

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2017**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19/05/2017****ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ****ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες****(07:45 – 10:15)**

ΟΔΗΓΙΕΣ : Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το σχολείο.

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Να γράφετε με μπλε μελάνι.

Τα σχήματα επιτρέπεται να τα κάνετε και με μολύβι.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να απαντήσετε και στα δέκα (10) θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

ΘΕΜΑ 1^ο:

Ένας μαθητής πήρε, κατά το πρώτο τετράμηνο, σε 4 διαφορετικά διαγωνίσματα στο μάθημα των μαθηματικών τους βαθμούς: 17, 15, 19 και 18. Να υπολογίσετε τον σταθμισμένο μέσο των βαθμών του, αν τα διαγωνίσματα έχουν βαρύτητα 15%, 20%, 35% και 30% αντίστοιχα.

ΘΕΜΑ 2^ο:

Αν $3 < \chi < 5$ και $-2 < \psi < 7$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παρακάτω παραστάσεις:

(α) 4χ

(β) $4\chi + 2\psi - 1$.

ΘΕΜΑ 3^ο:

Να υπολογίσετε το $\sin \chi$, εάν $0^\circ < \chi < 90^\circ$ και
$$\begin{vmatrix} \sin \chi & 1 \\ \frac{1}{2} & \sin \chi \end{vmatrix} = 0.$$

ΘΕΜΑ 4^ο:

Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος AB, εάν A(8,-3) και B(-4,5).

ΘΕΜΑ 5^ο:

Να αποδείξετε, χωρίς χρήση υπολογιστικής μηχανής, ότι: $\frac{2}{\sqrt{100} - \sqrt{99}} - \sqrt{\sqrt{100} + \sqrt{99}} \cdot \frac{2}{\sqrt{100} - \sqrt{99}} = 18$.

ΘΕΜΑ 6^ο:

Δίνονται τα διανύσματα $\alpha = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\beta = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ χαραγμένα σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων. Να

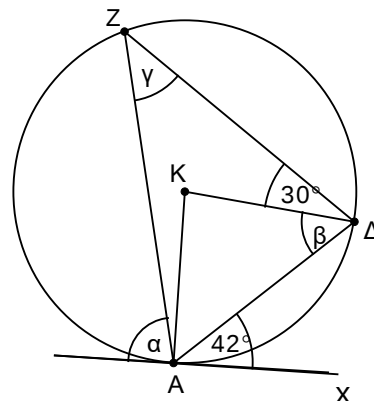
βρείτε την τιμή του κί $\hat{A}$, για την οποία τα διανύσματα $u = \alpha - \beta$ και $v = \kappa \alpha + \beta$ είναι κάθετα.

ΘΕΜΑ 7^ο:

Να επιλύσετε το σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} 2x + y + \omega &= 4 \\ 3x + 2y - \omega &= 14 \\ x + y + 2\omega &= -2 \end{aligned}$$
ΘΕΜΑ 8^ο:

Στο διπλανό σχήμα, τα σημεία A, Z και Δ είναι σημεία του κύκλου, K είναι το κέντρο του κύκλου και η Ax εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A. Να βρείτε τα μέτρα των γωνιών α, β και γ.

**ΘΕΜΑ 9^ο:**

Αν $2\eta\mu^2\chi - 4\sigma\upsilon\nu^2\chi = -1$, με $270^\circ < \chi < 360^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{\epsilon\phi\chi - \sqrt{2} \times \tau\epsilon\mu\chi}{\sigma\upsilon\nu^2\chi}$$

ΘΕΜΑ 10^ο:

Δίνεται η εξίσωση $\kappa\chi^2 - (\kappa+1)\chi + 5\kappa + 1 = 0$ με παράμετρο κ , κί $\hat{A} - \{0\}$, η οποία έχει λύσεις χ_1 και χ_2 .

(α) Να βρείτε για ποιες τιμές του κ , κί $\hat{A} - \{0\}$, ισχύει η σχέση: $\chi_1^2 \cdot \chi_2 + \chi_1 \cdot \chi_2^2 < 0$

β) Να βρείτε για ποια τιμή του κ , κί $\hat{A} - \{0\}$ ισχύει η σχέση: $2 \cdot (\chi_1 + \chi_2) = \chi_1 \cdot \chi_2$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να απαντήσετε και στα πέντε (5) θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες (10/100).

Θέμα 1^ο :

(α) Δίνεται η παραβολή με εξίσωση: $\psi = (\chi - 3)^2 + 1$. Να βρείτε:

- i. την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής (μονάδες: 1,5)
- ii. τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η παραβολή τέμνει τον άξονα των τεταγμένων ψ' (μονάδες: 1,5)
- iii. τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής. (μονάδες: 2)

(β) Να βρείτε το σύνολο των πραγματικών λύσεων της ανίσωσης:

$$\frac{(2\chi^2 - 19\chi + 9)(\chi - 9)}{(\chi^2 + 9)(\chi^2 - 9)} \geq 0$$

(μονάδες: 5)

Θέμα 2^ο:

Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, χαραγμένο σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, με κορυφές Α(-1,1), Β(4,-1) και Γ(6,4).

- (α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.
- (β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.
- (γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία Α και Γ.
- (δ) Να υπολογίσετε την απόσταση της κορυφής Β από το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ.
- (ε) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ.

Θέμα 3^ο:

Δίνονται τα σημεία Α(1,1), Β(4,0) και Γ(κ,-κ), κ>0, σημειωμένα σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων με αρχή των αξόνων το σημείο Ο(0,0).

- (α) Αν το διάνυσμα $\vec{OG}$ είναι μοναδιαίο, να υπολογίσετε την τιμή του κ.
- (β) Να αποδείξετε ότι $\vec{OA} \cdot \vec{OG} = 0$ και να γράψετε τι είδους τρίγωνο είναι το ΑΟΓ ως προς τις γωνίες του.
- (γ) Αν Δ(χ,ψ) είναι τυχαίο σημείο στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων, να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\tau} = \vec{AG} + \vec{DB} - \vec{AD}$.
- (δ) Να υπολογίσετε το: $|\vec{OA} + \vec{OB}|^2$.
- (ε) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας των $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$.

Θέμα 4°: Να αποδείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα:

$$\frac{[\sigma\tau\epsilon\mu(\pi - \chi) - \tau\epsilon\mu(-\chi)] \times \frac{\epsilon}{\epsilon} \sigma\tau\epsilon\mu(2\pi + \chi) - \sigma\tau\epsilon\mu\frac{3\pi}{2} - \chi \frac{\epsilon}{\epsilon}}{\epsilon\phi^2\chi + \sigma\phi^2\chi + 2} = 2\sigma\upsilon\nu^2\chi - 1, \quad \chi \neq \frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$$

Θέμα 5°: Στο πιο κάτω σχήμα, το ΑΒΓΔ είναι τετράπλευροεγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο, R) και ΓΑ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο, R). Προεκτείνουμε τις ΓΔ και ΒΑ ώστε να τέμνονται στο σημείο Ζ. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α και η προέκταση της ΓΔ τέμνονται στο σημείο Η. Αν $(ΑΔ) = \sqrt{\alpha}\text{cm}$ και $(ΖΓ) = \sqrt[3]{\beta}\text{cm}$, $\alpha > 0$ και $\beta > 0$, να αποδείξετε ότι:

(α) $(ΑΔ)^2 = (ΔΓ)(ΔΗ)$

(β) τα τρίγωνα ΖΔΑ και ΖΒΓ είναι όμοια

(γ) $(ΖΑ)(ΒΓ) = \sqrt[6]{\alpha^3\beta^2}\text{cm}$.

Οι Εισηγητές

Κυριακή Κυριάκου

.....

Κλεανθία Γεωργίου

Μαρίνα Στυλιανίδη

Χάρης Κωνσταντινίδης

Γεωργία Γεωργίου

Ο συντονιστής Β.Δ

Γεώργιος Παναγή

.....

Ο διευθυντής

Ανδρέας Ιωσήφ

.....

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Α'

Ημερομηνία: 25.5.17

Ώρα: 8.00 – 10.30

Χρόνος: 2,5 Ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να χρησιμοποιείτε μόνο απλή πένα μπλε ή μαύρου χρώματος.
2. Τα σχήματα μπορούν να γίνονται με μολύβι.
3. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής (αν ισχύει).
5. Δεν επιτρέπεται να δανείζεστε οτιδήποτε από συμμαθητές/τριες σας.
6. Η κατοχή κινητού τηλεφώνου **ισοδυναμεί με δολίευση**.
7. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **5 (πέντε)** σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η εξίσωση $2c^2 - 4c + 5 = 0$. Αν c_1, c_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης να υπολογίσετε τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων, χωρίς να λύσετε την εξίσωση :

α) $3c_1 + 3c_2 - 4c_1c_2$

β) $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2}$

2. Η μετεωρολογική υπηρεσία Κύπρου κατέγραψε τις θερμοκρασίες των 10 πρώτων ημερών κατά το μήνα Φεβρουάριο σε $^{\circ}\text{C}$:

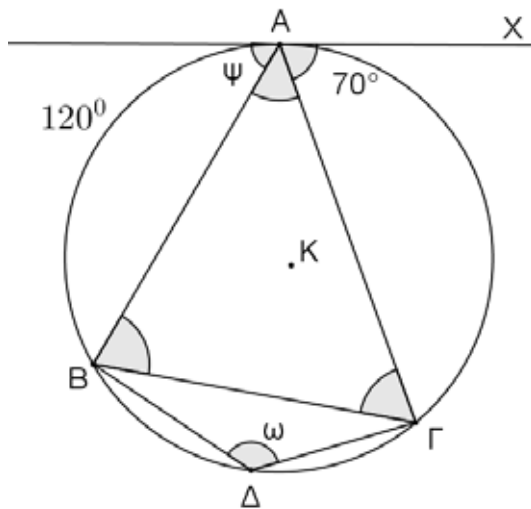
-1, 3, 5, 0, 3, 4, 3, 2, -1, 2

Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, την επικρατούσα τιμή και το εύρος των παραπάνω μετρήσεων.

3. Αν $hmc = -\frac{4}{5}$, $270^{\circ} < c < 360^{\circ}$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{3\sin c - 10\sin c}{1 - 4\sin c}$$

4. Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ, τόξο $\widehat{AB} = 120^\circ$, $\widehat{GAX} = 70^\circ$, και ΑΧ εφαπτομένη του κύκλου.
 Να υπολογίσετε, αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας :
 α) τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ β) τις γωνίες ψ και ω .



5. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(c^2 - c - 12) \times (c^2 - 9)}{5 - c} \leq 0$.

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ c-5 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ c-4 \end{pmatrix}$ και τα σημεία $A(-1, -3)$, $B(c, 7)$.

α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{u} + \vec{v}$.

β) Να βρείτε την τιμή του c, ώστε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{u} + \vec{v}$, να είναι κάθετα μεταξύ τους.

7. Να αποδείξετε ότι :

α) $\sqrt{\frac{2^{10} + 4^6}{16^2 + 4^5}} = 2$

β) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 3$

8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές 20cm και Δ τυχαίο σημείο της βάσης ΒΓ. Φέρουμε τις ΔΕ και ΔΖ κάθετες στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

α) Να δείξετε ότι $(DE) \cdot (GD) = (DB) \cdot (DZ)$

β) Αν $DE = 3\sqrt{3}$ cm, $DB = 6$ cm, να υπολογίσετε το μήκος ΑΖ.

$$c + y = 7$$

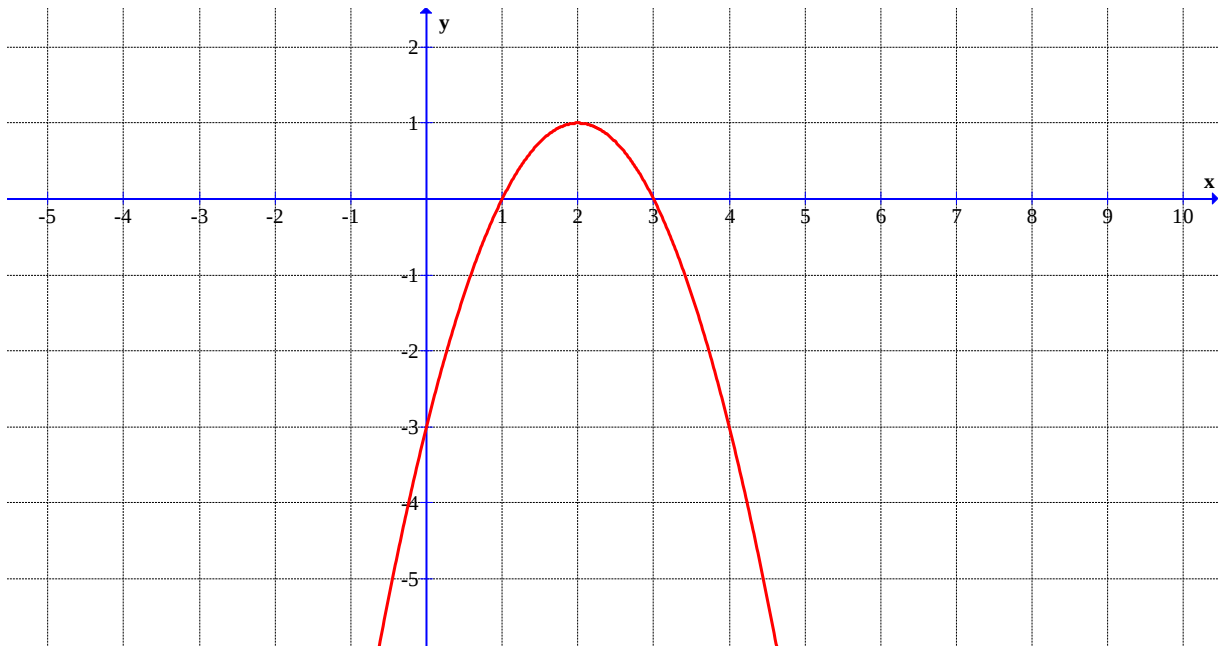
9. Αν το σύστημα $\begin{cases} c^2 + y^2 = 12 \\ 3c - y = 1 \end{cases}$, είναι συμβιβαστό και $p < q < \frac{3p}{2}$, να βρείτε τη γωνία θ .

10. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με μήκος c μέτρα και πλάτος y μέτρα, του οποίου οι διαστάσεις ικανοποιούν τις ανισότητες $8 < c < 14$ και $2 < y < 5$. Αν μειώσουμε το μήκος κατά 2 και διπλασιάσουμε το πλάτος του, να βρείτε τη μεγαλύτερη και τη μικρότερη τιμή :

- α) της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου
- β) του εμβαδού του νέου ορθογωνίου.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Το πιο κάτω σχήμα δίνει τη γραφική παράσταση της παραβολής $f(c) = ac^2 + bc + g$ $a \neq 0$, $a, b, g \in \mathbb{R}$.



Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- α) i. Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(c)$.
 ii. Το πρόσημο της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης $ac^2 + bc + g = 0$.
 - β) i. την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.
 ii. τις συντεταγμένες της κορυφής και να χαρακτηριστεί.
 - γ) i. τις λύσεις της εξίσωσης $ac^2 + bc + g = 0$.
 ii. τις τιμές του c για τις οποίες $ac^2 + bc + g > 0$.
 - δ) την τιμή της παράστασης $A = \frac{f(4) + f(2)}{abg}$.
 - ε) Να περιγράψετε πως η γραφική παράσταση της $g(c) = -c^2$ με κατάλληλες μετατοπίσεις θα συμπίπτει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(c)$.
2. Δίνεται το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με κορυφές $A(2, 3)$, $\Gamma(6, 0)$ και εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$: $c - 7y = 6$.
 Να βρείτε :
- α) τις εξισώσεις των καθέτων πλευρών του .
 - β) το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.
 - γ) τις συντεταγμένες της τέταρτης κορυφής Δ , ώστε το $\triangle AB\Delta$ να είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο .
 - δ) το μέτρο της γωνίας Γ του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}, \vec{b}$, με $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 3$ και $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$.

α) Να διατυπώσετε τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δυο μη μηδενικών διανυσμάτων.

β) Να υπολογίσετε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

γ) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ και $\vec{v} = \vec{a} - 2\vec{b}$.

δ) Αν το διάνυσμα $\vec{a} = i + kj$, να υπολογίσετε την τιμή του k , $k > 0$.

ε) Αν $k = \sqrt{3}$, να βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο με το διάνυσμα $\vec{a} = i + kj$.

4. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\sin(3p+\theta) \times \eta\mu(\frac{5p}{2} + \theta) \times \eta\mu(4p+\theta)}{\sigma\phi(\frac{3p}{2} + \theta) \times \sigma\phi(\theta-2p)}$ και

$$B = \frac{\epsilon\eta q - \sigma\eta q}{\epsilon\eta q + \sigma\eta q},$$

α) Να δείξετε ότι: $A = \sin^2 q$ και $B = 2\eta\mu^2 q - 1$.

β) Να δείξετε ότι $2A + B = 1$.

5. Σε κύκλο (O, R) φέρουμε τη διάμετρο AB και τη χορδή AG . Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη (ϵ) του κύκλου και την κάθετη AH στην (ϵ) έτσι ώστε $(\Gamma B) = 2(\Gamma H)$.

α) Να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

i. $(AG)^2 = 2R \times (AH)$

ii. $\frac{AH}{AG} = \frac{1}{2}$

β) Να υπολογίσετε τη γωνία AGH .

Οι Εισηγητές

.....
Χρυστάλλα Ζερζελίδου

.....
Φωτεινή Παστού

.....
Χριστιάνα Αντωνίου

.....
Ιωάννα Σωκράτους

.....
Χριστόδουλος Χριστοδούλου

Ο Συντονιστής

.....
Ευάνθης Κωνσταντίνου

Η Διευθύντρια

.....
Θεοδούλα Ερωτοκρίτου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ (5ωρο)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/05/17

ΟΔΗΓΙΕΣ: Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
 Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού και διορθωτικής ταινίας.
 Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρη πένα. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
 Να φαίνονται όλες οι απαραίτητες πράξεις.
 Το γραπτό αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

(1) Να αποδείξετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής ότι: $\frac{6}{3-\sqrt{5}} + \frac{6}{3+\sqrt{5}} = 9$

(2) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε :

(α) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(β) Το εσωτερικό γινόμενο των δύο διανυσμάτων.

(3) Η μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) στη Λεμεσό, τις πρώτες δέκα μέρες του Απριλίου ήταν: 20, 18, 20, 17, 18, 17, 16, 18, 16, 10.

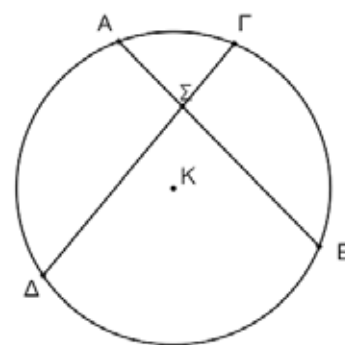
Να υπολογίσετε: (α) Τη μέση τιμή των θερμοκρασιών ($\bar{x}$).

(β) Την τυπική απόκλιση των θερμοκρασιών (s).

(4) Δίνεται ο κύκλος (Κ, R) και οι τέμνουσες του ΑΣΒ και ΓΣΔ.
 Να βρείτε την τιμή του x αν δίνονται:

$$(AS) = x \text{ cm}, (\Sigma B) = 3x \text{ cm},$$

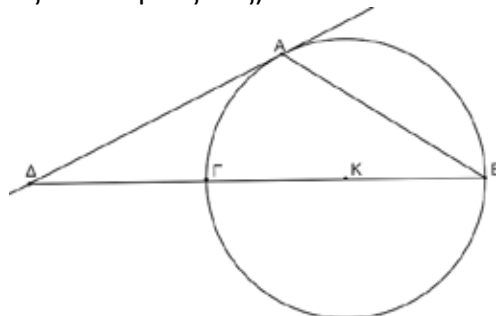
$$(\Gamma \Sigma) = 2.5 \text{ cm} \text{ και } (\Sigma \Delta) = 10.8 \text{ cm}$$



(5) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -2 \\ x + 5y + 2z = 3 \\ 3x - 4y + 5z = 25 \end{cases}$$

(6) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x^2 - 4x + 3)(x^2 - 1)}{(x^2 + 4)} > 0$

- (7) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (Κ,Ρ). Η ΒΓ είναι η διάμετρος του. Το μέτρο του τόξου ΑΓ = 64° και η ΑΔ είναι η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ καθώς και το μέτρο του τόξου ΑΒΓ.
(Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



- (8) Δίνονται τα σημεία Α(2, 5), Β(0, 2) και Γ(8, 1).

(α) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία ΑΒ με τον άξονα των τετμημένων.

(β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας Β.

(γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΑΔ στο τρίγωνο ΑΒΓ.

- (9) Αν ισχύει η σχέση $-2\eta\mu\theta - 3 = -7\eta\mu\theta - 6$, $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή

της παράστασης:
$$A = \frac{-10\eta\mu(90^\circ - \theta) - 16\varsigma\jmath(q - 270^\circ)}{-3\sigma\tau\epsilon\mu(-\theta)}$$

- (10) Δίνεται η εξίσωση $4\chi^2 + 3\mu\chi + 3\mu - 5 = 0$, με ρίζες χ_1, χ_2 .

Να βρείτε στην κάθε περίπτωση για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$:

(α) Η πιο πάνω εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

(β) Ισχύει η σχέση $\chi_1 + \chi_2 = \chi_1\chi_2$

(γ) Ισχύει η σχέση $\chi_1^2\chi_2 + \chi_1\chi_2^2 \leq 0$

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

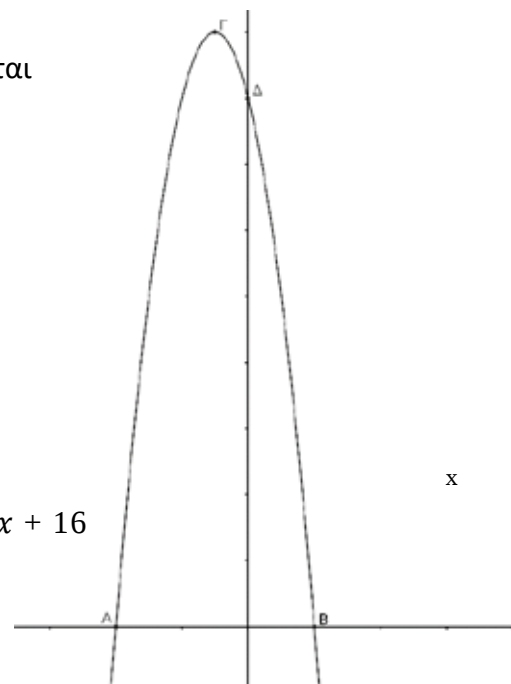
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- (1) (α) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ η οποία διέρχεται από τα σημεία Α(-4,0), Β(2,0) και Δ(0,16).

Να βρείτε:

- Τις τιμές των παραμέτρων a, b και γ .
- Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής.
- Τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής.
- Τις τιμές του χ για τις οποίες ισχύει $f(x) > 0$.
- Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της συνάρτησης f .
- Το πρόσημο του $f(-0.5)$ και του $f(2017)$.

- (β) Να βρείτε τα σημεία τομής της παραβολής $\psi = -2x^2 - 4x + 16$ με την ευθεία $\psi = -4x + 8$



(2) Δίνεται η εξίσωση:

$$c^2 - \frac{a^2 - b^2 \sin^2 \theta}{4 \sin \theta} + h \sin \theta = 0, \quad 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

(ι) Να δείξετε ότι το $c_1 = h \sin \theta$ είναι μία λύση της εξίσωσης.

(ιι) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ αν το άθροισμα των ριζών της είναι ίσο με 2.

(3) Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (2\lambda + 4)x + 4 = 0$ και τα σημεία $A(x_1, 2)$ και $B(x_2, 3)$, όπου x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης με $x_1 < x_2$.

(α) Αν το σημείο $M(\frac{\lambda}{2}, \frac{5}{2})$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος AB ,

να δείξετε ότι το $\lambda = 1$.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων A και B αν το $\lambda = 1$.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου Γ , το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα xx' και ισαπέχει από τα σημεία A και B .

(δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v} = 3\vec{AG} - 2\vec{AB}$.

(4) Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με εξισώσεις πλευρών:

$$AB: 8x + 3y + 1 = 0 \text{ και } AD: 2x + y - 1 = 0.$$

(α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής A είναι $A(-2, 5)$.

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ αν $M(3, -6)$ είναι το σημείο τομής των διαγώνιων του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

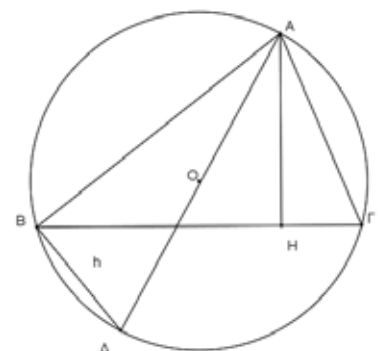
(γ) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$.

(δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

(5) Στο διπλανό σχήμα, η AD είναι η διάμετρος του κύκλου (O, R) και το AH είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$. Να δείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα $AH\Gamma$ και $AB\Delta$ είναι όμοια.

$$(β) R = \frac{(BA)(GA)}{2(AH)}$$



Η Διευθύντρια

.....
Θεοφάνους Μαρία

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α' Λυκείου – Προσανατολισμού

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2017

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες και 30 λεπτά

Όνοματεπώνυμο: _____ Βαθμός: _____

Τμήμα: _____ Αριθμός: _____ Βαθμός ολογράφως: _____

Υπογραφή καθηγητή: _____

ΟΔΗΓΙΕΣ :

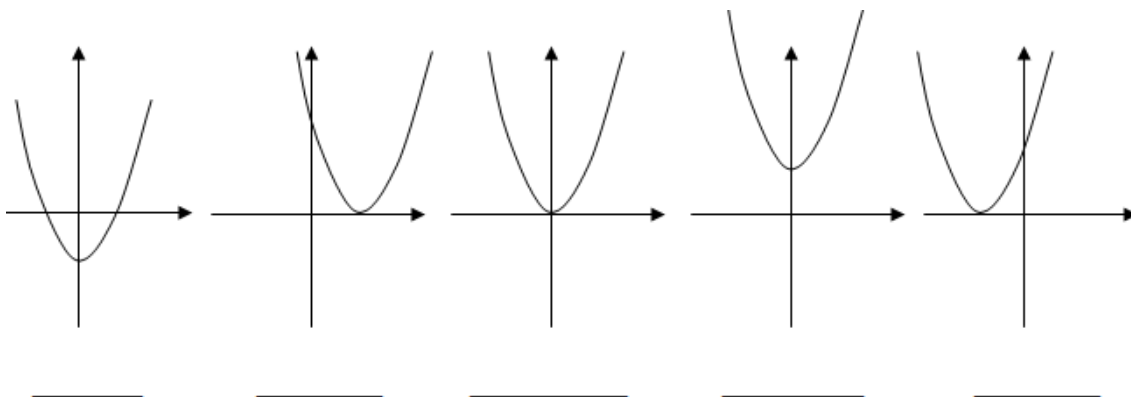
- (α) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- (β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (γ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- (δ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία διαδικασία.

Το δοκίμιο αποτελείται από δεκατρείς (13) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

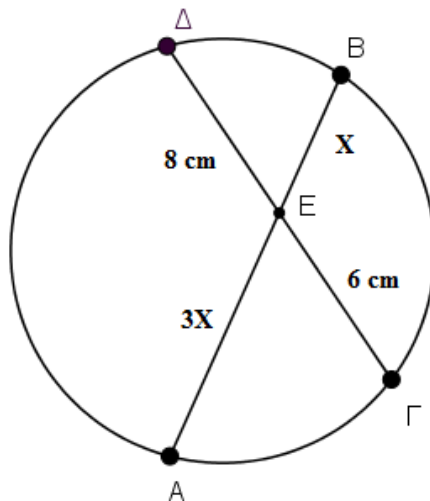
1. Πιο κάτω δίνονται με τυχαία σειρά οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\psi = x^2$, $\psi = (x - 3)^2$, $\psi = (x + 3)^2$, $\psi = x^2 + 3$ και $\psi = x^2 - 3$. Κάτω από κάθε γραφική παράσταση, να γράψετε την εξίσωση της συνάρτησης που παριστάνει.



2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του

διανύσματος: $\vec{g} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται $(\Delta E) = 8 \text{ cm}$, $(E\Gamma) = 6 \text{ cm}$, $(BE) = X \text{ cm}$, $(AE) = 3X \text{ cm}$.
Να υπολογίσετε την τιμή του X .



4. (α) Αν $-3 < x < -1$ και $3 < y < 6$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι

παραστάσεις:

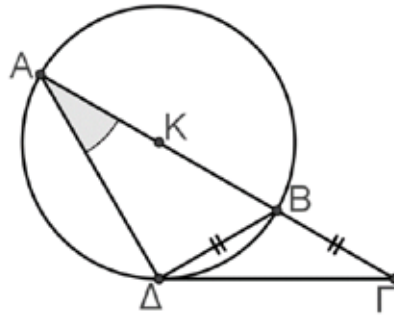
i. $x + y$

ii. $\frac{1}{xy}$

(β) Αν $k = \sqrt{2} - \sqrt{13}$ και $l = \sqrt{2} + \sqrt{13}$ να αποδείξετε ότι: $l^2 - kl = 2\sqrt{26} + 26 + 26$

5. Τα κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά απέχουν 12 cm . Αν οι κύκλοι μετατοπιστούν έτσι ώστε να εφάπτονται εξωτερικά, τότε τα κέντρα τους απέχουν 58 cm .
Να βρείτε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο AB. Η εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του Δ, τέμνει την προέκταση της AB στο σημείο Γ. Αν το τρίγωνο BΔΓ είναι ισοσκελές ($BD=BG$), να αποδείξετε ότι $\widehat{BAD} = 30^\circ$.



7. Σε μια έρευνα 40 μαθητές ρωτήθηκαν για το πόσες φορές επισκέπτονται το γυμναστήριο κατά τη διάρκεια μιας εβδομάδας. Οι απαντήσεις τους παρουσιάζονται τον πιο κάτω πίνακα:

Αριθμός επισκέψεων στο γυμναστήριο	Αριθμός μαθητών (Συχνότητα)
0	3
1	3
2	13
3	5
4	8
5	5
6	2
7	1

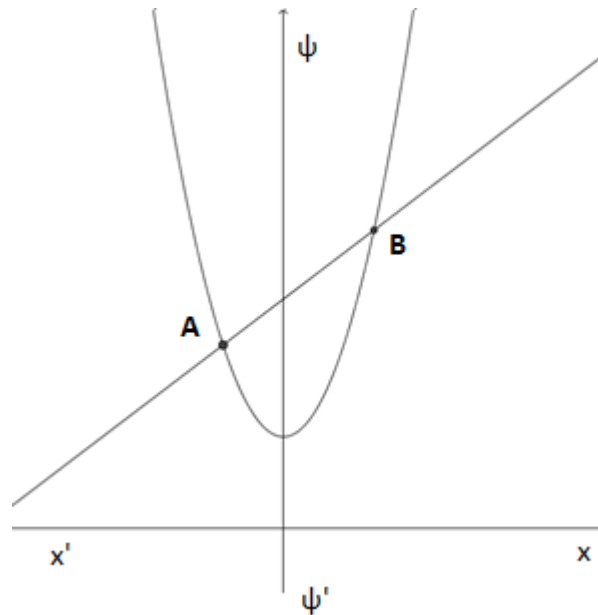
Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των πιο πάνω παρατηρήσεων.

8. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2 - 3x + 2)(4 - x^2)}{(x^2 + x + 3)(5 + x)} \geq 0$

9. Στο διπλανό σχήμα η παραβολή $y = x^2 + 4$ και η ευθεία $y = x + 10$ τέμνονται στα σημεία A και B.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M του AB.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκαθέτου του ευθυγράμμου τμήματος AB.



10. Δίνονται οι εξισώσεις: A: $(l + 2)x = l + 1$ και B: $(l + 2)x = l$, $l \in \mathbb{R}$.

(α) Να βρείτε, εάν υπάρχει, την τιμή του l ώστε η εξίσωση A να είναι αδύνατη.

(β) Να βρείτε, εάν υπάρχει, την τιμή του l ώστε η εξίσωση B να είναι αόριστη.

(γ) Αν η μοναδική λύση της A είναι ίση με $\eta\mu\theta$ και η μοναδική λύση της B είναι ίση με $\sigma\upsilon\eta\theta$ όπου $90^\circ < \hat{\theta} < 270^\circ$ να βρείτε την τιμή της γωνίας θ .

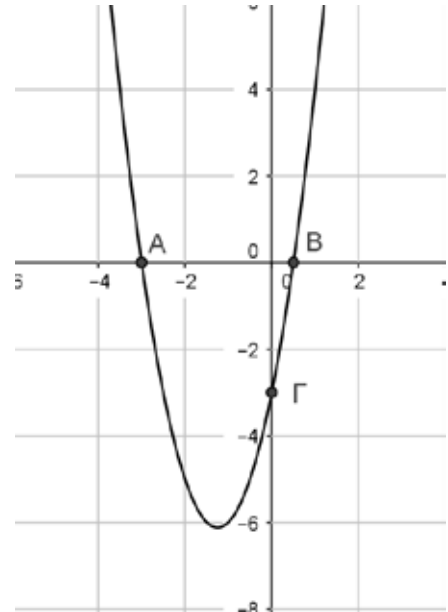
ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. (α) Δίνεται η εξίσωση $ax^2 + bx + g = 0$ με $a \neq 0$. Αν x_1 και x_2 οι λύσεις της εξίσωσης να αποδείξετε ότι $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$.

(β) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + g$, $a \neq 0$.

Η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(-3,0)$, $B(\frac{1}{2},0)$ και $\Gamma(0,-3)$. Να βρείτε:



- το πρόσημο του a
- την τιμή του g
- τις λύσεις, το S και το P της εξίσωσης $ax^2 + bx + g = 0$
- την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f
- τις συντεταγμένες της κορυφής της γραφικής παράστασης της f .
- τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) \leq 0$

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$

(β) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας θ των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

(γ) Αν τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ και $\vec{v} = \vec{a} + k\vec{b}$ είναι κάθετα μεταξύ τους να δείξετε ότι

$$k = \frac{8}{21}$$

(δ) Να βρείτε το μήκος της προβολής του διανύσματος $\vec{a}$ στο διάνυσμα $\vec{b}$.

3. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με κορυφές A (0,3), B (4,0) και Γ(κ,5), όπου $0 < \kappa < 4$ του οποίου το εμβαδόν είναι ίσο με 8 τ.μ.

(α) Να δείξετε ότι $k = \frac{8}{3}$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AB.

(γ) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΓΔ.

(δ) Να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα του κύκλου που περνά από τα σημεία B, Γ, Δ.

4. (α) Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\sin \frac{2p}{2} - x \cdot \sin \frac{2p}{2} + x}{\sin(2p - x)}$$

$$B = \sin \frac{p}{2} \cdot \eta\mu(\pi + x)$$

$$\Gamma = \sin(\pi + x) \cdot \eta\mu \frac{p}{2}$$

Να αποδείξετε ότι: $A + B = \Gamma$

(β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\sin^2 x - \sin^2 x = \tan x - \tan x$

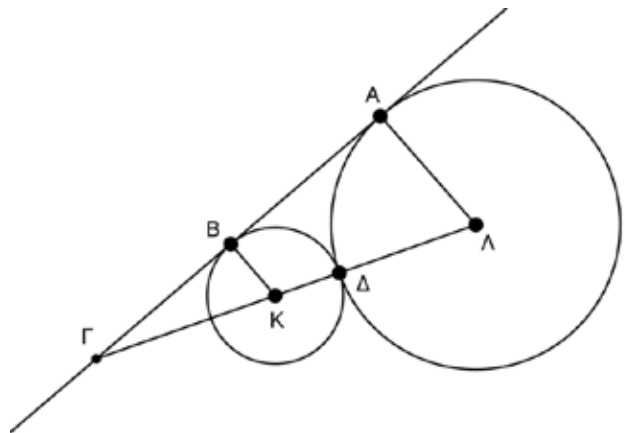
5. Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι κύκλοι (K, 2cm) και (Λ, 5cm) που εφάπτονται στο σημείο Δ. Η ευθεία ABΓ είναι η κοινή εξωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων στα σημεία τους Α και Β.

(α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΛ και ΒΓΚ είναι όμοια.

(β) Αν $(B\Gamma) = \mu$ cm, να βρείτε το μήκος του ΑΒ συναρτήσει του μ.

(γ) Αν το εμβαδόν του τετράπλευρου ΑΒΚΛ είναι ίσο με x cm² και το εμβαδόν του τριγώνου ΒΓΚ είναι ίσο με ψ cm², να εκφράσετε το ψ συναρτήσει του x .

(δ) Να αποδείξετε ότι η γωνία ΑΔΒ είναι ορθή.



ΤΕΛΟΣ

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Έλση Μαργερίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ : Α΄ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 23 / 05 / 2017

ΔΙΑΡΚΕΙΑ : 2,5 ΩΡΕΣ

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 7:45 π.μ

ΟΔΗΓΙΕΣ : α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής
β) Να γράψετε **μόνο με μπλε μελάνι** (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι)
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α :

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνονται τα ενδιάμεσα βήματα και οι πράξεις.

1. Ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου πήρε στο Α΄ τετράμηνο βαθμό 16, το Β΄ τετράμηνο βαθμό 14 και τις τελικές εξετάσεις βαθμό 10. Να υπολογίσετε τον σταθμισμένο μέσο όρο των βαθμών του, αν έχουν βαρύτητα 35, 35, 30 αντίστοιχα.

2. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή, χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής.

(α) $\frac{7}{4 - \sqrt{2}}$

(β) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

3. (α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία A(1, - 7) και B(4, - 4) .

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & y \\ 2 & -3x \end{vmatrix}$ παριστάνει την εξίσωση ευθείας που διέρχεται

από τα πιο πάνω σημεία A και B.

4. Αν $3 < x < 5$ και $-4 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $3x + 2y$

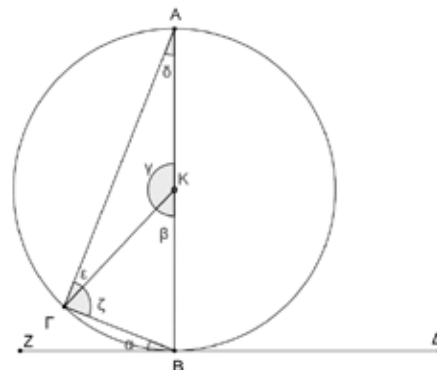
(β) $-\frac{2x}{3y}$

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και διάμετρο ΑΒ και ΔΖ εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο Β. Αν

$\hat{\beta} = 40^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\gamma}$, $\hat{\delta}$, $\hat{\epsilon}$, $\hat{\kappa\Gamma B}$ καθώς

και το τόξο $\widehat{AG}$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



6. Αν $\sin q = \frac{3}{5}$, $90^\circ < q < 180^\circ$, να υπολογίσετε, με τη χρήση τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, την

τιμή της παράστασης $A = 10 \sin q - 9 \sin q$

7. Δίνεται κύκλος (Κ, R) με $R = 3$ cm και Σ σημείο εκτός του κύκλου τέτοιο ώστε $\Sigma K = 9$ cm. ΣΑΒ είναι τέμνουσα του κύκλου με $\Sigma A = 8$ cm. Να υπολογίσετε το μήκος της χορδής ΑΒ.

8. Δίνεται η εξίσωση $-mx^2 + x\sqrt{\mu+3} + \mu - 1 = 0$, $\mu \in [-3, \infty)$, $\mu \neq 0$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση έχει:

(α) ρίζα τον αριθμό 1 (μον.2)

(β) ρίζες αντίστροφες (μον.2)

(γ) ρίζες αντίθετες (μον.1)

9. Δίνεται το σύστημα

$$\begin{cases} ax + by - xy = 4 \\ 5x + y = 8 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$$

όπου α, β πλευρές τριγώνου ΑΒΓ.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 10 \end{cases}$$

Αν το σύστημα είναι συμβιβαστό, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

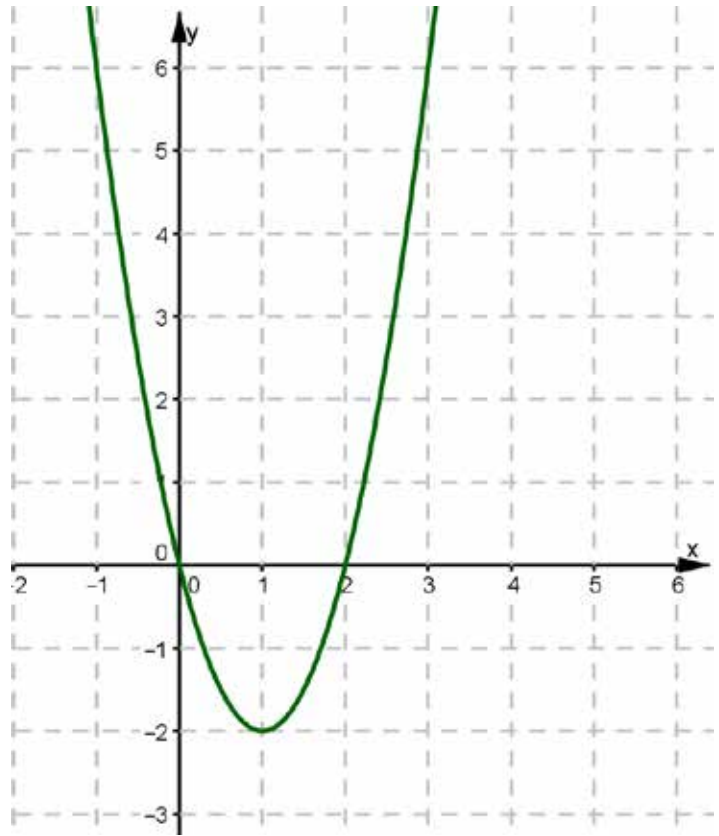
10. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x^2 - 4)(1 - x)^2}{(2 - x)(x + 3)} \leq 0$.

ΜΕΡΟΣ Β :

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + g$, $a \neq 0$. Να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x)$
- (β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής
- (γ) τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + g = 0$
- (δ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 6$
- (ε) τις τιμές των a, b, g



2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} \mu \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} \mu \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} \end{pmatrix}$, ($\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \neq 0$)

- (α) Αν $\mu = 4$ και $A(3, -1)$ να υπολογίσετε:

- (i) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$ κατά προσέγγιση ακεραίου (μον.2)
- (ii) τις συντεταγμένες του σημείου B έτσι ώστε $\vec{AB} = \vec{a}$ (μον.2)

- (β) Να υπολογίσετε τις τιμές του μ ώστε:

- (i) τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ να είναι παράλληλα (μον.2)
- (ii) τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ να έχουν ίσα μέτρα (μον.2)
- (iii) το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να είναι μοναδιαίο. (μον.2)

3. Δίνεται κύκλος (K, R) και τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε αυτόν, με το κέντρο του κύκλου K να βρίσκεται πάνω στην πλευρά $B\Gamma$. Φέρουμε το ύψος AD που τέμνει τον κύκλο στο E . Να δείξετε ότι:

(α) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BDE είναι όμοια.

