπτομένης της πιο πάνω καμπύλης στο σημείο με  $x_0 = 3$  και  $(\psi < 0)$  , είναι η  $\epsilon_1 : x - 5\psi = 8$  .

β) Έστω  $(\epsilon)$  ευθεία παράλληλη προς την  $(\epsilon_1)$  . Να βρείτε τα α και β ώστε η  $(\epsilon)$  να είναι

κάθετη της γραφικής παράστασης της  $f(x) = \ln x^{a-1} + \beta\sqrt{x}$  ,  $x>0$ , στο σημείο της (1,-2).

4) Δίνεται Αριθμητική Πρόοδος με  $\alpha_1 = \sigma\upsilon\nu 2x$  και  $\delta = \eta\mu 2x$ ,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

α) Να δείξετε ότι:

i)  $\frac{1 + \alpha_2}{1 - 2\alpha_4 + \alpha_8} = \sigma\phi x$

ii)  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{10} = 10\sigma\upsilon\nu 2x + 45\eta\mu 2x$

β) Να λύσετε την εξίσωση  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{10} = -10 + 55\eta\mu 2x$ .

5) α) Αν  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m(x) \cdot \eta\mu^2 x - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} - 2} = 4$  να υπολογίσετε το  $\lim_{x \rightarrow 0} m(x)$ .

β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$ .

i) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της  $f^{-1}(x)$ .

ii) Αν  $\kappa(x) = \ln x$  να ορίσετε την  $h(x) = (\kappa \circ f^{-1})(x)$ .

iii) Να εξετάσετε αν η πιο πάνω συνάρτηση  $f(x)$  και η συνάρτηση  $g(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$

είναι ίσες. Αν δεν είναι, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του  $\mathbb{R}$ , ώστε να είναι ίσες.

Ο Διευθυντής

Ανδρέας Ματσικάρης