

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ	ΤΑΞΗ: Β'
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 17/05/2017	ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΚΑΤΟΧΗ ΚΙΝΗΤΟΥ Ή ΕΞΥΠΝΗΣ ΣΥΣΚΕΥΗΣ = ΔΟΛΙΕΥΣΗ

Γενικές οδηγίες:

- Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': (Μονάδες 50)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού για καθεμιά από τις πιο κάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{4}{x-5} \quad \beta) g(x) = \sqrt{2-|x|}$$

2. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 - 7}{x^4 - 4} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 \cdot |x - 4|}{x - 4}$$

3. Δίνεται η ακολουθία $a_v = \frac{v^2}{v+1}$, $v \in \mathbb{N}$

α) Να δείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να υπολογίσετε το όριό της.

γ) Να εξετάσετε κατά πόσο η πιο πάνω ακολουθία είναι φραγμένη ή όχι. Σε περίπτωση που η ακολουθία δεν είναι φραγμένη να κάνετε αναφορά σε κάτω ή άνω φραγμένη.

4. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$\alpha) y = \frac{e^x \sin x}{x+3}, \quad x \in \mathbb{R} - \{-3\} \quad \beta) \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

5. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n , ισχύει:

$$3 + 7 + 11 + \dots + (4n - 1) = n \cdot (2n + 1)$$

6. Δίνεται το φυλλογράφημα για το βάρος 16 μαθητών μιας τάξης δημοτικού σχολείου.

4	01
3	00111
2	777888999

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

7. Η Υπατία προσπαθεί να κατασκευάσει ένα ξύλινο κυκλικό ρολόι για να διακοσμήσει το γραφείο της.

- 1) Να τη βοηθήσετε να βρει το κέντρο του ρολογιού, για να τοποθετήσει τους δείκτες.
- 2) Να αποδείξετε ότι το σημείο που επιλέξατε είναι πράγματι το κέντρο του.

8. Δίνεται η συνάρτηση

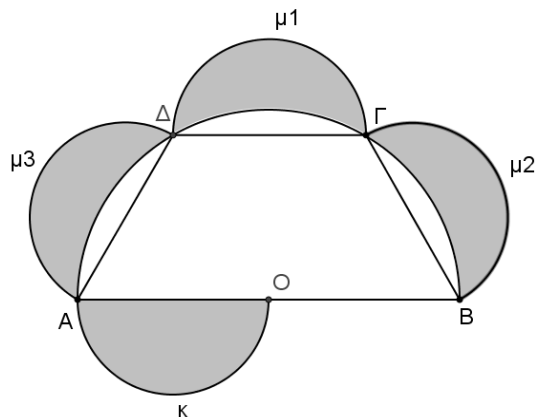
$$f(x) = \frac{\eta\mu 3x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

- 1) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 2$.
- 2) Χρησιμοποιώντας το α) ερώτημα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\eta\mu \frac{\pi}{12}} - \frac{1}{\sigma\upsilon\nu \frac{\pi}{12}} = 2\sqrt{2} \quad (\text{Χωρίς την χρήση υπολογιστικής μηχανής})$$

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο διαμέτρου $AB = 2R$ και τέσσερα ίσα ημικύκλια με διαμέτρους OA , AD , DB και GB . Αν (μ_1) , (μ_2) , (μ_3) είναι τα εμβαδά των τριών σχηματιζόμενων μηνίσκων, (κ) το εμβαδόν του ημικυκλίου με διάμετρο OA και $(AB\Gamma\Delta)$ το εμβαδόν του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$, να αποδείξετε ότι:

$$(\mu_1) + (\mu_2) + (\mu_3) + (\kappa) = (AB\Gamma\Delta)$$



10. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & x \leq 1 \\ 3 - 2\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$$

όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- 1) Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.
- 2) Για $\alpha = -2$ και $\beta = 3$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

ΜΕΡΟΣ Β': (Μονάδες 50)

Να λύσετε και τις πέντε ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. α) Να δείξετε ότι $(\sigma\upsilon\alpha + \sigma\upsilon\upsilon\beta)^2 + (\eta\mu\alpha + \eta\mu\beta)^2 = 4\sigma\upsilon\upsilon^2 \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$.

β) Χρησιμοποιώντας το α) ερώτημα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $\left(\sigma\upsilon\upsilon x + \sigma\upsilon\upsilon \frac{\pi}{6} \right)^2 + \left(\eta\mu x + \eta\mu \frac{\pi}{6} \right)^2 = 3$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (-3, 3)$ με τύπο $f(x) = \frac{3 \cdot (1 - e^x)}{1 + e^x}$.

1) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

2) Αν η αντίστροφη συνάρτηση έχει τύπο $f^{-1}(x) = \ln \left(\frac{3-x}{3+x} \right)$ να αποδείξετε ότι είναι περιττή.

3) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$, αντίστοιχα.

1) Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών, για το οποίο ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$ και να γράψετε τον τύπο της.

2) Να λύσετε την ανίσωση $f^2(x) + 2 < f(x^3)$.

3) Να δείξετε ότι $f'(x)e^{f(x)} - x^2 f''(x) = 2$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

4. α) Δίνεται το άπειρο άθροισμα $f(\theta) = \eta\mu\theta + \eta\mu^2\theta + \eta\mu^3\theta + \dots$ $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$

Αν $y = (1 - \eta\mu 2\theta) \cdot f(2\theta)$ να αποδείξετε ότι $y = \eta\mu 2\theta$.

β) Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = \ln(\epsilon\phi\theta) + \sigma\upsilon\nu 2\theta \\ y = \eta\mu 2\theta \end{cases}, \quad \theta \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$$

Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με $\theta = \frac{\pi}{6}$.

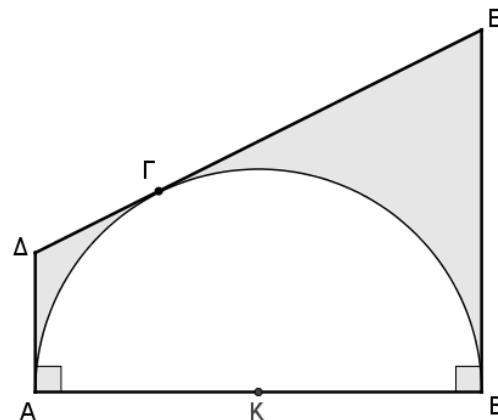
γ) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{g(\theta) + \eta\mu 2\theta}{\theta} = 4$$

Να αποδείξετε ότι $g(0) = 0$ και $g'(0) = 2$.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο ΑΒΓ με κέντρο Κ και ακτίνα R. Οι ΑΔ, ΔΕ, ΒΕ είναι εφαπτόμενες του ημικυκλίου στα σημεία Α, Γ και Β αντίστοιχα. Αν $\hat{\Delta\hat{E}B} = 60^\circ$ να υπολογίσετε:

- 1) Τα μήκη των πλευρών ΑΔ και ΒΕ συναρτήσει της ακτίνας R.
- 2) Το σκιασμένο εμβαδόν.
- 3) Το σκιασμένο χωρίο περιστρέφεται γύρω από τη διάμετρο του ημικυκλίου ΑΒ κατά 2π . Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.



ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Ανδρούλλα Χρίστου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: 23 /5 / 2017

ΤΑΞΗ: Β΄

Διάρκεια: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού .

Να γράφετε με μελάνι μπλε (μόνο τα σχήματα με μολύβι).

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.

Μαζί με το εξεταστικό δοκίμιο δίνεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων

a) $y = \ln 2x + \ln x$ b) $y = x^2 \cdot e^x$

2. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$$

3. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - 3|x| + 2x - 6 = 0$

4. Σε τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{G} < 90^\circ$) δίνονται: $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $a = 2 \text{ cm}$ και $b = 4 \text{ cm}$.

Να επιλύσετε το τρίγωνο. (Να υπολογίσετε όλες τις πλευρές και τις γωνίες του)

5. Να αποδείξετε ότι: $\sin 4a = 8 \sin^4 a - 8 \sin^2 a + 1$

6. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

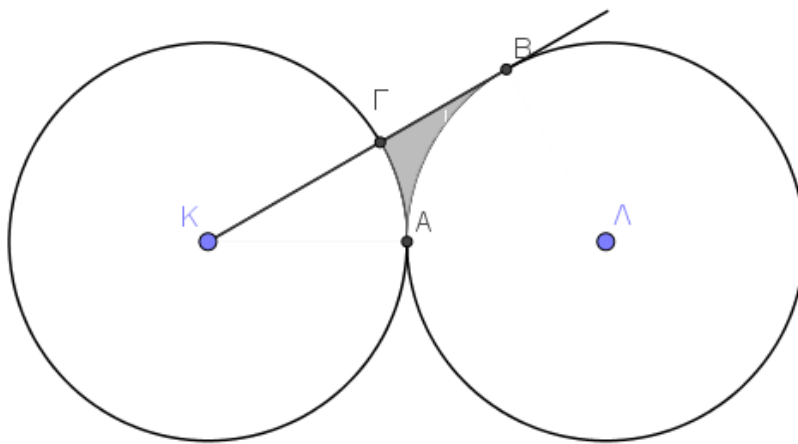
7. Οι πλευρές ενός κυρτού τετραπλεύρου, a_1, a_2, a_3, a_4 , με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο a_1 και λόγο $r, r \in \mathbb{N}^*$.
Αν είναι $a_1 + a_4 = a_2 + a_3$, να αποδείξετε ότι είναι τετράγωνο ή ρόμβος.