(β) $(BE)^2 = 2R \times (BD)$

4. Το σημείο $A(1,2)$ είναι κορυφή τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$, του οποίου η πλευρά $\Gamma\Delta$ έχει εξίσωση $2x - y + 5 = 0$.

(α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς του τετραγώνου.

(β) Να βρείτε τις εξισώσεις των πλευρών AB και AD του τετραγώνου.

(γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής B , αν το B βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο.

(δ) Να βρείτε το σημείο τομής K των διαγωνίων του τετραγώνου.

(ε) Αν η ευθεία $\Gamma\Delta$ τέμνει τον άξονα xy στο σημείο E , να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAE , όπου O η αρχή των αξόνων.

5. (α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(\pi + \theta) \times \sigma\upsilon\nu(2\pi - \theta) \times \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) \times \eta\mu(2\pi + \theta) \times \sigma\upsilon\nu(\theta - \pi) \times \epsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)} = -1$$

(μον.5)

(β) Να δείξετε ότι η εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $x_1 = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 - \eta\mu\omega}$ και $x_2 = \frac{\sigma\upsilon\nu\omega}{1 + \eta\mu\omega}$

είναι η $x^2 - 2x \times \epsilon\mu\omega + 1 = 0$.

(μον.3)

(γ) Δίνεται ότι $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της παράστασης $A = \frac{\eta\mu\omega + 2}{4 - \sigma\upsilon\nu\omega}$,

δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

(μον.2)

Ο Διευθυντής

Νεόφυτος Παπαϊωάννου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Α' Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/05/2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΩΡΑ: 7:45 – 10:15

ΓΕΝΙΚΕΣ ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε. Τα σχήματα με μολύβι.
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
3. Επιτρέπεται η χρήση σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής.
4. Το γραπτό αποτελείται από τέσσερις σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' (50 μονάδες)**Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.****A1.** Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς:

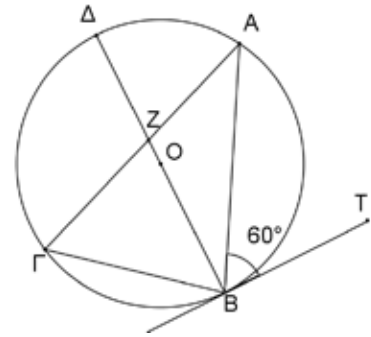
$$x_1 = 2 + \sqrt{5} \quad \text{και} \quad x_2 = 2 - \sqrt{5}$$

A2. Να λύσετε την εξίσωση : $x^{\frac{3}{2}} = 8, \quad x > 0.$ **A3.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Να υπολογίσετε:(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ (β) το μέτρο του διανύσματος $2\vec{\alpha}$.**A4.** Αν $\eta\mu\theta = \frac{5}{13}$ και $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{13\sigma\upsilon\nu\theta + 10\sigma\tau\epsilon\mu\theta + 6}{24\epsilon\phi\theta}$$

A5. Να βρείτε την τιμή του λ ώστε το σύστημα
$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ x + y = -3 \\ 3x + \lambda y = 1 \end{cases}$$
 να είναι συμβιβαστό.

- A6.** Στο διπλανό σχήμα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Ο, R), η ΒΤ εφάπτεται του κύκλου στο Β και Ζ είναι το σημείο τομής της ΒΔ και της χορδής ΑΓ. Αν η γωνία ΤΒΑ έχει μέτρο 60° και το τόξο ΒΓ έχει μέτρο 80° να βρείτε το μέτρο των γωνιών του τριγώνου ΒΓΖ, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας



- A7.** Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των βιβλίων που έχουν διαβάσει κατά τη διάρκεια των διακοπών τους οι 20 μαθητές ενός τμήματος.

Αριθμός βιβλίων x_i	0	1	2	3	4	5
Αριθμός μαθητών f_i	2	1	4	6	2	5

Να υπολογίσετε:

- τη μέση τιμή
- την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

- A8.** Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x=1$.

Να βρείτε τα a , b και γ αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$ στο σημείο $A(0, -15)$ και τον άξονα $\chi'\chi$ στο σημείο $B(5, 0)$.

- A9.** Να διερευνήσετε και να λύσετε την εξίσωση $\lambda^2 x + 2\lambda = \lambda^2 + 9x - 3$, $\lambda \neq 0$

- A10.** Αν $5 < x < 9$ και $-6 < y < -2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται η τιμή κάθε μιας από τις παραστάσεις:

α) $2x + y$

β) $x - y$

γ) $\frac{x+1}{y}$

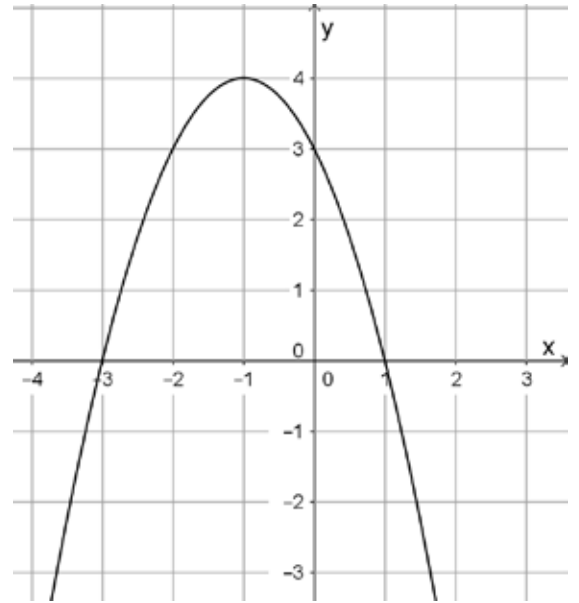
ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + \gamma, \quad a \neq 0. \text{ Να βρείτε:}$$

- α) το σύνολο τιμών της συνάρτησης
- β) τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της
- γ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) > 0$
- δ) το πρόσημο των τιμών $f(0)$, $f(-4)$ και $f(2017)$
- ε) τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$
- στ) την τιμή της παράστασης $-\frac{2b\gamma}{a^2}$.



B2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1, 1)$ και $\Gamma(-3, 3)$. Αν η διάμεσος AM έχει εξίσωση

$$2x + y - 3 = 0 \text{ και η πλευρά } B\Gamma \text{ έχει εξίσωση } 4x + 5y - 3 = 0, \text{ να βρείτε :}$$

- α) τις συντεταγμένες του σημείου M
- β) τις συντεταγμένες της κορυφής B
- γ) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
- δ) το μήκος του ύψους AD
- ε) την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{A}\hat{M}\hat{\Gamma}$

B3. Από σημείο A εκτός κύκλου (O, ρ) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα $AB, A\Gamma$ προς τον κύκλο και τέμνουσα ADE του κύκλου (D και E σημεία του κύκλου).

α) Να δείξετε ότι:

- i) τα τρίγωνα ABD και AEB είναι όμοια
- ii) τα τρίγωνα $A\Gamma D$ και $AE\Gamma$ είναι όμοια
- iii) ισχύει η ισότητα $\frac{BD}{BE} = \frac{\Gamma D}{\Gamma E}$

β) Αν $DE = \frac{3\rho}{2}$, $AD = 2\text{cm}$ και $AB = 4\text{cm}$ να υπολογίσετε το ρ

B4. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\sin(90^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(180^\circ - \theta) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu(360^\circ - \theta)}{\sigma\phi(180^\circ + \theta) \cdot \eta\mu(-\theta) \cdot \sigma\tau\epsilon\mu(360^\circ + \theta)}$ και

$$B = \tau\epsilon\mu\theta - \frac{1}{\sigma\phi\theta \cdot \sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

α) Να δείξετε ότι $A = \eta\mu\theta$ και $B = \sigma\upsilon\upsilon\theta$

β) Αν ισχύει $4A^2 + 8B^2 = 5$, να δείξετε ότι $\epsilon\phi^2\theta = 3$

B5. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - (\kappa + 1)x + \kappa = 0$ με λύσεις x_1, x_2 και $\kappa \in \mathbb{R}$.

α) Αν ισχύει η σχέση $x_1^2 + x_2^2 = 1$, να υπολογίσετε την τιμή του κ

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του κ ισχύει η ανίσωση $\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2^2 + x_1^2 \cdot x_2} \leq 0$

Ο Διευθυντής

Αλέξανδρος Δημητρίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ 2017

ΤΑΞΗ Α΄

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/05/2017

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

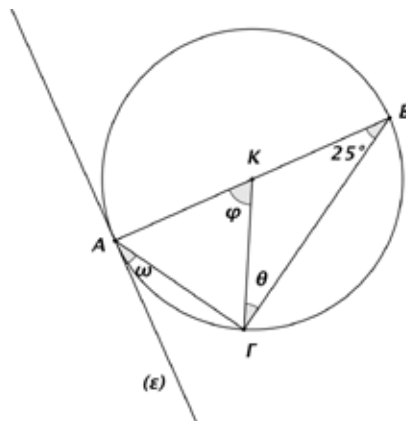
ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Να γράψετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

Μέρος Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- A1.** Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt[3]{3x-2} = 4, x \geq \frac{2}{3}$.
- A2.** Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:
- α) $A = \frac{1}{\sqrt{5}-2},$
- β) $B = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}, x > 0$
- A3.** Να βρείτε τη τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το πιο κάτω σύστημα να είναι συμβιβαστό:
- $$\begin{aligned} 2x + 3y &= 2 \\ x + 2y &= 3 \\ 3x + \lambda y &= 1 \end{aligned}$$
- A4.** Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, ρ) με διάμετρο AB και ευθεία (ε) εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A . Αν $\hat{AB\Gamma} = 25^\circ$, να υπολογίσετε, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας, τις γωνίες φ , ω και θ .

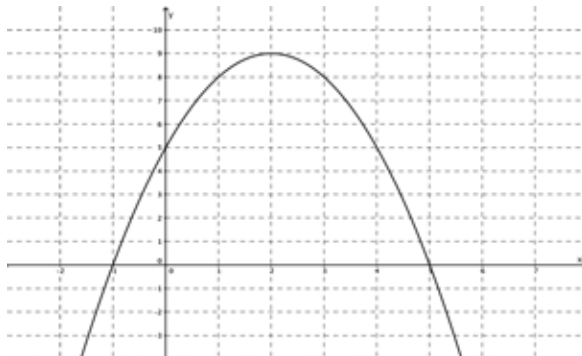


- A5.** Να διερευνήσετε και να λύσετε την εξίσωση $\lambda^2 x - 4\lambda x + 3 = \lambda - 3x$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.
- A6.** Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(3-x)(9-x^2)(x^2+3x+6)}{(x^2-8x+7)} \geq 0$.
- A7.** Η ελάχιστη θερμοκρασία, σε βαθμούς Κελσίου, στη Λεμεσό τις 10 πρώτες μέρες του Γενάρη ήταν 5, 7, 7, 6, 4, 4, 2, 5, 5, 5. Να υπολογίσετε:
- την τυπική απόκλιση,
 - το συντελεστή μεταβλητότητας.
- A8.** Να υπολογίσετε την τιμή του x για την οποία η παραβολή με τύπο $f(x) = \left| \frac{x}{5} - \frac{5}{x-4} \right|$ έχει ελάχιστη τιμή και να βρείτε την ελάχιστη τιμή της.
- A9.** Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + (3\mu - 2)x + 3\mu - 2 = 0$:
- έχει ρίζα τον αριθμό 4,
 - έχει άθροισμα ριζών ίσο με 5,
 - έχει ρίζες πραγματικές.
- A10.** Δίνεται η εξίσωση $\tan \theta \cdot x^2 + 2(1 + \varepsilon \varphi \theta) \cdot x + 2\eta \mu \theta + \tan \theta = 0$ με ρίζες x_1 και x_2 .
Να δείξετε ότι $(x_1)^2 + (x_2)^2 + 4x_1x_2 - 12\eta \mu \theta \cdot \sin \theta = 6$.

Μέρος Β: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- B1.** Δίνονται τα διανύσματα $\overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\overrightarrow{BG} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- Να βρείτε τις συντεταγμένες του $\overrightarrow{AB}$.
 - Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο του $\overrightarrow{AG}$.
 - Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{BG}$.
 - Να υπολογίσετε τη γωνία, σε μοίρες, μεταξύ των $\overrightarrow{AG}$ και $\overrightarrow{BG}$ με προσέγγιση δεκάτου.
- B2.** Δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$.



Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε:

- το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f ,
- τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής,
- την τιμή του $f(1)$ και το πρόσημο του $f(2017)$,
- το πρόσημο της διακρίνουσας της εξίσωσης $f(x) = 10$,
- τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma, a \neq 0$,
- τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$,
- τις λύσεις της εξίσωσης $[f(x)]^3 = 125$.

- B3.** Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση $3x - 2y - 12 = 0$ και η πλευρά ΑΔ έχει εξίσωση $x + 4y - 4 = 0$. Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $K(3,2)$.
- Να αποδείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(2,4)$.
 - Να βρείτε την απόσταση του σημείου Γ από την ευθεία ΑΒ.
 - Να βρείτε την εξίσωση της ΒΓ.
 - Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
- B4.** Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\eta\mu(180^\circ+\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(360^\circ-\theta)}{\sigma\varphi(180^\circ-\theta)} - \frac{\epsilon\varphi(270^\circ+\theta)\cdot\eta\mu(-\theta)}{\sigma\tau\epsilon\mu(270^\circ-\theta)}$ και $B = \epsilon\varphi\theta + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1+\eta\mu\theta}$ με $270^\circ < \theta < 360^\circ$.
- Να δείξετε ότι $A = 1$.
 - Να δείξετε ότι $B = \tau\epsilon\mu\theta$.
 - Να συγκρίνετε τα A και B αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.
 - Αν $B = 2$ να βρείτε την τιμή του θ .
- B5.** Από σημείο Α εκτός κύκλου φέρουμε δύο εφαπτόμενα τμήματα ΑΒ, ΑΓ και μια τέμνουσα που τέμνει το κύκλο στα σημεία Δ και Ε. Να δείξετε ότι:
- τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΕΒ είναι όμοια,
 - $(ΑΓ)^2 = (ΑΔ)(ΑΕ)$,
 - $(ΒΔ)(ΓΕ) = (ΒΕ)(ΓΔ)$.

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

.....
Γεωργούλα Φλουρή

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2016

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: $2\frac{1}{2}$ ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (5ωρο)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 01/06/2017

ΟΔΗΓΙΕΣ: Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού και διορθωτικής ταινίας.

Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρη πένα. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

Το γραπτό αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

- 1) Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες $x_1 = -4$ και $x_2 = 6$.
- 2) Να βρείτε το εμβαδόν τριγώνου ΑΒΓ με κορυφές Α(5,0), Β(6,6) και Γ(7,8).
- 3) Αν $\sin \theta = \frac{3}{5}$ και $0^\circ < \theta < 90^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \eta\mu(180^\circ - \theta) + \epsilon\phi(90^\circ + \theta).$$

- 4) Ο Γιώργος έγραψε σε διαγωνίσματα τους εξής βαθμούς : 9,10,12,12,12,11,14 και 16.

Να υπολογίσετε την τυπική απόκλιση σ.

- 5) Να λύσετε την εξίσωση : $5x^{\frac{3}{2}} - 4 = \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$.

- 6) Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (\lambda - 8)x - 6 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ, ώστε η εξίσωση να έχει:

α) μια ρίζα ίση με -2,

β) ρίζες αντίθετες,

γ) ρίζες αντίστροφες,

δ) ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

- 7) Να λύσετε την ανίσωση :

$$\frac{(x^2 - 5x - 6) \cdot (1 - x^2)}{(x^2 - 2x + 1)} \geq 0.$$

8) Στο διπλανό σχήμα

δίνεται κύκλος (K,R)

και (ε) εφραπτομένη του

κύκλου στο σημείο Γ.

Αν δίνεται ότι

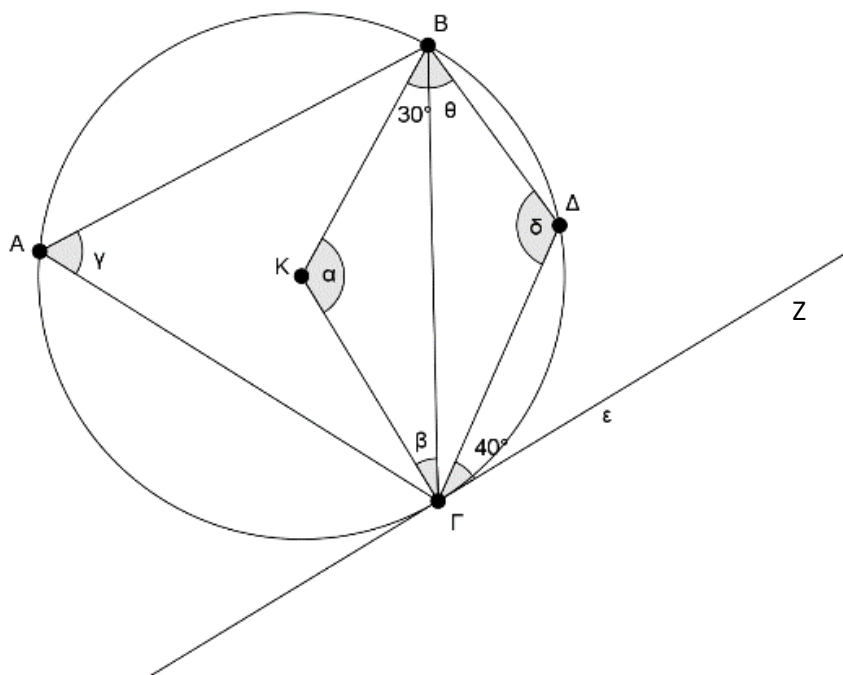
$$\widehat{\Gamma\mathbf{BK}} = 30^\circ \text{ κα1}$$
$$\widehat{\Delta\Gamma Z} = 40^\circ, v\alpha$$

υπολογίσετε τις γωνίες

 $\hat{\gamma}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\delta} \text{ και } \hat{\theta}. (\text{Na}$

δικαιολογήσετε πλήρως

τις απαντήσεις σας).



9) Να αποδείξετε ότι το πιο κάτω σύστημα δεν είναι συμβιβαστό για κάθε $\alpha \hat{=}$.

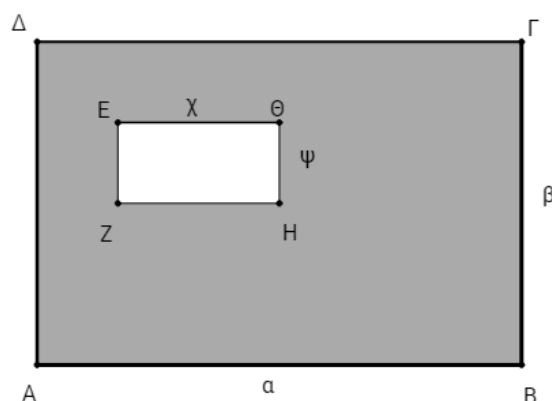
$$\begin{cases} 3x + 4\psi = 11 \\ 5x - 2\psi = 1 \\ \alpha^2 x + \alpha\psi + 2 = 0 \end{cases}$$

10) Στο διπλανό σχήμα δίνεται το ορθογώνιο

ΑΒΓΔ με διαστάσεις ΑΒ=α και ΒΓ=β, από

το οποίο έχουμε αφαιρέσει το ορθογώνιο

EZHΘ με διαστάσεις $EΘ = \chi$ και $ΘΗ = \psi$.



(α) Να υπολογίσετε την περίμετρο (Π) και το εμβαδόν (Ε) του σκιασμένου χωρίου.

(β) Αν ισχύει ότι $5 < \alpha < 7$, $3 < \beta < 4$, $2 < \chi < 3$ και $1 < \psi < 2$,

να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου Π και το εμβαδόν

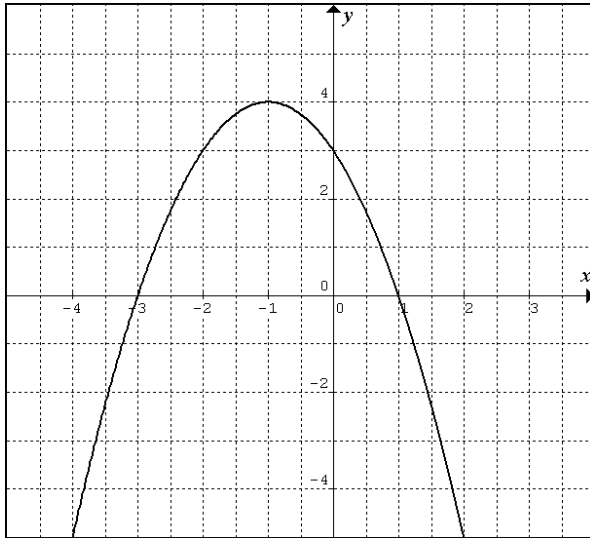
Ε του σκιασμένου χωρίου.

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$. Να βρείτε :



- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- β) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- γ) το πρόσημο των a και Δ .
- δ) τον άξονα συμμετρίας και την κορυφή της.
- ε) την εξίσωση της παραβολής.
- στ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) \geq 0$.

- 2) Δίνονται οι παραστάσεις :

$$A = \frac{\sin \theta}{1 + \eta \mu \theta} + \epsilon \phi \theta, \theta \neq \frac{3\pi}{2} \text{ και}$$

$$B = \frac{\epsilon \phi \left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \cdot \eta \mu (2\pi - \theta) \cdot \sigma \nu \left(\frac{3\pi}{2} - \theta\right)}{\eta \mu \left(\frac{3\pi}{2} + \theta\right) \cdot \sigma \phi \left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)}, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Να δείξετε ότι το γινόμενο $A \cdot B$ είναι σταθερό για κάθε $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

- 3) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ και τα σημεία A, B και Γ όπου

$B(-3, -1)$.

Αν $\vec{AG} = \vec{u} + \vec{v}$ και $\vec{BG} = 3\vec{u}$:

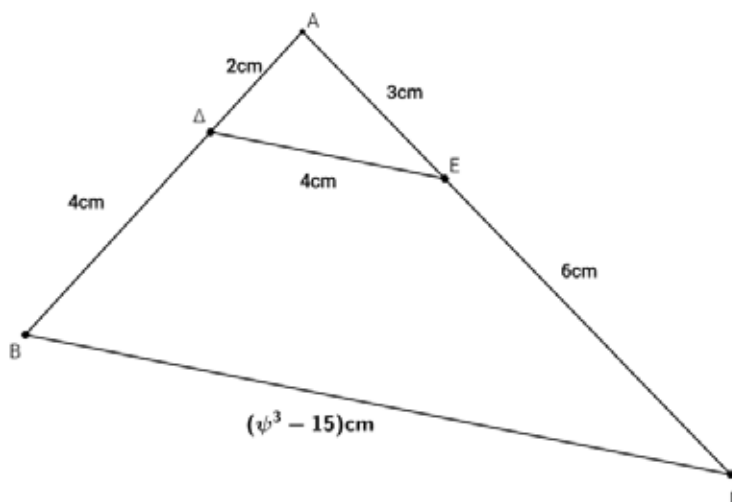
(α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του $\vec{AB}$.

(β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των σημείων A και Γ.

(γ) Να υπολογίσετε το $\vec{AB} \times \vec{AG}$. Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου ABΓ.

(δ) Αν M είναι το μέσο του AB και $\vec{w} = \vec{OM} - 3\vec{x}$ να υπολογίσετε την γωνιά μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{w}$ και $\vec{AG}$.

- 4) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ παίρνουμε σημεία



Δ και Ε αντίστοιχα έτσι

ώστε: $(AD)=2\text{cm}$,

$(BD)=4\text{cm}$, $(AE)=3\text{cm}$,

$(EG)=6\text{cm}$, $(DE)=4\text{cm}$ και

$(BG)=(\psi^3-15)\text{cm}$.

α) Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη με την ΒΓ.

β) Να υπολογίσετε την τιμή του ψ .

γ) Αν το εμβαδόν του $\triangle BGE$ είναι 24cm^2 να βρείτε τα εμβαδά των τριγώνων ΑΒΓ και ΑΔΕ.

- 5) Δίνεται η παραβολή $\psi = x^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$ και η ευθεία $\varepsilon_1: \psi = 7x - \eta\mu\theta$, $\theta \in [0^\circ, 360^\circ)$.

α) Να αποδείξετε ότι η παραβολή και η ευθεία έχουν δύο σημεία τομής για όλες τις τιμές του $\theta \in [0^\circ, 360^\circ)$.

β) Αν $\hat{\theta} = 90^\circ$, να αποδείξετε ότι το σημείο τομής της παραβολής και της ευθείας ε_1 ($x < 2$), είναι το Α(1,6).

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_2 η οποία περνά από το σημείο Α και είναι κάθετη στην ε_1 .

δ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_3 που περνά από το σημείο Α και σχηματίζει γωνία 45° με την ευθεία ε_2 , έχοντας θετική κλίση.

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Νίκος Νικολάου (Σ.Β.Δ)

Μαρία Χριστοπούλου

Μάριος Αλεξάνδρου

Μαρία Ηλιάδου

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Κυριακή Θεοδώρου

.....

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30 / 05 / 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ½ ώρες

ΑΡ. ΣΕΛΙΔΩΝ: 5

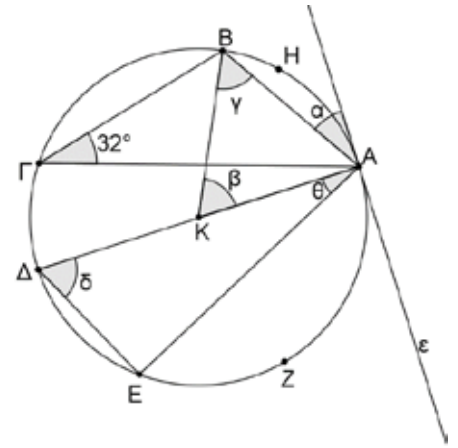
-
- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Όλες οι ασκήσεις να λυθούν στο τετράδιο απαντήσεων.
 2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 3. Να γράφετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
 4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 5. Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνονται καθαρά τα βήματα επίλυσης των ασκήσεων.
 6. Σύνολο μονάδων δοκιμίου: 100
-

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Αν $2 < x < 9$ και $3 < \psi < 8$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις:
α) $4x + 5\psi$
β) $\frac{x}{\psi}$
2. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $(\lambda^2 - 2\lambda - 15)x = \lambda + 3$, για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$.
α) Να βρείτε μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$
β) Να υπολογίσετε την τιμή του κ, έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{\delta} = -3\vec{\alpha} + \kappa\vec{\beta}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{\gamma}$.

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και διάμετρο ΑΔ. Η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α, το τόξο ΑΖΕ είναι διπλάσιο του τόξου ΒΗΑ και $\widehat{A\Gamma B} = 32^\circ$.



Να υπολογίσετε τις γωνίες $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta$.

5. Αν $\text{syn}\theta = \frac{5}{13}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$ να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{26\eta\mu\theta - 48\sigma\tau\epsilon\mu\theta}{13\text{syn}\theta + 5\epsilon\varphi\theta}, \text{ χρησιμοποιώντας τριγωνομετρικές ταυτότητες.}$$

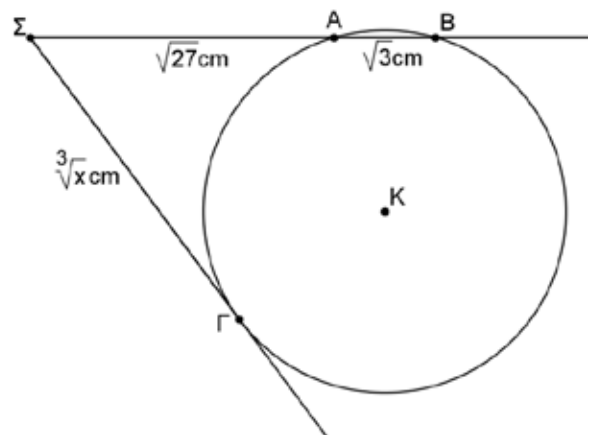
6. Στο διπλανό σχήμα η ΣΑΒ είναι τέμνουσα του κύκλου (Κ, ρ) και η ΣΓ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ.

$$\text{Δίνονται: } \Sigma A = \sqrt{27}\text{cm},$$

$$AB = \sqrt{3}\text{cm},$$

$$\Sigma\Gamma = \sqrt[3]{x}\text{cm}, x > 0$$

Να υπολογίσετε την τιμή του x.



7. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τις ηλικίες 30 υπαλλήλων μιας εταιρείας.

Ηλικία	20	22	26	30	32	38	40
Αριθμός υπαλλήλων	5	7	3	7	2	3	3

Να υπολογίσετε (κατά προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων):

α) τη μέση τιμή των ηλικιών των υπαλλήλων (2μ.)

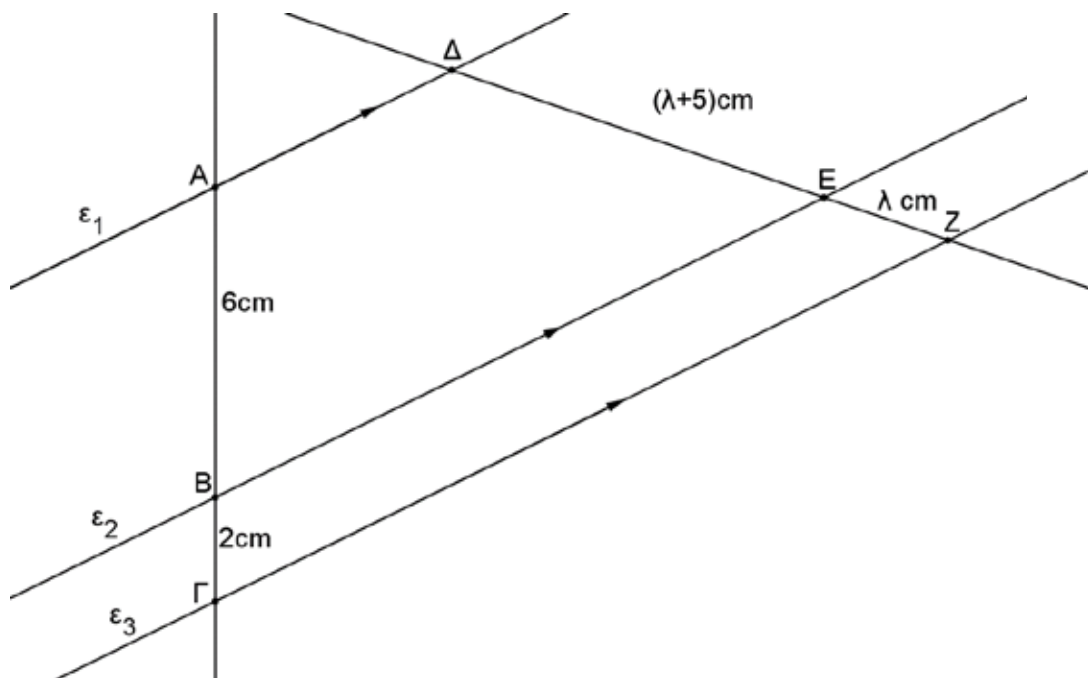
β) την τυπική απόκλιση (2μ.)

γ) τον συντελεστή μεταβλητότητας. (1μ.)

8. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2-16)(x^2-7x+10)}{12x-3x^2} \geq 0$

9. Στο πιο κάτω σχήμα δίνονται:

$\varepsilon_1 // \varepsilon_2 // \varepsilon_3$ και $AB = 6\text{cm}$, $B\Gamma = 2\text{cm}$, $\Delta E = (\lambda + 5)\text{cm}$, $EZ = \lambda \text{ cm}$.



α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ

β) Αν οι εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ είναι:

$(\varepsilon_1): (\kappa - 2)x - \kappa y = -8$, $(\varepsilon_2): x - 2y = 8$ και $(\varepsilon_3): 2x - (\sqrt{\mu - 3})y = 24$, $\mu \geq 3$, να υπολογίσετε τις πραγματικές τιμές του κ και του μ .

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - (\mu + 2)x + 1 + 2\mu$.

Να υπολογίσετε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες:

α) Η συνάρτηση f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 4$ (1μ.)

β) Η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες πραγματικές (2μ.)

γ) Ισχύει η σχέση $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = 1$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. (2μ.)

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$.

α) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε:

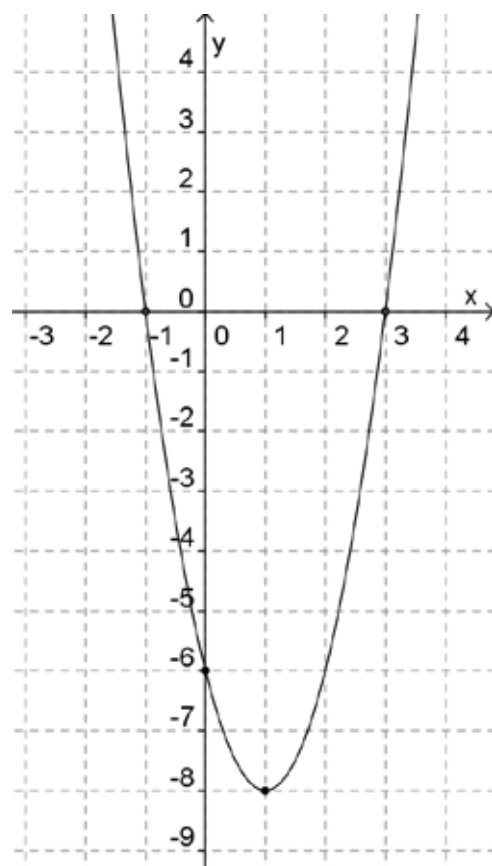
i) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x)$ (1μ.)

ii) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της (1μ.)

iii) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$ (1μ.)

iv) τις τιμές των συντελεστών α, β, γ και να γράψετε τον τύπο της f (2μ.)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 3x - 2$. (5μ.)



2. Δίνονται τα σημεία $A(8,2)$, $B(3,5)$ και $\Gamma(-1,4)$.

α) i) Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B, Γ δεν είναι συνευθειακά

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$

β) Να υπολογίσετε την γωνία $\widehat{B}$, ($\widehat{B} > 90^\circ$) του τριγώνου $AB\Gamma$

γ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του σημείου Δ έτσι ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο

δ) Αν M είναι το σημείο τομής των διαγωνίων του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ και E σημείο

της $\Gamma\Delta$ τέτοιο ώστε $ME \perp \Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι το μήκος του $ME = \frac{\sqrt{34}}{4}$ μον.

3. α) Τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και Δ είναι το μέσο του τόξου BΓ.

Η ΑΔ τέμνει τη ΒΓ στο Ε. Να δείξετε ότι $(AB)(AΓ) = (AΔ)(AΕ)$.

β) Να λύσετε το σύστημα εξισώσεων:

$$x + 3y + \omega = -2$$

$$3x + y + \omega = 4$$

$$2x - y - \omega = 1$$

4. α) Το σημείο P βρίσκεται εντός του ευθύγραμμου τμήματος AB έτσι ώστε $\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \lambda$, $\lambda > 0$.

Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{r}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων A, B και P αντίστοιχα, ως προς

το σημείο O, να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $\vec{r} = \frac{\vec{\alpha} + \lambda \vec{\beta}}{1 + \lambda}$.

β) Αν A(5, -9) και B(0, -4), να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P, το οποίο

βρίσκεται εντός του ευθύγραμμου τμήματος AB έτσι ώστε $AP = \frac{1}{5} AB$.

5. α) Να υπολογίσετε τη γωνία θ , αν $\theta \in (90^\circ, 180^\circ)$ και

$$\frac{\sigma\varphi(90^\circ + \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) \cdot \eta\mu(720^\circ - \theta) + \varepsilon\varphi(-\theta) \cdot \varepsilon\varphi(270^\circ + \theta)}{\sigma\upsilon\nu(-\theta) \cdot \varepsilon\varphi(270^\circ - \theta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

β) i) Να δείξετε ότι: $\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x = 1 - 3\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x$

ii) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω σχέση (ή με άλλο τρόπο), να αποδείξετε ότι η

παράσταση: $f(x) = \eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x - 2\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x + \eta\mu^2 x$, είναι ανεξάρτητη του x.

Ο Διευθυντής

.....

Δημήτρης Παπαμιλιτιάδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30 / 5 / 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
3. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
4. Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνονται καθαρά τα βήματα επίλυσης τους.
5. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 5x + 2 = 0$ με λύσεις x_1, x_2 . Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων χωρίς να λύσετε την εξίσωση:

α) $x_1 + x_2$

β) $x_1 x_2$

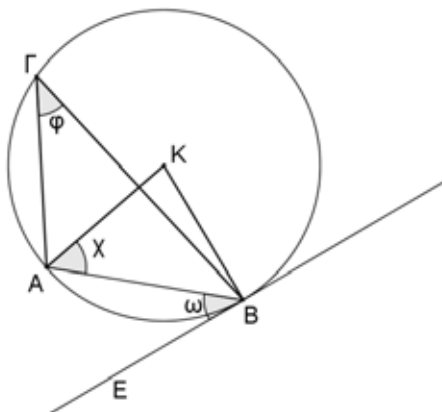
γ) $4x_1 - 2x_1 x_2 + 4x_2$

2. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

α) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

β) $\frac{3}{1-\sqrt{2}}$

3. Το βάρος έξι μαθητών μιας ομάδας πετόσφαιρας είναι 62, 74, 65, 73, 60 και 68 κιλά .
- α. Να βρείτε τον μέσο όρο του βάρους των έξι μαθητών.
 - β. Να υπολογίσετε τη διάμεσο του βάρους τους.
 - γ. Στην πιο πάνω ομάδα μαθητών, αν προστεθεί και έβδομος, τότε το μέσο βάρος των επτά μαθητών θα γίνει συνολικά 69 κιλά. Να βρείτε το βάρος του έβδομου μαθητή που προστέθηκε στην ομάδα.
4. Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και ακτίνα ΚΒ. Το τόξο $\widehat{AB} = 80^\circ$ και η ΒΕ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β. Να υπολογίσετε τις γωνίες φ , χ και ω , αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας .



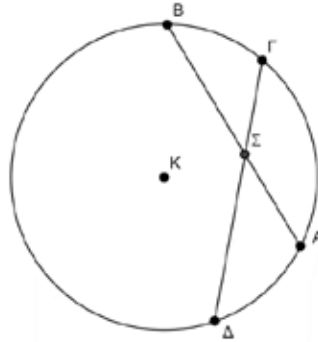
5. Δίνονται τα σημεία $A(7,5)$, $B(4,-2)$ και $\Gamma(9,0)$.

α) Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{u} = 3\vec{AB} - 2\vec{A\Gamma}$

β) Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{A\Gamma}$, $\vec{B\Gamma}$ είναι κάθετα μεταξύ τους ($\vec{A\Gamma} \perp \vec{B\Gamma}$).

6. Να βρείτε την εξίσωση της μεσοκάθετης του ευθύγραμμου τμήματος AB , όπου $A(3,6)$ και $B(-7,4)$.

7. Δίνεται κύκλος (K,R) και οι τέμνουσες $A\Sigma B$ και $\Gamma\Sigma\Delta$.



α) Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση: $(\Sigma A)(\Sigma B) = (\Sigma \Gamma)(\Sigma \Delta)$

β) Αν $(AS) = x \text{ cm}$, $(SB) = 2x \text{ cm}$, $(\Gamma S) = 3 \text{ cm}$ και $(S\Delta) = 9 \text{ cm}$, να βρείτε την τιμή του x .

8. α) Αν ισχύει ότι $7\eta\mu\theta + 7 = 2\eta\mu\theta + 10$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{12\varepsilon\phi\theta + 20\sigma\upsilon\nu\theta}{3\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{sunc}{1 - \epsilon f c} + \frac{hnc}{1 - s f c} = hnc + sunc$$

9. α) Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας $A = \begin{vmatrix} \chi & 0 \\ 1 & \chi \end{vmatrix}$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{A}{\chi+2} \leq 1$

10. Να λυθεί και να διερευνηθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} \ell c + (\ell + 6)y = 6 \\ c + \ell y = -2 \end{cases} \quad \ell \neq -6$$

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ Α' ΜΕΡΟΥΣ

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ Β' ΜΕΡΟΣ

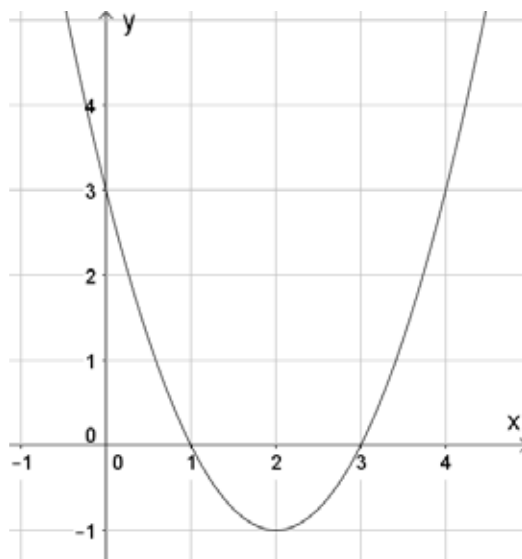
ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0. \text{ Να βρείτε :}$$

- α) το Π.Ο και το Π.Τ της f .
- β) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.
- δ) το είδος των ριζών και το πρόσημο της διακρίνουσας.
- ε) την ελάχιστη ή την μέγιστη τιμή της παραβολής.
- στ) την εξίσωση της παραβολής.
- ζ) τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) > 0$.



2) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Οι εξισώσεις των πλευρών του είναι:

$$AB: 3x + 2y = 6, \quad AG: 2y - x = -2 \quad \text{και} \quad BG: 2y - 9x = 6.$$

Να βρείτε :

- α) την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ,
- β) την εξίσωση του ύψους ΒΔ,
- γ) την τιμή της εφΒ,
- δ) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

3) Αν $\sin\theta + \sin\varphi = \alpha$ και $\tan\theta + \tan\varphi = \beta$ με $\theta, \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$.

- α) Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες τα $\sin\theta$ και $\sin\varphi$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και ίσες, αν $\alpha\beta = 4$.

4) Δίνονται τα σημεία $A(x_1, 1)$ και $B(x_2, 5)$ με $x_1 < x_2$ όπου x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης:

$$x^2 - (\lambda^2 + 3\lambda + 4)x - 8 = 0.$$

Αν το σημείο $M(1,3)$ είναι το μέσο του AB να υπολογίσετε :

α) Τις τιμές του λ , $\lambda \in R$.

β) Τις συντεταγμένες των σημείων A και B .

γ) Τις συντεταγμένες σημείου Γ του άξονα xx' , το οποίο ισαπέχει από τα σημεία A και B .

5) Από την κορυφή A ενός παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ φέρουμε ευθεία που τέμνει την διαγώνιο $B\Delta$ στο K , την $\Gamma\Delta$ στο Λ και την προέκταση της $B\Gamma$ στο M .

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα $\Lambda\Delta K$ και BKM είναι όμοια.

β) Να δειχθεί ότι: $\frac{K\Lambda}{KA} = \frac{\Delta K}{KB}$

γ) Να δειχθεί ότι: $(KA)^2 = (K\Lambda) \cdot (KM)$.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Οι Εισηγητές

.....

Ο Συντονιστής Β.Δ.

.....

Ο Διευθυντής

.....

Χαράλαμπος Καττιμέρης

Αλέξανδρος Μπάρος

Αλέκος Θεμιστοκλέους

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18/05/2017

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
 (β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
 (γ) Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
 (δ) Όλες οι απαντήσεις, να μεταφέρονται στις δοθείσες σφραγισμένες κόλλες.
 (ε) Το γραπτό αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α' : (Μονάδες 50/100)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

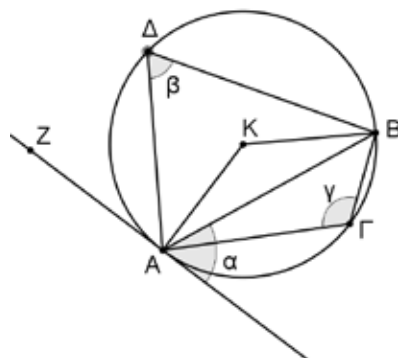
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100 μονάδες.

- A1.** Αν το σύστημα
$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ 2x - 2y = -4 \end{cases}$$
 είναι συμβιβαστό να υπολογίσετε τις τιμές του I , I^2 και R .

$$(I + 3)x + I^2y = I$$

- A2.** Σε κύκλο (K, R) φέρουμε ZA εφαπτομένη στο σημείο A .

Αν το τόξο $AGB = 140^\circ$ και η γωνία $\angle ZAD = 50^\circ$,
 να υπολογίσετε τις γωνίες: $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{g}$ και $\angle KBD$.
 (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

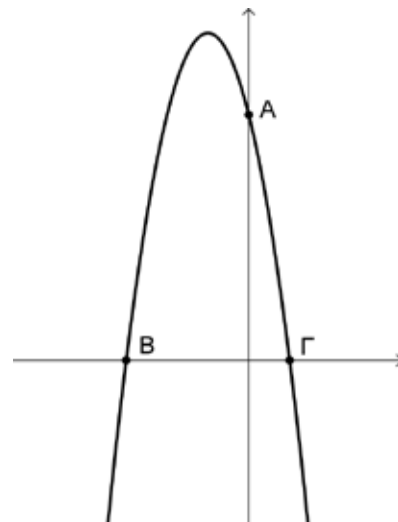


- A3.** Στο σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής

$f(x) = ax^2 + bx + g$, $a \neq 0$ η οποία διέρχεται από τα σημεία $A(0,6)$, $B(-3,0)$ και $G(1,0)$.

Να βρείτε:

- (α) Το πρόσημο του a και της διακρίνουσας D
 (β) Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$, $a \neq 0$
 (γ) Τις τιμές των παραμέτρων a , b και g .
 (δ) Τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής.
 (ε) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .



- A4.** Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τα αποτελέσματα που είχαν οι μαθητές ενός τμήματος σε ένα διαγώνισμα των Μαθηματικών.

Βαθμός	8	10	12	13	15	18	19	20
Αριθμός μαθητών	1	2	3	2	3	2	1	1

Να υπολογίσετε:

(α) Τη μέση τιμή των πιο πάνω παρατηρήσεων.

(μον. 2)

(β) Την τυπική απόκλιση των πιο πάνω παρατηρήσεων.

(μον. 3)

A5. Αν
$$\frac{\sin(180^\circ + w) \times \sin(270^\circ - w)}{\sin(-90^\circ - w) \times \sin(630^\circ + w) - \sin(-w) \times \sin(-270^\circ - w)} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{και} \quad 0^\circ < w < 90^\circ,$$

να βρείτε τη γωνία w .

A6. Να λύσετε την εξίσωση
$$\begin{vmatrix} x & k & 4 \\ 1 & k & 1 \\ -2 & 1 & 4k \end{vmatrix} = 0 \quad \text{για όλες τις τιμές του } k, k \in \mathbb{R}.$$

- A7.** Αν $3 < x < 5$ και $-4 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις :

(α) $x + y$ (μον.1,5)

(β) xy^2 (μον.1,5)

(γ) $-\frac{x}{y-1}$ (μον.2)

A8. Δίνονται οι αριθμοί $x = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$ και $y = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$.

Να δείξετε τα πιο κάτω:

(α) $x = 2 - \sqrt{3}$ και $y = 2 + \sqrt{3}$ (μον. 3)

(β) $\sqrt[5]{y^3} \times \sqrt[7]{x^5} \times \sqrt[5]{7+4\sqrt{3}} \times \sqrt[7]{7-4\sqrt{3}} = 1$ (μον. 2)

- A9.** Σε τρίγωνο ABG είναι $\hat{B} = 2\hat{G}$. Προεκτείνουμε την AB κατά τμήμα $BD = BG$.

Να δείξετε ότι:

(α) Τα τρίγωνα ABG και AGD είναι όμοια. (μον. 3)

(β) $b^2 - g^2 = ag$ (μον. 2)

- A10.** Δίνονται τα σημεία $A(8, 0)$ και $B(0, 4)$, και D το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AB .
- (α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ_1) που διέρχεται από το σημείο D και είναι κάθετη στην ευθεία OD , όπου O η αρχή των αξόνων. (μον. 3)
- (β) Αν $(\epsilon_1): y = -2x + 10$ και M τυχαίο σημείο της, να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $(\overrightarrow{MA})^2 + (\overrightarrow{MB})^2 = 2(\overrightarrow{OM})^2$ (μον. 2)

ΜΕΡΟΣ Β' : (Μονάδες 50/100)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100 μονάδες.

- B1.** Δίνεται η εξίσωση $(I + 1)x^2 - 2(I - 1)x - 1 = 0$, $I \neq -1$ με ρίζες x_1, x_2 .
- I. Να βρείτε για ποιες τιμές του I :
- (α) Η εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες. (μον. 1)
- (β) Η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες. (μον. 1)
- (γ) Το άθροισμα των ριζών είναι ίσο με το γινόμενο τους. (μον. 2)
- (δ) Ισχύει η σχέση: $(x_1 - x_2)^2 \geq (4\sqrt{2} \cdot x_1 \cdot x_2)^2$. (μον. 3)
- II. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $I \neq -1$. (μον. 3)
- B2.** Δίνεται κύκλος (K, R) . Από σημείο A εκτός του κύκλου φέρουμε, AB εφαπτομένη και AGD τέμνουσα του κύκλου.
- (α) Να δείξετε ότι $(AB)^2 = (AG) \cdot (AD)$.
- (β) Αν $AB = (x + 2)^{\frac{1}{3}} \text{ cm}$, $AG = 1 \text{ cm}$ και $GD = 3 \text{ cm}$, να βρείτε την τιμή του x , $x > -2$.
- B3.** Έστω (ϵ_1) η ευθεία που διέρχεται από το σημείο $M(-1, 3)$ και τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα, ώστε το M να είναι το μέσο του AB .
- (α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της ευθείας (ϵ_1) είναι $(\epsilon_1): y = 3x + 6$. (μον. 2)
- (β) Τρίγωνο ABG ορίζεται από τα σημεία A , B και G με $G(2, -8)$.
- Να βρείτε:
- i. Το μήκος του ύψους GD του τριγώνου ABG . (μον. 2)
- ii. Το εμβαδόν του τριγώνου ABG . (μον. 2)
- iii. Το μέτρο της γωνίας A του τριγώνου ABG . (μον. 2)
- iv. Τις συντεταγμένες του σημείου E , έτσι ώστε το τετράπλευρο $AGBE$ να είναι παραλληλόγραμμο. (μον. 2)

B4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

I. Να βρείτε τις τιμές του λ , έτσι ώστε:

(α) Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{g}$ να είναι παράλληλα. (μον. 2)

(β) Τα διανύσματα $\vec{b}$ και $\vec{g}$ να είναι κάθετα. (μον. 2)

(γ) Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{g}$ σχηματίζουν γωνία 45° . (μον. 4)

II. Να βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u}$ που να είναι αντίρροπο με το διάνυσμα

$$\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} \quad (\text{μον. 2})$$

B5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sin x}{1 + e^x} - \frac{\ln x}{1 + \sin x}$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \rho\right)$,

(α) Να δείξετε ότι: $f(x) = \sin x - \ln x$ (μον. 2)

(β) Αν $f(x) + \ln x = -\frac{4}{5}$ να βρείτε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας x . (μον. 3)

(γ) Να δείξετε ότι η παράσταση $A = f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{x}{2} - f\left(\frac{\pi}{2}\right) - \rho$ είναι ανεξάρτητη της γωνίας x ,

για κάθε $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \rho\right)$. (μον. 3)

-ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ-

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Παναγιώτης Λαμπίσης

ΛΥΚΕΙΟ ΑΚΡΟΠΟΛΕΩΣ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ: 2016 – 2017

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ – ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18/05/2017

ΒΑΘΜΟΣ:

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 07:45 π.μ.

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ: ΤΜΗΜΑ:

- **ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΝΙΑ (9) ΣΕΛΙΔΕΣ.**
- **Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.**
- **Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν και με μολύβι.)**
- **Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το Σχολείο.**

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή (χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής) :

(α) $\frac{9}{\sqrt{3}}$

(β) $\frac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}}$

2. Ο βαθμός τετραμήνου στο μάθημα των Θρησκευτικών για κάθε μαθητή συνυπολογίζεται από τους βαθμούς του προειδοποιημένου διαγωνίσματος με βαρύτητα 70%, του απροειδοποίητου διαγωνίσματος με βαρύτητα 20% και της κατ' οίκον εργασίας με βαρύτητα 10%. Να υπολογίσετε τον βαθμό τετραμήνου που θα έχει στο δελτίο επίδοσης, στο μάθημα των Θρησκευτικών, ένας μαθητής που βαθμολογήθηκε με 17 στο προειδοποιημένο διαγώνισμα, 19 στο απροειδοποίητο και 20 στην κατ' οίκον εργασία.

3. Να λύσετε την ανίσωση $(2x - 6) \cdot (x^2 + 4) \cdot (1 - x) \geq 0$.
4. Να λύσετε την εξίσωση $\lambda^2(x - 1) - 4x = 8 - 6\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

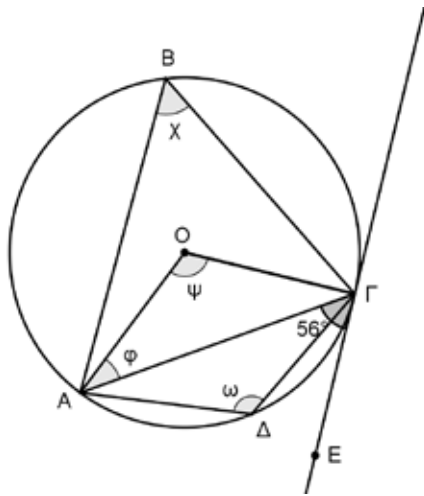
5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{\alpha} - \vec{\beta}$

β) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

γ) την προβολή του διανύσματος $\vec{\alpha}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$

6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) , ΓΕ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του Γ και $\angle A\hat{\Gamma}E = 56^\circ$ (Α, Β, Δ σημεία του κύκλου). Να υπολογίσετε, τις γωνίες χ , ψ , ϕ , ω που είναι σημειωμένες στο σχήμα, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



7. Να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \varepsilon\varphi(2\pi + x)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\eta\mu(2\pi + x)\sigma\tau\epsilon\mu(\pi - x)}{\eta\mu(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sigma\upsilon\nu(\pi - x)} = \frac{1 + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$$

8. Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας $2x - y - 7 = 0$ με την παραβολή $y = x^2 - 3x - 7$.

9. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 2)x + \lambda = 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο λύσεις πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(β) Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} \leq 2$.

10. Αν $\alpha = \sqrt{5 \cdot \sqrt{19 - \sqrt[3]{27}}}$, $\beta = \sqrt{8 \cdot \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{16}}}$ και

$$\gamma = \sqrt{5\sqrt{4} + \sqrt{20} \cdot \sqrt{5} + (\sqrt{20})^2 - \sqrt[3]{640} \div \sqrt[3]{10}},$$

να αποδείξετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής, ότι:

(α) $\alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2$

(β) $\frac{\alpha}{\gamma - \beta} < \sqrt{2} + 1$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

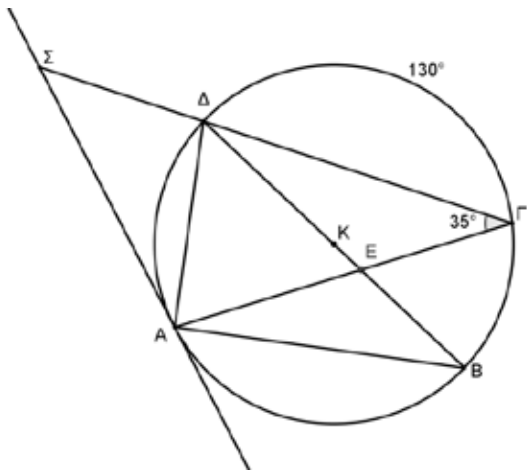
1. Δίνεται κύκλος με κέντρο Κ και διάμετρο ΒΔ όπου Α και Γ σημεία του κύκλου, Ε το σημείο τομής των ΑΓ και ΒΔ. ΑΣ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο του Α. Αν η γωνία $\widehat{A\Gamma\Delta} = 35^\circ$ και το τόξο $\Delta\Gamma = 130^\circ$:

α) να υπολογίσετε τις γωνίες $\widehat{EAB}$, $\widehat{B\Delta\Gamma}$, $\widehat{\Sigma\Delta\Delta}$

β) να αποδείξετε ότι: $(AB) \cdot (\Delta E) = (\Gamma\Delta) \cdot (AE)$

γ) αν $\Sigma A = 8 \text{ cm}$ και $\Delta\Gamma = 12 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος του $\Sigma\Delta$

(Να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας)



2. α) Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση:

$$(\sigma\phi\theta + \sigma\tau\epsilon\mu\theta)^2 = \frac{1+\sigma\upsilon\upsilon\theta}{1-\sigma\upsilon\upsilon\theta}, \quad \sigma\upsilon\upsilon\theta \neq 1$$

β) Δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού $(2\tau\epsilon\mu\omega)x^2 - 5x + \epsilon\phi\omega + \sigma\phi\omega = 0$. Αν η

εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες, να υπολογίσετε την γωνία ω , όπου $0^\circ < \omega < 180^\circ$.

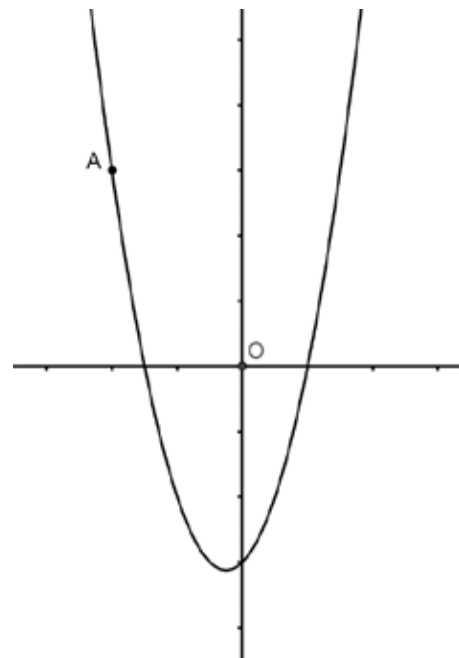
3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με τύπο

$$f(x) = x^2 + (a + \beta)x + \beta + 2a - 4.$$

Αν η f έχει μια ρίζα το $x_1 = 2$, και διέρχεται από το σημείο $A(-4, 6)$, να βρείτε:

- (α) τις τιμές των a και β
- (β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής της
- (γ) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x)$
- (δ) Αν x_2 είναι η δεύτερη ρίζα της f , χωρίς να λύσετε την εξίσωση, να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει ρίζες του αριθμούς $\rho_1 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 7}$ και

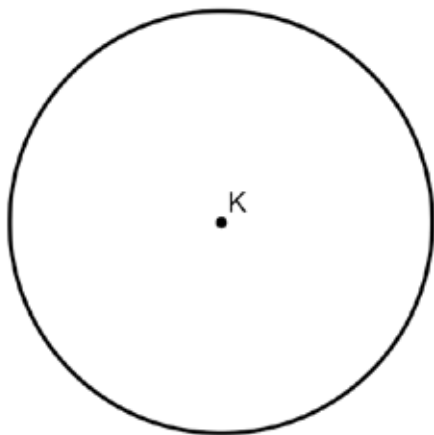
$$\rho_2 = \sqrt{x_2^2 x_1 + x_1^2 x_2}$$



4. Δίνεται κύκλος (K, R) . Από σημείο Γ που βρίσκεται στην προέκταση της διαμέτρου AB φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα $\Gamma\Delta$, όπου Δ το σημείο επαφής με τον κύκλο. Στη συνέχεια φέρουμε ευθεία κάθετη στην $A\Gamma$ στο σημείο Γ η οποία τέμνει την προέκταση της $A\Delta$ στο σημείο E . Να αποδείξετε ότι:

(α) $(A\Delta) \cdot (AE) = (AB) \cdot (A\Gamma)$

(β) $(\Gamma\Delta)^2 = (\Gamma B) \cdot (\Gamma A)$



5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και κορυφές $A(2, 3)$, $B(2, -2)$. Αν $M(4, \alpha)$, όπου $\alpha < 0$, είναι το μέσο της $B\Gamma$
- (α) να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$
 - (β) να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$
 - (γ) να βρείτε την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$
- (Μον.: 4-3-3)**

Ο Διευθυντής

Λοΐζος Σέπος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ**Μάθημα:** Μαθηματικά προσανατολισμού**Τάξη:** Α' Λυκείου**Διάρκεια εξέτασης:** 2 ώρες και 30 λεπτά**Ημερομηνία:** 23/5/2017**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.
- Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στα φύλλα εξέτασης σας (όπου είναι αναγκαίο).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού (υγρού ή ταινίας).

ΜΕΡΟΣ Α':

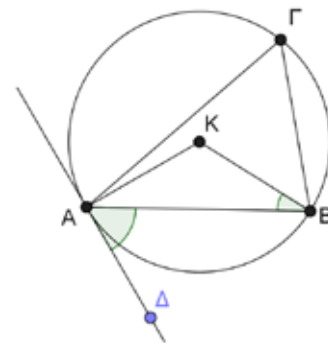
- Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να βρείτε την τιμή του m $m \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $(m+2)c - 5 = 3(c-2)$ να είναι αδύνατη.

2. Η βαθμολογία 12 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν:
11, 15, 20, 13, 17, 16, 13, 13, 15, 13, 16, 18. Να υπολογίσετε:

- α) τα τρία βασικά μέτρα θέσης (μέση τιμή, διάμεσο, επικρατούσα τιμή).
β) την τυπική απόκλιση (με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων).

3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Κ,Ρ) και ΑΔ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Αν $\angle A\Gamma B = 60^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $\angle B A D$ και $\angle K B A$.



4.α) Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{5}{\sqrt{7} - \sqrt{2}}$ σε άλλο ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 2 \times \sqrt{3} \times \sqrt{27} - \frac{27}{8} \cdot \frac{2}{3} + 2 \times 27^{\frac{1}{3}}$, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.

5. Αν $\sin \eta = -\frac{12}{13}$ και $270^\circ < \eta < 360^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 13 \sin(180^\circ + \eta) - 12 \cos(270^\circ - \eta).$$

6. Αν $3 < c < 4$ και $-2 < \gamma < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $c - \gamma$

β) $c \gamma$

γ) $\frac{c^2}{c - \gamma}$

7. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου λ , $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα :

$$\begin{cases} -2c + 3\gamma = 9 \\ c + \gamma = -2 \\ (2\lambda + 1)c - 2\lambda^2\gamma = 1 \end{cases} \text{ να είναι συμβιβαστό.}$$

8. Να λύσετε την ανίσωση : $(-c^2 - 4)(2c^2 - c - 15)(c^2 - 9) \geq 0$.

9. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

β) Να βρείτε τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$.

γ) Να βρείτε ένα μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο να είναι παράλληλο προς το $\vec{u} = 3\vec{a} - \vec{b}$.

10. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda^2 - 2(\lambda - 4)\lambda + 2\lambda - 3 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε την τιμή του λ , ώστε η εξίσωση να έχει:

α) ρίζες αντίθετες.

β) ρίζες αντίστροφες.

γ) το γινόμενο των ριζών της να είναι μεγαλύτερο του τέσσερα.

ΜΕΡΟΣ Β΄:

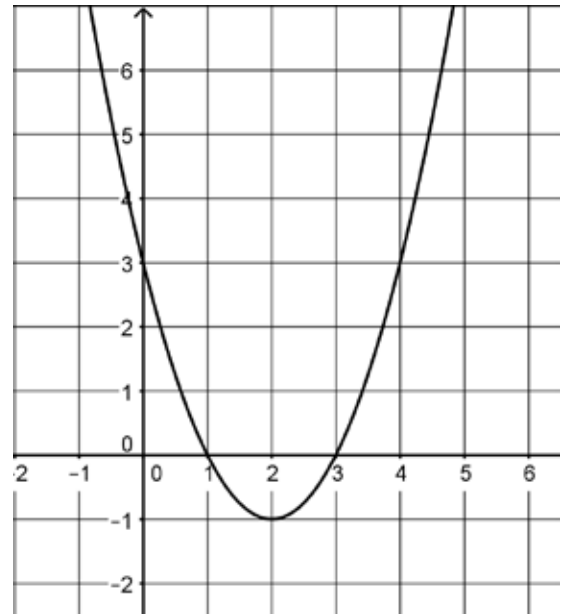
- Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(c) = ac^2 + bc + g$, $a \neq 0$.

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

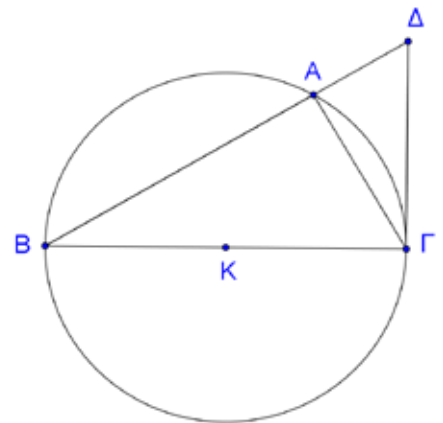
- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών.
- β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και το πρόσημο του Δ .
- γ) τις λύσεις της εξίσωσης $f(c) = 0$.
- δ) τις τιμές των a , b και g .
- ε) τις τιμές του c για τις οποίες ισχύει $f(c) \leq 0$.
- στ) την τιμή του $f(4)$ και το πρόσημο του $f(-3)$.
- ζ) Να μετασχηματίσετε τη συνάρτηση

$f(c) = c^2 - 4c + 3$ στη μορφή $f(c) = a(c+k)^2 + d$. Να περιγράψετε πώς η γραφική παράσταση $g(c) = c^2$ θα συμπίσει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



2. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με (K, R) . Αν η $B\Gamma$ είναι διάμετρος του κύκλου και $\Delta\Gamma$ εφαπτομένη του κύκλου στο Γ , που τέμνει την προέκταση της BA στο Δ , να δείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta A\Gamma$ είναι όμοια.
- β) $(AB) \times (AD) = (AG)^2$.
- γ) $(AB) \times (BD) = 4R^2$.



3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-2, 5)$, $B(2, 1)$ και $\Gamma(6, 3)$. Να βρείτε:

- α) την εξίσωση της πλευράς AB .
- β) την απόσταση της κορυφής Γ από την AB .
- γ) την γωνία B του τριγώνου $AB\Gamma$ (κατά προσέγγιση ακεραίου).
- δ) το συμμετρικό σημείο της κορυφής Γ ως προς την πλευρά AB .

4. α) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $c_1 = \frac{1 - \sin \eta}{\sin \eta}$ και $c_2 = \frac{1 + \sin \eta}{\sin \eta}$,

$$h\pi q^1 \neq 0.$$

β) Αν η εξίσωση $h\pi q \times c^2 - 2c + h\pi q = 0$ έχει δύο λύσεις πραγματικές και ίσες, να υπολογίσετε τη γωνία q , $0^\circ < q \leq 90^\circ$.

γ) Να δείξετε ότι $c_1^2 + c_2^2 = 2(1 + 2\sin^2 q)$.

5. α) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{g}$ και τυχαίο σημείο O.

Αν $\vec{OA} = \vec{a} + 2\vec{b} + 5\vec{g}$, $\vec{OB} = -\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{g}$ και $\vec{OG} = 3\vec{a} + \vec{b} + 6\vec{g}$, τότε:

i) να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$ και $\vec{g}$.

ii) να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B και G είναι συνευθειακά.

β) Δίνεται η εξίσωση $c^2 + (2k - 1)c + k + 1 = 0$, $k \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποια τιμή του k , η διακρίνουσα της εξίσωσης παίρνει ελάχιστη τιμή και να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της.

Η Διευθύντρια

Ελένη Αντωνίου Τσιελεπή

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ–ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 25 / 5 / 2017

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΩΡΑ: 7:45 – 10:15

ΒΑΘΜΟΣ

Αριθμητικώς:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα: Αρ.:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραμέτρων $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση $(\kappa - 3)x = \lambda + 2$ να είναι αόριστη.
2. Να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η παραβολή με εξίσωση $y = (9 - 3\alpha)x^2 - 2x + 5$, $x \in \mathbb{R}$ να έχει μέγιστη τιμή.
3. Να μετατρέψετε, χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής, τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

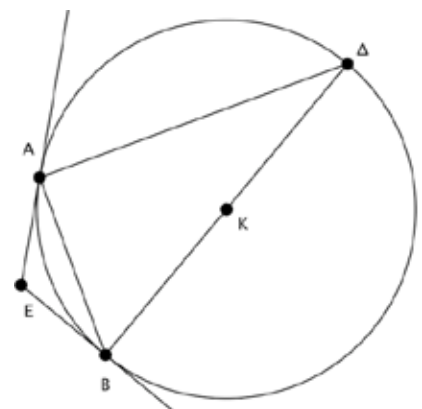
α) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

β) $\frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}-2}$
4. Δίνονται τα σημεία $A(4,3)$ και $B(1,7)$. Να υπολογίσετε :

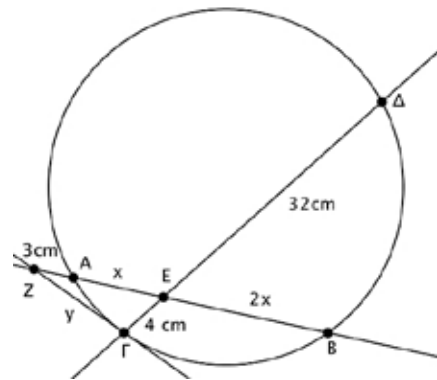
α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$
 β) τον συντελεστή διεύθυνσης του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

5. Στο διπλανό σχήμα $B\Delta$ είναι διάμετρος και οι EA, EB εφαπτόμενες του κύκλου (K, R) .

α) Να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές.
 β) Αν το τόξο $\widehat{AB} = 60^\circ$ να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $B\hat{A}E$ και $A\hat{E}B$.



6. Στο σχήμα η $Z\Gamma$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ .
 Αν $AZ = 3\text{cm}$, $\Gamma E = 4\text{cm}$, $E\Delta = 32\text{cm}$, $AE = x$, $BE = 2x$ και $Z\Gamma = y$, να υπολογίσετε τις τιμές των x και y .



7. Δίνεται η εξίσωση $x^2 + (\lambda + 2)x - (3\lambda + 15) = 0$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του λ .
- β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ ισχύει η ανίσωση: $\frac{x_1 x_2}{x_1 + x_2} \geq 0$.
8. Δίνεται ότι $\sin \theta = \frac{5}{3}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$.
- α) Με τη βοήθεια τριγωνομετρικών ταυτοτήτων, να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας θ .
- β) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης:
 $A = \eta\mu(180^\circ - \theta) + \sigma\tau\epsilon\mu(90^\circ + \theta) + \sigma\varphi(270^\circ + \theta)$.
9. Η ευθεία (ε_1) περνά από τα σημεία $A(0,4)$, $B(4,0)$ και η ευθεία (ε_2) περνά από το σημείο $\Gamma(5,-6)$. Αν $\gamma\omega\nu(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 45^\circ$
- α) να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_2)
- β) να υπολογίσετε την τιμή του a έτσι ώστε οι ευθείες (ε_1) , (ε_2) και $(\varepsilon_3): ax + 5y + 36 = 0$ να συντρέχουν.
10. Ο Σύνδεσμος Προστασίας Καταναλωτών Κύπρου, συγκεντρώνει κάθε μήνα στοιχεία από υπεραγορές και υπολογίζει το κόστος των νοικοκυριών για αγορές ειδών πρώτης ανάγκης. Τον προηγούμενο μήνα το κόστος ειδών πρώτης ανάγκης από 10 τυχαία επιλεγμένες υπεραγορές της Κύπρου ήταν:

Ευρώ	163	164	173	179	180
Αριθμός υπεραγορών	3	1	3	2	1

- α) Να υπολογίσετε την μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s (με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων) του κόστους των κυπριακών νοικοκυριών.
- β) Ο Σύνδεσμος Προστασίας Καταναλωτών της Τσεχίας, συγκέντρωσε αντίστοιχα στοιχεία από αριθμό υπεραγορών και υπολόγισε τη μέση τιμή κόστους στις 4700 κορώνες (το νόμισμα της Τσεχίας) με τυπική απόκλιση 286 κορώνες.
- Σε ποια από τις δύο χώρες οι τιμές πώλησης των ειδών πρώτης ανάγκης παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια και γιατί;

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.

Από το σχήμα να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού (Π.Ο.) της συνάρτησης

β) το σύνολο τιμών (Σ.Τ.) της συνάρτησης

γ) το πρόσημο του a

δ) την τιμή του γ

ε) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$

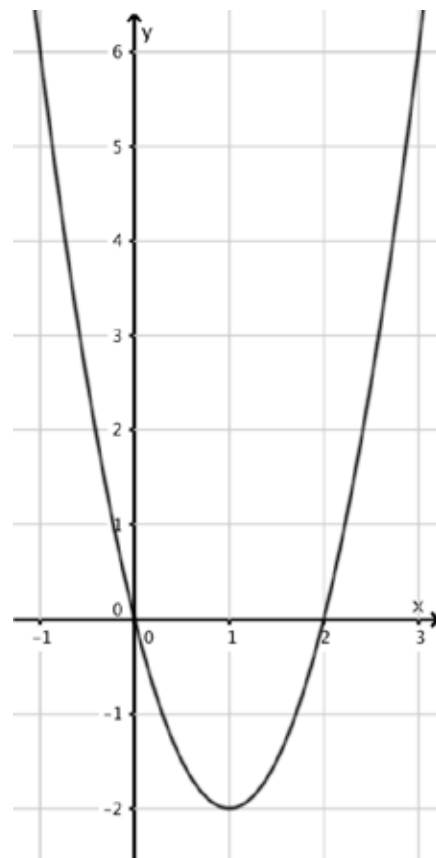
στ) την τιμή της παράστασης $\frac{\beta}{\alpha} + \gamma$

ζ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής

η) τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο η $f(x)$ παρουσιάζει ελάχιστο.

θ) το πρόσημο των $f(-1)$ και $f(1)$

ι) τη λύση της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = -2$.



2. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sigma\upsilon\nu(-x)}{\varepsilon\varphi(\pi+x)-\varepsilon\varphi\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)-\tau\epsilon\mu(x-2\pi)}$

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1 + \eta\mu x$

β) Αν $A = \frac{3}{2}$ να υπολογίσετε τις γωνίες x

i) στο διάστημα $0 < x < 2\pi$

ii) στο διάστημα $-2\pi < x < 0$

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(\kappa, 4)$ και $\Gamma(-3, \lambda)$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.
Οι εξισώσεις των πλευρών AB και $B\Gamma$ είναι $2x + y = 8$ και $y - x = 8$ αντίστοιχα.
Να υπολογίσετε:
- τις τιμές των κ και λ
 - τις συντεταγμένες της κορυφής B
 - τις συντεταγμένες σημείου Δ , τέτοιου ώστε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο
 - την απόσταση των πλευρών $A\Delta$ και $B\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$
 - το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.
4. Δίνεται τρίγωνο με κορυφές $A(-1, -1)$, $B(-3, 3)$ και $\Gamma(0, 2)$. Να βρείτε:
- τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$
 - το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$
 - την γωνία $\Gamma\hat{A}B$
 - διάνυσμα $\vec{u}$ το οποίο είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{AB}$ και έχει μέτρο διπλάσιο από αυτό.
 - το μήκος της προβολής του διανύσματος $\overrightarrow{A\Gamma}$ στο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$.
5. Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) , έτσι ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου και η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ να τέμνει την προέκταση της AB σε σημείο Δ .
- Αν ΓE είναι το ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, να αποδείξετε ότι :
 - $(\Gamma E)^2 = (AE) \cdot (EB)$
 - $(DA) \cdot (DB) - (EA) \cdot (EB) = (ED)^2$
 - Αν επιπλέον το τρίγωνο $EB\Gamma$ έχει εμβαδόν ίσο με 4 cm^2 και το τρίγωνο $AE\Gamma$ έχει εμβαδόν ίσο με 60 cm^2 , να υπολογίσετε το μήκος της $B\Gamma$ συναρτήσει της ακτίνας R του κύκλου.

Ο Διευθυντής

Ανδρέας Λοΐζου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ–ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (5ωρο)

ΣΕΙΡΑ: Α΄

ΤΑΞΗ: Α΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18/05/2017

ΧΡΟΝΟΣ: 8:00 π.μ. – 10:30 π.μ.

Οδηγίες:

- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **δύο (2) μέρη**.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **έξι (6) σελίδες**.
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (με μολύβι **μόνο** τα σχήματα).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής σφραγισμένης από το σχολείο.
- **Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.**
- **Όλες οι απαντήσεις να δοθούν σε σφραγισμένες κόλλες.**
-

ΜΕΡΟΣ Α΄: (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

1. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$

Να υπολογίσετε:

(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{g} = \vec{a} - 3\vec{b}$

(β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{b}$

2. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:
(χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής)

(α) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} =$

(β) $\frac{8}{3 - \sqrt{5}} =$

3. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

4. Αν $h\eta\eta = \frac{3}{5}$ και $90^\circ < q < 180^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{16\theta^j q - 5sunq}{9stemq}$$

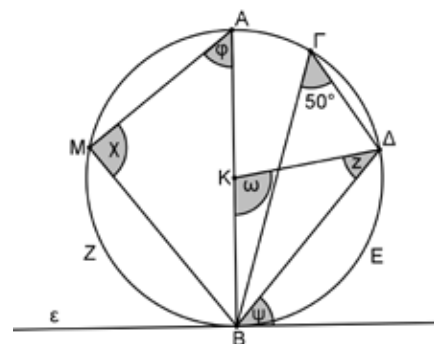
5. Οι ημερήσιες θερμοκρασίες, σε βαθμούς Κελσίου, που παρατηρήθηκαν τις πρώτες 10 μέρες στη Θεσσαλονίκη τον μήνα Φεβρουάριο ήταν οι ακόλουθες:
8, 15, 13, 12, 9, 13, 15, 14, 13, 8.

Να υπολογίσετε:

- | | |
|-----------------------------------|-------------|
| (α) τη μέση τιμή | (μονάδες 1) |
| (β) το εύρος | (μονάδες 1) |
| (γ) την τυπική απόκλιση | (μονάδες 2) |
| (δ) τον συντελεστή μεταβλητότητας | (μονάδες 1) |

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K και διάμετρο AB. Η ευθεία (ε) είναι εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο B. Τα τόξα MZB, ΔΕΒ είναι ίσα και η γωνία $\angle BGD = 50^\circ$.

Να υπολογίσετε τις γωνίες φ, χ, ψ, z και ω.
(να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας)



7. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(3-c)^2(c^2-3c+2)}{(c^2+2c+8)(-c-1)} \geq 0$

8. Δίνεται η εξίσωση: $c^2 - \frac{\theta^j q - h\eta\eta}{1 - sunq} c + \theta^j q = 0$ και $0^\circ < q < 90^\circ$, με ρίζες χ_1 και χ_2 .

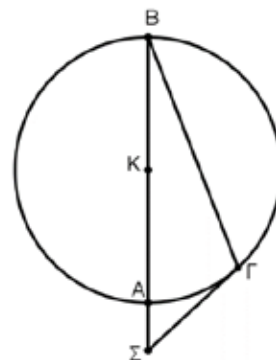
Να αποδείξετε ότι το άθροισμα είναι ίσο με το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης.

9. Δίνεται κύκλος (K, 4cm), η διάμετρος AB και τα σημεία A(1, 2), B(1, 10), $\Gamma(2\sqrt{3}+1, 4)$.

(α) Να βρείτε: (μονάδες 3)

- τα διανύσματα $\vec{BA}$ και $\vec{BG}$
- το εσωτερικό γινόμενο $\vec{BA} \cdot \vec{BG}$
- τη γωνία $\angle ABG$

- (β) Αν ΑΣ είναι προέκταση της BA και SG εφαπτόμενο τμήμα του κύκλου με $SG = 3cm$, να υπολογίσετε το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος ΣΑ. (μονάδες 2)



10. Αν το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x - y = 12 \\ x - 3y = -9 \\ 2/x + 3/y = 180 \end{cases}$$
 είναι συμβιβαστό, να υπολογίσετε την τιμή της

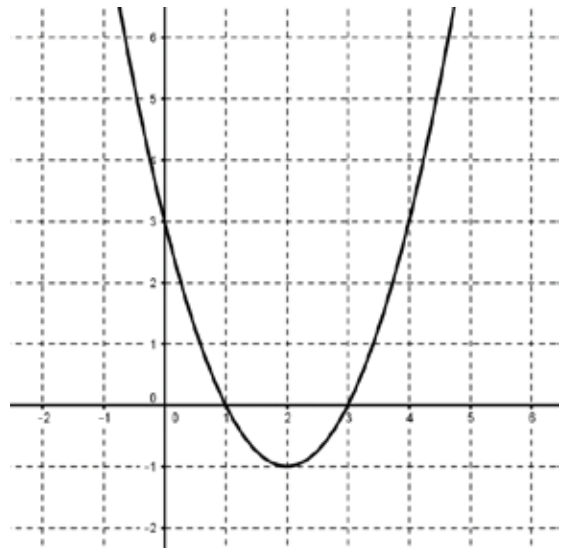
παράστασης: $A = \sqrt{l^2 + m^2 - 36 + 2lm} + (27l + 27m)^{\frac{1}{3}} \times \sqrt[3]{100}$

ΜΕΡΟΣ Β': (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες (10/100).

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $f(x) = ax^2 + bx + g, a \neq 0$.

Με βάση το σχήμα, να βρείτε:

- (α) το Πεδίο Ορισμού και το Σύνολο Τιμών της $f(x)$
- (β) το πρόσημο της Διακρίνουσας της $ax^2 + bx + g = 0$
- (γ) τις συντεταγμένες της κορυφής της $f(x)$
- (δ) τον άξονα συμμετρίας της $f(x)$
- (ε) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$
- (στ) την τιμή της παράστασης $f(2) + P^3 - S^2$
- (ζ) τις τιμές των a, b και g
- (η) τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 3$



2. Ορθογώνιο τραπέζιο $ABGD$ ($AB \parallel GD, \hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$) έχει κορυφή $A(1, 1)$ και $M(\frac{9}{2}, -\frac{9}{2})$

μέσο της διαγώνιου AG . Αν $(e_1): 3x + y = 4$ η εξίσωση της πλευράς GD

και $(e_2): 2x + y = -1$ η εξίσωση άλλης πλευράς του τραπεζίου $ABGD$, να βρείτε:

- (α) τις συντεταγμένες των σημείων G και A
- (β) την εξίσωση της διαμέσου DM του ορθογωνίου τριγώνου ADG
- (γ) το μήκος του ύψους ME του τριγώνου DMG
- (δ) το εμβαδόν του τριγώνου DMG
- (ε) τη γωνία $\hat{MDG}$ (κατά προσέγγιση ακεραίου)

3. Δίνονται:

$$A = \frac{hm\frac{ap}{c^2} + q\frac{aj}{c^2} - q\frac{a}{c}}{\sin(p-q)sj\frac{ap}{c^2} - q\frac{a}{c}} + \frac{\tan(2p-q)sj\frac{ap}{c^2} - q\frac{a}{c}}{\tan\frac{ap}{c^2} - q\frac{a}{c}(q-p)} + \frac{\sin^2\frac{ap}{c^2} - q\frac{a}{c}}{hm^2(p-q)}$$

και

$$B = \tan\eta - \frac{hm\eta}{1 - \sin\eta}$$

(α) Να αποδείξετε ότι: $A = \sigma\varphi^2\theta$

(β) Να υπολογίσετε τη γωνία θ , $0 < \theta < \frac{\rho}{2}$, ώστε να ισχύει $\frac{A}{B} = -1$.

4. Δίνεται η εξίσωση $c^2 + (k-1)c - 2k^2 + 2k = 0$, $k \in \mathbb{R}$ με ρίζες c_1, c_2 .

(α) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου k ώστε:

- η εξίσωση να έχει ρίζες αντίθετες (μονάδες 2)
- το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης να είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ (μονάδες 2)
- να ισχύει η σχέση: $(c_1 - c_2)^2 \leq 1$ (μονάδες 4)

(β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις τους αριθμούς:

$$\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, k \in \mathbb{R} - \{0,1\} \text{ (μονάδες 2)}$$

5. Ισοσκελές τρίγωνο ABG έχει πλευρές $AB = AG = 2c$, $BG = y$ και ύψος AD .

Φέρουμε τη μεσοκάθετο ZE του ευθύγραμμου τμήματος BD που τέμνει την πλευρά AB στο Z και το ευθύγραμμο τμήμα BD στο E .

(α) Να αποδείξετε ότι :

- $(BE)(AD) = (ZE)(BD)$ (μονάδες 3)
- το εμβαδόν του τριγώνου BEZ είναι ίσο με $\frac{1}{32}y\sqrt{16c^2 - y^2}$ (μονάδες 3)

(β) Αν $5 < y < 10$ και $12 < c < 24$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκεται: (μονάδες 4)

- ο λόγος των πλευρών $\frac{AB}{BG}$
- η τιμή της περιμέτρου του τριγώνου ABG

Εισηγητές:
Θεοδωρίδη Ελένη
Χριστοφή Ανθή
Θεοφάνους Σάββας

Η Συντονίστρια Β.Δ.
Πολυκάρπου Μαρία

Η Διευθύντρια
Ονουφρίου Αθήνα

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ	ΤΑΞΗ: Α
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2017	ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΚΑΤΟΧΗ ΚΙΝΗΤΟΥ Ή ΕΞΥΠΝΗΣ ΣΥΣΚΕΥΗΣ = ΔΟΛΙΕΥΣΗ

Γενικές οδηγίες:

- Να γράψετε με μπλε πένα (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Στον πιο κάτω πίνακα παρουσιάζονται οι βαθμοί ενός φοιτητή του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κύπρου στο μάθημα «Απειροστικός Λογισμός»:

Εβδομαδιαίες Εργασίες	Ενδιάμεση Εξέταση	Τελική Εξέταση
7	7	5

Αν οι εβδομαδιαίες εργασίες έχουν βαρύτητα 20%, η ενδιάμεση εξέταση 30% και η τελική εξέταση 50%, να βρείτε το μέσο όρο των βαθμών του φοιτητή.