8. Να λύσετε το σύστημα:

$$\log_4(xy) = 2$$

$$\log_2 x \cdot \log_2 y = 3$$

9. Δίνονται δύο κύκλοι (K, R) και (Λ, R) που εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Α. Αν ΚΒ εφαπτομένη του κύκλου (Λ, R) , να βρείτε το εμβαδόν και την περίμετρο του **μικτόγραμμου** τριγώνου ΑΒΓ.



10. Δίνεται ο αριθμός των πωλήσεων που έκαναν 11 πωλητές μιας εταιρείας σε μια βδομάδα:

12,1,8,9,10,11,12,20,8,9,10

α) Να βρείτε τα τεταρτημόρια και τις ακραίες παρατηρήσεις (αν υπάρχουν)

β) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. α) Να αποδείξετε ότι για να είναι η πιο κάτω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ πρέπει $\alpha=4$ και $\beta=2$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & \text{αν } x < 1 \\ b + 1, & \text{αν } c = 1 \\ ax^2 - 1, & \text{αν } c > 1 \end{cases}$$

β) Αν $(h \circ g)(x) = f(x)$ (για $c < 1$) και $g(x) = x + 2$, να βρείτε τον τύπο της $h(x)$.

2. Αν $f(x) = \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)^2$, να αποδείξετε:

a) $\sqrt{x^2 + 1} \cdot f'(x) = 2f(x)$ (μον.3)

b) $(c^2 + 1) \cdot f'(x) + x \cdot f''(x) = 4f(x)$ (μον.3)

γ) Αν $f(x) = x^2 - ax + b$ να βρείτε τις τιμές των $a, b \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της f να εφάπτεται της ευθείας (ϵ): $y = 3 - 5x$ στο σημείο $x = -1$. (μον.4)

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2}{3-x}$, $g(x) = \sqrt{x+4}$ και $h(x) = \frac{2x+6}{9-x^2}$

α) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη της f , η $f^{-1}(x)$ και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f^{-1}(x)$.

β) Να εξετάσετε αν $f = h$. Αν $f \neq h$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο $f(x) = h(x)$.

γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ (τύπος και πεδίο ορισμού).

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 2}{g(x) - 2}$

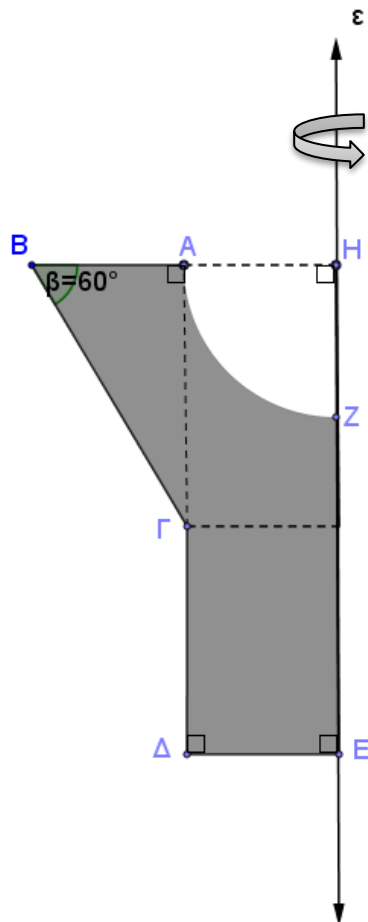
4. Σε μια αριθμητική πρόοδο δίνονται οι όροι της:

$$a_1 = \log(sunc) \text{ και } a_3 = \log \frac{\frac{\hbar m^2 c}{e sunc} \ddot{\theta}}{\ddot{\theta}} \text{ όπου } 0 < c < \frac{\rho}{2}$$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $d = \log(\theta^x)$

β) Αν $S_3 = \log\left(\frac{\hbar n^2 c \hbar n^2}{2}\right)$ να βρείτε τη γωνία χ αν $0 < x < \frac{\rho}{2}$

5. Στο πιο κάτω σχήμα ο κυκλικός τομέας ΑΗΖ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα ΑΗ και κέντρο Η. Επίσης δίνονται: $\hat{B} = 60^\circ$, ΒΓ=4cm, ΓΔ=3cm και Α είναι το μέσο της ΒΗ. Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε). Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Αλέκος Θεμιστοκλέους

.....

4. Σε μια αριθμητική πρόοδο δίνονται οι όροι της:

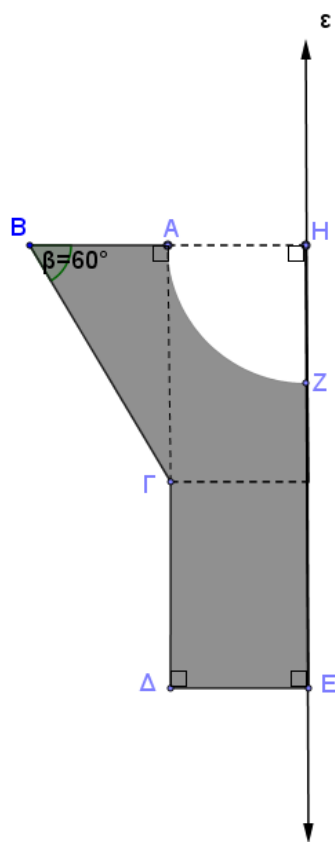
$$a_1 = \log(\sin c) \text{ και } a_3 = \log \frac{\frac{2}{3} \sin c}{\frac{1}{3} \sin c} \text{ όπου } 0 < c < \frac{\rho}{2}$$

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $d = \log(\frac{2}{3})$

β) Αν $S_3 = \log(\frac{2 \sin c}{3})$ να βρείτε τη γωνία χ αν $0 < \chi < \frac{\rho}{2}$

5. Στο πιο κάτω σχήμα ο κυκλικός τομέας ΑΗΖ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα ΑΗ και κέντρο Η.

Επίσης δίνονται: $\hat{B} = 60^\circ$, ΒΓ=4cm, ΓΔ=3cm και Α είναι το μέσο της ΒΗ. Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε). Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Ο Β.Δ. ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Χαράλαμπος Καττιμέρης

Μπάρος Αλέξανδρος

Αλέκος Θεμιστοκλέους

Ελένη Νεοκλέους

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: 25 / 5 / 2017

ΤΑΞΗ: Β'

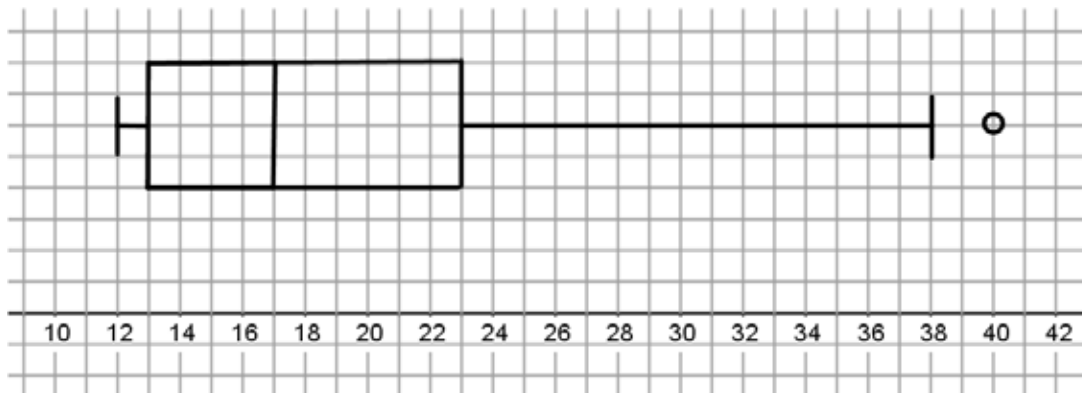
Διάρκεια: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού .
Να γράφετε με μελάνι μπλε. Τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι.
Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
Μαζί με το εξεταστικό δοκίμιο δίνεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λυθούν όλες οι ασκήσεις

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x + 10| + 2x = 2$
2. Στο πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζονται οι εισπράξεις σε ευρώ που έκαναν τα τμήματα της Β' τάξης ενός σχολείου για το ταμείο του τμήματός τους .



Να βρείτε:

- α) τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν,
 - β) τη διάμεσο, το πρώτο τεταρτημόριο, το τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος .
3. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
 - α) $y = (x^2 + 5\sin x) \times \ln x$
 - β) $x^3 y + y^2 = 6$
 4. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ισχύει:
 $1 \times 2 + 2 \times 5 + \dots + n \times (3n - 1) = n^2 \times (n + 1)$

5. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2 - x \eta \mu x}{x^2 + x \eta \mu x}$

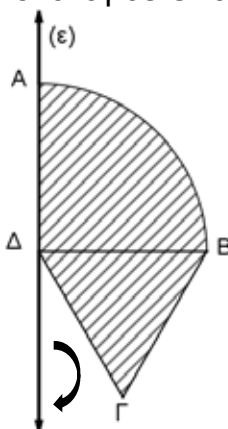
6. α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta \mu x + \eta \mu 3x + \eta \mu 5x}{\sigma \upsilon \nu x + \sigma \upsilon \nu 3x + \sigma \upsilon \nu 5x} = \epsilon \phi 3x$

β) Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{\eta \mu x + \eta \mu 3x + \eta \mu 5x}{\sigma \upsilon \nu x + \sigma \upsilon \nu 3x + \sigma \upsilon \nu 5x} = \sqrt{3}$ στο διάστημα $60^\circ, 180^\circ$.

7. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ όταν :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x \leq 1 \\ 2\sqrt{3x^2 + 1}, & x > 1 \end{cases}$$

8. Στο πιο κάτω επίπεδο σχήμα $AB\Delta$ είναι τεταρτοκύκλιο και το $B\Gamma\Delta$ είναι ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς 4cm. Η γραμμοσκιασμένη επιφάνεια περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) που περνά από τα σημεία A και Δ. Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.



9. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με $a_{n+1} = a_n + 3$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $a_1 = 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η (a_n) είναι αριθμητική πρόοδος.

(Μονάδες: 2)

β) Να βρείτε το άθροισμα: $\Sigma = a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{100}$

(Μονάδες: 3)

10. α) Να αποδείξετε ότι: $2 \log_4 x = \log_2 x$

(Μονάδες: 2)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2 \log_2 x} - 2 \times 3^{\log_4 x^2} = 3$

(Μονάδες: 3)

ΜΕΡΟΣ Β: Να λυθούν όλες οι ασκήσεις.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.**

1. Στο διπλανό επίπεδο σχήμα έχουμε τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο, R).

i. Δίνονται οι πλευρές $AB = \lambda_4$ και $AG = \lambda_3$.

α) Να βρείτε συναρτήσει της ακτίνας R το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου κυκλικού τμήματος. (Μονάδες: 4)

β) Να αποδείξετε ότι η πλευρά $B\Gamma = R\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

(Μονάδες: 4)

ii. Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του ευθύγραμμου τμήματος ΒΓ. (Μονάδες: 2)

2. α) Να αποδείξετε (χωρίς χρήση υπολογιστικής μηχανής) ότι: $\sin^2 \frac{\pi}{8} - \eta\mu^2 \frac{3\pi}{8} = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{4}{(1+\epsilon\phi\alpha)+(1+\sigma\phi\alpha)} \times \frac{1+\eta\mu 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha} = 2 \frac{\epsilon}{\zeta} \sin^2 \frac{\pi}{8} - \eta\mu^2 \frac{3\pi}{8} + 1 \frac{\delta}{\theta}$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με τύπους $g(x) = \sqrt{x+1}$ και $f(x) = ae^{-x} + \beta \times g(x)$, όπου $a, \beta \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε:

α) την $g'(x)$ με τον ορισμό της παραγώγου, (Μονάδες: 4)

β) τα a, β ώστε η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο A(0, 1) να είναι παράλληλη στην $y = 2x - 1$, (Μονάδες: 4)

γ) την $f'(x)$. (Μονάδες: 2)

4. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f: A \rightarrow \mathbb{R}, A = \mathbb{R} - \{2\}$, με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{2-x}$, $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = 2x - 1$ και

$h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με τύπο $h(x) = \sqrt{(2x-1)^2}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} , όπου A το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες: 4)

β) Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο τιμών για το οποίο ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ και να γράψετε τον τύπο της. (Μονάδες: 4)

γ) Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις g και h είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $g(x) = h(x)$. (Μονάδες: 2)

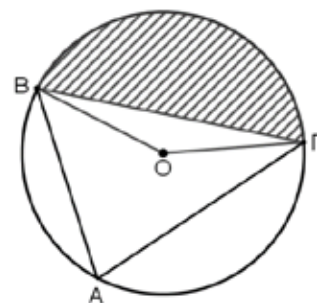
5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 5^x$

α) Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) + f(x+1) + f(x+2) + \dots + f(x+49) = \frac{125 \cdot (5^{50} - 1)}{4}$ (Μονάδες: 4)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης: $g(x) = \sqrt{-5f(2x) + 6f(x) - 1}$ (Μονάδες: 4)

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $h(x) = f(x) \times f(-x) \times \sin x$ είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες: 2)

Ο Διευθυντής
Ανδρέας Ιωσήφ



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**ΜΑΘΗΜΑ:** Μαθηματικά Κατεύθυνσης**ΤΑΞΗ:** Β΄ Λυκείου**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 18/05/2017**ΔΙΑΡΚΕΙΑ:** 2,5 ώρες**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

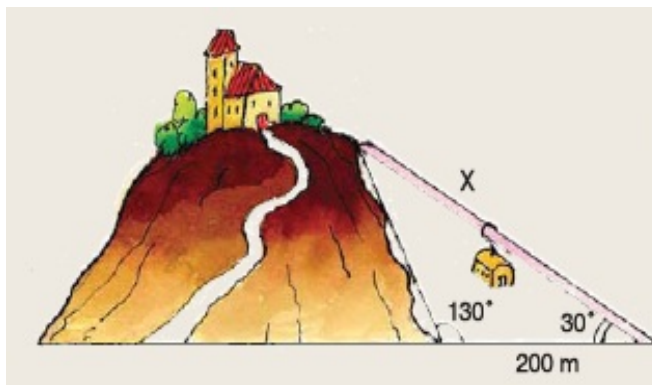
1. Να χρησιμοποιείτε μόνο μελάνη μπλε ή μαύρου χρώματος.
2. Τα σχήματα μπορούν να γίνονται με μολύβι.
3. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής
5. Δεν επιτρέπεται να δανείζεστε οτιδήποτε από συμμαθητές/τριες σας.
6. Η κατοχή κινητού τηλεφώνου **ισοδυναμεί με δολίευση**.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **4** σελίδες και **τυπολόγιο**

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τις **10** ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **5** μονάδες.

1. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $a_n = \frac{3}{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$ είναι γνησίως φθίνουσα.
2. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
(α) $f(c) = 3\sqrt{c} - \ln c$
(β) $c^2 - 3y^2 = 5$
3. Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής χ του εναέριου σιδηροδρόμου στο παρακάτω σχήμα.



4. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ισχύει:

$$1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = 2n^2 - n$$

5. Ο χρόνος αναμονής 20 πελατών μιας τράπεζας μέχρι να εξυπηρετηθούν είναι:

3, 2, 12, 2, 3, 6, 14, 15, 16, 5, 7, 12, 11, 10, 25, 3, 27, 5, 7, 13.

Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα και να ελέγξετε κατά πόσο υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις.

6. Μιας ακολουθίας το άθροισμα των n πρώτων όρων της είναι $S_n = 3n^2 + n$.

(α) Να βρείτε το άθροισμα των $(n-1)$ πρώτων όρων της

(β) Να βρείτε τον νιοστό όρο της

(γ) Να βρείτε τον όρο a_{n+1}

(δ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος

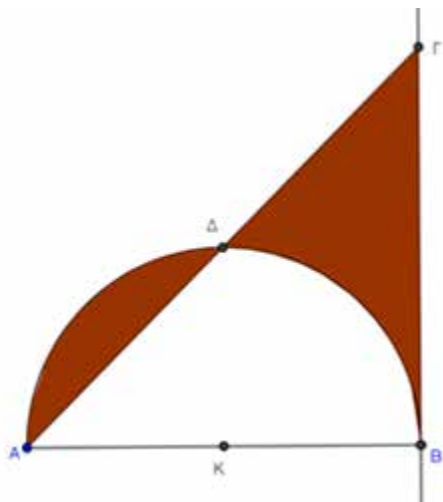
(ε) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 100.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, 5] \rightarrow [4, 16]$ με τύπο $f(x) = 3x + 1$.

Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της f και σε περίπτωση που υπάρχει να την βρείτε.

8. Δίνεται ημικύκλιο ADB ακτίνας R και χορδή $AD = \frac{1}{4}R$.

Αν $B\Gamma$ εφαπτομένη του ημικυκλίου στο σημείο B , να βρείτε συναρτήσει του R το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



9. Αφού διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x - \ln^2 x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(\frac{1}{e}, e)$.

10. Δίνεται η καμπύλη $y = e^{2x+1}$.

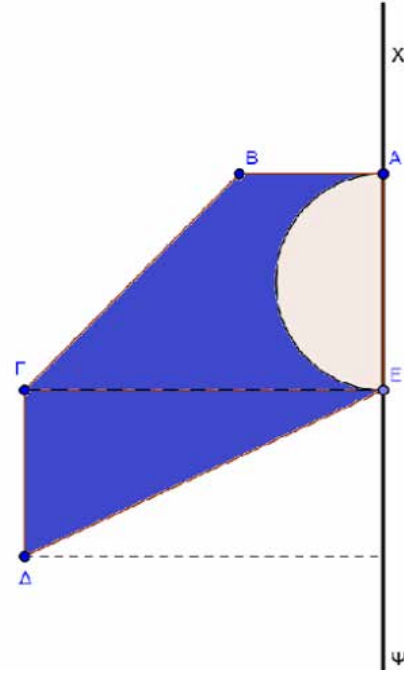
(α) Να αποδείξετε ότι: $y + \frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^3y}{dx^3} + \dots + \frac{d^ny}{dx^n} = (2^{n+1} - 1)e^{2x+1}$, $n \in \mathbb{N}$

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A της καμπύλης, στο οποίο η κλίση της καθέτου ισούται με $-\frac{e}{2}$.

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα $AB=4\text{cm}$, $B\Gamma=10\text{cm}$, $\Gamma E=12\text{cm}$, $\Delta\Gamma=5\text{cm}$ και $\widehat{DGE}=90^\circ$. Οι AB , ΓE είναι κάθετες στον άξονα $\chi\psi$ και το τόξο AE είναι ημικύκλιο. Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα $\chi\psi$.



2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(c) = c - 5$ με $c > 0$ και $g(c) = \frac{c^2 - 4}{c - 5}$.
- (α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$ (τύπο και πεδίο ορισμού),
- (β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$. Αν ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
- (γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{c \rightarrow 10} (g \circ f)(c) \cdot \ln(c - 10)$
3. Δίδεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_2 \frac{c - 2}{c(c - 1)} - \log_{\sqrt{2}}(2) \times \log_{\frac{1}{2}}(c - 1)$
- (α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
- (β) Να δείξετε ότι: $f(c) = \log_2 \frac{(c - 2)(c - 1)}{c}$
- (γ) Να βρείτε την τιμή του l ώστε να ισχύει η ισότητα:
- $$2l \times f(4) = \log_2 3^{l-2} + (2 - l) \times \log_2 2$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln^2 \frac{x}{8} + \frac{c}{2} + \sin^2 \frac{x}{8} - \frac{c}{2}$$

$$h(x) = \frac{\sin 2x}{\ln 2x + \sin 2x + 1} \times \frac{2 \sin x}{1 - e^x}$$

$$\text{και } g(x) = \sqrt{2} f(x) - 1$$

Να δείξετε ότι:

(α) $h(x) = \sin x$

(β) $g(x) = \ln x$

(γ) $g'(x) = h(x)$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2^{x+1} + 2^{x+2} - 24}{4^x - 6 \cdot 2^x + 8}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

(β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{6}{2^x - 2}$

(γ) Αν $h(x) = \frac{6}{f(x)}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x) + 3h(x+1) = -f(3)$ είναι αδύνατη.

Η Διευθύντρια

.....
Θεοδούλα Ερωτοκρίτου

Οι εισηγητές/τριες

.....
Αρσιώτης Παύλος

.....
Παστού Φωτεινή

.....
Ζερζελίδου Χρυστάλλα

.....
Αντωνίου Χριστιάνα

.....
Χριστοδούλου
Χριστόδουλος

Ο/Η Συντονιστής/τρια

.....
Κωσταντίνου Ευάνθης

Η Διευθύντρια

.....
Ερωτοκρίτου Θεοδούλα

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Κατεύθυνσης
ΤΑΞΗ: Β' Ενιαίου Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 30/05/2017
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

Οδηγίες: α) Να γράφετε με μπλε ή μαύρη πένα (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις σελίδες.

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

ΜΕΡΟΣ Α: (50 μονάδες)

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να λύσετε τις πιο κάτω ανισώσεις:

(α) $|x - 4| < 5$ (β) $|y - 2| \geq 3$

2. Μια εταιρεία εξετάζει τη διάρκεια ζωής δύο ειδών μπαταριών Α και Β. Παίρνει τυχαία 14 μπαταρίες από το κάθε είδος και καταγράφει τις ώρες λειτουργίας τους. Οι ώρες φαίνονται πιο κάτω:

A: 12,12,40,13,15,14,20,15,45,25,20,30,15,25

B: 6,7,8,9,10,20,12,30,10,28,27,25,13,32

α) Να κατασκευάσετε ένα φυλλογράφημα διπλής όψης για τα δύο είδη μπαταριών.

β) Να βρείτε ποιο από τα δύο είδη παρουσιάζει μεγαλύτερη διάρκεια ζωής.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + (x - 1)\sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

4. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(c) = c^2 + 1$, με βάση τον ορισμό της παραγώγου στο πεδίο ορισμού της.

5. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

6. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 3$ και $g(x) = \sqrt{x - 4}$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$.

7. Να βρείτε την τιμή του x , ώστε οι αριθμοί $\log 2$, $\log(5^x - 1)$, $\log(5^x + 3)$ να είναι τρεις διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

8. Να λύσετε την εξίσωση $3^{1+\sin c + \sin^2 c + \dots} = 9$ με $c \in (0, \frac{\rho}{2})$

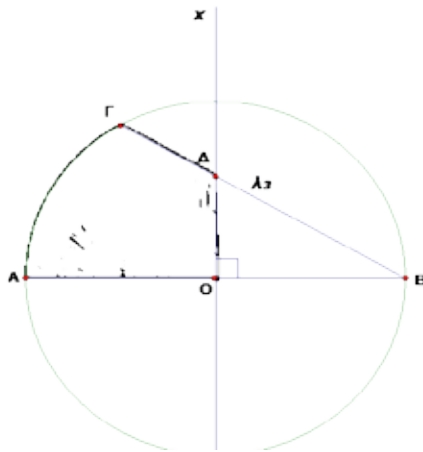
9. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{\sin 2a}{1 + \sin 2a} + \frac{1 + \sin 2a}{\sin 2a}$

α) Να δείξετε ότι $A = \frac{2}{\sin 2a}$

β) Να λύσετε την εξίσωση $A = 2\sqrt{2}$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$, $a \in (\frac{\rho}{4}, \frac{3\rho}{4})$

10. Δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και χορδή $B\Gamma = \lambda_3$. Η

ευθεία XOY είναι κάθετη στην AB και τέμνει την $B\Gamma$ στο Δ .



(α) Να δείξετε ότι $OD = \Delta\Gamma = \frac{R\sqrt{3}}{3}$

(β) Να βρείτε συναρτήσει του R , το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος.

ΜΕΡΟΣ Β': (50 μονάδες)

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $A = \sin^2 x + 1 + \eta \mu^2 x + \eta \mu^4 x + \dots$, όπου $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

β) Να δείξετε ότι $\eta \mu^2 x \cdot \sigma \nu \nu^2 x = \frac{1 - \sigma \nu \nu 4x}{8}$

γ) Αν $x = \frac{\pi}{12}$, να δείξετε ότι $A = 16$.

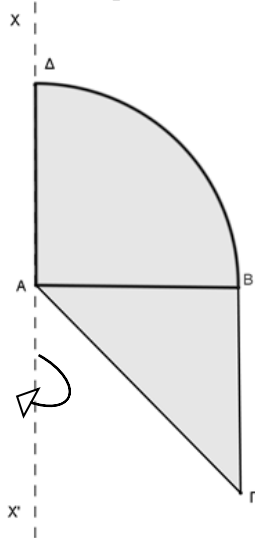
2. α) Να λύσετε την εξίσωση $\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$

β) Αν x_1, x_2 οι λύσεις της εξίσωσης με $x_1 \neq x_2$, να σχηματίσετε τη γεωμετρική πρόοδο με $a_1 = (x_2)^6$,

$a_5 = x_1$ και λόγο $\lambda > 0$.

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των δέκα πρώτων όρων της παραπάνω γεωμετρικής προόδου.

3. Στο πιο κάτω σχήμα , δίνεται ισοσκελές και ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με $\hat{A}BG = 90^\circ$ και κάθετες πλευρές $AB=BG=6 \text{ cm}$. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ σχηματίζω τεταρτοκύκλιο. Το ΑΓΒΔ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από άξονα xx' παράλληλο προς την ΒΓ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.
 γ) Να δείξετε ότι : $f(a) + f(b) = f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$
 δ) Αφού δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη , να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .
5. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $x^{2k} - x\psi + 4\psi = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$.
- (α) Να αποδείξετε ότι : $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2kx^{2k-1}}{4 - x}$
 (β) Να βρείτε την τιμή του k αν η καμπύλη διέρχεται από το σημείο $A(2, -1)$ και να δείξετε ότι $\psi = \frac{x^2-2}{x-4}$
 (γ) Αν $k = 1$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της A .
 (δ) Αν $f(x) = \frac{x^2-2}{x-4}$, να ορίσετε τη συνάρτηση $g(x) = (x-4)^2 \frac{f''(x)}{f'(x)}$
 (ε) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΡΙΕΣ

Τσιήρτου Ρηγίνα

Παρασκευά Μαρία

Η ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΡΙΑ

Γιακουμή Μάγδα (Β.Δ.)

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Θεοφάνους Μαρία

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' Ενιαίου Λυκείου – Κατεύθυνσης

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18/05/2017

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ώρες και 30 λεπτά

Ονοματεπώνυμο: _____ Βαθμός: _____

Τμήμα: _____ Αριθμός: _____ Βαθμός ολογράφως: _____

Υπογραφή καθηγητή: _____

ΟΔΗΓΙΕΣ :

- (α) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- (β) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (γ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- (δ) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία διαδικασία.