2. Αν η εξίσωση $4x^2 - 3x - 1 = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 , να υπολογίσετε την τιμή της πιο κάτω παράστασης:
 $A = 4x_1 + 8x_1x_2 + 4x_2$
3. Αν $2 \leq x \leq 4$ και $-5 \leq y \leq -3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:
(α) $x + y$
(β) xy
4. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $A(-2, 3)$ από την ευθεία $(\varepsilon_1): y - 2x + 3 = 0$.

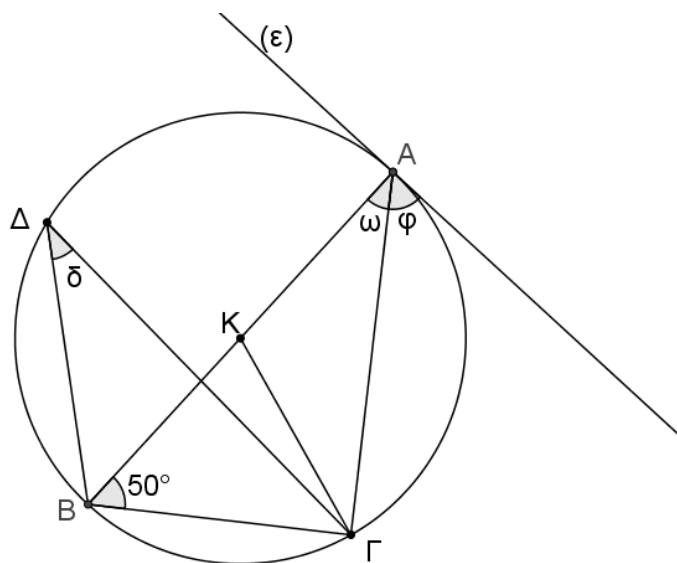
5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

(α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $3\vec{\alpha} + \vec{\beta}$

(β) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

6. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{x^2 - 2x - 15}{x + 2} \leq 0$

7. Στο πιο κάτω σχήμα, η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, R) στο σημείο του A . Αν δίνεται $\hat{A\hat{B}\Gamma} = 50^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών δ , ω και φ (να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



8. Να αποδείξετε ότι: $(1 - \sin x) \left(1 + \frac{1}{\sin x} \right) = \eta \mu x \epsilon \varphi x$

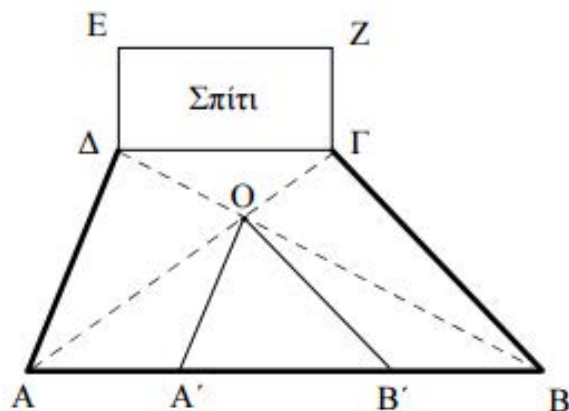
9. Να δείξετε ότι το πιο κάτω σύστημα είναι συμβιβαστό για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 12 \\ 3x - z = 3 \\ 3x - 3y - 2z = 3 \\ x \sigma \tau \epsilon \mu^2 \theta + 2y \sigma \varphi^2 \theta = 5 - z \end{cases}$$

10. Στο πιο κάτω σχήμα παρουσιάζεται η κάτοψη ενός σπιτιού $E\Delta\Gamma Z$ και του προαύλιου χώρου του $AB\Gamma\Delta$, σχήματος τραπεζίου με $\Delta\Gamma \parallel AB$.

(α) Να δείξετε ότι: $\frac{O\Delta}{\Delta B} = \frac{O\Gamma}{A\Gamma}$

(β) Αν ο ιδιοκτήτης του σπιτιού θέλει να κατασκευάσει δύο δρόμους στο προαύλιο ώστε $\Delta A' \parallel OA'$ και $\Gamma B' \parallel OB'$, να δείξετε ότι οι πόρτες που θα τοποθετηθούν στις εισόδους AA' και BB' πρέπει να έχουν το ίδιο μήκος.



ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις πέντε ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής με εξίσωση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$. Χρησιμοποιώντας το σχήμα, να βρείτε:

(α) το σύνολο τιμών της

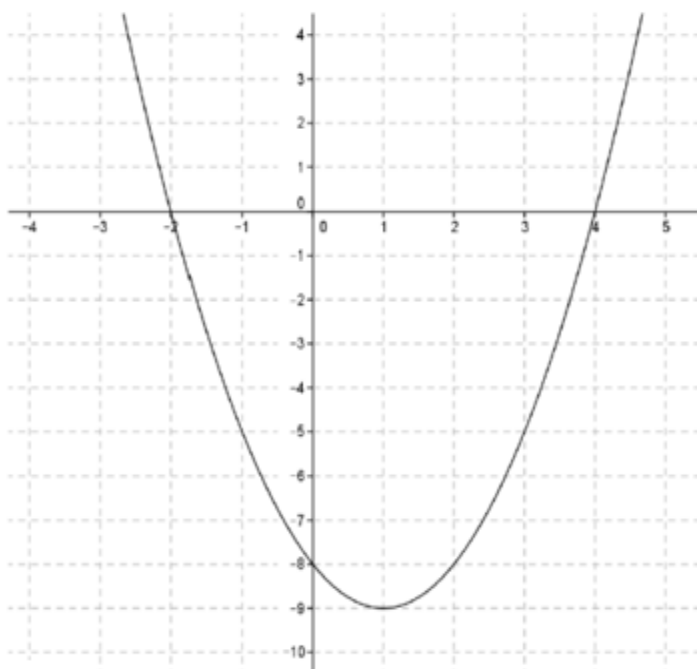
(β) το πρόσημο του α

(γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της

(δ) την κορυφή της

(ε) το πρόσημο της διακρίνουσας και του $f(-2017)$

(στ) την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \frac{2\gamma}{\alpha} + \beta$



2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = -\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{\beta} = 2\vec{i} - 2\vec{j}$ και $\vec{\gamma} = (\lambda - 2)\vec{i} + (\lambda^2 + 1)\vec{j}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε:

- (α) την τιμή του λ , ώστε το διάνυσμα $\vec{\gamma}$ να είναι παράλληλο με τον άξονα των yy'
- (β) την τιμή του κ , $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε τα διανύσματα $\vec{x} = \kappa\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ και $\vec{y} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους
- (γ) το μήκος της προβολής του διανύσματος $\vec{\alpha}$ στο διάνυσμα $\vec{\beta}$

3. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφή $A(2,6)$, το ύψος του $B\Delta$ ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon_1): y = x + 3$ και η διάμεσος του BM ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon_2): 4x - 5y + 13 = 0$.

- (α) Να δείξετε ότι η πλευρά του $A\Gamma$ ανήκει στην ευθεία $(\varepsilon_3): y = -x + 8$.
- (β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μέσου M της πλευράς $A\Gamma$.
- (γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Γ .
- (δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.
- (ε) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{B}\hat{M}\hat{\Gamma}$ κατά προσέγγιση εκατοστού.

4. (α) Αν $A = \frac{\eta\mu(\pi - \alpha)\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sigma\varphi(\pi - \alpha)\eta\mu(-\alpha)}{\tau\epsilon\mu(2\pi - \alpha)\eta\mu(2\pi + \alpha)\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)}$ και $B = \sigma\tau\epsilon\mu\alpha - \frac{\eta\mu\alpha}{1 - \sigma\upsilon\nu\alpha}$, να δείξετε ότι:

$$\frac{A}{B} = \eta\mu^2\alpha$$

(β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{A}{B} = \frac{1}{4}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$

5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της πλευράς του $B\Gamma$ φέρνουμε κάθετες προς τις $A\Gamma$ και AB που τις τέμνουν στα σημεία E και Δ αντίστοιχα. Αν AH το ύψος του τριγώνου, να δείξετε ότι:

- (α) τα τρίγωνα $B\Delta M$ και ABH είναι όμοια
- (β) $(AB)(M\Delta) = (ME)(A\Gamma)$

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ	ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ	ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ
Δημήτρης Κωνσταντίνου (Β.Δ) Κωνσταντίνος Κωνσταντίνου Ηλίας Ζήκκος Έλενα Χατζηγεωργίου Χριστίνα Κουμπάρου	Δημήτρης Κωνσταντίνου	Ανδρούλλα Χρίστου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ (5 - ΩΡΟ)

ΧΡΟΝΟΣ: 2½ ΩΡΕΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18/05/2017

ΒΑΘΜΟΣ

Αριθμητικώς:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

Ονοματεπώνυμο μαθητή/τριας: Τμήμα..... Αρ.

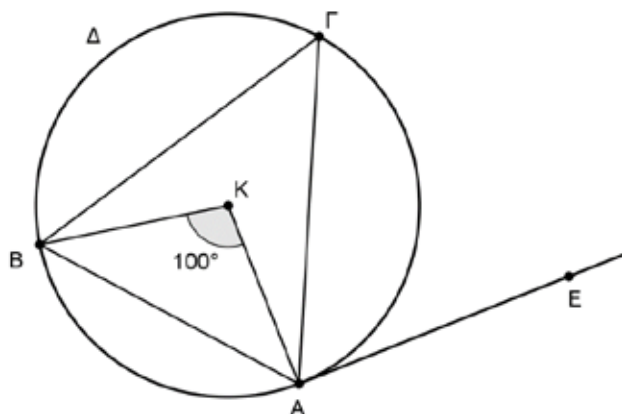
ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Να λύσετε τις ασκήσεις πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 12 (δώδεκα) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε μία εξίσωση δεύτερου βαθμού με λύσεις: $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ και $x_2 = 2 + \sqrt{3}$.
2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ και $\vec{b} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $3\vec{a} - \vec{b}$.
3. Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{x^4 - 12} = 2$, $x < 0$.
4. Σε κύκλο (Κ, R) δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ABΓ (AB=ΑΓ) και ΑΕ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α.
 Αν $\angle AKB = 100^\circ$ να βρείτε:
 (α) το μέτρο των γωνιών $\angle AB\Gamma$ και $\angle \Gamma A E$.
 (β) το μέτρο του τόξου $\widehat{AB}$.
 (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



5. Στο λύκειο ο βαθμός σε ένα εξεταζόμενο μάθημα στο τέλος της σχολικής χρονιάς συνυπολογίζεται από τους βαθμούς των δύο τετραμήνων με βαρύτητα 35% στο κάθε τετράμηνο και από το βαθμό της τελικής εξέτασης με βαρύτητα 30%. Ένας μαθητής της Α΄ Λυκείου στα Μαθηματικά έχει βαθμό 20 στο πρώτο τετράμηνο, 18 στο δεύτερο τετράμηνο και 14 στην τελική εξέταση.

(α) Να βρείτε τον τελικό βαθμό του μαθήματος που θα έχει ο μαθητής στο ενδεικτικό του.

(β) Στο προηγούμενο σύστημα αξιολόγησης, ο τελικός βαθμός υπολογιζόταν με τον απλό μέσο όρο των πιο πάνω βαθμών του στα Μαθηματικά. Αν ο μαθητής έχει την ευκαιρία να επιλέξει έναν από τους δύο τρόπους αξιολόγησης, ποιόν θα προτιμήσει και γιατί;

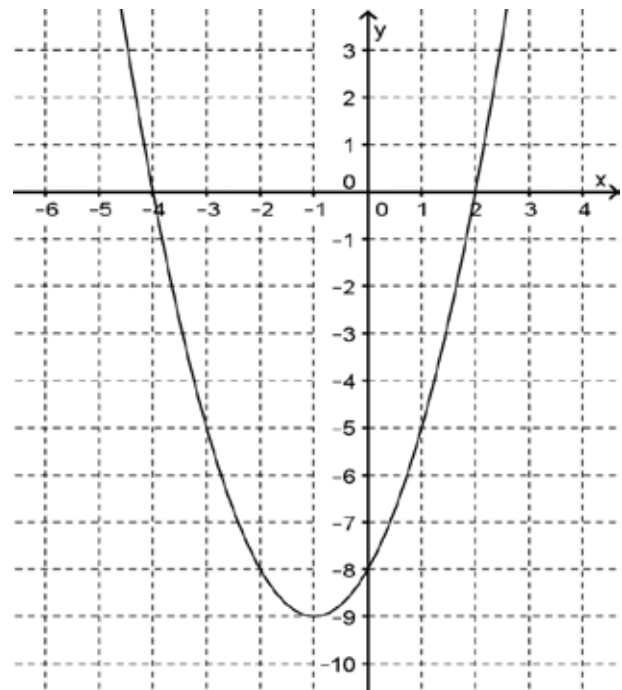
6. Να αποδείξετε ότι : $\frac{(1+\epsilon\phi x)^2 - 2\epsilon\phi x}{\tau\epsilon\mu x} = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$

7. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0.$$

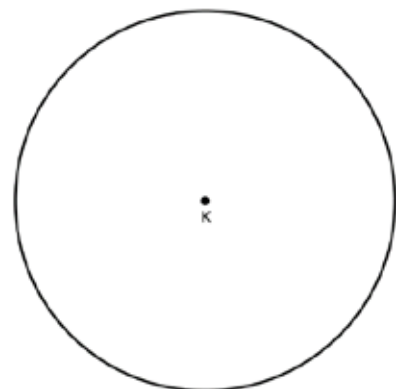
Από τη γραφική παράσταση, να βρείτε:

- (α) το σύνολο τιμών της $f(x)$
- (β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- (γ) τις συντεταγμένες της κορυφής
- (δ) το συμμετρικό του σημείου $(-3, -5)$ της παραβολής ως προς τον άξονα συμμετρίας της
- (ε) τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) \leq -5$.



8. Τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) . Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο E και τον κύκλο στο σημείο Δ . Να αποδείξετε ότι:

- (α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι όμοια.
- (β) ισχύει η σχέση $(BE)(E\Gamma) = (AE)(E\Delta)$.



9. Δίνονται οι ευθείες: $\varepsilon_1: 4x - \psi = 5$, $\varepsilon_2: x + 3\psi = 11$ και $\varepsilon_3: \alpha^2\psi = (\alpha^2 - 1)x + 3\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$.

(α) Αν οι ευθείες ε_1 και ε_2 ανήκουν σε δέσμη ευθειών, να γράψετε την εξίσωση της δέσμης και να βρείτε το κέντρο της.

(β) Για ποιες τιμές του α η ευθεία ε_3 ανήκει στην πιο πάνω δέσμη;

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε_4 που ανήκει στην πιο πάνω δέσμη και είναι κάθετη στην ευθεία $2x - 5\psi + 15 = 0$.

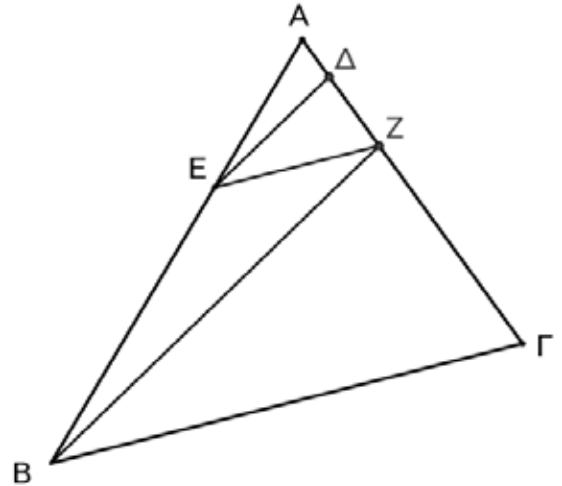
10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται τρίγωνο ABΓ. Από σημείο E της AB φέρουμε $EZ \parallel B\Gamma$ και $ED \parallel BZ$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{AD}{AZ} = \frac{AZ}{AG}$

(β) Αν $AB=12\text{cm}$, $AG=9\text{cm}$ και $AE=4\text{cm}$, να υπολογίσετε:

(i) το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AZ.

(ii) τον λόγο $\frac{\text{Εμβαδόν τριγώνου AEZ}}{\text{Εμβαδόν τραπεζίου EZΓB}}$.



ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = (\lambda - 2)x^2 + (\lambda - 1)x + 3$, $\lambda \neq 2$ και $g(x) = \kappa x^2 + (\kappa + 3)x - 3$, $\kappa \neq 0$.

(α) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ρίζες αντίστροφες;

(β) Αν x_1 και x_2 είναι λύσεις της εξίσωσης $g(x) = 0$ για ποιες τιμές του κ ισχύει η σχέση:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} + 4 > 0$$

(γ) Αν $\lambda = 3$ και $\kappa = 2$ να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{f(x) - 6}{g(x)}$.

2. Δίνονται τα σημεία $A(4,6)$, $B(1,2)$, $\Gamma(-2,5)$ και $\Delta(3,\mu)$. Να βρείτε:

(α) το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{BA}$ και $\vec{B\Gamma}$.

(β) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{BA}$ και $\vec{B\Gamma}$ κατά προσέγγιση ακεραίου ψηφίου.

(γ) την τιμή του μ , ώστε τα διανύσματα $\vec{BA}$ και $\vec{B\Delta}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους.

3. (α) Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu(90^\circ + \theta) \times \epsilon\mu(360^\circ - \theta) \times \sigma\phi(90^\circ + \theta)}{\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \theta) \times \epsilon\phi(-\theta) \times \sigma\tau\epsilon\mu(90^\circ - \theta)} = -1$
- (β) Δίνεται γωνία ω για την οποία ισχύει $90^\circ < \omega < 180^\circ$.
- (i) Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της παράστασης $A = 3 - 2\eta\mu\omega$.
- (ii) Αν $8\eta\mu^2\omega + 4\sigma\upsilon\nu^2\omega = 7$, να δείξετε ότι $\epsilon\phi^2\omega = 3$. Στη συνέχεια να υπολογίσετε τη γωνία ω .
4. Τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει κορυφές $A(1,4)$, $B(-3,0)$, η εξίσωση του ύψους AE είναι $\psi = \frac{7}{2}\chi + \frac{1}{2}$ και της πλευράς $A\Gamma$ είναι $2\chi + \psi = 6$.
- (α) Να δείξετε ότι η κορυφή Γ έχει συντεταγμένες $(4, -2)$.
- (β) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας A του τριγώνου $AB\Gamma$, κατά προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου.
- (γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Δ , ώστε το $A\Delta B\Gamma$ να είναι παραλληλόγραμμο.
- (δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $A\Delta B\Gamma$.
5. Η τροχιά ενός βλήματος είναι παραβολή. Το βλήμα εκτοξεύεται από το σημείο με συντεταγμένες $(20,0)$, φτάνει σε μέγιστο ύψος στο σημείο $(50,900)$ και καταλήγει στο έδαφος όπου εκρήγνυται.
- (α) Να δείξετε ότι το βλήμα εκρήγνυται στο σημείο $(80,0)$.
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της παραβολής πάνω στην οποία βρίσκεται η τροχιά του βλήματος.
- (γ) Αν αεροπλάνο πετά σε σταθερό ύψος 800m από το έδαφος, να εξετάσετε το ενδεχόμενο το αεροπλάνο να κτυπηθεί από το βλήμα. Αν συμβεί αυτό, σε ποια απόσταση θα βρίσκεται το αεροπλάνο από το σημείο εκτόξευσης του βλήματος;

Ανδρέας Γεωργίου

Διευθυντής

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ–ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

Τάξη: Α΄ Λυκείου

Ημερομηνία: 18/05/17

Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού(5-ωρο)

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι. Για τα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι.
 (β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 (γ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται καθαρά και επιμελημένα όλη η αναγκαία εργασία.
 (δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 (ε) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους αυτού.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να σχηματίσετε εξίσωση β΄ βαθμού που να έχει λύσεις τους αριθμούς

$$x_1 = 3 - \sqrt{2} \text{ και } x_2 = 3 + \sqrt{2}.$$

A2. Δίνεται η ευθεία $(e): 2mx + 5y + 7 = 0$ και τα σημεία $A(3, 2)$, $B(4, -6)$. Να βρείτε:

- (α) Την τιμή του m ώστε η ευθεία (e) να είναι παράλληλη με την AB .
 (β) Την τιμή του m ώστε η ευθεία (e) να είναι κάθετη με την AB .

A3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{d} = \begin{pmatrix} k-3 \\ 9 \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{R}$.

- (α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{g} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.
 (β) Να υπολογίσετε την τιμή του k ώστε $\vec{d} = \vec{g}$.

A4. Να κάνετε τις πράξεις και όλες τις δυνατές απλοποιήσεις χωρίς τη χρήση της υπολογιστικής μηχανής και δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

$$(\alpha) \sqrt{12} \times \sqrt{3} - \sqrt[3]{24}, \sqrt[3]{3} + (\sqrt[4]{7})^4$$

$$(\beta) \frac{2x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{4}{15}}}{x^{\frac{1}{5}}} \div \sqrt[4]{x^{\frac{8}{15}}} \cdot (x^7)^{\frac{2}{7}}$$

A5. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει των αριθμό των παιδιών που έχουν οι οικογένειες μιας πολυκατοικίας της Πάφου.

Αριθμός παιδιών (x_i)	0	1	2	3	4	5
Αριθμός οικογενειών (f_i)	1	7	11	4	1	1

Να υπολογίσετε τη **μέση τιμή** και την **τυπική απόκλιση** (κατά προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων) των παρατηρήσεων δείχνοντας τις πράξεις σας.

A6. Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} 2x + y = -7 \\ 7x + 2y = -11 \end{cases}$$

(α) Να βρείτε τη λύση (x, y) του συστήματος.

(β) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + bx + g$ έχει κορυφή το σημείο $K(x, y)$, (x, y) η λύση του πιο πάνω συστήματος, να βρείτε τους αριθμούς b και g .

A7. Αν $9\text{h}\mu\eta - 3 = 5 - 8\text{h}\mu\eta$ και $90^\circ < q < 180^\circ$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{17\text{s}\eta\mu q - 30\theta\eta q}{\text{t}\eta\mu q \times \text{s}\eta q}$$

A8. Να βρείτε την αριθμητική τιμή του m ώστε η εξίσωση $x^2 + (m-1)x + m-2 = 0$, $m \in \mathbb{R}$ να έχει:

(α) Λύση τον αριθμό -3.

(β) Λύσεις αντίθετες.

(γ) Λύσεις πραγματικές και ίσες.

A9. Στο διπλανό σχήμα η ΑΒ είναι εφαπτομένη του

κύκλου (Κ, r) στο σημείο του Α, η DG είναι διάμετρος

του κύκλου και η $\widehat{ADG} = 63^\circ$. Να υπολογίσετε τις

γωνίες $\hat{J}$, $\hat{a}$ και $\hat{b}$ δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

A10. Να λύσετε το σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου m $\hat{=}$:

$$(S) \begin{cases} x + my = m \\ 2x + (m+1)y = 2m+1 \end{cases}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους αυτού.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. (α) Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\sin(180^\circ - q)\cos(90^\circ + q)\cos(90^\circ - q)}{\sin(-q)\cos(q - 180^\circ)\sin(270^\circ - q)} = \sin q$$

(β) Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$$\frac{\sin x \cos^2 x}{\sin x + \cos x} = 1 - \sin x$$

B2. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{g} = \begin{pmatrix} k-6 \\ k-2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε:

(α) Το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

(β) Το μέτρο της γωνίας των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

(γ) Την τιμή της παραμέτρου k , ώστε τα διανύσματα $\vec{b}$ και $\vec{g}$ να είναι κάθετα.

B3. Τρίγωνο $\triangle ABC$ έχει κορυφές τα σημεία Α(3, 4), Β(1, 1) και Γ(4, -1).

(α) Να αποδείξετε ότι η ΑΓ έχει εξίσωση: $5x + y - 19 = 0$.

(β) Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους ΒD του τριγώνου $\triangle ABC$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΑΜ του τριγώνου $\triangle ABC$.

(δ) Να υπολογίσετε την οξεία γωνία που σχηματίζουν οι πλευρές ΑΓ και ΑΒ.

(ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle ABC$.

B4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x + 5$

(α) Να μετασχηματίσετε τη συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 4x + 5$ στη μορφή

$$f(x) = a(x + k)^2 + l$$

(β) (i) Να εξετάσετε αν παρουσιάζει ελάχιστο ή μέγιστο δικαιολογώντας την απάντησή σας.

(ii) Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής.

(iii) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της.

(γ) Να περιγράψετε πώς η γραφική παράσταση της $g(x) = -x^2$ με κατάλληλες

μετατοπίσεις θα συμπίσει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$.

(δ) Αν $q(x) = \frac{(x-1)^2}{x-3}$ να λύσετε την ανίσωση $f(x) \cdot q(x) \leq 0$

B5. Δίνεται κύκλος (K, R) και AH η διάμετρος του. Το $A\overset{D}{B}G$ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο.

Να φέρετε το ύψος AD , την εφαπτομένη (e) στο σημείο B και την κάθετη AZ στην (e) .

Να δείξετε ότι:

(α) Ισχύει η σχέση: $(AG) \cdot (AZ) = (AB) \cdot (AD)$.

(β) Τα τρίγωνα ABD και AGH είναι όμοια.

Οι Εισηγητές:

Η Συντονίστρια Β.Δ

Ο Διευθυντής

Ε. Χριστοφόρου

Ε. Χριστοφόρου

Γ. Χρυσοστόμου

Α. Χρυσοστόμου

Ε. Παπανδρέου

ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30 / 05 / 2017

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

Βαθμός:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

Όνομα: Τμήμα: Αρ.:

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 10 σελίδες.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που έχει ελεγχθεί και σφραγιστεί.
- β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- γ) Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο (Τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
- δ) Να γράψετε τις απαντήσεις σας στο εξεταστικό δοκίμιο.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τα 10 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Να σχηματίσετε εξίσωση 2^{ου} βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $x_1 = 2 - \sqrt{5}$ και $x_2 = 2 + \sqrt{5}$.

- 2) Δίνεται η ευθεία (ε_1) : $2x + 3y = 5$. Να βρείτε:
 - α) Την κλίση της ευθείας (ε_1) .
 - β) Την εξίσωση της ευθείας (ε) που είναι κάθετη με την (ε_1) και περνά από το σημείο $A(2, -1)$.

3) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

α) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$.

β) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 6\vec{a} - 4\vec{b}$.

4) Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

α) $\frac{2}{\sqrt{7}}$

β) $\frac{5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

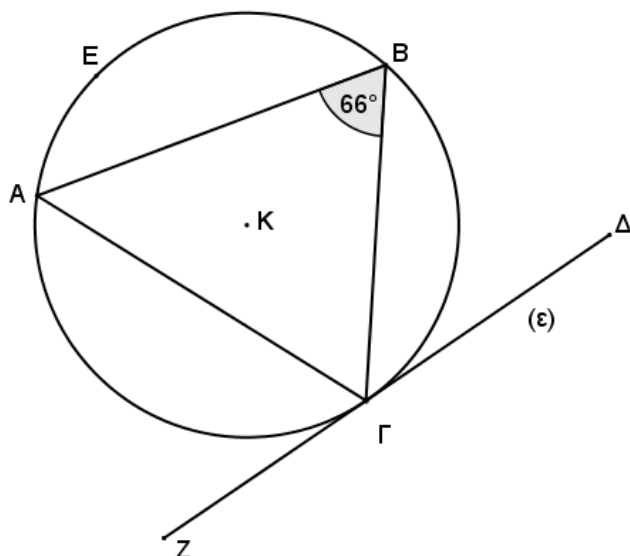
5) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x-1)^2}{x^2+x-6} \geq 0$.

- 6) Ο πιο κάτω πίνακας δείχνει τον αριθμό (σε χιλιάδες) των αστέγων ανθρώπων, που έχουν κάποιες πόλεις της Ασίας. Να υπολογίσετε:
- α) Τη μέση τιμή των αστέγων που ζουν σε αυτές τις πόλεις.
- β) Την τυπική απόκλιση.

Αριθμός αστέγων	Αριθμός πόλεων			
2	8			
3	2			
4	7			
5	4			
7	10			
8	5			

- 7) $x - 4y = 13$
 Αν το σύστημα $\begin{cases} 2x - 3y = 11 \\ κx + λy = 10 \end{cases}$ είναι συμβιβαστό, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = κ^2 + 9λ^2 + 100 - 6κλ$.

- 8) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ο κύκλος (K, R) . Η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Γ . Αν το τόξο $\widehat{AEB} = 120^\circ$ και η γωνία $\widehat{AB\Gamma} = 66^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\widehat{AKB}$, $\widehat{A\Gamma B}$, $\widehat{B\Gamma\Delta}$ και $\widehat{KAB}$ δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



- 9) Από τυχαίο σημείο E της πλευράς AG τριγώνου $ABΓ$ φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά $BΓ$, που τέμνει την AB στο Δ . Αν $AE = \sqrt{(3x+1)^3}cm$, $\Delta B = (3x+1)cm$, $A\Delta = 8cm$ και $EΓ = 4cm$, να υπολογίσετε την τιμή του x ($x > 0$).

- 10) Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\lambda(\lambda^2 x - 1) + 2 = \lambda x(5\lambda - 6)$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ , $\lambda \in \mathbb{R}$.

ΜΕΡΟΣ Β΄:

Να λύσετε και τα 5 θέματα.

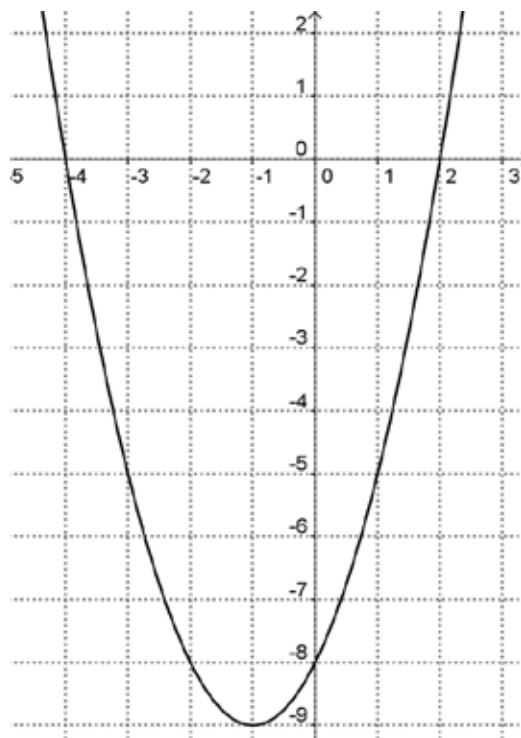
Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) α) Στο διπλανό σχήμα, δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής:

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0 \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Από τη γραφική παράσταση της παραβολής, να βρείτε:

- i. Το σύνολο τιμών της.
- ii. Τις λύσεις της εξίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$.
- iii. Τις συντεταγμένες της κορυφής.
- iv. Τις τιμές των α , β και γ .



- β) Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - \lambda x - \lambda^2 - 5 = 0$.

- i. Να δείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
- ii. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης, να βρείτε την τιμή του λ , ώστε $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = -4$.

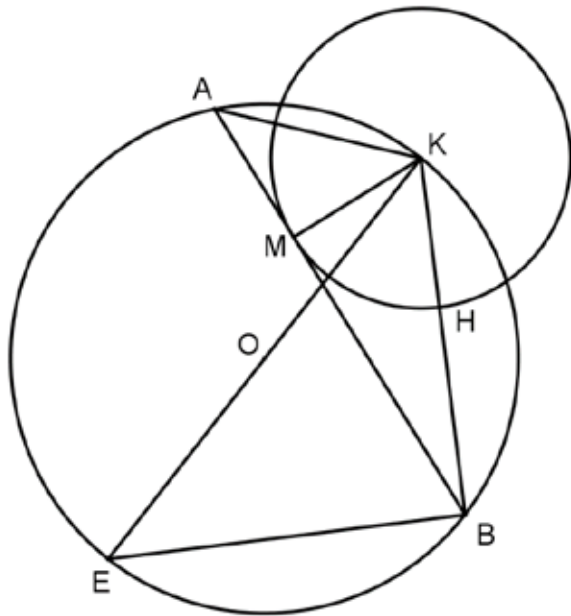
- 2) α) Να αποδείξετε την ταυτότητα $\frac{\sigma\upsilon\nu^3\theta\cdot\epsilon\varphi\theta}{1-\sigma\upsilon\nu\theta\cdot\epsilon\varphi\theta} = \frac{1+\eta\mu\theta}{\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$.
- β) Αν $\frac{\sigma\upsilon\nu(90^\circ+\theta)\cdot\eta\mu(180^\circ-\theta)\cdot\sigma\varphi(360^\circ-\theta)}{\epsilon\varphi(-\theta)\cdot\eta\mu(270^\circ-\theta)} = \frac{1}{2}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της $\tau\epsilon\mu\theta$.

3) Στο σχήμα, παρακάτω, ο κύκλος (O, R) διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (K, ρ) , AB είναι εφαπτομένη του κύκλου (K, ρ) στο σημείο M και KE είναι διάμετρος του κύκλου (O, R) . Να δείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα KBE και AMK είναι όμοια. (μ. 4)

β) $(KA) \cdot (KB) = 2R \cdot \rho$ (μ. 3)

γ) Αν $MA = 3cm$, $BE = 6cm$ και το εμβαδόν του τριγώνου KBE είναι $18cm^2$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου AMK . (μ. 3)



- 4) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφή $B(1,2)$, εξίσωση ύψους AD : $3x + y - 11 = 0$ και εξίσωση διαμέσου AM : $x + y - 7 = 0$ (M το μέσο της $B\Gamma$).
- α) Να δείξετε ότι η εξίσωση της $B\Gamma$ είναι $3y - x = 5$.
- β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων M και Γ .
- γ) Να υπολογίσετε την εφαπτομένη της οξείας γωνίας $\hat{A}M$.
- δ) Να βρείτε το μήκος του ύψους AD .
- ε) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

5) α) Να αποδείξετε την πρόταση:

Αν το εσωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων είναι μηδέν, τότε τα διανύσματα είναι κάθετα μεταξύ τους.

β) Οι συντεταγμένες του σημείου $A(x_A, y_A)$ είναι ρίζες της εξίσωσης

$x^2 - (\lambda^2 - 3\lambda + 9)x + \lambda + 2 = 0$, ενώ του σημείου $B(x_B, y_B)$ είναι ρίζες

της εξίσωσης $x^2 - (\lambda + 2)x + 3 - 2\lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

Αν για το σημείο $P(x_P, y_P)$ ισχύει $\overrightarrow{AP} = \lambda \cdot \overrightarrow{PB}$ και $x_P + y_P = 5$, να υπολογίσετε τον αριθμό λ .

Η Διευθύντρια

Αχειριώτου Σοφούλα

ΓΥΜΝΑΣΙΟ – ΛΥΚΕΙΟ ΚΑΤΩ ΠΥΡΓΟΥ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2016-2017

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (Ο.Π. 2)

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22 ΜΑΙΟΥ 2017

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

Υπογραφή καθηγήτριας:

ΒΑΘΜΟΣ :

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (β) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).
- (γ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- (δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 2 ΜΕΡΗ ΚΑΙ 7 ΣΕΛΙΔΕΣ.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x - 3 = 0$ να υπολογίσετε, χωρίς να λύσετε την εξίσωση, τις τιμές των πιο κάτω παραστάσεων:

α) $x_1 + x_2 =$

β) $x_1 \cdot x_2 =$

γ) $5x_1^3 \cdot x_2 + 5x_1 \cdot x_2^3 =$

- 2) Αν $\eta\mu\theta = -\frac{4}{5}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της

παραστάσης : $A = \frac{3\epsilon\phi\theta - 10\sigma\upsilon\nu\theta}{1 - 4\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$.

- 3) Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τα χρήματα (σε ευρώ) που ξοδεύουν οι μαθητές ενός σχολείου σε μια μέρα.

Χρήματα x_i	Αριθμός παιδιών f_i
0	12
1	51
2	48
3	15
4	12
5	12

Να βρείτε: α) την μέση τιμή των παρατηρήσεων

β) την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων.

- 4) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

α) το διάνυσμα $\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

β) τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

γ) το $\sin\theta$, όπου θ η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

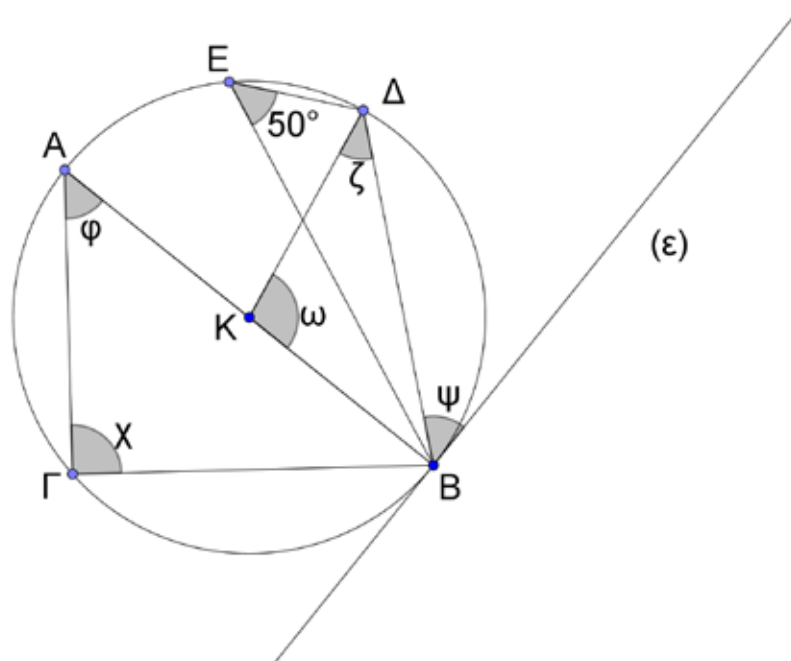
- 5) α) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: i) $\sqrt[5]{a^4} \cdot \sqrt[5]{a^8} : \sqrt[5]{a^2} =$, ($a > 0$)

ii) $\sqrt{(x+2)(x^2-4)} =$, ($x > 2$)

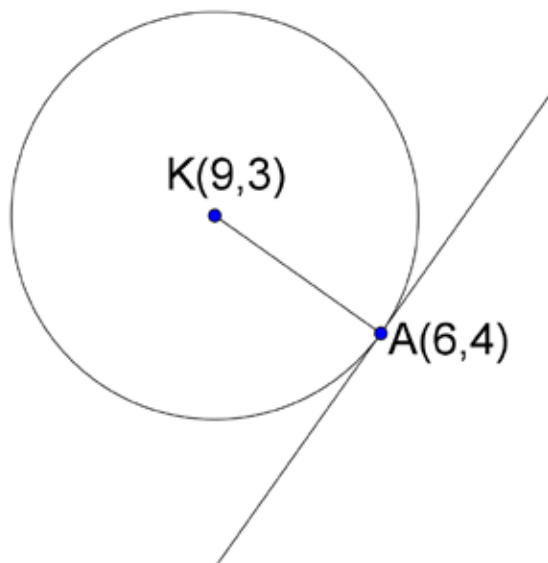
β) Να λύσετε τις εξισώσεις: i) $\sqrt[3]{29-3x} = 2$

ii) $(3x-2)^{\frac{5}{4}} = 32$, ($x > \frac{2}{3}$)

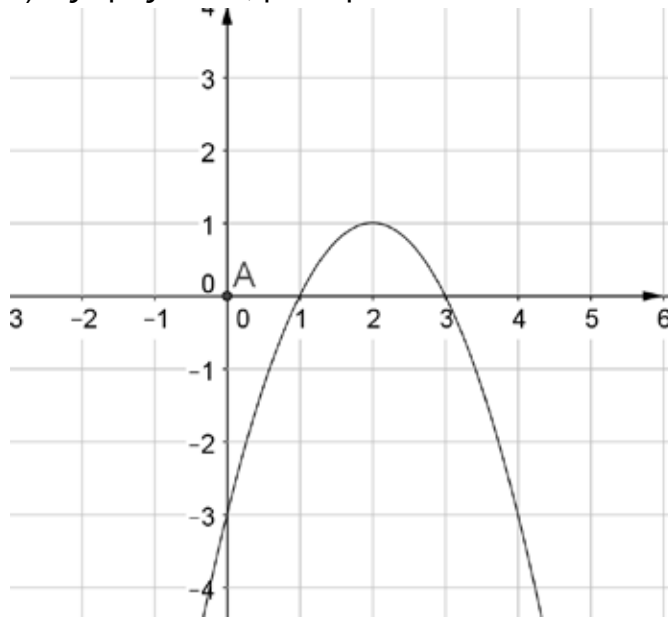
- 6) Δίνεται κύκλος με κέντρο K και διάμετρο AB . Η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B , $\widehat{AB} = \widehat{BD}$ και $\widehat{BED} = 50^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες φ , χ , ψ , ζ και ω .



- 7) Δίνεται κύκλος με κέντρο $K(9,3)$ και σημείο του $A(6,4)$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που εφάπτεται του κύκλου στο σημείο A .



- 8) Δίνεται η γραφική παράσταση της $\psi = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Να βρείτε:
- α) το πρόσημο της διακρίνουσας
 - β) τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$
 - γ) τον άξονα συμμετρίας
 - δ) το είδος του ακρότατου (μέγιστο ή ελάχιστο) και τις συντεταγμένες του
 - ε) τις τιμές των a , b και γ .



- 9) α) Να λύσετε το σύστημα:
- $$\begin{aligned} \chi - \psi &= 1 \\ \psi^2 - 2\chi &= 6 \end{aligned}$$
- β) Αν $1 < \kappa < 4$ και $2 < \lambda < 7$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις: $A = 2\kappa + \lambda$
 $B = \kappa\lambda - 2$
- 10) Να αποδείξετε ότι $\frac{\epsilon\phi\alpha - \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\alpha}{\sigma\phi\alpha - \eta\mu\alpha \cdot \sigma\upsilon\alpha} = \epsilon\phi^4\alpha$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\lambda - 1)x + \lambda^2 - 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, με ρίζες x_1 και x_2 .
Να υπολογίσετε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει:

- α) ρίζες αντίθετες
- β) άθροισμα ριζών ίσο με το γινόμενο των ριζών της
- γ) ρίζες άνισες, ομόσημες και θετικές.

- 2) α) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{3x(2x^2 - 3x - 5)(x^2 + 4)(-x^2 - x)}{(x + 2)} \geq 0$

- β) Να λύσετε και να διερευνήσετε το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x - \psi = \lambda - 1 \\ \lambda^2 x - 2\psi = \lambda \end{cases}$

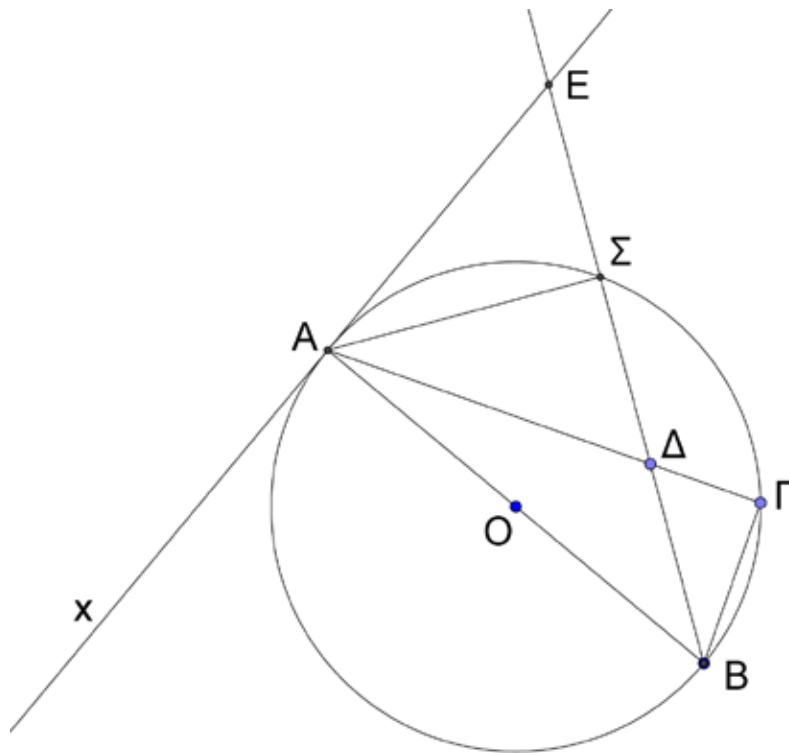
για τις διάφορες τιμές του λ .