Το δοκίμιο αποτελείται από έξι (6) σελίδες και τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α'

Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

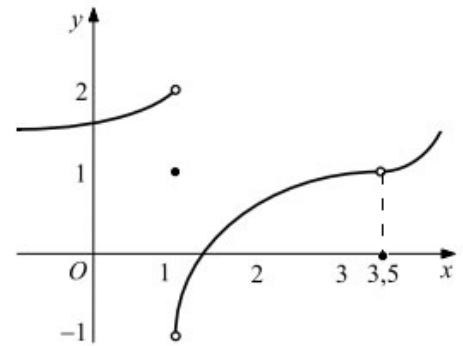
(α) $y = x^2 \cdot e^{3x}$

(β) $y = \sqrt{4x^3 - 5}$

2. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f

(α) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{x \rightarrow 3,5} f(x)$

(β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι συνεχής.

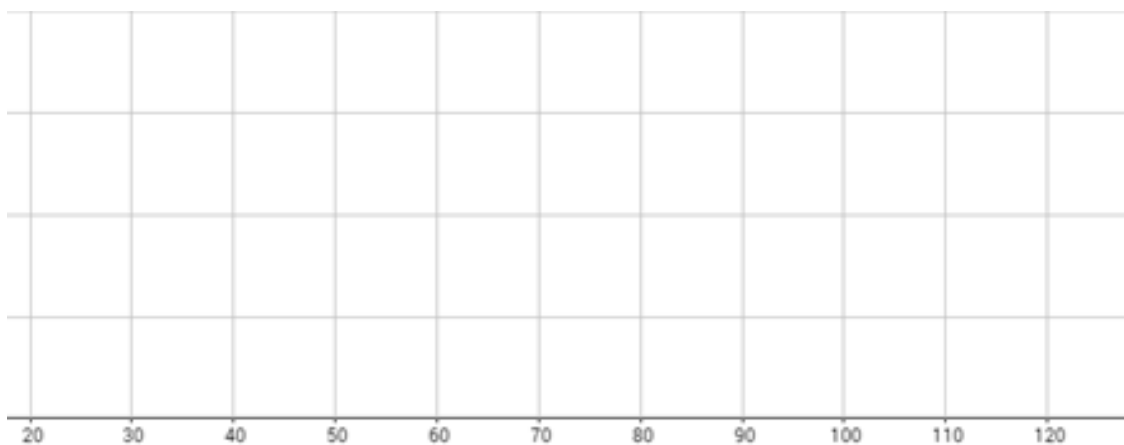


3. Σε μια έρευνα για τη χρήση κινητών τηλεφώνων από μαθητές σε τυχαίο δείγμα 11 μαθητών καταγράφηκαν οι ακόλουθες τιμές σε χρόνο ομιλίας σε λεπτά για μία συγκεκριμένη εβδομάδα:

25, 55, 78, 80, 81, 82, 84, 86, 88, 90, 105

(α) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

(β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ακραίες τιμές.



4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \frac{x^2-4}{x^2-3x}$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

(α) $f + g$ (β) $\frac{f}{g}$

5. Να υπολογίσετε τις τιμές των x και y αν $\ln y, \ln x$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά 2 και επιπλέον ισχύει ότι $x + 2y = 10$.

6. Να δείξετε ότι

$$(\alpha) \frac{\eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu 2x)(1+\sigma\upsilon\nu x)} = \varepsilon\varphi \frac{x}{2}$$

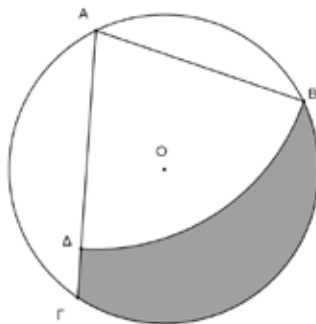
$$(\beta) \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu 2x+\eta\mu x} = \sigma\varphi x$$

$$(\gamma) \text{ Να λύσετε την εξίσωση } \frac{\eta\mu 2x \sigma\upsilon\nu x}{(1+\sigma\upsilon\nu 2x)(1+\sigma\upsilon\nu x)} = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2x+\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu 2x+\eta\mu x}$$

7. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπους $g(x) = x^2 - 5x - 10$, $x \geq 3$ και $f(x) = \sqrt{4-x}$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$

8. Δίνεται κύκλος (O,R) και οι χορδές $AB = \lambda_4$, $AF = \lambda_3$. Με κέντρο το A και ακτίνα AB γράφουμε το τόξο $B\Delta$.

Να υπολογίσετε συναρτήσει του R , το **εμβαδόν** και την **περίμετρο** της σκιασμένης περιοχής.



9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \log \left[\left(\frac{1}{2} \right)^{2x-1} - 3 \left(\frac{1}{2} \right)^x + 1 \right]$.

10. Έστω η δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f(x) = \frac{g(x)}{g'(x)}, \quad x \in \mathbb{R}$. Έστω A το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης της f με τον xx' . Να βρείτε την οξεία γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο A, με τον άξονα xx' .

ΜΕΡΟΣ Β'

Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{x^2 - x}, & x < 0 \\ -3 + \kappa, & x = 0 \\ e^x - \lambda, & x > 0 \end{cases}$ όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$

Να βρείτε:

(α) Τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(β) Την τιμή του λ ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

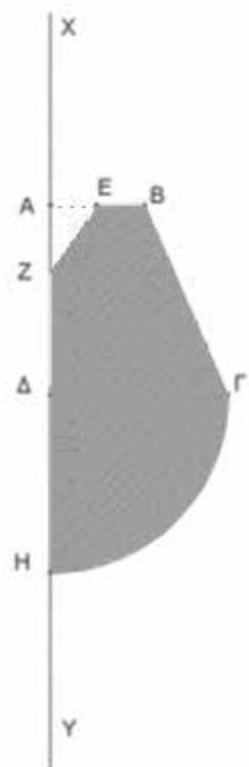
(γ) Αν $\lambda = 4$, να υπολογίσετε τον αριθμό κ , ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

2. Στο διπλανό σχήμα $ZA=4\text{cm}$, $ZE=5\text{cm}$, $B\Gamma=13\text{cm}$, E είναι το μέσο της AB, $(A\Delta)=2(AB)$ και ο κυκλικός τομέας $\Gamma H \Delta$ τεταρτοκύκλιο. Το σκιασμένο μέρος του σχήματος περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα XY.

Να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.

(β) Τον όγκο του στερεού που παράγεται.



3. Δίνονται οι καμπύλες:

$$k_1: 5^x - 4 \times 5^y = 5^{x+y} \quad \text{και} \quad k_2: \begin{cases} x = -\ln t \\ y = 5 \ln(t e^{\pi q} + e^j q) \end{cases}, \quad q \in \left(0, \frac{\rho}{8}\right)$$

Να δείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των k_1 και k_2 στα σημεία τους με τετμημένη ίση με 0 είναι κάθετες μεταξύ τους.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

(α) Να δείξετε ότι συνάρτηση f αντιστρέφεται.

(β) Να ορίσετε την αντίστροφη f^{-1} της f .

(γ) Αν η αντίστροφη f^{-1} της f δίνεται από τον τύπο $f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$, να δείξετε ότι η συνάρτηση $f^{-1}(x)$ είναι περιττή

(δ) Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano και να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f(x) - \frac{3}{2} = 0 \quad \text{έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα } (1, 2)$$

5.

(α) Να δείξετε ότι $\sin\left(\frac{kp}{6}\right) + \sin\left(\frac{(k+1)p}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{(k+2)p}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{p}{6}\right)$, $k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$

(β) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα στο ερώτημα (α) και τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο, να δείξετε ότι ισχύει:

$$\sin\left(\frac{p}{3}\right) + \sin\left(\frac{2p}{3}\right) + \dots + \sin\left(\frac{np}{3}\right) = 2\sin\left(\frac{np}{6}\right) \sin\left(\frac{(n+1)p}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{p}{6}\right), \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

ΤΕΛΟΣ

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Έλση Μαργερίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22.5.2017

ΤΑΞΗ: Β΄

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 7.45

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση σφραγισμένης και μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι. (Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι)
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Το διπλανό φυλλογράφημα παρουσιάζει τις θερμοκρασίες (°C) του δεύτερου δεκαπενθήμερου του Μαΐου στην Λευκωσία και στο Λονδίνο.

- α) Να βρείτε την ψηλότερη θερμοκρασία στη Λευκωσία και την χαμηλότερη θερμοκρασία στο Λονδίνο.
β) Να βρείτε για κάθε πόλη την επικρατούσα τιμή c_e .

Λευκωσία		Λονδίνο
553110	3	0
8655510	2	123
88	1	0112333
	0	7789

2) Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω:

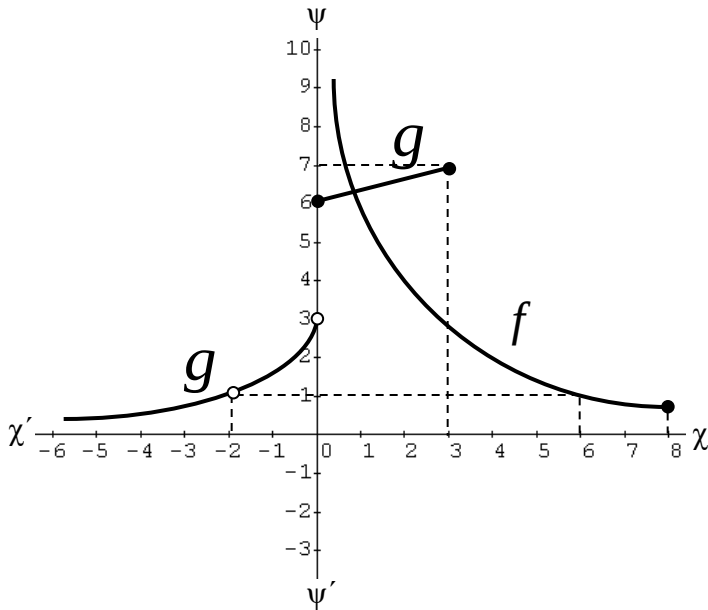
α) $f(x) = e^x \ln x, \quad x \in \mathbb{R}^+, \quad k \in \mathbb{N}$

β) $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$

3) Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}, \quad A = \mathbb{R} - \{-2\}$.