- 3) Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με Α(-1,6) και Γ(-3,2).
α) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ.
β) Αν η πλευρά ΑΒ έχει εξίσωση $x + \psi = 5$, να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Δ.
γ) Να βρείτε το εμβαδόν του ρόμβου.
δ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Α από την ευθεία ΓΔ.
(Η απάντησή σας να μετατραπεί σε κλάσμα με ρητό παρονομαστή)

- 4) Αν $A = \frac{\eta\mu(180^\circ - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^\circ - \omega) \cdot \sigma\phi(180^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(-\omega)}{\tau\epsilon\mu(360^\circ - \omega) \cdot \eta\mu(360^\circ + \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)}$ και

$$B = \sigma\tau\epsilon\mu\omega - \frac{\eta\mu\omega}{1 - \sigma\upsilon\nu\omega} \text{ να δείξετε ότι : } \frac{A}{B} = \eta\mu^2\omega.$$

- 5) Στο πιο κάτω σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου (O, R) και η $A\chi$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A . Η διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AB\Gamma}$ τέμνει την $A\Gamma$ στο σημείο Δ , τον κύκλο στο Σ και την εφαπτομένη στο E .
 Να δείξετε ότι: α) η $A\Sigma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{E\Delta\Gamma}$
 β) $(\Gamma B)(\Sigma E) = (\Gamma \Delta)(\Sigma A)$.



Η Εισηγήτρια

.....

Χριστίνα Κωνσταντίνου

Ο Συντονιστής Β.Δ.

.....

Χαράλαμπος Σωτηριάδης

Ο Διευθυντής

.....

Ιωάννης Ορφανίδης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18/05/2017****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΠΡΟΣ.)****ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.30****ΩΡΑ: 07:45 – 10:15****Οδηγίες:**

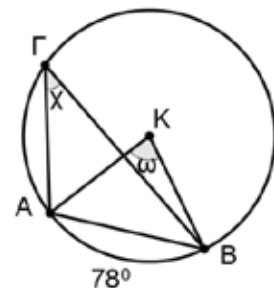
- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- β) Να γράφετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- ε) Σε όλες τις ερωτήσεις να φαίνεται ο τρόπος απάντησής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης αιτιολόγησης δεν θα λαμβάνονται υπόψη .
- ζ) Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- στ) Η ΔΟΛΙΕΥΣΗ ΤΙΜΩΡΕΙΤΑΙ ΑΥΣΤΗΡΑ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α' και το ΜΕΡΟΣ Β'.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 ερωτήματα. Κάθε ερώτημα βαθμολογείται με 5/100.

1. Δίνεται κύκλος με κέντρο K , ακτίνα KA και τόξο $\widehat{AB} = 78^\circ$. Να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών $\hat{x}$ και $\hat{\omega}$, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας .

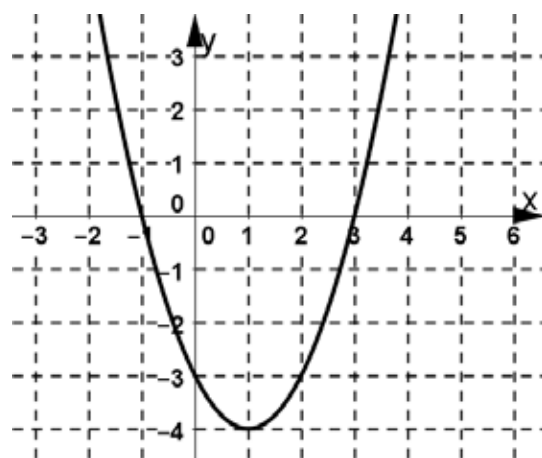


2. Οι εβδομαδιαίοι μισθοί 6 υπαλλήλων είναι: 220, 160, 310, 160, 180, 230. Να υπολογίσετε:
- α) τη μέση τιμή β) την επικρατούσα τιμή γ) την τυπική απόκλιση

- 3.** Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt[3]{x-1} = 2$.
- 4.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 5\vec{\alpha} - 3\vec{\beta}$.
- 5.** Αν $0 < x_1 < x_2$, να συγκρίνετε τις παραστάσεις:
α) $x_1 + 5, x_2 + 5$ **β)** $\frac{2}{\sqrt{x_1}}, \frac{2}{\sqrt{x_2}}$
- 6.** Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε το σύστημα $\begin{cases} \lambda x + 2y = 20 \\ -7x + y = 12 \\ 7x + 5y = 18 \end{cases}$ να είναι συμβιβαστό.
- 7.** Αν $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς ημθ, εφθ και τεμθ.
- 8.** Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x+1)(x^2-2x-3)}{x^2-4} \leq 0$
- 9.** Να βρείτε την εξίσωση ευθείας που περνά από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, όπου $A(3, -1)$ και $B(1, 1)$ και σχηματίζει γωνία 30° με τον θετικό ημιάξονα των x .
- 10.** Να βρείτε για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ το τριώνυμο $f(x) = (\lambda - 5)x^2 - (\lambda - 5)x + 2$ γίνεται θετικό $\forall x \in \mathbb{R}$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 ερωτήματα. Κάθε ερώτημα βαθμολογείται με 10/100.

- Χρησιμοποιώντας τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ στις πιο κάτω περιπτώσεις:
 - να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
 - να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες της κορυφής.
 - να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
 - να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $f(x) > 0$.
 - να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{2\gamma - \beta^2}{\alpha}$.
- Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(0, 5)$, $B(1, 2)$, $\Gamma(5, 6)$.
 - Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της πλευράς $B\Gamma$ είναι



- β)** Να υπολογίσετε το μήκος του ύψους AH του τριγώνου $AB\Gamma$.
- γ)** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
- δ)** Να βρείτε την εξίσωση ευθείας (ϵ) που είναι κάθετη στο μέσο M της πλευράς $A\Gamma$.
- ε)** Να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής Δ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

3. Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \frac{\eta\mu(\pi-\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\omega) \cdot \sigma\varphi(\frac{\pi}{2}+\omega)}{\epsilon\varphi(\pi-\omega) \cdot \sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2}-\omega)}$ και

$$B = \epsilon\varphi\omega \cdot \sigma\upsilon\nu\omega + \sigma\varphi^2\omega \cdot \eta\mu\omega.$$

α) Να δείξετε ότι $A = \sigma\upsilon\nu\omega$ και $B = \sigma\tau\epsilon\mu\omega$

β) Να λύσετε την εξίσωση $A \cdot B = 1$ στο διάστημα $0 < \omega < 2\pi$

4. Δίνονται τα σημεία $A(5, -2)$, $B(1, 6)$, $\Gamma(1, -3)$ και $\Delta(2, -7)$.

α) Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

β) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας θ των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$

γ) Αν $E(\lambda, 3)$ και ισχύει ότι $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{\Gamma E}$, να αποδείξετε ότι $\lambda = 13$.

δ) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες διανύσματος $\vec{u}$, το οποίο να είναι αντίρροπο του $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και να έχει μέτρο 5 μονάδες.

5. Δίνεται κύκλος (K, R) και διάμετρος του $B\Gamma$. Σημείο A του κύκλου ορίζει τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{A\Gamma}$ πάνω στον κύκλο έτσι ώστε $\widehat{AB} < \widehat{A\Gamma}$. Από το K φέρουμε κάθετη στην $A\Gamma$ που την τέμνει στο Δ . Φέρουμε εφαπτόμενη $x\Gamma y$ στο σημείο Γ και στη συνέχεια από το A φέρουμε κάθετη στην εφαπτόμενη $x\Gamma y$ που τέμνει την εφαπτόμενη στο E και τον κύκλο στο σημείο Z . Να αποδείξετε ότι:

α) i) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $KA\Delta$ είναι όμοια

ii) $(AB) \cdot (KA) = (\Delta K) \cdot (B\Gamma)$

β) $(E\Gamma)^2 = (EZ) \cdot (EA)$

Τέλος Δοκιμίου

Οι εισηγητές :

Χρίστος Βαλανίδης (Β.Δ)
Γιώργος Ζαχαρικός
Εύα Τρίαρου Λοΐζου
Μιχάλης Κοντοβούρκης

Ο Συντονιστής

Χρίστος Βαλανίδης (Β.Δ)

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΑΔΑΜΟΣ ΣΕΡΓΙΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού

ΤΑΞΗ: Α'

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 15/05/2017

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.**ΟΔΗΓΙΕΣ**

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε μόνο με μπλε ανεξίτηλο μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας, όπου χρειάζεται.
- Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσης δεν θα λαμβάνονται υπόψη.

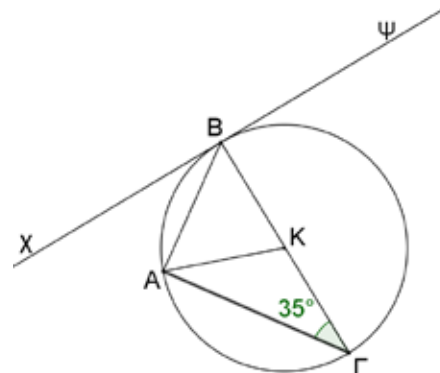
ΜΕΡΟΣ Α'**Να λύσετε και τις δέκα(10) ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε(5) μονάδες.****A1.** Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - x - 2 \notin 0$, ($x \in \mathbb{R}$)

A2. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{g} = 2\vec{a} - \vec{b}$.

A3. Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι όμοια με λόγο ομοιότητας $\frac{3}{4}$. Αν η περίμετρος του μικρότερου από τα πιο πάνω τρίγωνα είναι ίση με 7,5 cm, να υπολογίσετε την περίμετρο του μεγαλύτερου τριγώνου.

A4. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt[3]{5 - x} - 2 = 0$, $x \in \mathbb{R}$

A5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, r) με διάμετρο ΒΓ. Η ευθεία xBy είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β. Αν $\angle A\hat{G}B = 35^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες $A\hat{B}x$ και $A\hat{K}B$ (να δικαιολογήσετε πλήρως τις απαντήσεις σας).



A6. Στο Αριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης, για τον υπολογισμό της τελικής βαθμολογίας εξαμήνου, οι βαθμοί των μαθημάτων έχουν βαρύτητα ανάλογη με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος. Στο χειμερινό εξάμηνο της περασμένης ακαδημαϊκής χρονιάς ο Αλέξης πήρε στα έξι μαθήματα που επέλεξε τους βαθμούς 8, 9, 7, 5, 8 και 6. Ποια θα είναι η τελική του βαθμολογία, για το συγκεκριμένο εξάμηνο, αν το κάθε μάθημα διδασκόταν 3, 5, 4, 3, 4 και 4 περιόδους αντίστοιχα;

A7. Αν
$$\frac{\sin(90^\circ - q) \times \sin(180^\circ - q) \times \sin(270^\circ + q)}{\sin(q - 270^\circ)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$
 και $0^\circ < q < 90^\circ$, να υπολογίσετε τη γωνία q .

A8. α κέντρα δύο κύκλων που εφάπτονται εσωτερικά απέχουν 15 cm. Αν οι κύκλοι μετατοπιστούν έτσι ώστε να εφάπτονται εξωτερικά, τότε τα κέντρα τους απέχουν 63 cm. Να υπολογίσετε τις ακτίνες των δύο κύκλων.

A9. Αν το σύστημα
$$\begin{cases} x - 2y = 4 \\ 2x + y = 3 \\ x + ky = 7 \end{cases}$$
 είναι συμβιβαστό, να υπολογίσετε την τιμή

της ορίζουσας $A = \begin{vmatrix} k & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$.

A10. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + g$.

Να βρείτε:

(α) την τιμή του γ

(β) τις λύσεις της εξίσωσης

$$ax^2 + bx + g = 0$$

(γ) την τιμή του α

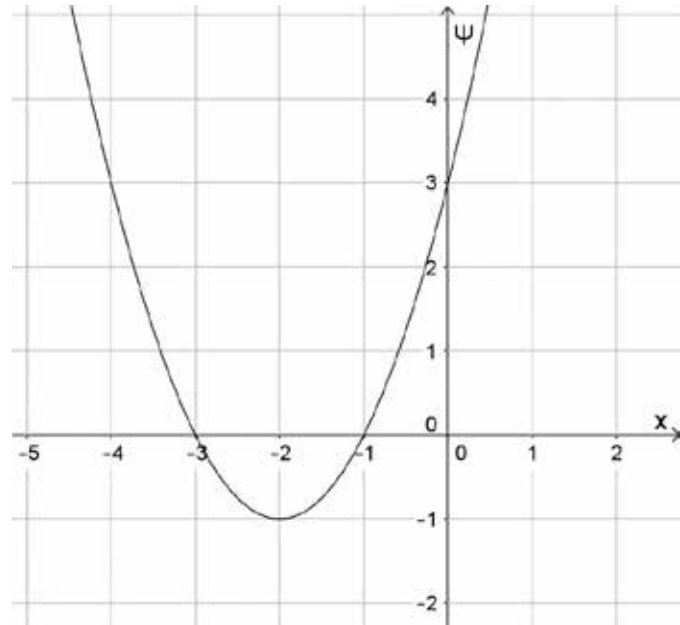
(δ) τις τιμές του x , ($x \in \mathbb{R}$), για τις

οποίες ισχύει $ax^2 + bx + g > 0$

(ε) τη μετατόπιση της παραβολής

$$g(x) = x^2 + 3 \text{ έτσι ώστε να συμπίπτει}$$

με την παραβολή $f(x)$



ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις πέντε(5) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα(10) μονάδες.

B1. Δίνεται η εξίσωση $|x^2 - (2l - 1)x + l - 2| = 0$, $l \neq 0$, με λύσεις x_1 και x_2 .

Να υπολογίσετε τις τιμές του l , $l \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση να έχει λύσεις:

(α) πραγματικές (3 μον.)

(β) ετερόσημες (4 μον.)

(γ) που ικανοποιούν τη σχέση $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3 = 0$ (3 μον.)

B2. Αν $2 < a < 5$ και $-8 < b < -3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $2a - b$ (4 μον.)

(β) $\frac{a^2 + 4}{\sqrt{1 - b}}$ (6 μον.)

B3. Ρόμβος ΑΒΓΔ έχει εξίσωση πλευράς ΒΓ: $y - 7x = -6$, εξίσωση διαγωνίου ΒΔ: $x - 3y = -2$ και κορυφή Α(6,-4). Να υπολογίσετε:

(α) τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ και Δ (6 μον.)

(β) την απόσταση του Α από την ΒΓ (2 μον.)

(γ) το εμβαδόν του ρόμβου (2 μον.)

B4. Δίνεται η παράσταση $A = (\sin w - \sin w)^2 + (\cos w - 1)^2$

(α) Να δείξετε ότι $A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2w$

(β) Να υπολογίσετε το $\sin w$ αν $A = \frac{25}{16}$

B5. Δίνεται κύκλος (Ο, R) με διάμετρο ΑΒ και Γ σημείο πάνω στην περιφέρεια του κύκλου. Στο σημείο Α φέρουμε εφαπτομένη. Η διχοτόμος της γωνίας ΑΒΓ τέμνει την ΑΓ στο Δ, τον κύκλο στο Ε και την εφαπτομένη στο Ζ. Να δείξετε ότι :

(α) η ΑΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΖΑΔ

(β) $(\Gamma B)(EZ) = (\Gamma \Delta)(AE)$

Η Διευθύντρια

Παναγιώτα Χρυσοχού-Αναστασιάδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΤΑΞΗ: Α'

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΟΜ.Π.) 2,3

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : 01-06-2017

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: Δύο(2) ώρες και τριάντα(30) λεπτά

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράφετε μόνο με μπλε ξηρό μελάνι (μόνο τα σχήματα με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
δ) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
ε) Πρέπει να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 04 (τέσσερις) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α'

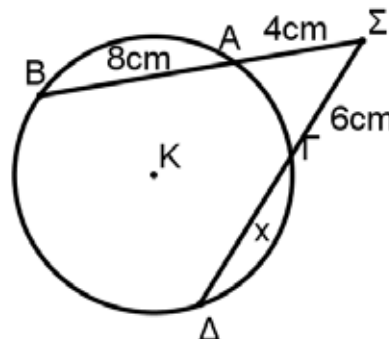
Να λύσετε και τα δέκα (10) θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$.

2. Στο διπλανό σχήμα ΣAB και $\Sigma \Gamma \Delta$ είναι δυο τυχαίες τέμνουσες του κύκλου. Να υπολογίσετε την τιμή του x .



3. Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt[5]{4x^2 + 23} = 2$

4. Αν το σύστημα $\begin{cases} 4x - 2y = 8 \\ 3x + y = 1 \\ kx + y = 5 \end{cases}$ είναι συμβιβαστό, να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 2k - 4 + 2017.$$

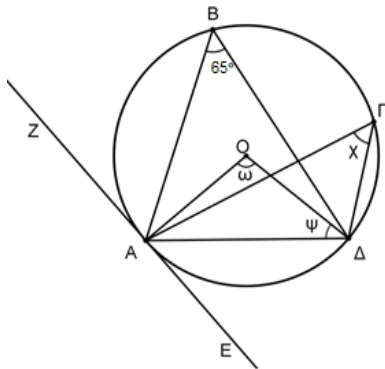
5. Δίνεται η εξίσωση $kx^2 - (2k+1)x + 5k - 1 = 0$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της πιο πάνω εξίσωσης συναρτήσει του k .

β) Να βρείτε τις τιμές του k , αν ισχύει ότι $x_1^2 + x_2^2 = 1$.

6. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x^2 - 2x - 8)(2x + 3)}{(x^2 + 1)(-x^2 + 4)} \leq 0$

7. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O,R) με γωνία $\angle ABD = 65^\circ$ και ZE εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο A. Να υπολογίσετε τα μέτρα των γωνιών $\angle X$, $\angle Y$, $\angle OAZ$ και $\angle DAE$, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας.



8. Να βρείτε την απόσταση του σημείου τομής της ευθείας $y - x = 1$ και της καμπύλης $x^2 + 4y = 0$ από την ευθεία $4x - 3y - 10 = 0$.

9. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha \times \sin^2 \beta} = \frac{1}{1 + \sin \alpha}$

10. Δίνονται οι πιο κάτω παρατηρήσεις. Αν είναι γνωστό ότι η μέση τους τιμή είναι ίση με 3, να βρείτε την τιμή του x , όπου $0 < x < \pi$.

1, 4, 4, 6, $2\sin(x)$, $\sin(x)$, 5, 1

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τα πέντε (5) θέματα. Κάθε θέμα βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.

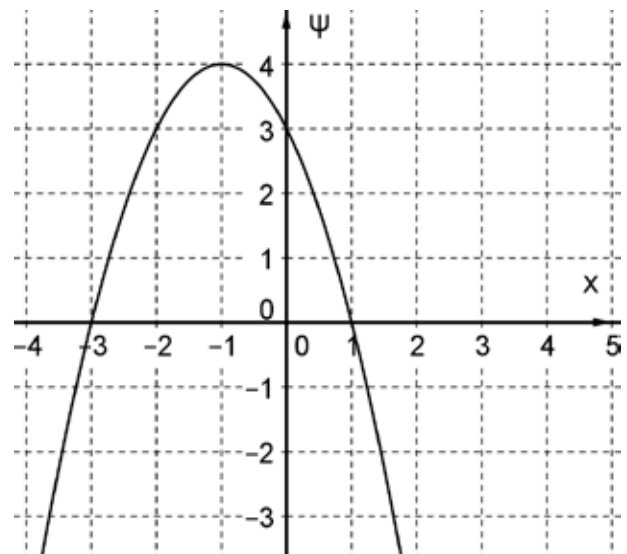
Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.

β) Το πρόσημο του a και της διακρίνουσας.

γ) Τις τιμές των α, β, γ .

δ) Την τιμή της παράστασης $B = f(S) + f(P)$, όπου S και P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$.



2. Δίνεται ότι
$$A = \frac{\operatorname{ef}(180^\circ + q) \times \operatorname{sun}(-q) \times \operatorname{ef}(270^\circ - q)}{\operatorname{hm}(90^\circ - q) \times \operatorname{sun}(360^\circ - q) - \operatorname{hm}(180^\circ + q) \times \operatorname{sun}(270^\circ + q)}$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \operatorname{sun} q$

β) Να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της παράστασης $A^2 + 2A + 3$.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές $A(3,4)$, $B(1,-2)$ και εξισώσεις των πλευρών AB : $y + 4x = 11$ και $B\Gamma$: $2y - x = -5$.

α) Να αποδείξετε ότι οι συντεταγμένες της κορυφής Γ είναι $(3, -1)$

β) Να βρείτε :

i) την εξίσωση και το μήκος της διαμέσου GM

ii) το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

4. Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η διχοτόμος AE του τριγώνου $AB\Gamma$ περνά από το κέντρο του κύκλου και τέμνει τον κύκλο στο Δ . Στο σημείο Γ φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου και από το σημείο Δ φέρουμε κάθετη ΔH στην εφαπτομένη αυτή (H είναι σημείο της εφαπτόμενης). Να δείξετε ότι:

α) Η γωνία $\overset{\cup}{HGE}$ διχοτομείται από τη $\Gamma\Delta$

β) $(GD)^2 = (DH)(DA)$.

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

α) Να υπολογίσετε:

i) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$

ii) Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$, $\vec{b}$

iii) Την τιμή του m , ώστε το διάνυσμα $\vec{g} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ m \end{pmatrix}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{b}$.

β) Να βρείτε:

i) Ένα μοναδιαίο διάνυσμα, το οποίο να είναι παράλληλο προς το $\vec{d} = 3\vec{a} - \vec{b}$

ii) Την προβολή του διανύσματος $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix}$ πάνω στο διάνυσμα $\vec{b}$.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΤΑΛΙΑΔΩΡΟΣ

ΟΙ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ:

ΖΑΜΠΑΚΙΔΗΣ ΠΟΛΥΣ

ΣΚΟΥΡΑΣ ΗΛΙΑΣ

ΚΟΥΛΑΣ ΧΡΙΣΤΟΣ

ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΥ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΓΡΑΠΤΩΝ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ****ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (5-ωρο)****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30/05/2016****ΧΡΟΝΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ**ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Να βρείτε το άθροισμα (S) και το γινόμενο (P) της εξίσωσης $3x^2 + 2x - 9 = 0$ χωρίς να τη λύσετε.

2. Δίνονται τα διανύσματα, $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\beta}$

β) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

3. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x + 3y = 4 \\ x + y^2 = 2 \end{cases}$$

4. Αν $\theta = -\frac{4}{3}$ και $270^\circ < \theta < 360^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή της πιο κάτω παράστασης:

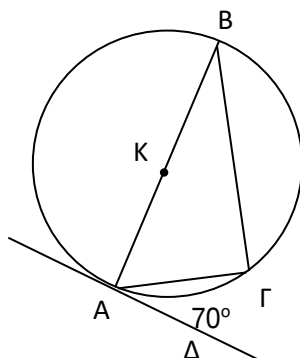
$$A = \frac{5\sin\theta - 15\cos\theta}{4\sec\theta}$$

5. Έστω οι ευθείες $\varepsilon_1: (2 - \lambda)x - \psi + 1 = 0$ και $\varepsilon_2: 3x - \psi - 5 = 0$.

- α) Να βρεθεί η τιμή του λ για την οποία οι ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες.
β) Έστω η εξίσωση $-2\lambda x^2 + (\lambda^2 - 1)x + 2 = 0$ όπου x_1 και x_2 οι ρίζες της.
Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α), να δείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει ρίζες αντίθετες.

6. Στον κύκλο (K, ρ) δίνεται το τόξο $\widehat{A\Gamma} = 70^\circ$ και η AB διάμετρος.

Να υπολογιστούν οι τρεις γωνίες του τριγώνου $BA\Gamma$ και η γωνία $\Gamma A\Delta$. (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).



7. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί x, y για τους οποίους ισχύει $1 < x < 4$ και $-5 < \psi < -1$.

Να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

- I. $x\psi$
II. $x - 2y$
III. $1 - \frac{x}{y}$

8. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 - (k+3)x + k + 2 = 0$.

- I. Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $k \in \mathbb{R}$.
II. Να βρείτε για ποιες τιμές του k το τριώνυμο έχει ρίζες αντίστροφες.
III. Να βρείτε για ποιες τιμές του k το τριώνυμο έχει ρίζα το 3.

9. Η βαθμολογία δέκα μαθητών σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών ήταν :

7, 11, 10, 13, 15, 3, 12, 11, 4, 14.

Να υπολογίσετε :

α) Τη μέση τιμή και τη διάμεσο.

β) Το εύρος, την τυπική απόκλιση και τον συντελεστή μεταβολής.

10. α) Να λυθεί η ανίσωση : $\frac{(-c+1)^2 \times (c^2+3)}{c^2+3c} \geq 0$.

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση $(\lambda - 5)x^2 - (\lambda - 5)x + 2 = 0$ **δεν έχει** πραγματικές λύσεις.

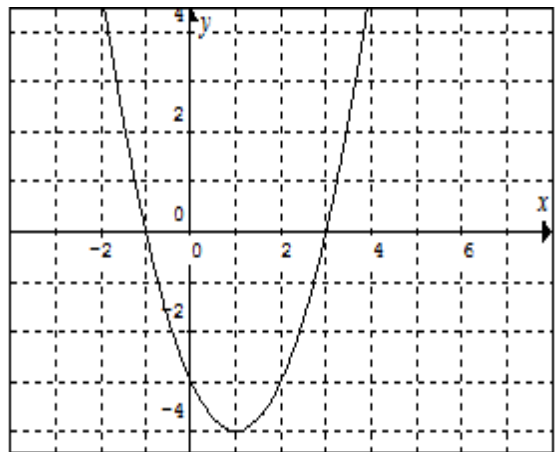
ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$f(x) = ax^2 + bx + g$, $a \neq 0$, $a, b, g \in \mathbb{R}$ να βρείτε :

- (α) i. τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$
- ii. τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$
- iii. τις συντεταγμένες του ελάχιστου σημείου
- iv. το πεδίο τιμών της συνάρτησης
- v. το πρόσημο της διακρίνουσας
- (β) i. τις τιμές των α, β, και γ
- ii. τον τύπο της $f(x)$.
- iii. το πρόσημο του γινομένου $f(a) \times f(b)$ όταν $-1 < a < 3$ και $3 < b < +\infty$.



2. α) Να δείξετε ότι " $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ ", ισχύει : $\sqrt{2\theta^x + \frac{1}{\sin^2 x}} = 1 + \theta^x$

β) Αν $\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x = a$ και $\eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = \frac{\lambda - a^2}{2}$, να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$

3. Δίνεται το τετράπλευρο ΑΒΓΔ με κορυφές Α(1,2) ,Β(3,4) , Δ(2,1).

α) Αν η εξίσωση της ΓΔ είναι $\psi = x - 1$ και η εξίσωση της ΒΓ είναι $\psi = 4$ να δείξετε ότι:

i) ΑΒ είναι παράλληλη με τη ΓΔ

ii) ΑΔ είναι κάθετη στη ΓΔ

β) Να βρείτε :

i) την εξίσωση της ΑΔ

ii) τις συντεταγμένες του σημείου Γ.

iii) το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ

4. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 2(\lambda + 1)x + 5 - \lambda$

α) Να βρείτε τη τιμή της παραμέτρου λ ώστε το τριώνυμο να είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου $f(x)$, να κατασκευάσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες

$$r_1, r_2 \text{ όπου } r_1 = 1 + \frac{1}{x_1} \text{ και } r_2 = 1 + \frac{1}{x_2}.$$

5. I. Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη ΣΑ και την τέμνουσα ΣΒΓ του κύκλου .

Αν Μ είναι το μέσο του μικρού τόξου ΒΓ και Δ το σημείο τομής της ΒΓ με την ΑΜ να αποδείξετε ότι :

α) $(SA)^2 = (SB) \cdot (SG)$

β) $(DA) \cdot (MG) = (AG) \cdot (DB).$

II. Αν Δ είναι το μέσον της ΒΓ να δείξετε ότι:

γ) $(BG)^2 = 4(DM)(DA)$

-ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ---

Η Διευθύντρια

Κ.Παπαντωνίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 17/05/2017

ΤΑΞΗ: Α΄

Διάρκεια: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράφετε με μελάνι μπλε (μόνο τα σχήματα με μολύβι).

Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού .

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από (5) σελίδες.

Το εξεταστικό δοκίμιο βαθμολογείται με 100 μονάδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε αντίστοιχες με ρητό παρονομαστή:

α. $\frac{5}{\sqrt{3}}$

β. $\frac{4}{2 - \sqrt{7}}$

2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ και $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Να υπολογίσετε:

α. τις συντεταγμένες

β. το μέτρο

των διανυσμάτων $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{\gamma}$ και $\vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{\gamma}$.

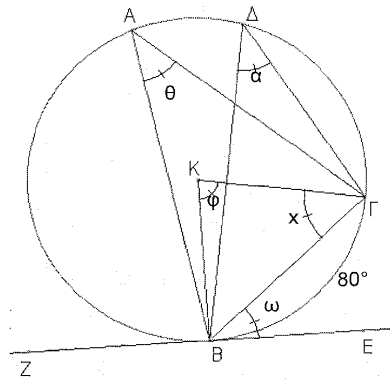
3. Ο Ανδρέας σε πέντε διαφορετικά μαθήματα για το Α΄ τετράμηνο πήρε τους βαθμούς 20, 17, 16, 18, και 14. Να βρείτε:

α. το γενικό βαθμό του Ανδρέα για τα πέντε αυτά μαθήματα .

β. αν τα μαθήματα αυτά έχουν βαρύτητα ανάλογη με τις διδακτικές περιόδους του κάθε μαθήματος, που είναι 1, 2, 2, 5 και 4 αντίστοιχα, να βρείτε το νέο γενικό βαθμό.

4. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 + 2x} \leq 0$

5. Στο διπλανό σχήμα δίνονται:
EBZ εφαπτομένη του κύκλου (K,R)
στο σημείο B και τόξο $\widehat{B\Gamma} = 80^\circ$.
Να υπολογίσετε τις γωνίες:
 $\hat{\gamma}$, $\hat{\alpha}$, $\hat{x}$, $\hat{w}$ και $\widehat{KBZ}$.



6. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές Α(1,2), Β(3,4) και Γ(0,3).
- α. Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο και
β. Να βρείτε την εξίσωση της διαμέσου ΓΜ.
7. Από σημείο Σ εκτός κύκλου φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα ΣΓ και την τέμνουσα ΣΑΒ. Να δείξετε ότι ισχύει η σχέση $(\Sigma\Gamma)^2 = (\Sigma\text{Α})(\Sigma\text{Β})$. Αν επιπλέον είναι $\Sigma\Gamma = 6\text{ cm}$ και $\text{ΑΒ} = 5\text{ cm}$, να βρείτε το μήκος του ΣΑ.
8. Να βρείτε τις τιμές των παραμέτρων λ και μ, ώστε η εξίσωση $(2\lambda - 3)x + \mu = \lambda^2 - \mu x$ να είναι αόριστη.

9. Αν $\sin \theta = -\frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{-6\epsilon\varphi(\theta - \pi) - 5\eta\mu\frac{\pi}{2} - \theta\ddot{\varphi}}{2\sigma\epsilon\mu\theta - 4\sigma\varphi\theta}$$

10. Αν $-3 < x < -2$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

$\alpha. x + 3y$

$$\beta. - \frac{3x}{4y}$$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$

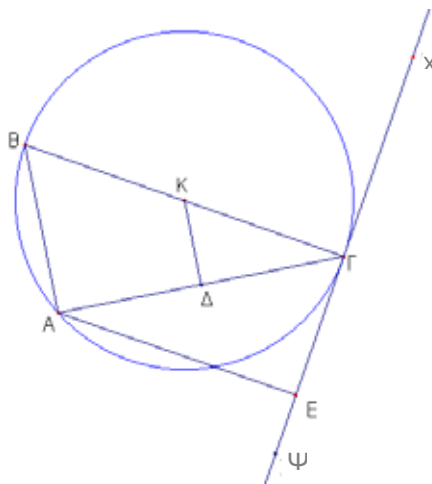


Να βρείτε :

- α. το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της παραβολής $f(x)$
 - β. την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και την κορυφή της παραβολής $f(x)$
 - γ. τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και τις τιμές των a , b και γ 
 - δ. τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 3$
 - ε. τις συντεταγμένες της κορυφής της $y = f(x - 1)$
2. Οι πλευρές AB και $B\Gamma$ του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ δίνονται από τις εξισώσεις $2x - 3y - 1 = 0$ και $3x - y + 2 = 0$, αντίστοιχα. Αν οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου τέμνονται στο σημείο $E(1, 2)$, να βρείτε:
- α. τις συντεταγμένες των κορυφών του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$
 - β. την απόσταση μεταξύ των παράλληλων ευθειών AB και $\Gamma\Delta$
 - γ. το μέτρο (σε μοίρες) της οξείας γωνίας που σχηματίζουν οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου
 - δ. το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

3. Δίνεται κύκλος (K,R) και $B\Gamma$ μια διάμετρος του. Αν η $\chi\Gamma\psi$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ , $K\Delta \perp A\Gamma$ και $AE \perp \chi\Gamma\psi$ να δείξετε ότι :

- α. τα τρίγωνα $AB\Gamma$, $AK\Delta$ είναι όμοια
 β. $(AB)(KA) = (\Delta K)(B\Gamma)$
 γ. $(A\Gamma)^2 = (AE)(B\Gamma)$



4. Στην οθόνη ενός ηλεκτρονικού υπολογιστή εμφανίζεται η προσομοίωση ενός τραπέζιου μπιλιάρδου, η οποία είναι προσαρμοσμένη σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Η αρχική θέση μιας μπάλας είναι στο σημείο K και η διαδρομή που ακολουθεί, με σκοπό να χτυπήσει μια δεύτερη μπάλα που βρίσκεται στο σημείο N , είναι η $K \rightarrow \Lambda \rightarrow M \rightarrow N$, όπως φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.

- α. Να βρείτε τα διανύσματα $\overrightarrow{K\Lambda}$, $\overrightarrow{\Lambda M}$ και $\overrightarrow{MN}$, που αντιπροσωπεύουν τη διαδρομή της μπάλας.
 β. Να αποδείξετε ότι οι διαδρομές $K\Lambda$ και MN είναι παράλληλες.
 γ. Να αποδείξετε ότι $\hat{\Gamma}K = \hat{B}M$.
 δ. Μετά τη σύγκρουση, η δεύτερη μπάλα φεύγει από τη θέση N , ακολουθώντας διαδρομή, η οποία είναι κάθετη στο $\overrightarrow{MN}$ και περιγράφεται από το διάνυσμα $\begin{pmatrix} K \\ 3 \end{pmatrix}$.
 Να υπολογίσετε την τιμή του K .

5. α. Να βρείτε το είδος των ριζών της εξίσωσης:

$$(\sigma\varphi\theta)x^2 - (2\sigma\tau\epsilon\mu\theta)x + \epsilon\varphi\theta = 0, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

β. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης, να δείξετε ότι:

i. $x_1 + x_2 = 2\tau\epsilon\mu\theta$

ii. $x_1 x_2 = \epsilon\varphi^2\theta$

γ. Να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες:

$$\rho_1 = 2x_1 - x_2 \quad \text{και} \quad \rho_2 = 2x_2 - x_1$$

Ο Διευθυντής

Γιώργος Ιωσηφίδης

ΛΥΚΕΙΟ ΛΑΤΣΙΩΝ
ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2016 - 2017

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΤΑΞΗ: Α'

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/5/2017

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____ ΤΜΗΜΑ: _____ ΑΡ: _____

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ.

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Να λύσετε όλα τα θέματα στις κόλλες απαντήσεων.
 2. Να γράφετε μόνο με **μπλε μελάνι**.
 3. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
 4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού (υγρού ή ταινίας/Tipp Ex).
 5. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής με σφραγίδα του σχολείου εκτός των ασκήσεων με διαφορετική οδηγία.

ΜΕΡΟΣ Α': Περιλαμβάνει 10 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται η εξίσωση $5x^2 + 10x - 2 = 0$, με ρίζες x_1, x_2 . Χωρίς να λύσετε την εξίσωση:

- α) Να βρείτε το είδος των ριζών της.
β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $5x_1x_2 + 3x_1 + 3x_2$.

2. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

α) $A = \frac{12}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ β) $B = \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(2, -5)$ και σχηματίζει γωνία 120° με τον άξονα των τετμημένων.

4. Να υπολογίσετε **χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής**, την τιμή της παράστασης K:

$$K = \frac{\sin 152^\circ \cdot \sin(180^\circ - \omega) \cdot \sin(270^\circ - \omega)}{\sin(360^\circ - \omega) \cdot \sin(90^\circ + \omega) \cdot \sin 62^\circ}.$$

5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{v} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{2}\vec{j}$. Να υπολογίσετε τους αριθμούς α, β για τους

οποίους ισχύει η ισότητα: $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \frac{8}{4}\vec{i} + \frac{8}{4}\vec{j}$.

6. Σε ορθογώνιο τρίγωνο KLM ($\hat{K} = 90^\circ$) φέρουμε το ύψος KD και από το D φέρουμε $DZ \perp KM$ (Z πάνω στην KM). Να αποδείξετε ότι $(KL)(DZ) = (KM)(KZ)$.

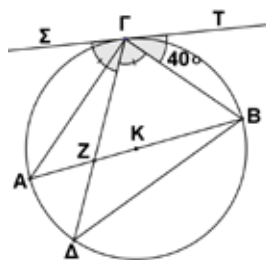
7. Αν $-11 < x < -3$ και $2 < y < 8$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

$$x + y \quad \text{και} \quad \frac{x^2}{y}.$$

8. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2 - 9)(x^2 - 3x - 10)}{6x - 2x^2} \leq 0$.

9. Στο διπλανό σχήμα το K είναι το κέντρο του κύκλου, η ST είναι εφαπτομένη του στο σημείο Γ και η $\Gamma\Delta$ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\Sigma\hat{\Gamma}B$. Αν η γωνία $T\hat{\Gamma}B = 40^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου BDZ .

Να μεταφέρετε το σχήμα στις κόλλες απαντήσεων και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



10. Το πιο κάτω σύστημα είναι συμβιβαστό.

$$x + 2y = 10$$

$$5x - 3y = 11$$

$$2\mu x - \mu y = 3\mu + 14$$

Οι βαθμοί των εξετάσεων ενός φοιτητή στο μάθημα της φιλοσοφίας είναι 7, 5 και μ . Οι δύο πρώτες εξετάσεις έχουν βαρύτητα 20% η κάθε μία και η τρίτη εξέταση 60%.

Να βρείτε:

α) Την τιμή του μ .

β) i) Την τελική βαθμολογία του φοιτητή στο μάθημα της φιλοσοφίας.

ii) Την βαθμολογία που θα έπαιρνε ο φοιτητής αν όλες οι εξετάσεις είχαν την ίδια βαρύτητα.

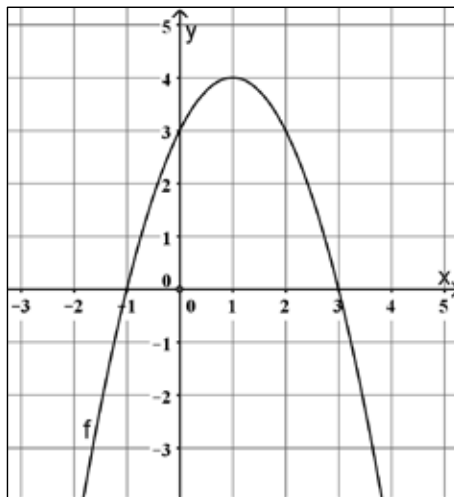
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β'

ΜΕΡΟΣ Β': Περιλαμβάνει 5 θέματα.**Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ με } \alpha \neq 0.$$

Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

α) Το πρόσημο του a και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.**β)** Την τιμή του γ και το πρόσημο της Διακρίνουσας.**γ)** Τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 0$.**δ)** Την τιμή των παραστάσεων $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{6\beta - 5\gamma}{3\alpha}$.**ε)** Αν K είναι η κορυφή της παραβολής και
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ να δείξετε ότι } OK \text{ είναι κάθετο στο}$$
διάστημα $\vec{u}$, όπου O είναι η αρχή των αξόνων.

2. Τα σημεία
- $A(-1, 4)$
- και
- $B(7, 6)$
- είναι διαδοχικές κορυφές ενός ρόμβου
- $ABGD$
- . Η εξίσωση μίας

διαγωνίου του ρόμβου είναι $y = x - 1$. Να βρείτε:**α)** την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του ρόμβου**β)** το σημείο τομής των διαγωνίων του ρόμβου**γ)** τις συντεταγμένες των δύο άλλων κορυφών του ρόμβου**δ)** το εμβαδόν του ρόμβου**ε)** την εφαπτομένη της γωνίας $\hat{DAB}$

3. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{\tan(\pi - \omega) \times \sin(-\omega) \times \cos(4\pi - \omega)}{\sin \frac{3\pi}{2} - \omega \times \tan(2\pi - \omega) \times \sin(\pi - \omega)} \quad \text{και} \quad B = \frac{1 + \varepsilon \phi \omega}{\tan^2 \omega} + \frac{1 - \sigma \phi \omega}{1 + \sigma \phi^2 \omega}$$

α) Να δείξετε ότι: $A = -1$ και $B = -A$.

(Μον.7)

β) Αν $\frac{1 + \varepsilon \phi \omega}{\tan^2 \omega} + \frac{1 - \sigma \phi \omega}{1 + \sigma \phi^2 \omega} = 2 \eta \mu \chi$, $0 < \chi < 2\pi$, να βρείτε τις τιμές του χ .

(Μον.3)

4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

α) (i) Να βρείτε την οξεία γωνία $\hat{a}$ των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

(ii) Να υπολογίσετε την προβολή του διανύσματος $\vec{b}$ πάνω στο $\vec{a}$.

β) Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - 4)x = (\lambda^2 - 5\lambda + 6)$. Αν $k \in \mathbb{R}$ είναι η τιμή της παραμέτρου λ για την οποία η εξίσωση είναι αδύνατη, να δείξετε ότι το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = (\vec{a} \times \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) + k\vec{a}$ είναι ίσο με $2\sqrt{170}$ μονάδες.

5. Δίνεται κύκλος (L, Γ) , EZ εφαπτομένη του στο σημείο G και $BE \perp EZ$.

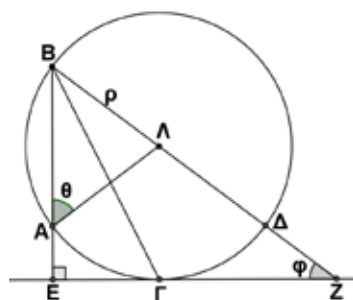
α) Να αποδείξετε ότι $(BG)^2 = (BE)(BD)$.

β) Να αποδείξετε ότι BG διχοτόμος της γωνίας $\widehat{EBZ}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $\hat{a} + \hat{b} = 90^\circ$.

δ) Αν $GZ = 6\text{cm}$ και $ZD = 3\text{cm}$, να υπολογίσετε την ακτίνα ρ του κύκλου.

Να μεταφέρετε το σχήμα στις κόλλες απαντήσεων και να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



ΤΕΛΟΣ

Η Διευθύντρια

Formatted: Font: (Default) Tahoma, Bold, Greek

Παρασκευούλα Κωνσταντινίδου

Formatted: Font: (Default) Tahoma, Greek

ΠΕΡΙΦΕΡΕΙΑΚΟ ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΚΑΙ ΛΥΚΕΙΟ ΛΕΥΚΑΡΩΝ
Σχολική χρονιά 2016 – 2017

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: Τρίτη, 23.05.2017

Ωρα: 7.45 π. μ.

Διάρκεια: 2 ώρες

Ονοματεπώνυμο: _____ Τμήμα: ____ Αρ: ____

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράφετε μόνο με μπλε πένα. (Τα σχήματα με μολύβι)
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.
3. Επιτρέπεται η χρήση μη-προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
4. Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
5. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
6. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **5** σελίδες.
7. Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

ΜΕΡΟΣ Α΄: (50 μονάδες)

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

- 1.** Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:

(α) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.

(β) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma}$ αν το $\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

- 2.** Αν η εξίσωση $3x^2 + 6x + 2 = 0$ έχει ρίζες x_1, x_2 , να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων (χωρίς να λύσετε την εξίσωση):

(α) $2x_1 + 2x_2$

(β) $x_1^3 x_2 + x_1 x_2^3$

- 3.** Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από τα σημεία $A(2,6)$ και $B(-2,4)$.

4. Αν $13hmw - 5 = 0$, $\frac{\rho}{2} < w < \rho$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{12efw - 26sunw}{12temw}$$

5. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις:

$$(\alpha) \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[4]{3}$$

$$(\beta) \sqrt[8]{16\kappa^2\lambda^3\mu} \cdot \sqrt[8]{\kappa^6\lambda^{13}\mu^3},$$

$$\kappa, \lambda, \mu \geq 0$$

6. Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x-2)^2}{x} \leq 1$.

7. Ρωτήθηκαν 10 μαθήτριες μιας τάξης τι μέγεθος παπούτσια φορούν και πήραμε τις εξής απαντήσεις:

36, 38, 39, 40, 38, 39, 37, 38, 37, 38.

Να υπολογίσετε:

(α) τη μέση τιμή,

(β) την επικρατούσα τιμή,

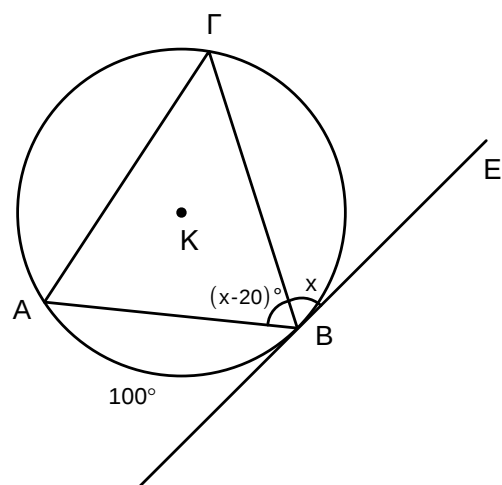
(γ) τη διάμεσο και

(δ) την τυπική απόκλιση του μεγέθους των παπουτσιών των μαθητών.

8. Σε κύκλο (K, R) φέρουμε την εφαπτομένη BE στο σημείο B.

Αν το τόξο $AB = 100^\circ$, $\widehat{EBG} = x^\circ$, και

$\widehat{ABG} = (x - 20)^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ABG.



9. Ένα κομμάτι ύφασμα έχει μήκος $2m$ και πλάτος $1,30m$. Με αυτό το ύφασμα θα κατασκευαστεί ένα διαφημιστικό πανό. Αν το ύφασμα που θα χαθεί κατά την κατασκευή του πανό δεν ξεπερνά τα $10cm$ για κάθε διάσταση, να υπολογίσετε:

(α) μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται η περίμετρος του πανό

(β) μεταξύ ποιων αριθμών περιέχεται το εμβαδόν του πανό.

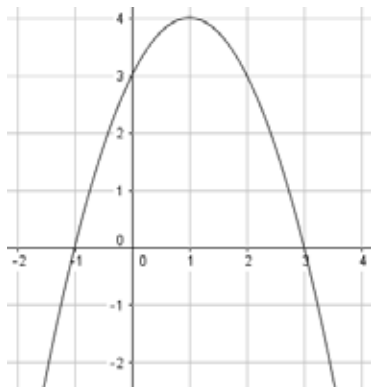
10. Να λύσετε και να διερευνήσετε την πιο κάτω εξίσωση για τις διάφορες πραγματικές τιμές του α .

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & 2 & 0 \\ 2\alpha x & x & 2 \\ 4 & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Μέρος Β:(50 μονάδες)

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$.



Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της,
(β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της,
(γ) τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής και να τη χαρακτηρίσετε,
(δ) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 0$,
(ε) τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = 3$,

(στ) τις τιμές των α, β, γ .

(ζ) το πρόσημο της παράστασης $\frac{f(-2) \times f(-4)}{f(4)}$

2. (α) Να αποδείξετε ότι:

$$(α) (i) \frac{\sin(270^\circ - x)\cos(270^\circ - x)\sin(360^\circ - x)\tan(90^\circ + x)}{\sin(90^\circ - x)\sin(360^\circ - x)} = -\sec x,$$

με $0^\circ < x < 90^\circ$.

$$(ii) (\cos x - \tan x)^2 = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$$

(β) Να βρείτε τη γωνία θ , αν $(\cos x - \tan x)^2 = \frac{1}{3}$, $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$.

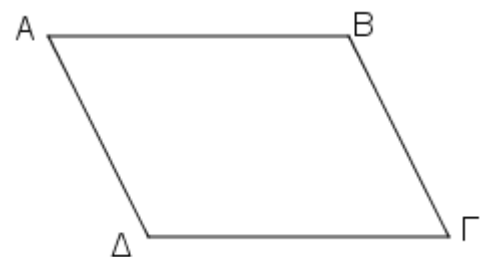
(α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(β) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας θ των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

(γ) Αν τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ και $\vec{v} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, να βρείτε το λ .

(δ) Να βρείτε ένα διάνυσμα $\vec{w}$ αντίρροπο προς το $\vec{a}$, το οποίο να έχει διπλάσιο μέτρο από το $\vec{a}$.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O και κορυφές $\Gamma(6,1)$ και $\Delta(2,1)$. Οι εξισώσεις των διαγωνίων του είναι $AG: 3x + 5y = 23$ και $B\Delta: x - y = 1$.



(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του κέντρου O του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

(β) Να βρείτε το μήκος του ύψους BK του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

(γ) Αν Z είναι το μέσο της πλευράς $\Gamma\Delta$ και E είναι σημείο του επιπέδου τέτοιο ώστε το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ να είναι ρόμβος, να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες του σημείου E ,

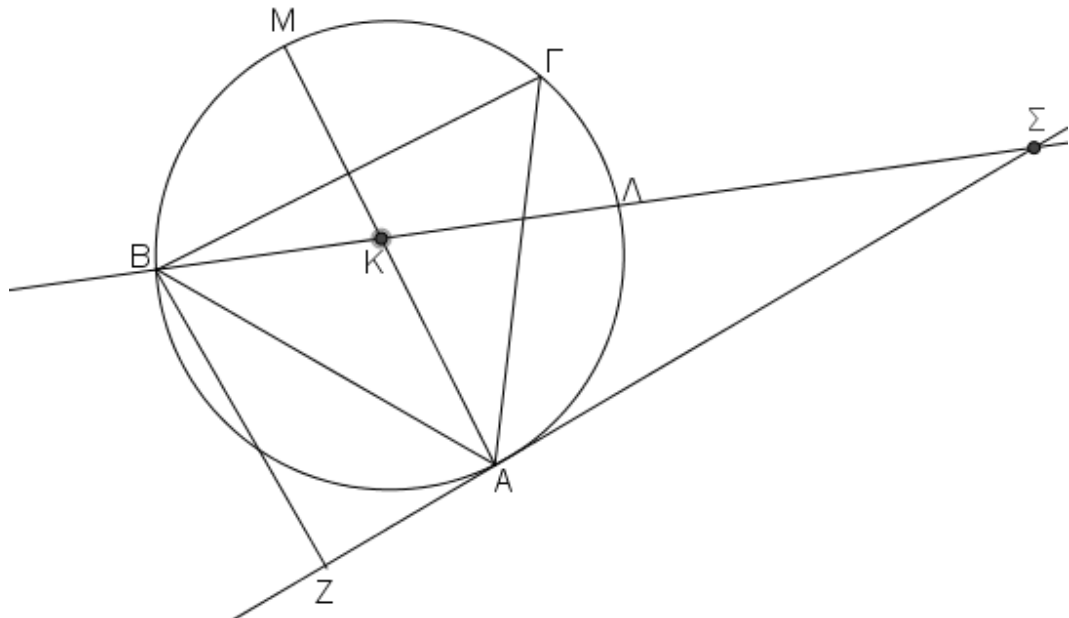
ii. το εμβαδόν του ρόμβου.

5. Δίνεται κύκλος (K, R) . Από εξωτερικό σημείο Σ φέρουμε την εφαπτομένη ΣA και την τέμνουσα $\Sigma \Lambda B$. Οι χορδές AB και $A\Gamma$ είναι ίσες και τα τόξα $\widehat{BM} = \widehat{\Gamma M}$. Η διάμετρος AM τέμνει τη χορδή $B\Gamma$ στο N .

(α) Αν BZ κάθετη στη ΣA να δείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα ABZ και ΓNA είναι όμοια,
- ii. $AZ = \Gamma N$.

(β) Αν $\Sigma B = 17cm$, $BZ = 8cm$ και $AB = 10cm$, να υπολογίσετε το μήκος του $\Sigma \Lambda$.



ΛΥΚΕΙΟ ΛΙΝΟΠΕΤΡΑΣ

ΣΧΟΛΙΚΗ ΧΡΟΝΙΑ 2016-2017

**ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΜΑΙΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**

ΤΑΞΗ: Α' Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΩΡΑ: 07:45 – 10:15

ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο. Τα σχήματα με μολύβι.
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
3. Επιτρέπεται η χρήση σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνεται $A = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$. Να δείξετε ότι $5 - \sqrt{6}A = 3$

2. Να λύσετε την ανίσωση: $(x^2 - 2x - 3)(1+x)^3 \geq 0$

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

(α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$

(β) Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

4. Αν $\sin \theta = \frac{3}{4}$ και $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$, να βρείτε τις τιμές των $\eta \mu \theta$, $\tau \epsilon \mu \theta$, $\epsilon \varphi(-\theta)$ και $\sigma \upsilon \nu(\pi - \theta)$

5. Το σημείο $A\left(\frac{5}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ είναι το ελάχιστο σημείο της παραβολής με εξίσωση $y = x^2 + \beta x + \gamma$. Να δείξετε ότι $\beta = -5$ και $\gamma = 4$.

6. Τρίγωνο ΑΒΓ έχει κορυφές $A(3, 6)$, $B(7, 2)$ και $\Gamma(3, -2)$. Να αποδείξετε ότι είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

7. Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta \mu(\pi - a) \times \sigma \varphi a - \sigma \upsilon \nu^3 a}{\sigma \upsilon \nu a \times \sigma \varphi a + \eta \mu^3(4\pi - a)} = \epsilon \varphi a$

8. Να βρείτε τις τιμές του a ώστε το σύστημα

$$\begin{cases} x + 2y = 8 \\ 2x - y = 1 \\ (a - 1)x + (5a - 1)y = 18 \end{cases} \text{ να είναι συμβιβαστό.}$$

9. Αν $1 < x < 2$ και $-2 < y < -1$ να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών βρίσκονται οι

παραστάσεις: $A = 2x + 3y$, $B = x \times y$ και $\Gamma = -\frac{2x}{3y}$

10. Τρίγωνο ΔEZ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, ρ) . Φέρουμε τις εφαπτομένες του κύκλου στα σημεία Δ, E, Z που τέμνονται ανά δύο στα σημεία K, Λ και M . Αν $\angle K = 60^\circ$ και $\angle M = 80^\circ$, να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΔEZ .

ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Για την παραβολή $f(x) = 2x^2 - 9x + 4$

(α) Να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας και τις συντεταγμένες του μέγιστου ή ελάχιστου σημείου της.

(β) Να κατασκευάσετε την γραφική της παράσταση, στην οποία θα φαίνονται τα σημεία τομής με τους άξονες και το ακρότατο σημείο.

(γ) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $2x^2 - 9x + 4$ όταν $1 < x < 3$.

2. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς που πήραν οι 20 μαθητές μιας τάξης σε ένα διαγώνισμα στα Μαθηματικά.

Βαθμός (xi)	8	10	12	15	16	18	19
Αριθμός μαθητών (fi)	3	5	3	4	1	2	2

Να βρείτε:

(α) Την επικρατούσα τιμή (β) την μέση τιμή (γ) την τυπική απόκλιση και (δ) τον συντελεστή μεταβλητότητας, των παρατηρήσεων.

3. Δίνονται τα σημεία $A(8,3)$ και $B(6,-1)$

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Γ που βρίσκεται στον άξονα $x\phi$, έτσι ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$ να είναι ίσο με $7\tau\mu$.

(β) Αν το ένα σημείο είναι το $\Gamma(10,0)$ να βρείτε σημείο Δ του επιπέδου ώστε το τετράπλευρο $A\Gamma B\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

4. **(α)** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - (\lambda + 1)x + \lambda = 0$, να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού που να έχει ρίζες τις $\rho_1 = x_1^2$ και $\rho_2 = x_2^2$.
- (β)** Αν η εξίσωση που σχηματίστηκε είναι η $x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda^2 = 0$ να αποδείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές για κάθε τιμή του λ και να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση έχει ρίζες ίσες.
5. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας Α, η οποία συναντά την πλευρά ΒΓ στο Δ και τον κύκλο στο Ε.
Να αποδείξετε ότι:
- (α)** $(AB)(AG) = (AD)(AE)$
- (β)** $(EB)^2 = (EA)(ED)$
- (γ)** το τρίγωνο ΕΒΓ είναι ισοσκελές.

Διευθύντρια

Κλειώ Σαββίδου

ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Γεωργίου Χριστίνα

Γεωργίου Γιώργος

Χριστοδούλου Χρίστος

Παπαμιχαήλ Ελενα

Μιχαήλ Χριστοδούλα

Μαλακτού Μαίρη

ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

Ιωάννου Γ.

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Κλειώ Σαββίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23.05.2017

ΤΑΞΗ: Α' (Προσανατολισμού)
ΧΡΟΝΟΣ: 2.30'

100	20

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:

ΒΑΘΜΟΣ ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:..... **ΤΜΗΜΑ:**.....**ΑΡ.:**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράψετε τις απαντήσεις σας πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία διαδικασία.
3. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
4. Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
5. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δεκατέσσερις (14) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

A1. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 9x + 18 \leq 0$.

A2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες μοναδιαίου διανύσματος που είναι ομόρροπο με το διάνυσμα $\vec{\gamma} = \vec{\alpha} + \vec{\beta}$.

A3. Ένας φοιτητής πήρε σε τρία διαφορετικά μαθήματα τους βαθμούς 5, 6 και 9. Τα μαθήματα έχουν βαρύτητα, ανάλογα με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος που είναι 4, 3 και 3 αντίστοιχα. Να υπολογίσετε τον σταθμισμένο μέσο όρο της βαθμολογίας του φοιτητή.

A4. Αν $\eta\mu\omega = -\frac{3}{5}$, $180^\circ < \omega < 270^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$A = 20\sigma\upsilon\nu\omega - 9\sigma\phi\omega$$

A5. Αν $2 < x < 5$ και $-3 < y < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

(α) $2x + y$

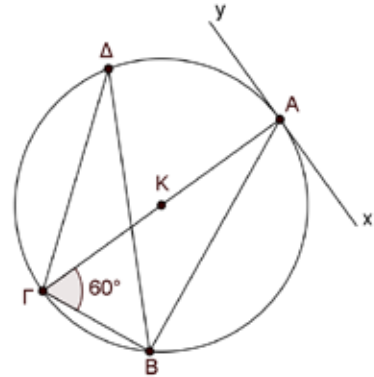
(β) $x \times y$

A6. Στο διπλανό σχήμα η ΑΓ είναι διάμετρος του κύκλου (Κ,Ρ) και η ευθεία xAy είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Α. Αν $\widehat{A\Gamma B} = 60^\circ$, να υπολογίσετε, με πλήρη αιτιολόγηση των απαντήσεών σας:

(α) $\widehat{x\hat{A}B}$

(β) $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$

(γ) $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$



A7. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2 + \lambda - 2)x = \lambda^2 - 4$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ για την οποία η εξίσωση:

(α) είναι αόριστη

(β) έχει μοναδική λύση την $x = 2$.

A8. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με συντεταγμένες κορυφών Α(1,2), Β(4,4) και Γ(7,1).

(α) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς ΑΔ.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της διαγωνίου ΒΔ.

A9. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}$$

A10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ φέρουμε $DE \parallel BG$, όπου Ε σημείο της ΑΓ. Από το σημείο Δ φέρουμε $DZ \parallel BE$, όπου Ζ σημείο της ΑΓ.

(α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{AE}{EG} = \frac{AZ}{ZE}$

(β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΖ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΕ και ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι όμοιο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

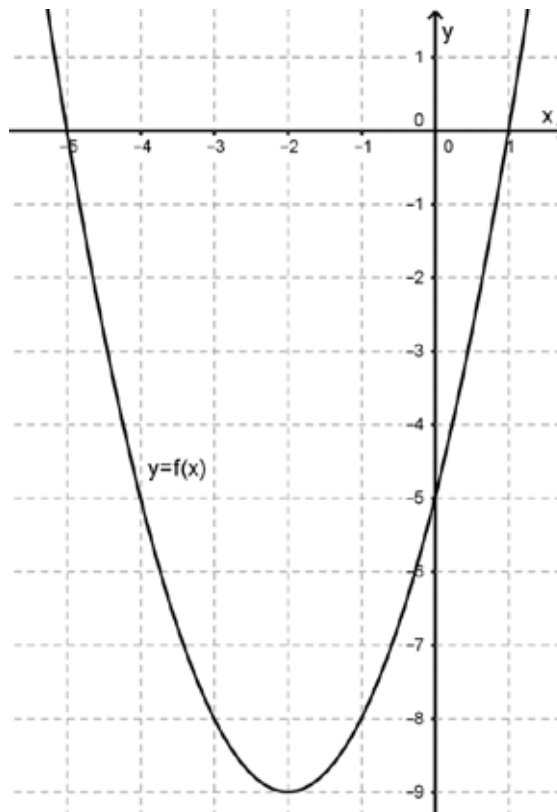
(γ) Να δείξετε ότι: $(AE)^2 = (AZ)(AG)$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

B1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$, $a, b, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

- (α) το σύνολο τιμών της $y = f(x)$
- (β) τις συντεταγμένες της κορυφής και την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- (γ) τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$
- (δ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 0$
- (ε) τις τιμές των a, b, γ
- (ζ) την τιμή της παράστασης:
$$A = \frac{f(-4) + f(-1)}{2a + b + \gamma}$$
- (η) τις ρίζες της εξίσωσης:
 $[f(x) + 8]^3 = 27$



B2. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κορυφές Α(3,3), Γ(6,-1) και πλευρά (ΑΒ): $x + 2y = 9$.

- (α) Να βρείτε το μήκος της πλευράς ΒΓ.
- (β) Να δείξετε ότι η διαγώνιος ΑΓ του ορθογωνίου παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, έχει εξίσωση $4x + 3y = 21$.
- (γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας, που σχηματίζεται μεταξύ της διαγωνίου ΑΓ και της πλευράς ΑΒ.
- (δ) Αν επιπλέον η κορυφή Β έχει συντεταγμένες (7,1):
 - (i) να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ
 - (ii) να βρείτε το συμμετρικό σημείο της κορυφής Β, ως προς τη διαγώνιο ΑΓ.

B3. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ στο οποίο είναι $\vec{AB} = 2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $\vec{AD} = \vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$ και τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι τέτοια, ώστε η γωνία μεταξύ τους είναι ίση με $\frac{\pi}{3}$ rad και $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1$.

- (α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.
- (β) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$.
- (γ) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
- (δ) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας Α του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ.
- (ε) Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{AG}$ και $\vec{DB}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

B4. Από σημείο Ο εκτός του κύκλου (Κ, R) φέρουμε την εφαπτομένη ΟΑ και την τέμνουσα ΟΒΓ. Η τέμνουσα ΟΒΓ δεν περνά από το κέντρο του κύκλου και $(OB) < (OG)$. Να αποδείξετε τα πιο κάτω δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας:

- (α) $(OA)^2 = (OB) \cdot (OG)$
- (β) $\frac{(AB)^2}{(AG)^2} = \frac{OB}{OG}$

B5. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu(\pi - \omega) \cdot \phi\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sin(\omega - 2\pi)}{\epsilon\phi(\pi + \omega) \cdot \phi\left(\frac{\pi}{2} + \omega\right) \cdot \eta\mu(-\omega)}$.

- (α) Να δείξετε ότι $A = \eta\mu\omega$.
- (β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $Ax^2 + 3x + \epsilon\phi\omega \cdot \sin\omega = 0$, $\omega \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $\kappa\hat{=}$, έχει δύο ρίζες πραγματικές, άνισες και αντίστροφες.
- (γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $Ax^2 + 3x + \epsilon\phi\omega \cdot \sin\omega = 0$, τότε χωρίς να λύσετε την εξίσωση αυτή, να δείξετε ότι η εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες $\rho_1 = 2x_1 + 1$ και $\rho_2 = 2x_2 + 1$, είναι $Ax^2 + 2(3 - A)x + 5A - 6 = 0$.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Οι Διδάσκοντες

Ιωάννου Χρίστος, Β.Δ.
 Δημητρίου Αντώνιος
 Φωτιάδου Καλλισθένη
 Βολακάκη Μαρία
 Ματθαίου Κυριάκος

Η Συντονίστρια

Χρυσάνθη Αριστοδήμου, Β.Δ.

Ο Διευθυντής

Πέτρος Λοιζίδης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α΄ προσανατολισμού

Ημερομηνία: 17/5/2017

Χρόνος: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που

φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

β) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από έξι (6) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τα 10 θέματα του Μέρους Α΄.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Θέμα 1:

Να γράψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.

(α) $\frac{4}{\sqrt{2}} =$

(β) $\frac{1}{3 - \sqrt{6}} =$

Θέμα 2:

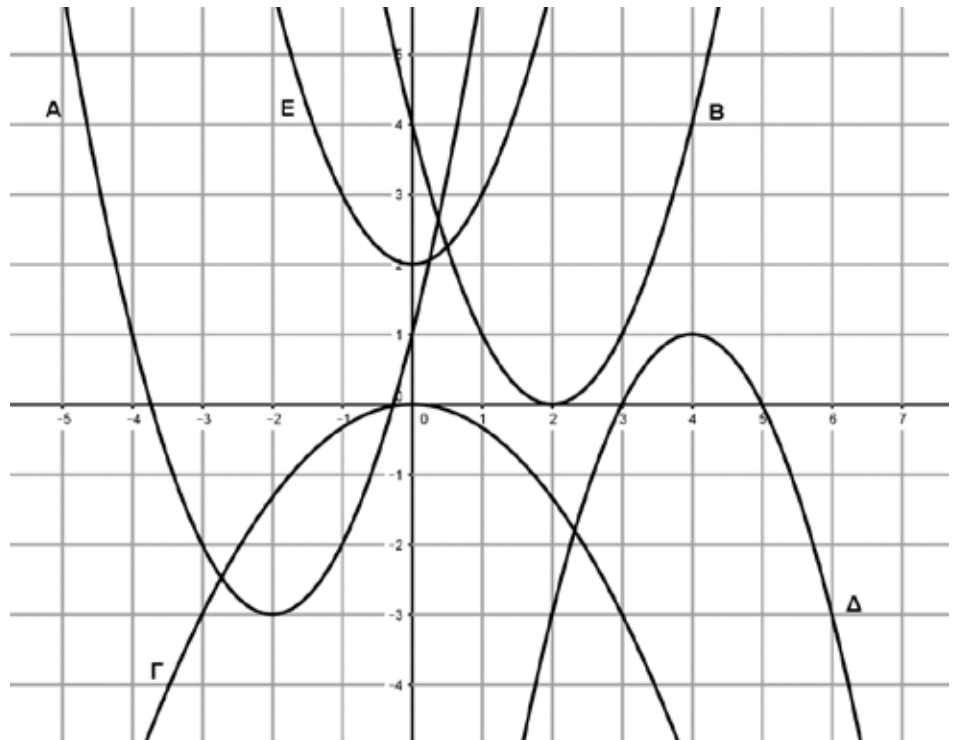
Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 - 4x \geq 0$$

Θέμα 3:

Στο πιο κάτω διάγραμμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων Α, Β, Γ, Δ και Ε. Να αντιστοιχίσετε την καθεμία με τον αντίστοιχο της τύπο.

1	$\psi = x^2 - 4x + 4$
2	$\psi = -\frac{x^2}{3}$
3	$\psi = x^2 + 4x + 1$
4	$\psi = -x^2 + 8x - 15$
5	$\psi = x^2 + 2$

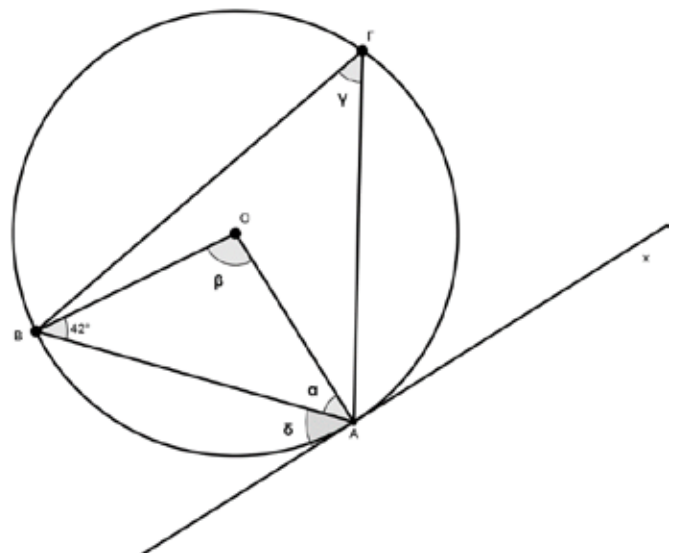


Θέμα 4:

Ένας μαθητής στο μάθημα της Χημείας πήρε στα διαγωνίσματα 14 και 16 και στα πειράματα 18. Αν το κάθε διαγώνισμα έχει βαρύτητα 40% και τα πειράματα 20% στη συνολική βαθμολογία, να υπολογίσετε το σταθμισμένο μέσο της βαθμολογίας του μαθητή.

Θέμα 5:

Στο διπλανό σχήμα η Αχ εφαπτόμενη του κύκλου (Ο, R) στο Α και $\widehat{OBA} = 42^\circ$. Να υπολογίσετε τις γωνίες α, β, γ και δ, δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



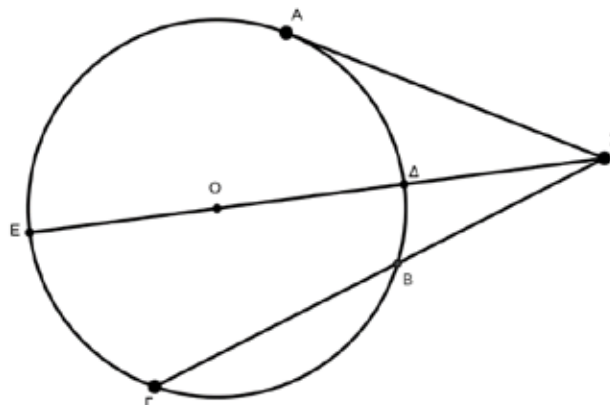
Θέμα 6:

Για ποιες τιμές του μ , $\mu \in \mathbb{R}$ το πιο κάτω σύστημα δεν έχει καμία λύση:

$$\begin{cases} 4x - 2y = 1 \\ y = (\mu^2 + \mu)x - 3 \end{cases}$$

Θέμα 7:

Δίνεται κύκλος (O, R) με $SA = 6\text{cm}$ (SA εφαπτομένη του κύκλου), $BF = 5\text{cm}$ και $SD = 3\text{cm}$. Να υπολογίσετε την SB και την ακτίνα R του κύκλου.



Θέμα 8:

Να αποδείξετε τη ταυτότητα:

$$\frac{\sin\theta \times \varphi^2\theta}{1 + \sin\theta} + 1 = \tan\theta$$

Θέμα 9:

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{\gamma}$ που έχει μέτρο 5 μονάδες και είναι παράλληλο στο διάνυσμα $(\vec{a} + \vec{b})$.

Θέμα 10:

Δίνεται η ευθεία $(\varepsilon): y = x + 1$ και τα σημεία $B(0, 1)$ και $\Gamma(1, 3)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες σημείου A με $x_A > 0$, που ανήκει στην ευθεία (ε) , τέτοιο ώστε το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ να είναι ίσο με 2 τ. μ.

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τα 5 θέματα του Μέρους Β'.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Θέμα 1:

Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - (\mu - 1)x + 4 - \mu = 0 \quad \text{με ρίζες } x_1, x_2.$$

(α) Να βρείτε τις τιμές του μ ώστε η πιο πάνω εξίσωση να έχει:

(i) λύσεις αντίστροφες,

(ii) λύσεις μη πραγματικές.

(β) Να βρείτε τις τιμές του μ για τις οποίες ισχύουν:

(i) $x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2 = 23,$

(ii) $\frac{x_1 + x_2}{x_1x_2} \geq 2.$

Θέμα 2:

Δίνονται τα σημεία $A(2, 1)$, $B(-2, 6)$ και $\Gamma(-4, -2)$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της $A\Gamma$ και να δείξετε ότι αυτή περνά από την αρχή των αξόνων.

(β) Να βρείτε τη εξίσωση της διαμέσου AM του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.

(γ) Να δείξετε ότι η απόσταση του σημείου M από την πλευρά $A\Gamma$ του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ είναι:

$$d_{(M, A\Gamma)} = \frac{7\sqrt{5}}{5} \text{ μον.}$$

(δ) Να βρείτε το μέτρο της γωνίας $\hat{A\Gamma B}$ κατά προσέγγιση ακεραίου.

Θέμα 3:

Δίνονται τα σημεία $A(3,3)$, $B(1,8)$, $\Gamma(2,-1)$ και $\Delta(-5,2)$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες των διανυσμάτων $\vec{u} = \vec{AB}$ και $\vec{v} = \vec{\Gamma\Delta}$,

β) τη γωνιά των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$,

γ) το διάνυσμα $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$,

δ) να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $(2\vec{u} + \vec{v}) \cdot (4\vec{u} - 5\vec{v})$,

ε) την τιμή του μ , έτσι ώστε το διάνυσμα $\vec{w}$ να είναι κάθετο στο $(\vec{u} + \mu \times \vec{v})$

στ) το μήκος της προβολής του διανύσματος $\vec{u}$ στο διάνυσμα $\vec{v}$.

Θέμα 4:

Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{\sigma\varphi(180^\circ + \varphi) \times \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \varphi) \times \epsilon\varphi(540^\circ + \varphi)}{\eta\mu(360^\circ + \varphi) \times \sigma\tau\epsilon\mu(360^\circ - \varphi)}$$

(α) (i) Να δείξετε ότι $A = \eta\mu\varphi$.

(ii) Να λύσετε την εξίσωση $(18A - 1)^{\frac{2}{3}} = 4$, $\varphi \in (0^\circ, 180^\circ)$.

(β) Δίνεται η παράσταση $B = 5\eta\mu\omega - 3$, $270^\circ \leq \omega \leq 360^\circ$.

(i) Να αποδείξετε ότι $9 \leq B^2 \leq 64$.

(ii) Αν $B = -6$, να βρείτε την αριθμητική τιμή της παράστασης $\Gamma = \frac{25\sigma\upsilon\nu^2\omega + 4\epsilon\varphi\omega}{8\sigma\tau\epsilon\mu\omega}$.

Θέμα 5:

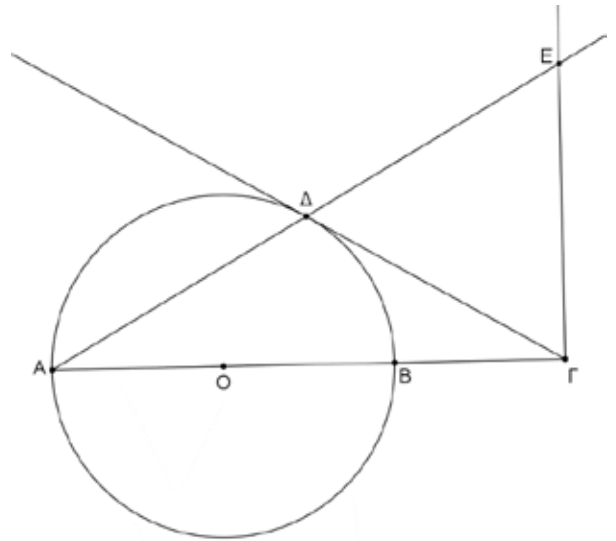
Στο διπλανό σχήμα, δίνεται κύκλος (O, R) , AB διάμετρος του κύκλου, $\Gamma\Delta$ εφαπτομένη του κύκλου στο Δ και ΓE κάθετη στη $A\Gamma$. Να δείξετε ότι:

(α) $\triangle AB\Delta$ και $\triangle A\Gamma E$ είναι όμοια,

(β) $(AB)(A\Gamma) = (AE)(A\Delta)$,

(γ) $(A\Delta)(\Gamma\Delta) = (A\Gamma)(B\Delta)$,

(δ) $\triangle \Gamma\Delta E$ ισοσκελές.



Εισηγητές

Νίκος Δημητρίου

Παρασκευή Ανδρέου

Δήμητρα Βωβίδου

Χαράλαμπος Πιτσιλλίδης

Διευθυντής

Γρηγόρης Χατζημάρκου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18 / 05 / 2017

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου (5-ωρο)

ΧΡΟΝΟΣ: 2:30΄ ώρες

ΩΡΑ: 7:45΄ - 10:15΄

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ: (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

(β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).

(γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

(δ) Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσης τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσης τους δε θα λαμβάνονται υπόψη.

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

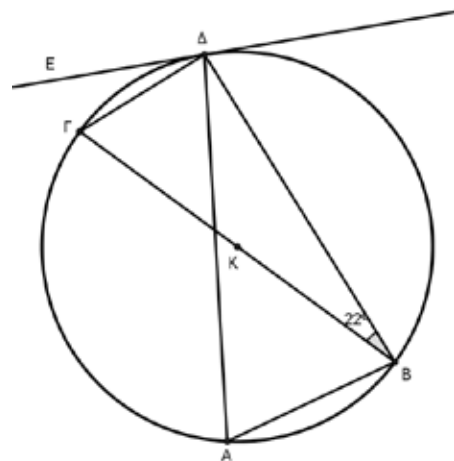
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1.(α) Να μετατρέψετε το κλάσμα: $\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή. Δίνεται ότι $x > 0$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $\sqrt{x-2} = 3$.

2. Σ' ένα ασανσέρ στο ισόγειο μιας πολυκατοικίας βρίσκονται 8 άτομα με μέσο βάρος 65 κιλά. Στον δεύτερο όροφο κατεβαίνουν 3 άτομα με μέσο βάρος 70 κιλά. Στον πέμπτο όροφο μπαίνει ένα άτομο και το μέσο βάρος γίνεται 64 κιλά. Πόσα κιλά ζυγίζει το άτομο αυτό;

3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ότι ΔΕ εφαπτομένη του κύκλου (Κ, R) και $\angle \alpha = 22^\circ$. Δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας να υπολογίσετε τις γωνίες: $\angle \beta$, $\angle \gamma$ και $\angle \delta$.



4. Δίνεται ότι: $\eta\mu\theta = \frac{4}{5}$ και $\epsilon\phi\theta = -\frac{4}{3}$.

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $A = 3\sigma\phi(270^\circ - \theta) + 5\sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta)$.

5. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (κ-1)x + κ + 5 = 0$ με ρίζες x_1, x_2 . Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του κ ισχύει: $(x_1 + x_2)^2 > x_1 x_2$.

6. Δίνεται κύκλος (K, R) . Από σημείο Σ εκτός του κύκλου φέρουμε $\Sigma\Gamma$ εφαπτόμενο τμήμα (Γ σημείο επαφής) και $\Sigma\text{ΒΑ}$ τέμνουσα του κύκλου η οποία διέρχεται από το κέντρο του κύκλου.
- (α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\text{Β}\Sigma\Gamma$ και $\Sigma\Gamma\text{Α}$ είναι όμοια.
- (β) Εάν $R = 4 \text{ cm}$ και $\text{Κ}\Sigma = 6 \text{ cm}$ να βρείτε το μήκος του $\Sigma\Gamma$.

7. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή

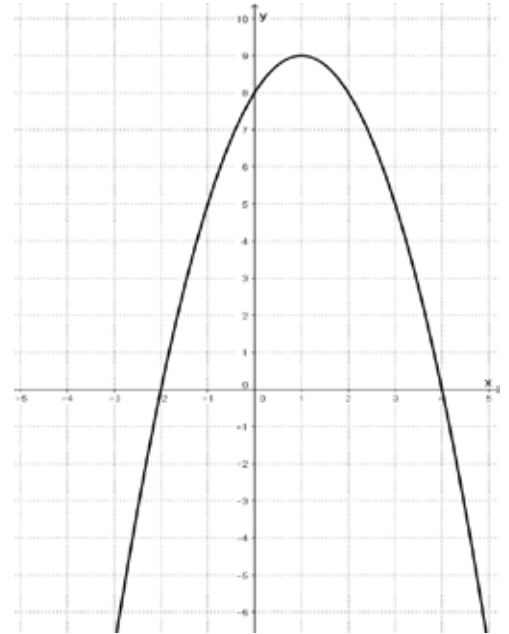
$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x} + \alpha, \text{ με } \alpha \neq 0.$$

(α) Να βρείτε:

(i) Το πρόσημο του α και το πρόσημο της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης $x^2 + \frac{1}{x} + \alpha = 0, \alpha \neq 0$.

(ii) Το σύνολο τιμών της $f(x)$.

(iii) Τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει $f(x) \in \mathbb{Q}$.



(β) Να μετασχηματίσετε την παραβολή $g(x) = -x^2 - 2x + 4$ στη μορφή $g(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$ και να εξηγήσετε πώς με κατάλληλες μετατοπίσεις θα συμπίπτει με την παραβολή $f(x)$.

8. Δίνεται ότι: $\frac{1}{4} < \alpha < 1$ και $-1 < \alpha < -\frac{1}{3}$. Να βρείτε ανάμεσα σε ποιους αριθμούς βρίσκονται οι

παραστάσεις:

(α) $4\alpha - 3$

(β) $\frac{\alpha^2}{\alpha}$

9. Δίνεται η ευθεία $(\psi): 2x - 3y = 12$ και A το σημείο τομής της (ψ) με τον άξονα $x'x$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του συμμετρικού του σημείου A ως προς την ευθεία $(\varphi): x - y = 2$.

10. Να λύσετε και να διερευνήσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} x^2 + y = 1 \\ x + y = 1 + 2\sqrt{2} \end{cases}, \quad \forall \mathbb{R}.$$

ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1.(α) Δίνονται τα διανύσματα : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ και $\vec{z} = 3\vec{x} + 2\vec{y}$. Να βρείτε:

(i) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{z}$.

(ii) Το μοναδιαίο διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{z}$.

(β) Για δύο διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ δίνονται ότι $|\vec{u}| = 3$ και $|\vec{v}| = 4$ και η γωνία μεταξύ των δύο αυτών διανυσμάτων είναι ίση με 120° . Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου μ ώστε τα διανύσματα $\vec{w} = 2\vec{u} + \mu\vec{v}$ και $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ να είναι κάθετα μεταξύ τους.

2.(α) Η εξίσωση $x^2 + 2x + 1 - 2 = 0$, $\mu \neq 0$ έχει ρίζες αντίστροφες. Η παραβολή $f(x) = -x^2 + (\mu + 1)x$ έχει κορυφή το σημείο $(2, 4)$. Να βρείτε τις τιμές των κ και μ .

(β) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x-1)^3 - 5(x-1)^2}{(x+x^2)(x^2+1)} \geq 0$.

3. Δίνεται τρίγωνο ABΓ με $A(2, 5)$. Η διάμεσος ΒΜ έχει εξίσωση $-x + 6y = 8$ και το ύψος ΒΔ έχει εξίσωση $-2x + 3y = 7$. Να βρείτε:

(α) Τις συντεταγμένες των κορυφών Β και Γ του τριγώνου ABΓ.

(β) Το μήκος του ύψους ΑΕ του τριγώνου ABΜ.

(γ) Τις συντεταγμένες του σημείου Θ της ευθείας $x + y = 0$ έτσι ώστε $(ΑΘ) = 5$ μονάδες μήκους.

4. Δίνονται οι παραστάσεις: $\alpha = \begin{vmatrix} \frac{b-c}{x} & \frac{b}{x+1} \\ \frac{b}{x} & 1 \end{vmatrix}$ και $\beta = \frac{b}{1-x} - \frac{c}{1+x}$.

(α) Να αποδείξετε ότι:

(i) $\alpha = \frac{b}{x}$ και $\beta = -2 \frac{b}{x+1}$.

(ii) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{1}{2} \frac{\beta^2}{\alpha} = \frac{1-A}{1+A}$

(β) Δίνεται ότι $\beta = \sqrt{8}$ και $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$. Να βρείτε τη γωνία x .