- α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση είναι 1-1 και επί.
β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

4)



Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού $A = (0, 8]$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης g με πεδίο ορισμού $B = (-\infty, -2) \cup (-2, 3]$.

Με την βοήθεια του σχήματος να βρείτε όπου υπάρχουν:

α) $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

γ) $(f \circ g)(0)$

δ) το σύνολο τιμών της g

ε) το πεδίο ορισμού της $f + g$

5) Να αποδείξετε την ταυτότητα:
$$\frac{2\sin a \cos a - 2\sin a}{\sin^3 a - \sin a \cos^2 a} = -2 \cot a$$

6) Δίνεται άπειρος αριθμός κύκλων $(K_1, R), \frac{R}{2}, \frac{R}{4}, \frac{R}{8}, \dots$. Να δείξετε ότι το άθροισμα των περιμέτρων τους είναι ίσο με την περίμετρο του κύκλου $(K, 2R)$.

7) Με την μέθοδο της τέλει επαγωγής, να δείξετε ότι " $n \in \mathbb{N}$ " ισχύει:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}, \quad a \in \mathbb{R} - \{1\}$$

8) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \log(x^2 - 21x)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{f(x)}{3} \geq \frac{1}{9}$

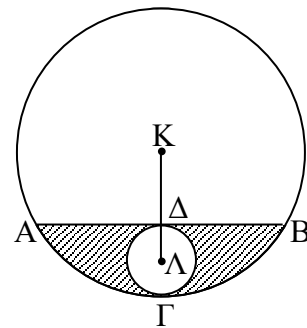
9) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο
$$f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0 \\ 2x^2 + ax + b + 1, & x < 0 \end{cases}$$

Να βρείτε την τιμή του a και την τιμή του b ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

- 10) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ο κύκλος (K, R) και η χορδή του $AB = l_3$. Ο κύκλος (Λ, r) εφάπτεται της χορδής AB στο σημείο D και του τόξου $\widehat{AGB}$.

α) Να δείξετε ότι $r = \frac{R}{4}$.

- β) Να βρείτε το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας συναρτήσει του R .



ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

- 1) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4^{\sin^2 x - \ln^2 x}$, $x \in \left(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right)$.

- α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια στο πεδίο ορισμού της.

- β) Να λύσετε την εξίσωση $f^2(x) - f(-x) = 2$, $x \in \left(\frac{\rho}{2}, \frac{\rho}{2}\right)$.

- 2) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} - 1$ με πεδίο ορισμού A και η $g(x) = x - 4$ με πεδίο ορισμού $B = (-\infty, 10]$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g$.

- β) Αν $f(g(x)) = \sqrt{x - 4} - 1$, να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(g(x))}{x^2 - 5x}$.

- 3) Στο διπλανό σχήμα δίνονται:

ABG ορθογώνιο τρίγωνο

$\widehat{BAG} = 90^\circ$

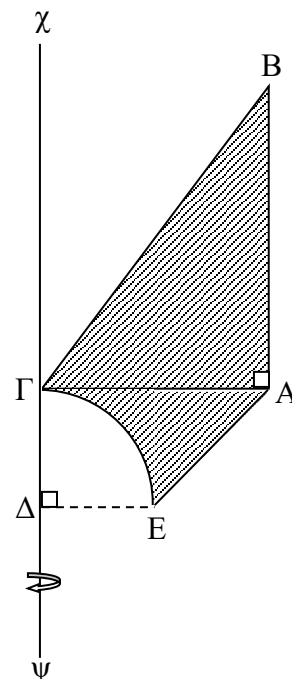
$\widehat{GAE} = 45^\circ$

$AB = 8\text{cm}$

$AB \parallel cy$

$\widehat{BGE}$ τεταρτοκύκλιο ακτίνας $r = 3\text{cm}$

Να βρείτε το εμβαδόν της επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του $ABGE$ γύρω από την ευθεία cy .



4) Δίνεται η καμπύλη C με παραμετρικές εξισώσεις $x = 2t \sin t$ και $y = 2t^2 \cos t$, $t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \tan t$.

β) Αν $\frac{d^3y}{dx^3} + 16 \frac{d^2y}{dx^2} = 0$, να βρείτε το μέτρο της γωνίας t .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης C στο σημείο της με $t = \frac{\pi}{3}$.

5) Δίνονται οι ακολουθίες $a_n = \frac{n \ln(\ln 5^n)}{\ln 10^n}$ και $b_n = 10^{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Να δείξετε ότι: α) $a_n = \log(n \ln 5)$

β) η ακολουθία b_n είναι Αριθμητική Πρόοδος

γ) $e^{b_1 + b_2 + \dots + b_n} = 5^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Εισηγητές:

Βαλανίδου Άννα

Χατζητοουλή Έλλη

Ο Διευθυντής

Νεόφυτος Παπαϊωάννου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥΤΑΞΗ: **Β' Ενιαίου Λυκείου**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 17/05/2017

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΩΡΑ: 10.30-13.00

1. Να γράφετε μόνο με μελάνι μπλε. Τα σχήματα με μολύβι.
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
3. Επιτρέπεται η χρήση σφραγισμένης υπολογιστικής μηχανής.
4. Το γραπτό αποτελείται από **τρεις** σελίδες.
5. Επισυνάπτεται τυπολόγιο στο τέλος.

ΜΕΡΟΣ Α' (50 μονάδες)**Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.****A1.** Να λύσετε την εξίσωση: $|x^2 - 8| = 8$ **A2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \log(x^2 - 5x + 6)$ **A3.** Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

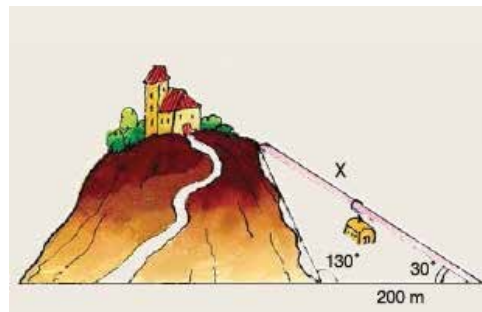
$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{6x^2 + 5}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$$

A4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) f(x) = \ln(\eta\mu^2 x)$$

$$(\beta) g(x) = e^{2x} \times (x^4 + x)$$

A5. Να υπολογίσετε το μήκος της διαδρομής X του εναέριου σιδηρόδρομου, στο διπλανό σχήμα.

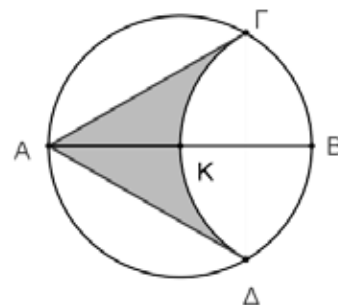
A6. Να αποδείξετε ότι η ακολουθία με νιοστό όρο $\alpha_n = \frac{2}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$, είναι γεωμετρική πρόοδος και στην συνέχεια να βρείτε το άθροισμα των απείρων όρων της.

A7. Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει: $1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = n(2n - 1)$

A8. Με χρήση του ορισμού της παραγώγου, να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.

A9. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{2x} + 9^x = 11 \cdot 4^{x-1} + 4^{x+1}$

A10. Στο διπλανό σχήμα η AB είναι διάμετρος του κύκλου (K,R) και οι χορδές AG και AD είναι πλευρές ισόπλευρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K,R). Με κέντρο το B και ακτίνα BG γράφουμε τόξο ΓΔ μέσα στον κύκλο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του γραμμοσκιασμένου χωρίου, συναρτήσει της ακτίνας R.



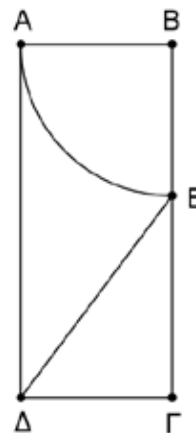
ΜΕΡΟΣ Β' (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνεται ορθογώνιο ABΓΔ με διαστάσεις AB=6 cm και BΓ=14 cm. Με κέντρο το B και ακτίνα BA γράφουμε τόξο μέσα στο ορθογώνιο, που τέμνει την BΓ στο E.

(α) Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ADE.

(β) Αν το πιο πάνω μικτόγραμμο τρίγωνο περιστραφεί πλήρως γύρω από την BΓ, να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που σχηματίζεται.



B2. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \log_x y + 4 \log_y x = 4 \\ 4^{\log x} + 2^{\log y} = 8 \end{cases}$$

B3. Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} x = 2t + \eta\mu 2t \\ y = 1 - \sigma\upsilon\nu 2t \end{cases}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(α) Να δείξετε ότι: $\frac{dy}{dx} = \epsilon\phi t$

(β) Να βρείτε τη εξίσωση της εφαπτομένης της πιο πάνω καμπύλης στο σημείο της με $t = \frac{\pi}{4}$

(γ) Να δείξετε ότι: $2(2 - y) \times \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 1$

B4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ και $h(x) = \frac{x^3 - 2x}{x}$

(α) Να εξετάσετε αν $f = h$. Σε περίπτωση που είναι $f = h$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο είναι $f = h$.

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$.

(γ) Αν $f: A \rightarrow f(A)$ όπου A το πεδίο ορισμού της f , με $f(x) = x^2 - 2$, $A = [0, +\infty)$, να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f . Σε περίπτωση που ορίζεται, να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.

B5. Δίνεται η παράσταση $A = \frac{2\eta\mu 3x \times \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu 4x}{2\eta\mu 3x \times \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 2x}$

(α) Να δείξετε ότι: $A = \frac{1}{2\eta\mu 2x}$

(β) Να λύσετε την εξίσωση $A = 1 - \frac{\eta\mu 2x}{2}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$

(γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x - 3) \times A}$

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Δημητρίου Αλέξανδρος

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής.
- Να γράψετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

Μέρος Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Η κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να λύσετε την εξίσωση $|2x + 1| = 5$.

A2. Δίνεται η Γεωμετρική Πρόοδος $9, -3, 1, \dots$. Να βρείτε:

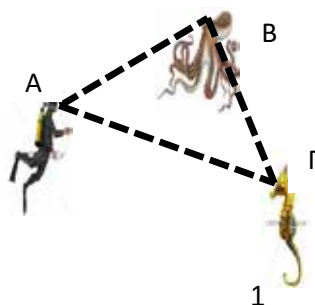
- α) τον όγδοο όρο της,
- β) το άθροισμα των άπειρων όρων της.

A3. Σε μια τάξη 15 μαθητών στο Λύκειο Αγίου Νεοφύτου, ρωτήθηκαν οι μαθητές πόσα λεφτά ξόδεψαν την προηγούμενη βδομάδα στο σχολείο. Οι απαντήσεις που έδωσαν ήταν:

11, 8, 9, 14, 2, 22, 14, 12, 11, 8, 7, 11, 12, 8, 25.

Να κατασκευάσετε το φυλλογράφημα και να υπολογίσετε τη διάμεσο.

A4. Στο πιο κάτω σχήμα ο δύτες βρίσκεται στο σημείο A. Η απόσταση του από το χταπόδι είναι $AB = 5m$ και η απόσταση του από τον ιππόκαμπο είναι $AG = 6m$. Αν η απόσταση $BΓ$ είναι $4m$, να βρείτε τη γωνία με την οποία ο δύτες βλέπει τα δύο θαλάσσια ζώα.



A5. Να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{x^2-9}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \varepsilon \varphi \frac{1}{x})$

A6. Να λύσετε το σύστημα: $\log(y+4) - \log 2 = 2 \log x$

$$x^{(\frac{1}{\log_4 8} + \frac{1}{\log_{16} 8})} = y$$

A7. α) Με τη βοήθεια της μεθόδου της τέλειας επαγωγής να δείξετε ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}, \text{ όπου } \alpha > 1.$$

β) Στη συνέχεια με τη βοήθεια του πιο πάνω ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο να δείξετε ότι:

$$\frac{1+2+2^2+\dots+2^{10}}{1+4+4^2+\dots+4^{10}} = \frac{3}{2^{11}+1}$$

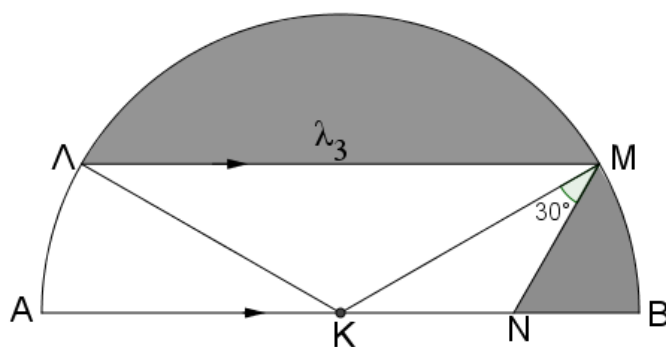
A8. Δίνεται καμπύλη με εξίσωση $e^x - 2xy + \ln(y^2) = 1$. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης στο σημείο A με τετμημένη $x = 0$ και τεταγμένη $y > 0$.

A9. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(-x) + 2f(x) = x^3 - x$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

A10. Δίνεται ημικύκλιο κύκλου με κέντρο K και ακτίνα R και χορδή $AM = \lambda_3$ και $AM \parallel AB$. Αν η γωνία $KMN = 30^\circ$, να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους συναρτήσει του R .



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow f(A)$ με $f(x) = |x + 3| + 5$,

$$g: B \rightarrow g(B) \text{ με } g(x) = \sqrt{2x - 16}$$

$$\text{και } h: \Gamma \rightarrow h(\Gamma) \text{ με } h(x) = \frac{4-x^2}{x+2}.$$

- α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και h είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, για το οποίο είναι $f(x) = h(x)$.
- β) Να αποδείξετε ότι η g είναι αντιστρέψιμη και στη συνέχεια να γράψετε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.
- γ) Να ορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ορίζεται η $g \circ f$ και να γράψετε τον τύπο της.

B2. Δίνονται οι παραμετρικές εξισώσεις: $x = t^2$

$$y = t + \frac{1}{t}, t \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

α) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$.

β) Να δείξετε ότι: $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{3-t^2}{4t^5}$

γ) Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{d^2y}{dx^2}$

$$\text{ii) } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2t^3 \left(\frac{dy}{dx} \right)}{1 - \sqrt{t}}$$

B3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Η πλευρά $AB = 8cm$ και $B\Gamma = xcm$ όπου x είναι η λύση της εξίσωσης $\log_2(4^x + 4) = x + \log_2(2^{x+1} - 3)$.

α) Να δείξετε ότι $B\Gamma = 2cm$.

β) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από ευθεία (ε) που είναι κάθετη στη $B\Gamma$ στο Γ .

Να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που παράγεται.

B4. Αριθμητικής Προόδου ο πρώτος όρος είναι $\alpha_1 = 2\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{6} + x\right) - 2\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$ και

$$\eta \text{ διαφορά } \delta = \frac{2\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x - \eta\mu 3x \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu 2x}.$$

α) Να δείξετε ότι: $\alpha_1 = \sigma\upsilon\nu 2x$ και $\delta = \frac{1}{2}$.

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x , $x \in (0, 2\pi)$ το άθροισμα του πρώτου και του ένατου όρου είναι $\frac{8}{1 + \varepsilon\varphi^2 x}$.

B5. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g όπου:

$$f(x) = \begin{cases} -x + 1, & x < 2 \\ (x - 2)^2 - 1, & x \geq 2 \end{cases}$$

και g παραγωγίσιμη $\forall x \in \mathbb{R}$ και $g(e^{ax}) = (\alpha + \beta) - x$, $\alpha, \beta \neq 0$.

α) i) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$.

ii) Να βρείτε την παράγωγο της f στο πεδίο ορισμού της.

β) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο A με τετμημένη $x_0 = 1$.

i) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης στο A είναι η $y = -x + 1$.

ii) Να βρείτε την τιμή των α και β .

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Η ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΡΙΑ Β.Δ.

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

.....

Χατζηχαράλαμπος Γεωργία

.....

Χρίστου Χρίστια

.....

Ηρακλέους Αναστασία

.....

Γεωργούλα Φλουρή

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: 02 / 06 / 2017

ΤΑΞΗ: Β' ΚατεύθυνσηςΔιάρκεια: $2\frac{1}{2}$ ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού .

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - |x| - 5 = 1$.**A2.** Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 16}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{3x - 2x^2}$.

A3. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$.

β) $g(x) = \frac{\sin 2x^3}{x^2}$.

A4. Να κατασκευάσετε γεωμετρικά (με κανόνα και διαβήτη) μια γωνία ίση με 45° .**A5.** Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ισχύει:

$$1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = 2n^2 - n.$$

A6. Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$\begin{cases} x^{\log y} = 1000 \\ \log(xy) = 4 \end{cases}.$$

A7. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού x ώστε οι αριθμοί :

$$\log 178, \log \sqrt{81(2^x + 2 \cdot 3^x)}, \text{ και } x \log 3$$

να αποτελούν διαδοχικούς όρους Αριθμητικής Προόδου.

A8. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση: $\varepsilon\phi B \varepsilon\phi \Gamma = 1$.