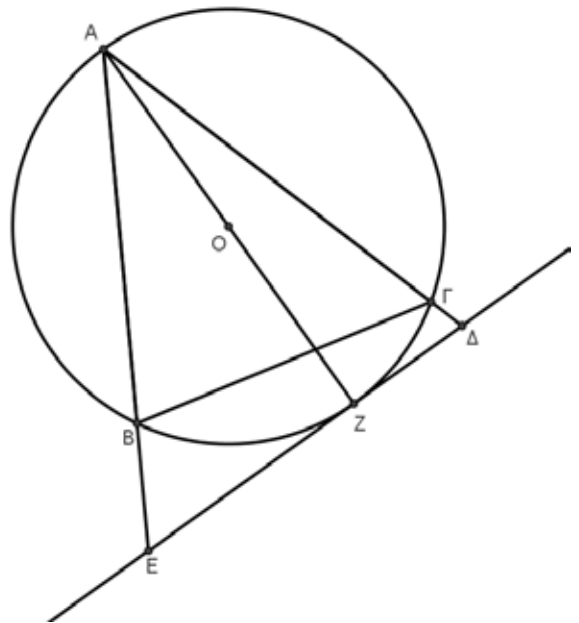
5. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) . Από την κορυφή A φέρουμε διάμετρο AZ . Στο σημείο Z φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου που τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών $A\Gamma$ και AB στα σημεία Δ και E αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

(α) $(\angle \Gamma)^2 = (\angle \Delta)(\angle E)$

(β) $(\angle \alpha)(\angle \beta) = (\angle \gamma)(\angle \delta)$

(Να μεταφέρετε το σχήμα στο φύλλο απαντήσεων)



ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Η Διευθύντρια

Ελένη Παπαστεφάνου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ - ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18/05/2017

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 07:45 π.μ.

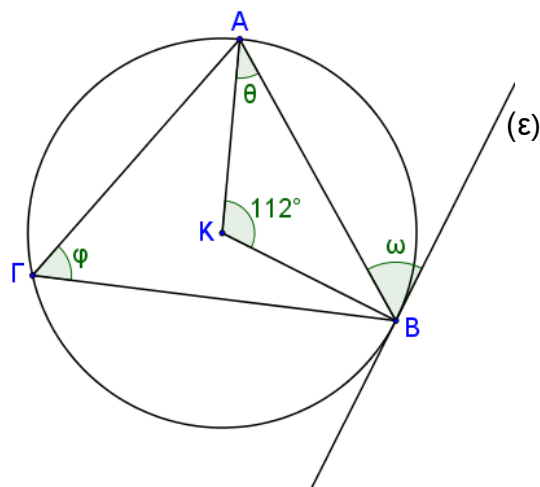
- ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν και με μολύβι.)
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση, όπου είναι απαραίτητο.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το Σχολείο.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

1. Να μετατρέψετε το κλάσμα $\frac{14}{3+\sqrt{2}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής.
2. Να λύσετε την ανίσωση: $(\chi + 2)(3 - \chi) < 0$
3. Να υπολογίσετε την απόσταση του σημείου $A(-5, 1)$ από την ευθεία με εξίσωση $3\chi + 4\gamma + 1 = 0$.

4. Στο διπλανό σχήμα το σημείο Κ είναι το κέντρο του κύκλου και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του στο σημείο Β. Αν $\hat{A}KB = 112^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες φ , ω και θ , δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



5. Η μέγιστη ημερήσια θερμοκρασία (σε βαθμούς Κελσίου) στη Λευκωσία τις πρώτες πέντε μέρες του Απριλίου ήταν: 12, 12, 17, 19, 20.

Να υπολογίσετε:

α) τη μέση τιμή και

β) την τυπική απόκλιση

6. Αν $\eta\mu\theta = -\frac{5}{13}$ και $180^\circ < \theta < 270^\circ$, να υπολογίσετε, χρησιμοποιώντας

τριγωνομετρικές ταυτότητες, την τιμή της παράστασης $A = \frac{5\sigma\tau\epsilon\mu\theta - 1}{13\sigma\upsilon\nu\theta + 24\epsilon\phi\theta} \times$

7. Αν $4 < \chi < 6$ και $2 < \psi < 8$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι πιο κάτω

παραστάσεις: α) $3\chi - \psi$ β) $\frac{\chi}{\psi}$

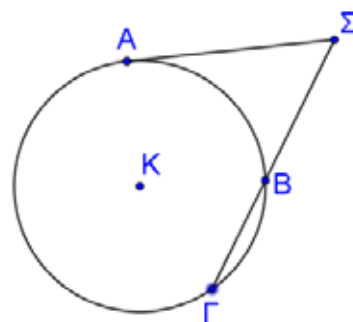
8. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $(\mu^2 - 2\mu)\chi = \mu^2 - 4\mu + 4$, για τις διάφορες τιμές του μ , $\mu \in \mathbb{R}$.

9. Στο σχήμα, από ένα σημείο Σ εκτός του κύκλου (Κ, R)

φέρουμε την εφαπτομένη ΣΑ και την τέμνουσα ΣΒΓ.

Αν $\Sigma A = \chi - 4$, $\Sigma B = \sqrt{11 - 2\sqrt{10}}$ και $\Sigma \Gamma = \sqrt{11 + 2\sqrt{10}}$,

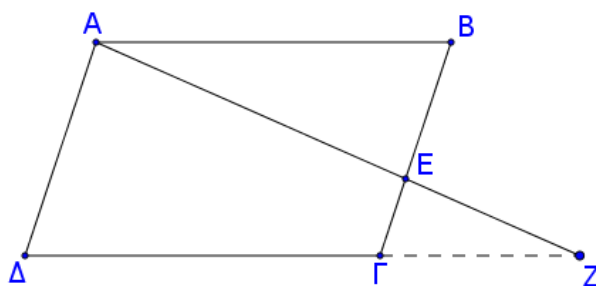
να υπολογίσετε την τιμή του χ .



10. Από την κορυφή Α παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ φέρουμε τυχαία ευθεία που τέμνει τη ΒΓ στο Ε, και την προέκταση της ΔΓ στο Ζ.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΖΔ είναι όμοια.

β) Αν $\frac{BE}{AD} = \frac{2}{3}$ και το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΕ είναι 12 cm^2 , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΖΔ.



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.

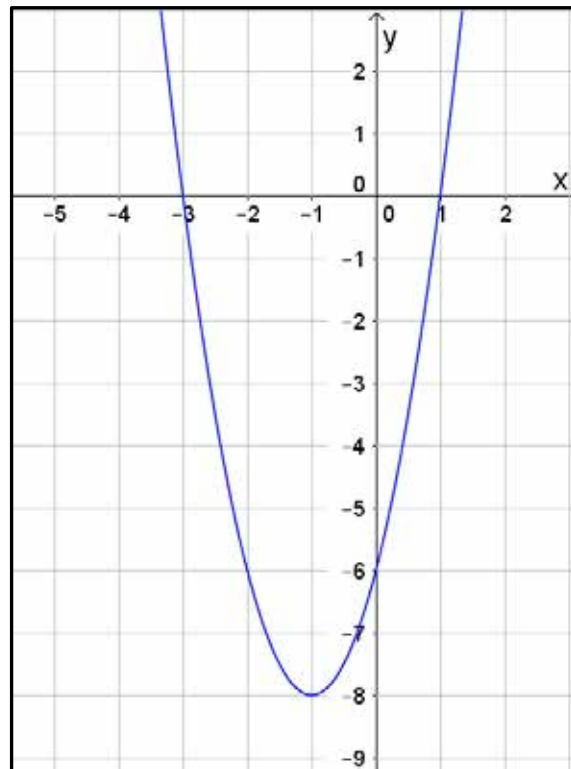
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.

i) Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- α) το σύνολο τιμών της συνάρτησης
- β) το πρόσημο του a και της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
- γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- δ) την τιμή του c
- ε) την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης
- στ) τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0$

ii) Αν $a = 2$, να γράψετε τη συνάρτηση στη μορφή $f(x) = a(x + \kappa)^2 + \lambda$



2. Να αποδείξετε τις ταυτότητες:

α)
$$\frac{\sin^2(90^\circ - \theta) \cdot \sec(-\theta) \cdot \csc(270^\circ - \theta)}{\sin(180^\circ + \theta)} = 1$$

β)
$$\frac{1 - \eta\mu\theta}{\sigma\upsilon\nu\theta} + \frac{\sigma\upsilon\nu\theta}{1 - \eta\mu\theta} = 2\tau\epsilon\mu\theta$$

3. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (2\mu + 1)x + \mu - 1 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τις τιμές της παραμέτρου μ , $\mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η πιο πάνω εξίσωση έχει:

- i) ρίζα τον αριθμό -2
- ii) ρίζες πραγματικές και άνισες.

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης να υπολογίσετε τις τιμές της

παραμέτρου μ , $\mu \in \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:
$$\frac{x_1^3 x_2^2 + x_1^2 x_2^3}{x_1 x_2 + 2} \geq 0$$

4. Δίνονται τα διανύσματα: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:
- τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{p} = \vec{u} - 2\vec{v}$
 - το εσωτερικό γινόμενο $\vec{u} \cdot \vec{v}$
 - τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$
 - τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{w}$ που είναι αντίρροπο με το διάνυσμα $\vec{v}$ και έχει μέτρο 10 μονάδες.

5. Σε ρόμβο ΑΒΓΔ με κορυφή Α(1,5) η εξίσωση της μιας διαγωνίου του είναι $(\delta_1): \chi - \psi = 2$ και η εξίσωση της πλευράς του ΑΒ: $\chi + 2\psi = 11$.
- Να βρείτε την εξίσωση της άλλης διαγωνίου του
 - Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες των κορυφών του Β και Γ
 - Αν Β(5, 3) και Γ(7, - 1), να υπολογίσετε:
 - την περίμετρο και
 - το εμβαδόν του ρόμβου ΑΒΓΔ

Ο Διευθυντής

Νίκος Πρωτοπαπάς

ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΛΟΥΡΙΩΤΙΣΣΑΣ

ΕΠΩΝΥΜΟ:

ΟΝΟΜΑ:

ΤΑΞΗ ΚΑΙ ΤΜΗΜΑ:

ΟΝΟΜΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ:

Βαθμός:

Ολογράφως

Υπογραφή:

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Α (5ωρο)

Ημερομηνία: 18/5/2017

Ώρα: 7:45—10:15

Ημέρα: Πέμπτη

Χρόνος: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται συνολικά από τέσσερις (4) σελίδες.
2. Τα στοιχεία των μαθητών να γραφτούν μόνο στην πρώτη σελίδα, στον ειδικό χώρο.
3. Κατοχή κινητού τηλεφώνου ισοδυναμεί με δολίευση.
4. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
5. Δεν επιτρέπεται να γράφετε με μολύβι παρά μόνο με μπλε πένα.
6. Δεν επιτρέπεται να δανείζεστε οτιδήποτε από συμμαθητές σας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Αν x_1 και x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 - 4x - 1 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων (χωρίς να λύσετε την εξίσωση):

α) $3x_1 + x_1 \times x_2 + 3x_2$

β) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

2. Να λύσετε την εξίσωση: $\begin{vmatrix} x & 8 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 0$.

3. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

β) $\frac{8}{\sqrt{5}+1}$

4. Δίνονται τα σημεία A(-2,5) και B(3,4). Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{AB}$ και το μέτρο του.

5. Δίνεται κύκλος με κέντρο K και γωνία $\widehat{GAD} = 40^\circ$ όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

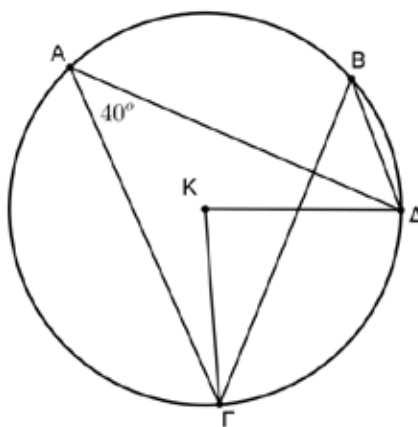
Να υπολογίσετε

(δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας) :

α) τη γωνία $\widehat{GBD}$

β) τη γωνία $\widehat{GKD}$ και

γ) το μέτρο του τόξου $\widehat{GAD}$.



(2 μ.)

(2 μ.)

(1 μ.)

6. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sin^2 x}{\sin x} + \sin x = \tan x$

7. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $|x - |^2 - 2| = 3x - 15$ για τις διάφορες τιμές του $|$, όπου $| \hat{=} \square$.

8. Δίνονται οι βαθμοί πέντε φοιτητών πανεπιστημίου: 8, 4, 10, 5, x

Να βρείτε:

α) την τιμή του x αν η μέση τιμή των πιο πάνω παρατηρήσεων είναι το 7. (1,5 μ.)

β) Το εύρος των παρατηρήσεων. (1 μ.)

γ) Την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. (1,5 μ.)

δ) Τον συντελεστή μεταβλητότητας (CV) και να εξετάσετε αν οι παρατηρήσεις παρουσιάζουν ομοιογένεια. (1 μ.)

9. Δίνονται οι κορυφές $A(-1,3)$, $B(4,2)$, και $\Gamma(0,8)$ του τριγώνου $AB\Gamma$.

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

(2 μ.)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.

(1,5 μ.)

γ) Να βρείτε το μήκος του ύψους AD .

(1,5 μ.)

10. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 4mx - 4m - 12 = 0$ με λύσεις x_1 και x_2 . Να υπολογίσετε για ποιες τιμές του m ισχύει το καθένα από τα πιο κάτω:

α) η εξίσωση να έχει λύσεις αντίστροφες

(1 μ.)

β) να ισχύει $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$

(1 μ.)

γ) να ισχύει $x_1^2 + x_2^2 \geq 48$

(3 μ.)

ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + g$.

Να βρείτε:

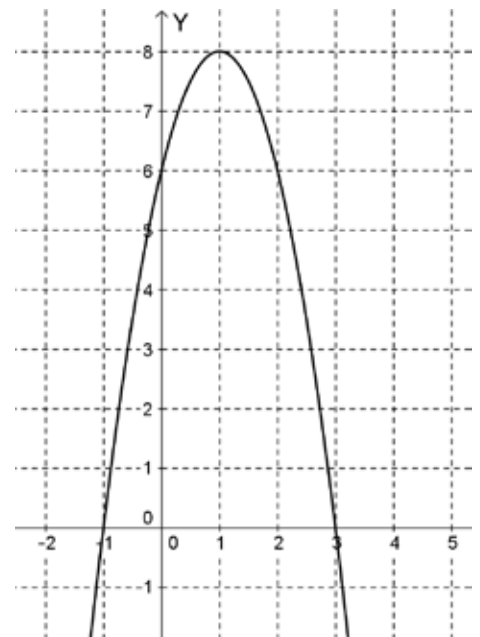
α) Το σύνολο τιμών της f

β) Τις συντεταγμένες της κορυφής

γ) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας

δ) Τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει $f(x) \leq 0$

ε) Την τιμή της παράστασης: $a - 2b + g$



2. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

α) Να βρείτε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(3 μ.)

β) Τη γωνία μεταξύ των δυο διανυσμάτων.

(4 μ.)

γ) Την προβολή του διανύσματος $\vec{a}$ στο διάνυσμα $\vec{b}$.

(3 μ.)

3. α) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\hbar\mu\chi}{1-\sin\chi} - \frac{\hbar\mu\chi}{1+\sin\chi} = 2\varsigma\chi$

β) Αν $0^\circ < \omega < 90^\circ$ και $\frac{\hbar\mu(180^\circ - \omega) \varsigma\chi (360^\circ - \omega) \sin(90^\circ + \omega)}{\epsilon\chi (-\omega) \hbar\mu(270^\circ - \omega)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, να υπολογίσετε τη γωνία ω .

4. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με Α(1,3), Β(4,-1) και η εξίσωση μιας διαγωνίου του $2\chi - \gamma = -1$.
Να βρείτε:

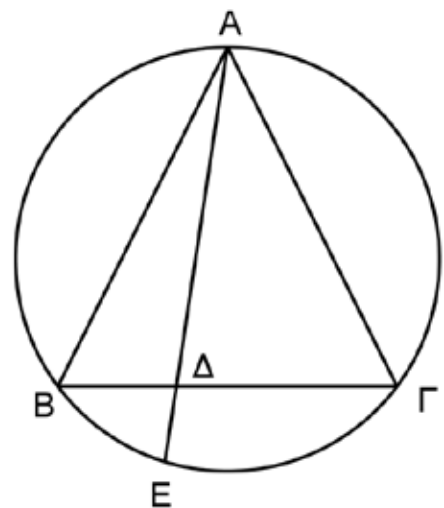
α) την εξίσωση της άλλης διαγωνίου, (3 μ.)

β) το σημείο τομής των δυο διαγωνίων, (3 μ.)

γ) τις συντεταγμένες της κορυφής Γ, (2 μ.)

δ) το εμβαδόν του ρόμβου. (2 μ.)

5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές ($AB=AG$) και είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Η χορδή ΑΕ τέμνει το τρίγωνο στο Δ όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδείξετε ότι $(AB)^2 = (AD)(AE)$



Ο Διευθυντής

Τάσος Τάσου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18/05/2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2.30΄

ΩΡΑ: 11:00 – 13:30

Οδηγίες:

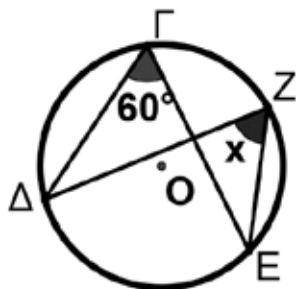
- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- β) Να γράφετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- ε) Σε όλες τις ερωτήσεις να φαίνεται ο τρόπος απάντησής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης αιτιολόγησης δεν θα λαμβάνονται υπόψη.
- ζ) Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- στ) Η ΔΟΛΙΕΥΣΗ ΤΙΜΩΡΕΙΤΑΙ ΑΥΣΤΗΡΑ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α΄ και το ΜΕΡΟΣ Β΄.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 5/100.

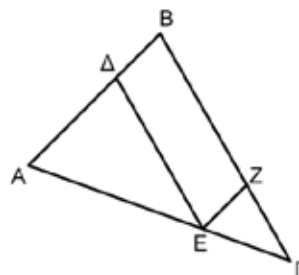
1. Να υπολογίσετε τη γωνιά x στο πιο κάτω σχήμα, δικαιολογώντας την απάντησή σας.



2. Να γράψετε μια εξίσωση δευτέρου βαθμού με λύσεις $x_1 = -2$ και $x_2 = 3$.
3. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το σημείο $A(1, 2)$ και έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = -3$.
4. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

5. Στο τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται : $AB \parallel EZ$ και $B\Gamma \parallel \Delta E$.

Να αποδείξετε ότι: $\frac{A\Delta}{AB} = \frac{BZ}{B\Gamma}$.



6. Η βαθμολογία ενός μαθητή σε 5 διαφορετικά μαθήματα είναι: 13, 15, 16, 19, 20. Ποια θα είναι η τελική του βαθμολογία, αν τα μαθήματα έχουν βαρύτητα ανάλογη με τις περιόδους διδασκαλίας του κάθε μαθήματος, που είναι αντίστοιχα 1, 4, 5, 3 και 7;

7. Αν $\eta\mu\theta = \frac{3}{5}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
- $$A = \frac{10\eta\mu\theta - 12\varepsilon\varphi\theta}{4\tau\epsilon\mu\theta}$$

8. Να λύσετε το σύστημα :
- $$\begin{cases} x + y + \omega = 4 \\ 2x - y - \omega = 2 \\ 2y + x = 8 \end{cases}$$

9. Αν x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $5 < x < y$,
- α) να συγκρίνετε τις παραστάσεις $A = \sqrt{x-5}$ και $B = \sqrt{y-5}$.
- β) Αν επιπλέον $y = 9$, να λύσετε την εξίσωση $A + B = 3$.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\tau\epsilon\mu\theta) \cdot x^2 + 2\varepsilon\varphi\omega \cdot x + 1$, όπου $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Αν η γραφική παράσταση της f έχει άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 1$, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\varepsilon\varphi\omega) \cdot x - 2$, $\varepsilon_2: (\sigma\upsilon\eta\theta) \cdot x - y = 0$ είναι κάθετες μεταξύ τους.

ΜΕΡΟΣ Β΄ : Να λύσετε και τις 5 ερωτήσεις. Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Αν x_1, x_2 είναι οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 + (\lambda + 4)x + \lambda - 7 = 0$, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η εξίσωση:

α) να έχει λύσεις αντίστροφες ,

β) να ισχύει η σχέση $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} \geq 1$,

γ) να έχει λύσεις πραγματικές και άνισες .

2. α) Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, M σημείο της πλευράς $B\Gamma$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{B\Gamma}$. Αν $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ και $\overrightarrow{AG} = \vec{v}$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AM}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

β) Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, $\vec{\beta} = -6\vec{i} + 4\vec{j}$. Να βρείτε την τιμή του $\mu \in \mathbb{R}$ για την οποία τα διανύσματα $\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ και $\mu\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι κάθετα.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{\gamma} = 3\vec{\alpha} - \vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ τα διανύσματα του (β) ερωτήματος.

3. α) Να υπολογίσετε τη γωνία ω ($0 < \omega < \pi$) για την οποία ισχύει ότι:

$$\frac{\varepsilon\varphi(\pi - \omega) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(-\omega)}{\sigma\varphi\left(\frac{3\pi}{2} - \omega\right) \cdot \sigma\upsilon\nu(2\pi - \omega)} = -\frac{1}{2}$$

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sigma\varphi x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\varphi x - \sigma\upsilon\nu x} = 1 + \eta\mu x$.

4. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ οι πλευρές του AB και $B\Gamma$ έχουν εξισώσεις $3x - y = 5$ και $x + 2y - 4 = 0$ αντίστοιχα. Αν το σημείο $(8, 5)$ είναι μια από τις κορυφές του παραλληλογράμμου, τότε:

α) να βρείτε το μέτρο της οξείας γωνιάς $\widehat{A\hat{B}\Gamma}$,

β) να δείξετε ότι η εξίσωση της πλευράς $\Delta\Gamma$ είναι $3x - y = 19$,

γ) να βρείτε το μήκος του ύψους BE ,

δ) να υπολογίσετε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

5. Από σημείο A εκτός κύκλου φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB , AG και μια τέμνουσα ADE του κύκλου. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα ABD και AEB είναι όμοια ,

β) $\frac{AG}{AE} = \frac{GD}{GE}$,

γ) $(BD) \cdot (GE) = (BE) \cdot (GD)$

Τέλος Δοκιμίου

Οι εισηγητές :

Δέσπω Πολυκάρπου
Μαρία Σολωμού-Κύζα
Ειρήνη Γεωργίου
Πιέρος Φακλαμάς
Κυριάκος Κολοβός

Η Συντονίστρια Β.Δ.

Δήμητρα Χαρή

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΣΟΛΩΝ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΥΣ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού (5 – ώρο)

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: Τρίτη, 23 Μαΐου 2017

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΠΕΝΤΕ (5) ΣΕΛΙΔΕΣ**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- § Να γράφετε με μελάνι χρώματος μπλε. Για τα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι.
 - § Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται καθαρά και επιμελημένα όλη η αναγκαία εργασία.
 - § Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 - § Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
-

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

1. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου α , $\alpha \in \mathbb{R}$ για την οποία η εξίσωση:

$$(4\alpha - 3)x - 12 = 0 \text{ είναι αδύνατη.}$$

2. Να μετατρέψετε το κλάσμα $K = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής (να φαίνονται όλες οι αναγκαίες πράξεις).

3. Ένας μαθητής πήρε στα δύο διαγωνίσματα των Μαθηματικών βαθμούς 12 και 14 και για την εργασία των Μαθηματικών βαθμό 18. Αν το κάθε διαγώνισμα έχει συντελεστή βαρύτητας 40% και η εργασία 20% στη συνολική βαθμολογία, να υπολογίσετε το σταθμισμένο μέσο όρο της βαθμολογίας του μαθητή.

4. Αν $3 < \alpha < 7$ και $-5 < \beta < -2$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι πιο κάτω παραστάσεις:

α) $A = 2\alpha + \beta$

β) $B = -\alpha \times \beta$

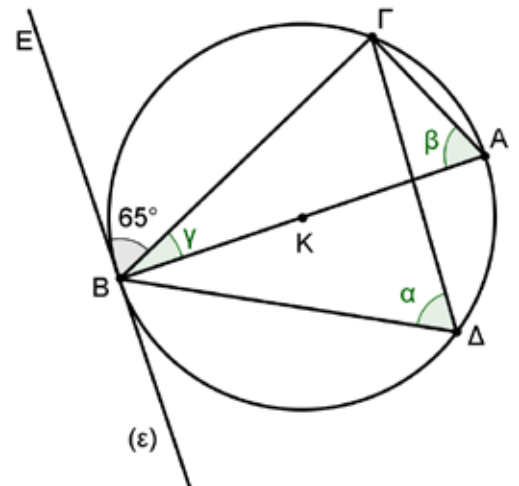
5. Αν $\sin \theta = -\frac{12}{13}$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$, να βρείτε την τιμή της πιο κάτω παράστασης:

$$A = \frac{2 + 26\eta\mu\theta - 12\varepsilon\phi\theta}{25\sigma\phi\theta + 10\sigma\tau\epsilon\mu\theta}$$

6. Να βρείτε για ποια τιμή του μ , $\mu \in \mathbb{R}$, οι πιο κάτω ευθείες διέρχονται από το ίδιο σημείο:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 : 4x + 2y = 6 \\ \varepsilon_2 : x - 3y = 5 \\ \varepsilon_3 : 3\mu x + 5y = 13 \end{cases}$$

7. Στο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου (K, R) και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο B . Αν η γωνία $\widehat{GBE} = 65^\circ$, να υπολογίσετε το μέτρο των γωνιών α, β, γ δικαιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



8. Δίνονται οι πιο κάτω ορίζουσες A και B :

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{\eta\mu\chi}{\sqrt{2}} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{\eta\mu\chi}{\sqrt{2}} & -1 & -\frac{\sigma\upsilon\nu\chi}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & \sigma\upsilon\nu\chi \\ 0 & \sigma\upsilon\nu\chi \end{vmatrix}$$

Να αποδείξετε ότι: $A - 2B = -\frac{1}{2}$

9. Δίνονται τα διανύσματα $\overset{\textcircled{R}}{\alpha}, \overset{\textcircled{R}}{\beta}$ με $\left| \overset{\textcircled{R}}{\alpha} \right| = \sqrt{2}, \left| \overset{\textcircled{R}}{\beta} \right| = \sqrt{2}$ και η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων

$\overset{\textcircled{R}}{\alpha}, \overset{\textcircled{R}}{\beta}$ είναι ίση με $\theta = \frac{\pi}{3}$.

α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\overset{\textcircled{R}}{\alpha}$ και $\overset{\textcircled{R}}{\beta}$

β) Να βρείτε το μέτρο του διανύσματος $\overset{\textcircled{R}}{u} = 2\overset{\textcircled{R}}{\alpha} - \overset{\textcircled{R}}{\beta}$

10. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 3x - k^2 = 0$, $k \in \mathbb{R}$.

Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της πιο πάνω εξίσωσης, χωρίς να τη λύσετε, να βρείτε για ποιες τιμές του k , $k \in \mathbb{R}$:

α) η παράσταση $A = \frac{\rho_1 k + \rho_2 (k - \rho_1)}{4 + \rho_1 \rho_2}$ είναι μικρότερη ή ίση με το -1

β) οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: $\begin{cases} \varepsilon_1 : y - \rho_1^2 x + 2^{2017} = 0 \\ \varepsilon_2 : y + 2^{2017} = (27 - \rho_2^2)x \end{cases}$ ταυτίζονται.

ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$, η πλευρά $A\Delta$ έχει εξίσωση $x - 3y = 4$ και η πλευρά $\Delta\Gamma$ έχει εξίσωση $y = x - 10$. Οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου τέμνονται

στο σημείο $K\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η κορυφή B έχει συντεταγμένες $(-2, -4)$.

β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου B από την ευθεία $A\Delta$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς AB .

δ) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ είναι ίση με

$$\Pi = 2\sqrt{2}(3 + 4\sqrt{5}) \text{ μονάδες.}$$

2. Δίνονται τα σημεία $A(2, -1)$, $B(6, 2)$ και $\Gamma(14, -6)$ και τα διανύσματα $\alpha = \overrightarrow{AB}$, $\beta = \overrightarrow{B\Gamma}$

και $\gamma = \frac{2}{5}\kappa + 5\mu$
 $\frac{3}{5}\kappa - 5\mu$ με $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε:

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $\alpha + \beta$,

β) το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{BM}$, όπου M το μέσο του $B\Gamma$,

γ) τις τιμές των παραμέτρων κ και μ έτσι ώστε τα διανύσματα β και γ να είναι ίσα,

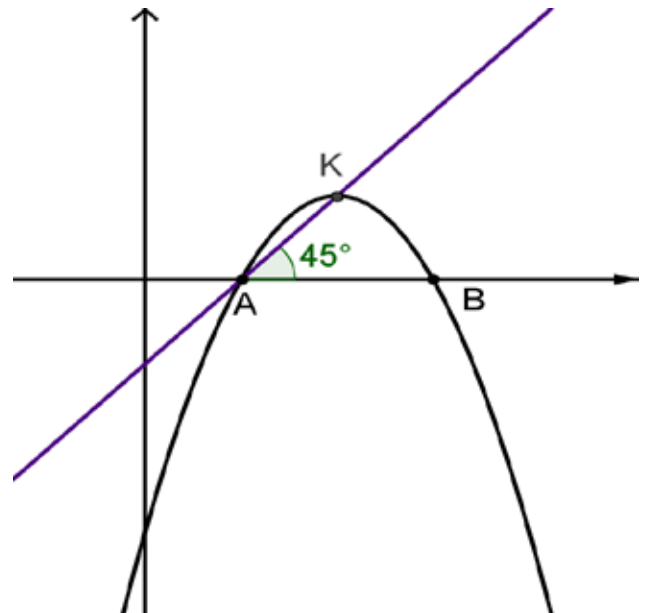
δ) το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι ομόρροπο με το διάνυσμα α ,

ε) το συνημίτονο της γωνίας των διανυσμάτων α και β .

3. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση

της παραβολής $f(x) = ax^2 + 4x + \gamma$,

με $a \neq 0$, $a, \gamma \in \mathbb{R}$, που τέμνει τον άξονα των τετμημένων στα σημεία A και B με τετμημένες $x_1 = 1$ και $x_2 = 3$ αντίστοιχα και κορυφή το σημείο K . Επίσης δίνεται η ευθεία AK που σχηματίζει με τον άξονα των τετμημένων γωνία 45° .



α) Να βρείτε:

- το πεδίο ορισμού της παραβολής $f(x)$
- το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$

β) i. να αποδείξετε ότι $a = -1$ και $\gamma = -3$.

- να βρείτε την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής, και τις συντεταγμένες της κορυφής K .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας AK .

δ) Να λύσετε:

- την εξίσωση $f(x) = x - 1$, είτε με τη χρήση του σχήματος είτε αλγεβρικά.
- την ανίσωση $f(x) \leq x - 1$

4. Δίνεται η εξίσωση $2x^2 - Ax - B = 0$, με ρίζες x_1, x_2 . όπου:

$$A = \frac{\eta\mu(180^\circ + \theta) \times \sigma\phi(360^\circ + \theta)}{\epsilon\phi(270^\circ - \theta) \times \sigma\upsilon\nu(90^\circ + \theta)} \quad \text{και} \quad B = 1 - \sigma\upsilon\nu^2(360^\circ - \theta)$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = 1$ και $B = \eta\mu^2\theta$

β) Να βρείτε το είδος των ριζών της πιο πάνω εξίσωσης.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει τιμή της γωνίας θ , στο διάστημα $(0, 90^\circ)$ για την οποία η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{S+P}{S-P} = \frac{1}{3}$, αν $\theta \in (0, 90^\circ)$, όπου S το άθροισμα και P το γινόμενο των ριζών της πιο πάνω εξίσωσης.

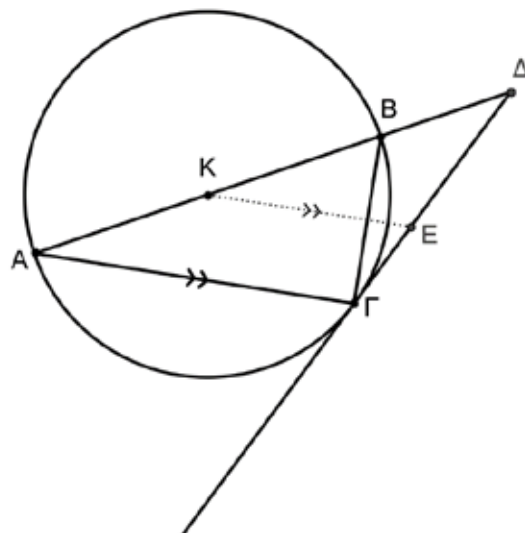
5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) ,

εφαπτομένη $\Delta\Gamma$ (Γ σημείο επαφής) και τέμνουσα $\Delta\text{ΒΑ}$, ώστε ΑΒ διάμετρος του κύκλου.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΓΒΔ είναι όμοια.

β) Αν $\text{ΒΔ} = 2\text{cm}$ και $\text{ΓΔ} = 4\text{cm}$, να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

γ) Από το κέντρο K φέρουμε παράλληλη ευθεία προς την ΑΓ , η οποία τέμνει την ΓΔ στο σημείο E . Αν η ακτίνα $R = 3\text{cm}$ να υπολογίσετε το μήκος του ΓΕ .



----- ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ -----

Η Διευθύντρια

.....
Μυρτώ Πουαγκαρέ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

Τάξη: Α΄

Μάθημα: Μαθηματικά 5-ωρο

Ημερομηνία: 22/05/2017

Αρ. σελίδων: 5

Χρόνος εξέτασης: 2:30 (δύο ώρες και τριάντα λεπτά)

ΟΔΗΓΙΕΣ

§ Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες (συμπεριλαμβανομένης και της 1^{ης} σελίδας)

§ Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη.

§ Το μέρος Α΄ αποτελείται από 10 ασκήσεις. Πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 10.

(Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **5 μονάδες**)

§ Το μέρος Β΄ αποτελείται από 5 ασκήσεις. Πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 5.

(Κάθε ερώτηση βαθμολογείται με **10 μονάδες**).

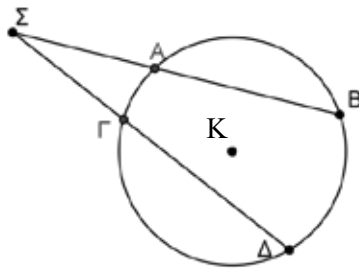
§ Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

§ Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικών υλικών.

§ Γράφετε μόνο με μελάνι μπλε χρώματος. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

Μέρος Α:

1. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 2x - 15 \leq 0$.
2. Αν $1 < x < 3$ και $-5 < y < -2$ να βρείτε μεταξύ ποιών αριθμών περιέχονται οι παραστάσεις
α) $2x + y$ β) $x \times y$
3. Στο πιο κάτω σχήμα, οι ημιευθείες ΣAB και $\Sigma \Gamma \Delta$ είναι τέμνουσες του κύκλου (K,R). Αν $SD = 10\text{ m}$, $SG = 4\text{ m}$ και $SA = 5\text{ m}$, να υπολογίσετε το μήκος της χορδής AB.

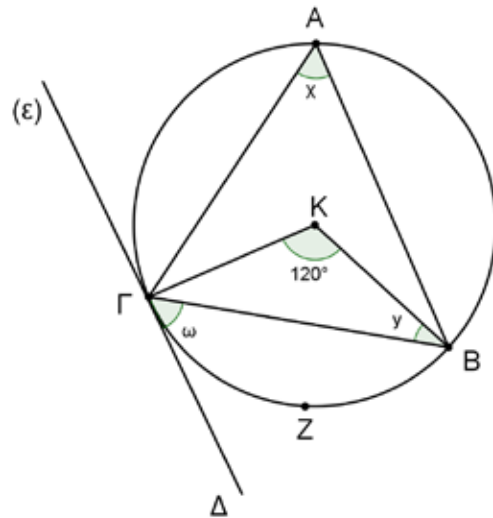


4. Δίνονται τα σημεία A(1,4) και B(3,2). Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνά από το μέσο M του AB και έχει κλίση $l = -2$.
5. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:
α) Τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{g} = 3\vec{a} - \vec{b}$
β) Το μέτρο του διανύσματος $\vec{g}$
6. Στον παρακάτω πίνακα καταγράφονται οι αριθμοί των μαθητών της Γ' τάξης κατά τμήμα σε ένα Γυμνάσιο της Λευκωσίας.

Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση S του πλήθους των μαθητών με ακρίβεια δύο δεκαδικών ψηφίων.

Αριθμός μαθητών (x_i)	Αριθμός Τμημάτων (f_i)
16	2
18	3
22	2
23	2
24	1

7. Δίνεται κύκλος (K, R) και (ε) εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ . Αν η $\widehat{K\Gamma B} = 120^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες x, y, ω και το μέτρο του τόξου $\widehat{BZG}$. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.



8. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \sqrt[4]{10 - \sqrt{19}} \times \sqrt[4]{10 + \sqrt{19}}$, $B = \sqrt{18} - 3$

Να δείξετε ότι:

α) $A=3$

β) $\frac{A}{B} = \sqrt{2} + 1$

9. Δίνονται οι ευθείες $x + 2y = 4$

$$3x + y = 7$$

$$3/x + 2y = 1^2 + 7$$

α) Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πιο πάνω σύστημα ευθειών είναι συμβιβαστό.

β) Να ερμηνεύσετε γραφικά τη θέση των τριών ευθειών του πιο πάνω συστήματος σε περίπτωση που το σύστημα είναι συμβιβαστό.

10. Δίνεται η δευτεροβάθμια εξίσωση $x^2 + 2\sigma\eta\chi + \epsilon^2\eta = 0$, και $0^\circ < \hat{\eta} < 90^\circ$.

α) Να δείξετε ότι έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.

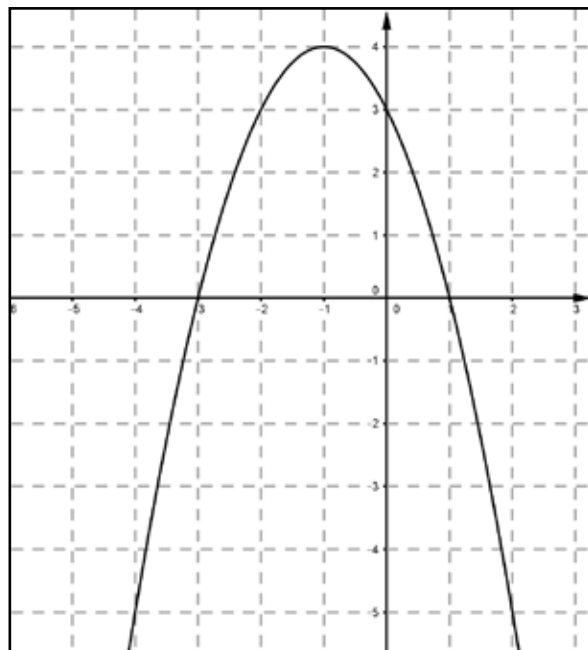
β) Να δείξετε ότι $\frac{(x_1 + x_2)^2}{\epsilon^2\eta} = 4\sigma\eta\eta$ όπου x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης.

Μέρος Β:

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + g$, με $a \neq 0$.

Με την βοήθεια της γραφικής να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της $f(x)$
- β) το πρόσημο του a και της διακρίνουσας του τριωνύμου $ax^2 + bx + g$
- γ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας
- δ) τις ρίζες της εξίσωσης $ax^2 + bx + g = 0$
- ε) τη λύση της ανίσωσης $f(x) \leq 0$
- στ) τις τιμές των a, β, γ .



2. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (l - 3)x + 3l - 2 = 0$ με ρίζες τους αριθμούς x_1 και x_2 . Να βρείτε τις πραγματικές τιμές της παραμέτρου l ώστε η εξίσωση να έχει:

- α) ρίζες πραγματικές και ίσες.
- β) ρίζες αντίθετες.
- γ) μια ρίζα ίση με -2.

- δ) ρίζες που ικανοποιούν την σχέση $\frac{2x_1 + 2x_2}{x_1 x_2} > 1$

3. Από σημείο A που βρίσκεται εκτός κύκλου φέρνουμε εφαπτόμενες AB και AG όπου B και G σημεία του κύκλου. Από το A φέρνουμε την τέμνουσα ADE (που δεν περνά από το κέντρο του κύκλου) όπου D και E σημεία του κύκλου. Η EA και BG τέμνονται στο M . Να δείξετε ότι:

- α) i) Τα τρίγωνα AGD και AEF είναι όμοια.
ii) Ισχύει η σχέση $(AG)^2 = (AE)(AD)$
- β) Ισχύει η σχέση $(BM) \cdot (MG) = (EM) \cdot (MD)$

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Η εξίσωση του ύψους ΑΔ είναι $2x + y = 8$ και η εξίσωση της διαμέσου ΑΜ είναι $x + 2y = 7$ και οι συντεταγμένες της κορυφής Β(1,5). Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες της κορυφής Α.

β) Την εξίσωση της πλευράς ΒΓ.

γ) Το μήκος του ύψους ΑΔ.

δ) Τις συντεταγμένες της κορυφής Γ.

ε) Το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ .

5. α) Αν
$$\frac{\theta(180^\circ + w) \times \theta(270^\circ - w) \times \sin w}{h \sin(90^\circ - w) \times \sin(360^\circ - w) + h \sin w \times \sin(90^\circ - w)} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
 και $0^\circ < w < 90^\circ$, να βρείτε την τιμή της γωνιάς w .

β) Δίνεται γωνία θ έτσι ώστε $\sin^2(90^\circ - \theta) = \sin(180^\circ + \theta) + 2$ και $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $A = \frac{\sin \theta}{1 - \sin \theta} - \frac{\sin \theta}{1 + \sin \theta}$ ισούται με -2 .

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Α. Χριστοδουλίδης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**ΤΑΞΗ:** Α' Λυκείου**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** Τετάρτη, 17 Μαΐου 2017**ΔΙΑΡΚΕΙΑ:** 2,5 ώρες**ΟΔΗΓΙΕΣ**

- Να γράφετε με πένα μπλε. Μπορείτε να κάνετε τα σχήματα με μολύβι.
- Να γράφετε καθαρά και ευανάγνωστα γράμματα.
- Να φαίνονται όλες οι ενέργειες που κάνετε.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- Επιτρέπεται η χρήση **μη προγραμματιζόμενης** υπολογιστικής μηχανής.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α'**Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 από τις 100 μονάδες.**

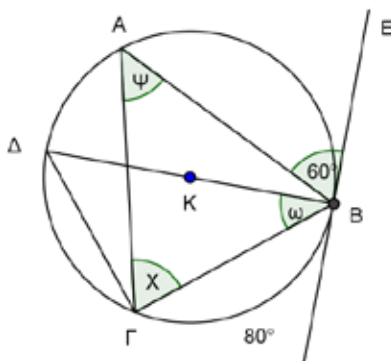
1. Να λύσετε την εξίσωση $(2\chi + 1)^{\frac{3}{2}} = 8$, με $\chi \geq -\frac{1}{2}$.

2. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε το σύστημα:
$$\begin{cases} (\kappa - 1)\chi + 8\kappa\psi = 2 \\ 2\chi + \psi = -1 \\ -3\chi + 5\psi = -5 \end{cases}$$
 να είναι συμβιβαστό.

3. Αν $13\eta\mu\omega - 5 = 0$ και $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης :

$$A = \frac{12\epsilon\varphi\omega - 13\sigma\upsilon\nu\omega}{12\tau\epsilon\mu\omega}$$

4. Στο σχήμα η ΒΔ είναι διάμετρος του κύκλου (Κ, R) και η ΒΕ εφαπτομένη του κύκλου. Αν είναι η γωνία $\widehat{ABE} = 60^\circ$ και το τόξο $\widehat{B\Gamma} = 80^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες χ , ψ και ω , δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.



5. Δίνονται τα σημεία A(2,-5), B(5,3), Γ(3,7). Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ και το μήκος του ύψους του ΑΔ.

6. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{(\chi^2+9)(\chi^2-\chi-12)}{(2-\chi)} \geq 0$

7. Αν $1 < \chi < 3$ και $-2 < \psi < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $\chi \cdot \psi$ β) $\psi^2 - 1$ γ) $\frac{3\chi}{2\psi}$

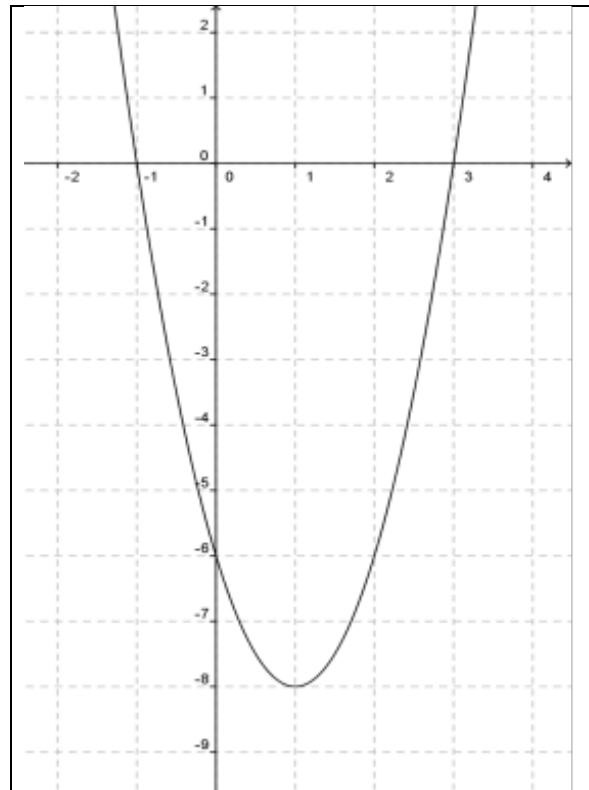
8. Ο πιο κάτω πίνακας παρουσιάζει τους βαθμούς που πήραν 20 μαθητές της Α' Λυκείου σε κοινό διαγώνισμα Μαθηματικών.

Βαθμοί (xi)	4	16	17	18	19	20
Μαθητές (fi)	1	4	4	6	4	1

Να βρείτε τη μέση τιμή ($\bar{x}$), την τυπική απόκλιση (s) και τον συντελεστή μεταβλητότητας (C.V).

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η παραβολή που είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε:

- (α) το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της f,
- (β) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της παραβολής,
- (γ) το πρόσημο του α και την κορυφή της παραβολής,
- (δ) τις τιμές του x για τις οποίες η $f(x) \leq 0$.
- (ε) τις τιμές των α,β,γ.



10. Να λύσετε και να διερευνήσετε το πιο κάτω σύστημα για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} \chi + \lambda\psi = \lambda \\ \lambda\chi + (\lambda + 6)\psi = 3\lambda \end{cases}$$

ΜΕΡΟΣ Β΄**Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 από τις 100 μονάδες.**

- Δίνεται η εξίσωση $\chi^2 - (\lambda + 2)\chi - (1 - \lambda) = 0$ με ρίζες τις χ_1, χ_2 .
 - Να υπολογίσετε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε:
 - οι ρίζες της εξίσωσης να είναι αντίθετες,
 - η εξίσωση να έχει ρίζα τον αριθμό -1,
 - να ισχύει η σχέση $2\chi_1^2 + 2\chi_2^2 = 42$.
 - Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες και $\rho_1 = \frac{1}{2\chi_1+1}$ και $\rho_2 = \frac{1}{2\chi_2+1}$.
- Δίνονται τα σημεία A(5, -1), B(1, -3) και η ευθεία (ε): $3\mu x - 2\psi + \mu + 3 = 0$ με $\mu \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:
 - το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB,
 - τις συντεταγμένες του μέσου M του ευθύγραμμου τμήματος AB,
 - την εξίσωση της ευθείας (ε₁) που περνά από το σημείο A και το σημείο Γ(1,3),
 - την τιμή του μ , ώστε η (ε) να είναι κάθετη στην (ε₂): $2x + 3\psi - 5 = 0$,
 - την τιμή του μ , ώστε η γωνία (ε, ε₂) = 45°.
- α) Να δείξετε ότι :

$$A = \frac{\sigma\upsilon\nu(\frac{\pi}{2} - \chi)}{\eta\mu\frac{\pi}{2} + \eta\mu(\chi - \frac{3\pi}{2})} - \frac{1}{\sigma\tau\epsilon\mu\chi} - \sigma\varphi(\pi + \chi). \sigma\upsilon\nu(-\chi) = -\sigma\varphi\chi$$

- Αν $\frac{-\sqrt{3}}{A} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} + \frac{2}{3-\sqrt{5}}$ και $\pi < \chi < \frac{3\pi}{2}$, να βρεθεί η γωνία χ .
- Δίνονται τα σημεία A(1,2), B(2,4), Γ(2,-1) και Δ(6,7).
 - Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{GD}$ είναι συγγραμμικά.
 - Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{v} = \overrightarrow{AB} - 3 \cdot \overrightarrow{GD}$.
 - Να υπολογίσετε την γωνία των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{BF}$.
 - Αν M είναι το μέσο του AB και Z($\frac{19}{2}$, -1), να δείξετε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{MZ}$ είναι κάθετα.
 - Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες του διανύσματος που είναι η προβολή του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ στο $\overrightarrow{BF}$.
 - Φέρνουμε τις εφαπτόμενες του κύκλου στα σημεία του A και B. Από τυχαίο σημείο Γ του μικρότερου τόξου AB, φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς τις εφαπτόμενες που τέμνουν τη χορδή AB στα σημεία Δ και Ε.
Να αποδείξετε ότι :
 - ΓΕ=ΓΔ
 - $(AD) \cdot (BE) = (GE)^2$

Οι Εισηγητές**Ο Συντονιστής****Ο Διευθυντής**.....
Αντρέας Ευστρατίου.....
Αντρέας Ζαντής.....
Γιάννης Χρίστου.....
Δημήτριος Καραντάνος.....
Μελής Νικολαΐδης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/05/2017

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 7:45 π.μ.

ΩΡΑ ΛΗΞΗΣ: 10:15 π.μ.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
2. Να γράφετε **μόνο** με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Μόνο σχήματα με μολύβι)
3. **Δεν** επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
4. Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
5. Τα προσωπικά σας στοιχεία και οι **λύσεις** των ασκήσεων να γραφούν στα φύλλα εξέτασης.
6. Τα σχήματα των ασκήσεων να **μεταφέρονται** στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε 5 μονάδες.**

A1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x - 3 = 0$ με λύσεις τις x_1, x_2 . Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων (χωρίς να λύσετε την εξίσωση):

(α) $x_1 + x_2$

(β) $x_1 \times x_2$

(γ) $2x_1 + 5x_1x_2 + 2x_2$

(δ) $x_1^2 + x_2^2$

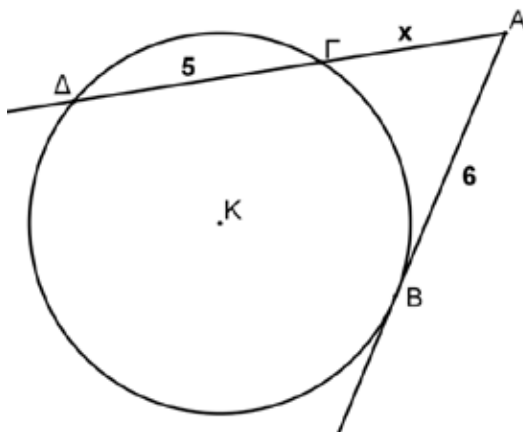
A2. Ο γενικός βαθμός, με άριστα το 10, ενός πρωτοετή φοιτητή στα μαθήματα που πήρε το δεύτερο εξάμηνο του 2017, καθορίζεται με βαρύτητα τον αριθμό των εβδομαδιαίων περιόδων ανά μάθημα, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Μάθημα	Βαθμός	Αριθμός περιόδων κάθε εβδομάδα
Απειροστικός Λογισμός	6	7
Γραμμική Άλγεβρα	8	6
Στατιστική	10	3
Αγγλικά	7	4

Να υπολογίσετε το σταθμικό μέσο όρο της βαθμολογίας του φοιτητή για το δεύτερο εξάμηνο του 2017.

A3. Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \sqrt{49 - x + \sqrt{x^2 + y} - \sqrt{y^2}}$, αν $x, y > 0$.

A4. Από σημείο A εκτός κύκλου (K, R) φέρνουμε το εφαπτόμενο τμήμα AB και την τέμνουσα $A\Gamma\Delta$ όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα. Αν $(AB) = 6 \text{ cm}$, $(A\Gamma) = x \text{ cm}$ και $(\Gamma\Delta) = 5 \text{ cm}$ βρείτε το μήκος του $A\Gamma$.

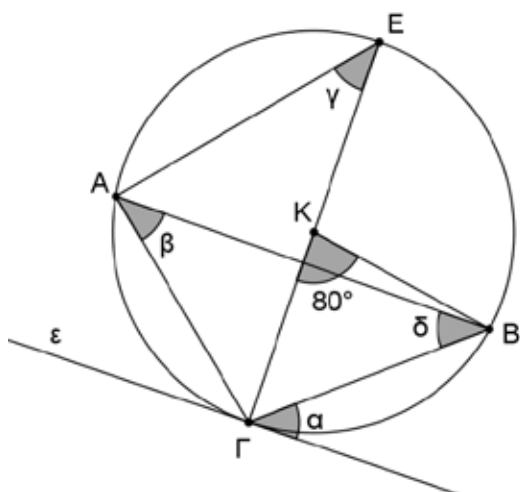


A5. Σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (O η αρχή των αξόνων) δίνονται τα σημεία $A(2,5)$ και $B(-4,-3)$.

(α) Να υπολογίσετε τις συντεταγμένες και το μέτρο του διανύσματος $\vec{AB}$.

(β) Να βρείτε την διανυσματική ακτίνα του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος AB .

A6. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) . Η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ , $\widehat{B\hat{K}\Gamma} = 80^\circ$ και το τόξο AEB είναι τριπλάσιο από το μικρότερο τόξο $A\Gamma$. Να βρείτε τις γωνίες α , β , γ και δ , αιτιολογώντας πλήρως τις απαντήσεις σας.



A7. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\lambda^2 x - 4\lambda x + 3 = \lambda - 3x$ για τις διάφορες τιμές του λ , $\lambda \in \mathbb{R}$.

A8. Δίνεται η εξίσωση δευτέρου βαθμού $(2\epsilon\mu\omega)x^2 - 3x + \sigma\phi\omega + \epsilon\phi\omega = 0$. Αν η εξίσωση έχει λύσεις αντίστροφες και $0^\circ < \omega < 90^\circ$, να υπολογίσετε την γωνία ω .

A9. Να λύσετε την ανίσωση: $\begin{vmatrix} 2 & x & -1 \\ 1 & 3 & x \\ 1 & x & x \end{vmatrix} > \begin{vmatrix} 3x & -9 \\ x & -x \end{vmatrix}$

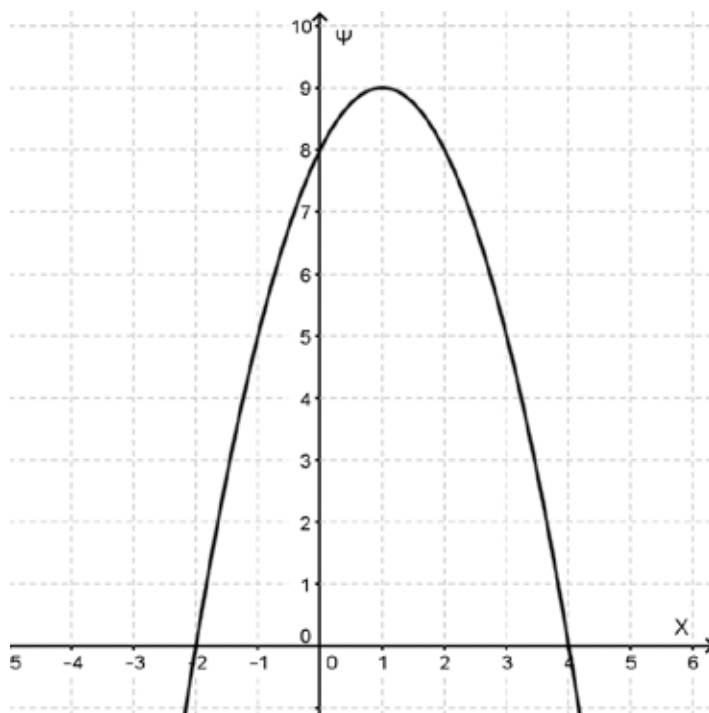
A10. Δίνεται η εξίσωση $(5x-3)^{\frac{2}{5}} = 4$, $x \neq \frac{3}{5}$ και το σύστημα $\begin{cases} \omega + 3\gamma = 5 \\ 2\omega - \gamma = 3 \\ \kappa\omega + \lambda\gamma = -2 \end{cases}$. Αν το σύστημα

είναι συμβιβαστό, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $B = 6\kappa + 3\lambda - 2x$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:

- (α) Το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- (β) Το πρόσημο του a και της διακρίνουσας Δ της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- (γ) Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της και τις συντεταγμένες της κορυφής της.
- (δ) Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- (ε) Την τιμή του $f(2)$ και το πρόσημο του $f(2018)$.
- (στ) Τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$.
- (ζ) Την τιμή του γ .
- (η) Την τιμή του a .
- (θ) Την τιμή του β .
- (ι) Τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 5$.



B2. Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ η πλευρά AB έχει εξίσωση $3x - y = 1$ και η πλευρά $B\Gamma$ έχει εξίσωση $x - 3y = -5$ και το σημείο τομής των διαγωνίων $K(2,1)$.

(α) Να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών B και Δ .

(β) Να βρείτε την απόσταση του σημείου τομής των διαγωνίων από την AB .

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της πλευράς $\Gamma\Delta$.

(δ) Να βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

B3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(α) Να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

(β) Να υπολογίσετε το συνημίτονο της γωνίας $\hat{\theta}$ των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$.

(γ) Αν τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$ και $\vec{v} = \vec{a} + \lambda\vec{b}$ είναι κάθετα μεταξύ τους, να

δείξετε ότι $\lambda = \frac{8}{21}$.

(δ) Να βρείτε το μοναδιαίο διάνυσμα παράλληλο προς το $\vec{b}$.

B4. (α) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu\frac{\alpha\pi}{2} + \theta \times \varphi\frac{\alpha\pi}{2} - \theta}{\sin(\pi - \theta) \times \varphi\frac{\alpha\pi}{2} - \theta} + \frac{\tan(2\pi - \theta) \times \varphi\frac{\alpha\pi}{2} + \theta}{\sigma\tau\epsilon\mu\frac{\alpha\pi}{2} - \theta \times \varphi(\pi - \theta)} + \frac{\sin^2\frac{\alpha\pi}{2} - \theta}{\eta\mu^2(\pi - \theta)} = \sigma\varphi^2\theta \quad (\text{μον. } 6)$$

(β) Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\frac{\sin x}{1 - \eta\mu x} - \frac{\sin x}{1 + \eta\mu x} = 2\epsilon\varphi x$ (μον. 4)

B5. (α) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2 - 36)(x^2 + 7x + 6)(x^2 + 9)}{(x + 3)} \leq 0$

(β) Σε κύκλο με κέντρο K , φέρουμε τη διάμετρο AB και την χορδή $B\Gamma$. Από το K φέρουμε κάθετη στη $B\Gamma$ που την τέμνει στο M . Η προέκταση της KM τέμνει την εφαπτομένη του κύκλου στο A , στο σημείο T .

Να αποδείξετε ότι: $(AB)(AT) = (KT)(\Gamma B)$.

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ Β.Δ

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

1. **ΙΩΑΚΕΙΜ ΚΥΡΙΑΚΟΥ**

ΜΙΛΤΟΣ ΠΑΠΑΜΙΛΤΙΑΔΟΥΣ

ΦΟΙΝΙΚΗ ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΥ

2. **ΧΡΙΣΤΙΝΑ ΓΙΑΝΝΙΤΣΑΡΟΥ**

3. **ΜΑΡΙΑ ΝΙΚΟΛΑΟΥ**

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΧΡΟΝΟΣ: 2.30'

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/05/2017

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής
 β) Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι)
 γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ**ΜΕΡΟΣ Α':** Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα κλάσματα με ρητό παρονομαστή, **χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:**

$$\alpha) \frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \beta) \frac{2}{\sqrt{5}-1}$$

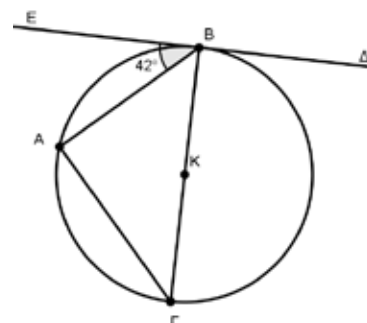
2. Να λύσετε την ανίσωση: $2c^2 - 5c - 3 \geq 0$.

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ και $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Να βρείτε:

α) τις συντεταγμένες του διανύσματος $5\vec{a} - 3\vec{b}$ β) το μέτρο του διανύσματος $\vec{g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

4. Δίνεται κύκλος (Κ, R) με διάμετρο ΒΓ και ΕΔ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β.

Αν η $\angle EBA = 42^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΓ δικαιολογώντας **πλήρως** τις απαντήσεις σας.



5. Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $|^2c + 2| = |^2 + 4c$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ.

6. Αν $\sin \eta = \frac{12}{13}$ και $90^\circ < \eta < 180^\circ$ να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{12 \sin \eta - 5 \cos \eta}{13 \sin \eta}.$$

7. Αν $3 < c < 7$ και $2 < y < 5$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $2c + y$

β) $\frac{c}{y}$

8. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $sfq + \frac{hmq}{1+sunq} = \frac{1}{hmq}$

9. α) Αν οι ευθείες $y = 2c + 1$ και $y = \frac{m+4}{3}c + 8$ με $m \in \mathbb{R}$, είναι παράλληλες να υπολογίσετε την τιμή του m .

β) Αν $m = 2$ να αποδείξετε ότι το σύστημα $\begin{cases} 2c - y = 3 \\ -2mc + ny = -6 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.

10. Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει τον αριθμό των παιδιών που έχουν οι καθηγητές ενός σχολείου.

Αριθμός παιδιών x_i	0	1	2	3	4	5
Αριθμός οικογενειών f_i	3	5	5	4	2	1

Να υπολογίσετε:

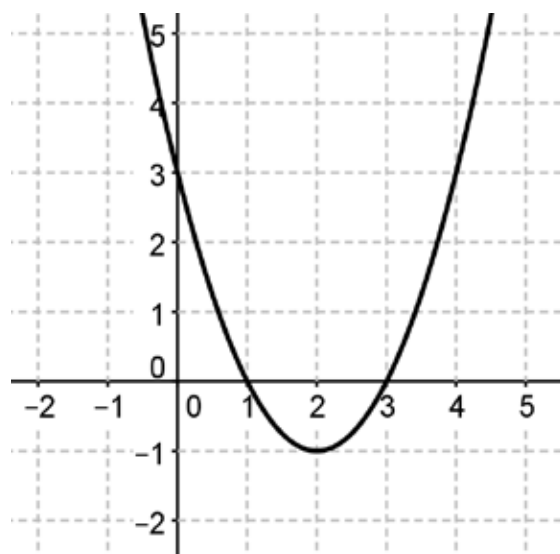
- τη μέση τιμή
- την επικρατούσα τιμή
- τη διάμεσο και
- την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η γραφική παράσταση της παραβολής $f(c) = ac^2 + bc + g$, $a \neq 0$.

Να βρείτε:

- Το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της f
- Την εξίσωση του άξονα συμμετρίας της f και τις συντεταγμένες της κορυφής.
- Τις ρίζες της εξίσωσης $ac^2 + bc + g = 0$
- Το πρόσημο των a , Δ , P και S
- Τη λύση της ανίσωσης $f(c) \in \mathbb{R}$
- Τις τιμές των a , b και γ



2. α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{(x+1)(x^2 - 2x - 3)}{x^2 - 4} \geq 0$.

β) Να λύσετε το σύστημα:

$$\begin{cases} c - y = -2 \\ c^2 + 2y = 7 \end{cases}$$

3. Να βρείτε για ποιές τιμές της παραμέτρου λ η εξίσωση: $c^2 - (l + 3)c + 2l + 3 = 0$

έχει:

α) ρίζα τον αριθμό -2

β) ρίζες αντίθετες

γ) ρίζες αντίστροφες

δ) ρίζες πραγματικές και άνισες

ε) το γινόμενο των ριζών να είναι τριπλάσιο από το άθροισμα τους

4. Οι ευθείες $3c - 4y = -1$ και $2c - y = 1$ αποτελούν δύο πλευρές ενός

παραλληλογράμμου. Αν το σημείο (6,6) είναι μία από τις κορυφές του να βρείτε:

α) τις εξισώσεις των διαγωνίων του και

β) το εμβαδόν του παραλληλογράμμου.

5. α) Να αποδείξετε ότι $\frac{\sin(90^\circ + w) - \sin(180^\circ + w) + \sin(180^\circ - w)}{\sin(180^\circ - w) \cdot \sin(90^\circ + w) + \sin(90^\circ - w)} = \frac{\sin w}{1 + \sin w}$

β) Αν $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ και $\vec{g} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ να βρείτε την τιμή του κ ώστε το διάνυσμα $\vec{a} + k\vec{b}$ να είναι κάθετο στο $\vec{g}$

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

Μάθημα: **Μαθηματικά**

Τάξη: **Α' ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Χρόνος: **2,5 ώρες**

Ημερομηνία: **18 Μαΐου 2017**

Ονοματεπώνυμο:

Τμήμα: Αριθμός:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) σελίδες.
- Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α' **Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.**
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να μετατρέψετε τα κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή:

α) $\frac{3}{\sqrt{2}}$

β) $\frac{2}{3 - \sqrt{3}}$

2. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $6x^2 + x - 2$, " $x \hat{=}$ " .

$$x + \psi = 3$$

3. Να εξετάσετε αν το σύστημα: $2x + 3\psi = 7$ είναι συμβιβαστό .

$$x - \psi = 1$$

4. Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\frac{1 - \epsilon\phi^2\theta}{1 + \epsilon\phi^2\theta} = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta - 1$

5. Στον διπλανό πίνακα δίνονται οι βαθμοί δεκαπέντε μαθητών στο μάθημα της Φυσικής. Να υπολογίσετε:
- τη μέση τιμή των βαθμών,
 - την τυπική απόκλιση και
 - τον συντελεστή μεταβλητότητας CV και να αναφέρετε αν υπάρχει ομοιογένεια στους βαθμούς.

Βαθμός	Αριθμός Μαθητών
4	2
7	2
12	4
14	3
15	1
16	1
18	1
19	1

6. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$ και $\vec{v} = -3\vec{i} - \vec{j}$. Να υπολογίσετε :
- το μέτρο του $\vec{u}$,
 - τις συντεταγμένες του $\vec{u} - \vec{v}$,
 - τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}, \vec{v}$ και
 - την τιμή του λ , ώστε το διάνυσμα $\vec{u}$ να είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{i} - 4\vec{j} + \lambda\vec{v}$

7. Στο διπλανό σχήμα δίνονται: $\widehat{DBA} = 47^\circ$, η ΒΓ διάμετρος και η ΔΒ εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Β. Να βρείτε τις γωνίες α, β, γ και δ (Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας).

8. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{(x^2-7x+6) \cdot (x^2+4) \cdot (2x-12)}{-2x^2+x+6} \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

9. Δίνεται η εξίσωση: $(1+5l)x + (l-1)y + 18l + 6 = 0, l \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η πιο πάνω εξίσωση παριστάνει ευθεία $\forall l \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι ευθείες, που σχηματίζονται $\forall l \in \mathbb{R}$, διέρχονται από ένα σταθερό σημείο και να υπολογίσετε το σημείο αυτό.

10. Δίνεται η παραβολή $f(x) = -x^2 + 10x - 29$

α) Να βρείτε τις **συντεταγμένες** της κορυφής της και να την **χαρακτηρίσετε**.

β) Να αποδείξετε ότι $f(-3^{2017}) \cdot f(3^{2017}) > 16$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η εξίσωση $(k-3)x^2 + kx + 5 - k = 0$ με $k \neq 3$ και ρίζες x_1 και x_2 .

α) Να βρείτε την τιμή του k ($k \in \mathbb{R}$), ώστε η εξίσωση να έχει:

i. ρίζες αντίθετες και

ii. ρίζες αντίστροφες.

β) Να βρείτε τις πραγματικές τιμές του k ώστε να ισχύει η σχέση: $x_1 + x_1 \cdot x_2 + x_2^3 = 2$

γ) Αν $k=6$, να σχηματίσετε εξίσωση β' βαθμού με ρίζες: $\rho_1 = \frac{x_1^2}{x_2}$ και $\rho_2 = \frac{x_2^2}{x_1}$

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με κέντρο O και κορυφή $A(-1,1)$. Πάνω στη διαγώνιο AG , φέρεται ύψος BE (E σημείο στην AG) με εξίσωση $4x + y = 3$. Η BO έχει εξίσωση $3x + 2y = 6$.

α) Να δείξετε ότι οι συντεταγμένες του σημείου B είναι $B(0,3)$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της διαγωνίου AG είναι $x - 4y = -5$.

γ) Να βρείτε το μήκος του ύψους BE του τριγώνου $AB\Gamma$.

δ) Να βρείτε:

i. τις συντεταγμένες της κορυφής Δ του παραλληλογράμμου και

ii. το εμβαδό του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$.

3. Αν $A = \frac{\eta\mu(2\pi+x) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi-x)}{\eta\mu(\pi+x) \cdot \eta\mu(2\pi-x) + \epsilon\varphi(\frac{\pi}{2}-x) \cdot \epsilon\varphi(-x)}$ και $B = \frac{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}{\sqrt{1-\eta\mu^2 x} \cdot (1+\sigma\upsilon\nu^2 x)}$

Να αποδείξετε ότι $\frac{A}{B} = \tau\epsilon\mu x \cdot \sigma\tau\epsilon\mu x$

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, 5cm)
 AB διάμετρος του, ΓΔ χορδή του,
 $\widehat{AD} = 120^\circ$ και $\widehat{A} = 30^\circ$.

Να αποδείξετε ότι :

α) το τρίγωνο AZΓ είναι ορθογώνιο .

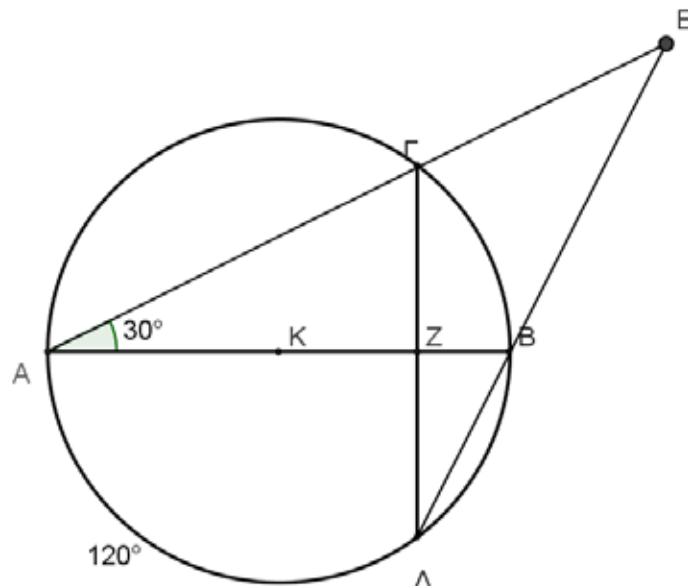
β) το τρίγωνο ΓΔΕ ισοσκελές.

γ) $(AZ) \times (ZB) = (GZ) \times (ZD)$

δ) Αν $GZ = 3\text{cm}$ και $ZB = x$

i. Να δείξετε ότι $ZD = 3\text{cm}$

ii. Να υπολογίσετε την τιμή του x



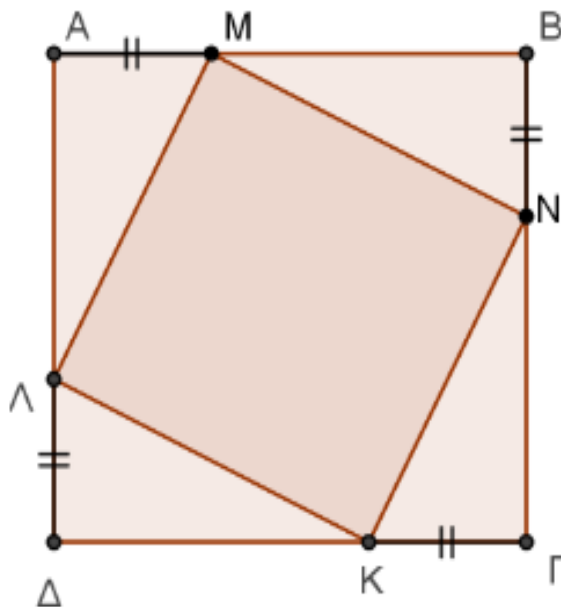
5. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ με πλευρά $AB = 8\text{ cm}$,
 στο εσωτερικό του τετραγώνου κατασκευάζουμε
 ένα άλλο τετράγωνο ΜΝΚΛ, με $AM = x\text{ cm}$.
 Αν $AM = BN = ΓΚ = ΛΔ$:

α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του τετραγώνου
 ΜΝΚΛ δίνεται από τον τύπο $E(x) = 2x^2 - 16x + 64$

β) Να βρείτε την τιμή x για την οποία το ΜΝΚΛ
 έχει ελάχιστο εμβαδόν.

γ) Να βρείτε το ελάχιστο αυτό εμβαδόν .

δ) Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες
 ισχύει $E(x) \geq 40\text{ cm}^2$



ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Η Διευθύντρια

Δέσποινα Παπαγιάννη

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

Μάθημα: Μαθηματικά

Ημερομηνία: 23/05/2017

Τάξη : Α΄ Λυκείου Κατεύθυνση 5 – ωρο

Χρόνος : 2:30΄

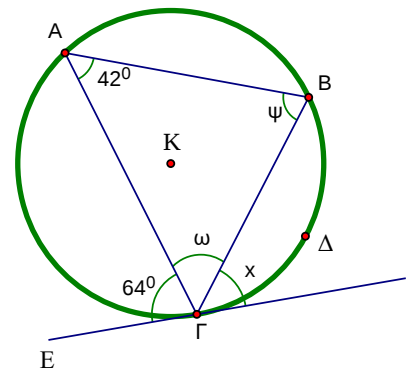
ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
4. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε ή μαύρο (Τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
5. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

Μέρος Α΄

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα η ΕΓ είναι εφαπτομένη του κύκλου (Κ, R) στο σημείο Γ. Αν $\hat{A} = 42^\circ$ και $\hat{E\Gamma A} = 64^\circ$, να υπολογίσετε τις γωνίες x , ψ , ω και να βρείτε το μέτρο του τόξου $\widehat{B\Delta\Gamma}$.



2. Για τον τελικό βαθμό στο μάθημα της Βιολογίας ένας μαθητής βαθμολογείται με 20% για τη συμμετοχή του στην τάξη, με 50% για τον βαθμό του στο διαγώνισμα και 30% για το βαθμό του στην έρευνα – μελέτη που έκανε. Αν ο τελικός βαθμός του στο μάθημα είναι 18, να βρείτε με πόσα βαθμολογήθηκε στο διαγώνισμα, αν για τη συμμετοχή του στην τάξη βαθμολογήθηκε με 19 και με 14 στην έρευνα – μελέτη.

3. Αν ισχύει $1 < \alpha < 2$ και $-4 < \beta < -3$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι τιμές των παραστάσεων:

α) $4\alpha - 2\beta$

β) $\alpha \times \beta$

4. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου κ ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό:

$$\kappa^2 x + \kappa y = -3$$

$$x + y = -5$$

$$6x + 2y = -2$$

5. Να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - x} \geq 0$$

6. Δίνεται η ευθεία ε_1 η οποία περνά από τα σημεία $A(1,2)$ και $\Delta(4,1)$. Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε_1 με την ευθεία ε_2 με εξίσωση $x - 2y = 4$.

7. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \frac{\eta\mu(-x) \times \varphi(5\pi + x) \times \sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{2} + x \times \varphi(2\pi - x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \times \varphi \frac{\pi}{2} + x \times \eta\mu(\pi + x)}$$

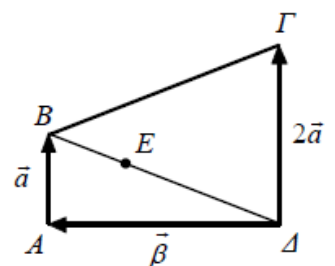
- α) Να δείξετε ότι $A = \varphi^4 x$.

- β) Αν $A = 81$ και $270^\circ < x < 360^\circ$, να βρείτε την τιμή της γωνίας x .

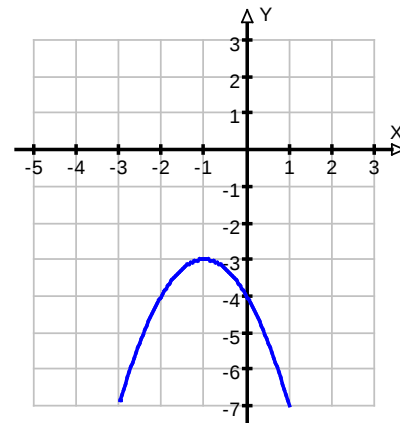
8. Στο διπλανό σχήμα έχουμε: $\overrightarrow{DE} = 2\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta A} = \vec{\beta}$.

- α) Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{\Gamma B}$, $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$.

- β) Από τις εκφράσεις των $\overrightarrow{AE}$ και $\overrightarrow{E\Gamma}$ ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία A, E και Γ;

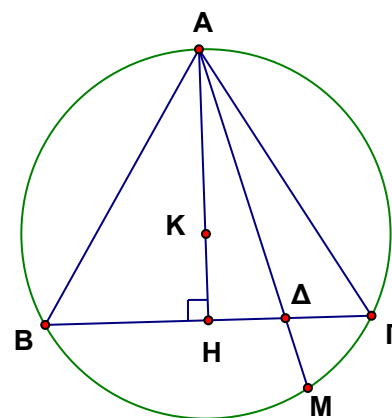


9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $y = f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$. Από τη γραφική παράσταση να βρείτε:



- α) Τις τιμές των a , b και γ .
 β) Τις λύσεις της εξίσωσης $ax^2 + bx + \gamma = -4$.

10. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρά a εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, KA) . Δίνεται AH ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$ και AM χορδή η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο σημείο Δ , ώστε $B\Delta = \frac{3}{4}B\Gamma$. Να υπολογίσετε τη γωνία BMA και να δείξετε ότι $\Delta M = \frac{3\sqrt{13}}{52}a$.



Μέρος Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- Δίνεται παραβολή με εξίσωση $f(x) = x^2 - 3\mu x + 2\mu^2 + 1$, $\mu \in \mathbb{R}$.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε 2 σημεία.
 - Αν $\mu=4$ να βρείτε τις συντεταγμένες της κορυφής της παραβολής.
 - Να βρείτε για ποιες τιμές του μ η εξίσωση $f(x) = 0$, με ρίζες x_1, x_2 , έχει γινόμενο ριζών ίσο με 9.
- Δίνεται κύκλος (K, R) με διάμετρο AB . Στο σημείο A του κύκλου φέρουμε την εφαπτομένη (ϵ) και από το A τυχαία χορδή $A\Gamma$. Από το Γ φέρουμε τη $\Gamma\Delta$ κάθετη στην εφαπτομένη (ϵ) .
 - Να αποδείξετε ότι: $(A\Gamma)^2 = 2R(\Gamma\Delta)$.
 - Ακολουθώντας να φέρετε την ΓE κάθετη στην AB και να δείξετε ότι $(A\Gamma) \cdot (\Gamma B) = (\Gamma E) \cdot (AB)$.

3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ και $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Να υπολογίσετε:

α) Το εσωτερικό γινόμενο $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$.

β) Τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

γ) Το διάνυσμα που είναι προβολή του $\vec{\beta}$ στο $\vec{\alpha}$.

δ) Για ποια τιμή του k τα διανύσματα $2\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, $k\vec{\alpha} - \vec{\beta}$ είναι κάθετα.

4. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (1 - 2\sigma\epsilon\mu\theta)x + \sigma\epsilon\mu\theta = 0$ με ρίζες x_1, x_2 και $90^\circ < \theta < 180^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση που σχηματίζεται με ρίζες $\rho_1 = \frac{1}{x_1}$ και $\rho_2 = \frac{1}{x_2}$ είναι

$$x^2 + (2 - \eta\mu\theta)x + \eta\mu\theta = 0.$$

β) Να βρείτε την τιμή του θ αν ισχύει η σχέση $\rho_1 + \rho_2 = -3\rho_1 \cdot \rho_2$.

γ) Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση: $\frac{\eta\mu\theta}{x_1 \cdot x_2 - 1} + \frac{\eta\mu\theta}{x_1 \cdot x_2 + 1} = 2\epsilon\phi^2\theta$.

5. Δίνεται ρόμβος $AB\Gamma\Delta$ με εξίσωση πλευράς $AB: y - 7x = -6$, εξίσωση διαγωνίου $ΑΓ: x - 3y = -2$ και κορυφή $\Delta(6, -4)$. Να βρείτε:

α) Τις συντεταγμένες των κορυφών A, B, Γ .

β) Το εμβαδόν του ρόμβου.

γ) Να βρείτε την απόσταση του σημείου Δ από την πλευρά AB .

Ο Διευθυντής

Ανδρέας Ματσικάρης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

ΤΑΞΗ: Α΄ Λυκείου Προσανατολισμού (5-ωρο)

ΩΡΑ: 7:45 – 10:15

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: Πέμπτη 18/ 5 /2017

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- 1) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- 2) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- 3) Να γράψετε με μπλε μελάνι (Μόνο τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
- 4) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στα φύλλα των λύσεών σας.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.**ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

- 1) Να μετατρέψετε τα πιο κάτω κλάσματα σε ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή, χωρίς τη χρήση της υπολογιστικής μηχανής.

α) $\frac{15}{\sqrt{5}} =$

β) $\frac{18}{\sqrt{7} - 2} =$

- 2) Αν $-1 < x < 4$ και $-3 < y < 9$ να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις:

α) $4y$ και β) $4y - x + 1$

- 3) Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) .

Αν Α, Β, Γ, Δ και Ε είναι σημεία του κύκλου, η ευθεία (ε) εφάπτεται του κύκλου στο σημείο Β και η γωνία

$\widehat{ZBG} = 53^\circ$, να υπολογίσετε με πλήρη αιτιολόγηση των απαντήσεών σας, τις γωνίες χ , ψ , ω και ϕ καθώς και το μέτρο του τόξου $\widehat{BET}$.

4) Δίνονται οι ευθείες $\begin{cases} (\varepsilon_1): 2\chi - 5\psi + 1 = 0 \\ (\varepsilon_2): (\kappa + 1)\chi + \kappa\psi - 2 = 0 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή του $\kappa \in \mathbb{R}$ ώστε:

α) οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να είναι **κάθετες**.

β) το σύστημα των ευθειών (ε_1) και (ε_2) να είναι **αδύνατο**.

5) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} x - 2\psi = 5 \\ \psi^2 + x\psi = 2 \end{cases}$

6) Αν $\sin q = -\frac{3}{5}$ και $180^\circ < q < 270^\circ$, να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης

$$A = \frac{8\sin q - 3\sec q}{4\tan q + 27\csc q}.$$

7) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{3x-2}{x^2+x} \leq \frac{x}{x+1}$.

8) Να λύσετε και να διερευνήσετε την εξίσωση $\begin{vmatrix} x & / & 0 \\ 1 & / & 2 \\ -1 & -3 & / \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 5/ \\ x & x \end{vmatrix}$ για τις

διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

9) Σε ένα διαγώνισμα των Μαθηματικών, οι μαθητές ενός τμήματος πήραν τους βαθμούς που φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Βαθμοί	14	15	16	18	19	20
Αρ. Μαθητών	1	5	3	8	1	2

α) Να βρείτε την επικρατούσα τιμή, τη διάμεσο και τη μέση τιμή των βαθμών.

β) Να βρείτε την τυπική απόκλιση των βαθμών.

10) Δίνεται το τρίγωνο $\triangle ABG$. Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να δείξετε ότι $DE = \frac{1}{2}BG$.

ΜΕΡΟΣ Β΄ Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ax^2 + bx + g, a \neq 0$.
Από το σχήμα να βρείτε:

- α) το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
- β) το πρόσημο του α.
- γ) την τιμή του γ.
- δ) την εξίσωση του άξονα συμμετρίας.
- ε) τις λύσεις της εξίσωσης

$$ax^2 + bx + g = 0.$$

- στ) την τιμή των $f(1)$ και $f(4)$

- ζ) το πρόσημο του β.

- η) τις λύσεις της ανίσωσης

$$ax^2 + bx + g \geq 0.$$

- 2) Να βρείτε την τιμή (ή τις τιμές) του λ για τις οποίες η εξίσωση $2x^2 + (3\lambda - 1)x + \lambda^2 - 1 = 0$

έχει:

- α) λύσεις πραγματικές και ίσες.

- β) λύσεις αντίθετες.

- γ) λύσεις αντίστροφες.

- δ) το γινόμενο των λύσεων μεγαλύτερο του 2.

- ε) λύσεις x_1, x_2 που ικανοποιούν τη σχέση $(x_1 + 2)(x_2 + 2) = \frac{9}{2}$.

- 3) α) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\sin(360^\circ + \theta) \cdot \cos(270^\circ - \theta)}{\sin(90^\circ - \theta) \cdot \cos(-\theta)}$

- i. Να αποδείξετε ότι $A = -\sin\theta$

- ii. Να υπολογίσετε τη γωνία θ , αν $180^\circ < \theta < 360^\circ$ και $A = \frac{1}{2}$

- β) Να αποδείξετε ότι: $\sin x(1 + \cos x) + \cos x(1 + \sin x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}$

4) Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με κορυφές τα σημεία $A(-1,1)$, $B(2,0)$ και $\Gamma(2,-3)$. Να βρείτε:

α) το μήκος της πλευράς AB .

β) το μήκος του ύψους BE .

γ) τις συντεταγμένες του σημείου Δ ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι παραλληλόγραμμο.

δ) το συμμετρικό του σημείου B ως προς την ευθεία $A\Gamma$.

ε) τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{AG}$ κατά προσέγγιση δεκάτου.

5) Σε κύκλο με κέντρο O φέρουμε τη διάμετρο AB , τη χορδή $B\Gamma$ και τη διάμεσο OM του τριγώνου $OB\Gamma$. Η προέκταση της MO τέμνει την εφαπτομένη του κύκλου στο A , στο σημείο T . Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $\triangle OBM$ και $\triangle ABG$ είναι όμοια.

β) $(OB)(TA) = (OT)(\Gamma M)$.

Η Διευθύντρια

Δρ. Αντωνία Λοΐζου