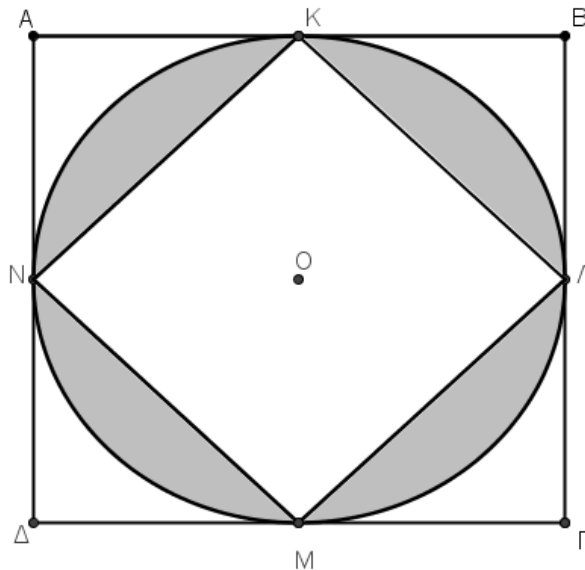
α) Να αποδείξετε ότι είναι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

β) Αν επιπλέον ισχύει $\sin^2 \frac{B}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ να αποδείξετε ότι είναι και ισοσκελές.

A9. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ με πλευρά 10 cm, εγγράφουμε κύκλο κέντρου O και εντός του κύκλου εγγράφουμε τετράγωνο $K\Lambda MN$.

α) Να βρείτε την περίμετρο του $K\Lambda MN$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του κύκλου που βρίσκεται στο εξωτερικό του τετραγώνου $K\Lambda MN$ και εσωτερικά του κύκλου.



A10. Να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+\kappa\eta\mu x}{x-x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής.}$$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Αριθμητική πρόοδος και φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος έχουν τον ίδιο πρώτο όρο και η διαφορά της αριθμητικής προόδου είναι τριπλάσια του λόγου της γεωμετρικής προόδου. Το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου είναι ίσο με τον όγδοο όρο της, ενώ ο πέμπτος όρος της είναι διπλάσιος του αθροίσματος των άπειρων όρων της γεωμετρικής προόδου. Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.

B2. Παραμετρική καμπύλη C ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \eta \mu t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

α) Να εξετάσετε αν το σημείο $A(1,0)$ ανήκει στην καμπύλη.

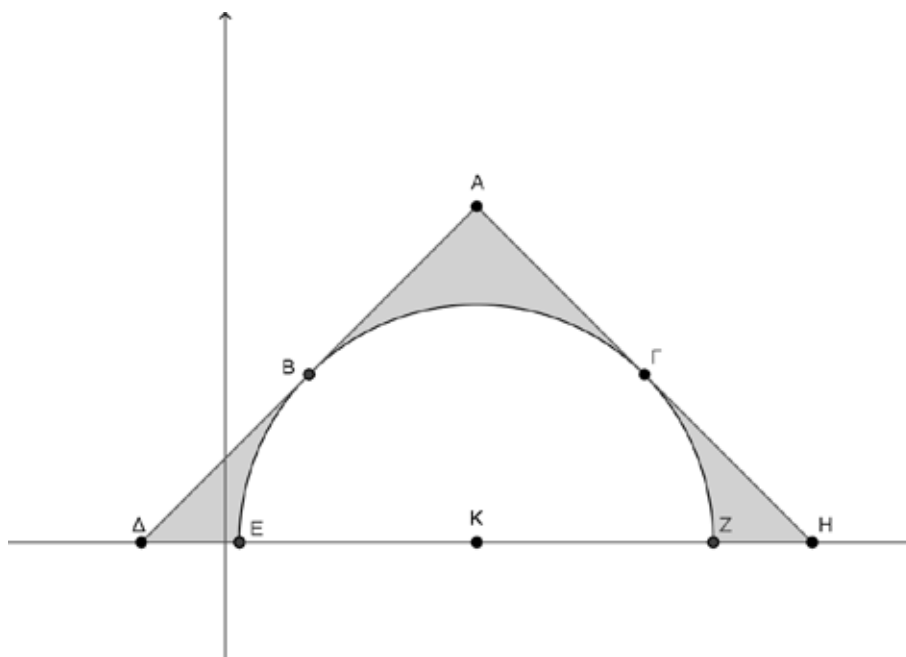
β) Να δείξετε ότι: $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}y = 0$.

B3. α) Δίνεται η γραφική εξίσωση της καμπύλης $C: x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0, y \geq 0$.

Να βρείτε τις εφαπτόμενες της καμπύλης στα σημεία που έχουν τεταγμένη $y = 2$.

β) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της καμπύλης C , η οποία είναι ημικύκλιο με κέντρο K και ακτίνα $R = 2\sqrt{2}$. Οι εφαπτομένες στα B και Γ τέμνονται στο A και τέμνουν τον άξονα των τετμημένων στα Δ και Γ αντίστοιχα. Να βρείτε τις κορυφές του τριγώνου $\Delta\Gamma\text{H}$.

γ) Το σκιασμένο χωρίο περιστρέφεται στροφή κατά 180° γύρω από την ευθεία AK η οποία είναι κάθετη στον άξονα των τετμημένων. Να βρείτε τον όγκο και την επιφάνεια του στερεού που παράγεται.



B4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$, $g(x) = x + 3$ και $h(x) = \sqrt{x}$.

α) Να εξετάσετε κατά πόσο οι πραγματικές συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ίσες.

Στην περίπτωση που ισχύει $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο είναι $f(x) = g(x)$.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ f$.

γ) Να αποδείξετε ότι η $g(x^2)$ είναι άρτια.

δ) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $h: \Gamma \rightarrow h(\Gamma)$ και να παραστήσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις h και h^{-1} .

ε) Με χρήση του ορισμού της παραγώγου να βρείτε την παράγωγο της $h(x)$.

B5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 - 2\sin 2x - 64\eta\mu^4 \frac{x}{2} \sin^4 \frac{x}{2}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \eta\mu^2 2x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + 2\sqrt{f(x)} - 3 = 0$ στο διάστημα $x \in [0, 2\pi]$.

———— ΤΕΛΟΣ ————

Εισηγητές:

Μαρία Χριστοπούλου

Μάριος Αλεξάνδρου

Μαρία Ηλιάδου

Ο Συντονιστής:

Νίκος Νικολάου

Η Διευθύντρια:

Κυριακή Θεοδώρου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 17 / 05 / 2017****ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ****ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2 ½ ώρες****ΑΡ. ΣΕΛΙΔΩΝ: 4**

-
- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 2. Να γράφετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
 3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 4. Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνονται καθαρά τα βήματα επίλυσής τους.
 5. Σύνολο μονάδων δοκιμίου 100.
 6. Επισυνάπτεται τυπολόγιο στο τέλος του γραπτού.
-

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

α) $\log(x - 3) + \log x = \log 4$

β) $|x - 2| = 3$

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων :

α) $f(x) = 3x^4 - \frac{5}{x^3} + 8$

β) $f(x) = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x}$

3. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x - 3}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x\eta\mu x}{x^2}$

4. Το πιο κάτω φυλλογράφημα παρουσιάζει τις απουσίες που έκαναν 15 μαθητές της Β τάξης στο πρώτο τετράμηνο.

5	9
4	2 8
3	0 1 1 1
2	4 5 5
1	0 2
0	3 7 8

α) Να υπολογίσετε την διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των απουσιών του πρώτου τετραμήνου.

β) Το δεύτερο τετράμηνο οι ίδιοι μαθητές σημείωσαν τις πιο κάτω απουσίες:

45, 8, 9, 18, 18, 38, 25, 26, 27, 26, 9, 0, 11, 18, 32

Να κατασκευάσετε το φυλλογράφημα που παρουσιάζει τις απουσίες του δεύτερου τετραμήνου.

5. Σε αριθμητική πρόοδο ο πρώτος όρος της είναι 3 και ο δωδέκατος όρος είναι πενταπλάσιος του δεύτερου όρου της.

α) Να σχηματίσετε την πρόοδο.

β) Να βρείτε το άθροισμα των τριάντα πρώτων όρων της.

6. Σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση: $2E = R\beta\sigma\upsilon\nu(A - \Gamma)$

Να δείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο.

7. Δίνεται η σχέση: $\ln y = x \ln 3 + \ln x$

α) Να δείξετε ότι: $y = x \cdot 3^x$

(μον.1)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $y' - y \ln 3 + 12 = 9^x$

(μον.4)

8. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$), εγγεγραμμένο σε κύκλο (K, R) , όπως φαίνεται στο σχήμα.

Η πλευρά AB είναι ίση με πλευρά κανονικού εξαγώνου

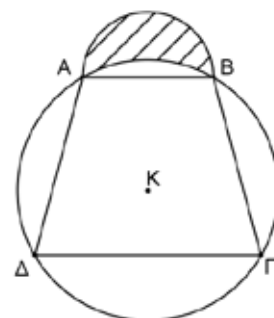
εγγεγραμμένου στον κύκλο και η επίκεντρη γωνία $\Delta\hat{K}\Gamma$ είναι διπλάσια από την επίκεντρη γωνία $A\hat{K}B$.

Με διάμετρο την AB γράφουμε ημικύκλιο εκτός του κύκλου.

Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R :

α) την περίμετρο του τραπεζίου $AB\Gamma\Delta$ και

β) το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου σχήματος.



9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-4x}{1+4x}}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

γ) Να υπολογίσετε την παράγωγο της f .

δ) Να υπολογίσετε το: $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2f(x)}$

10. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$

Να υπολογίσετε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο με $x_0 = 1$.

Μέρος Β: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f: A \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = \frac{-2x}{2-x}$ και $g: B \rightarrow g(B)$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x-2}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και g .

β) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f και να γράψετε τον τύπο, το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.

γ) Να ορίσετε τις συναρτήσεις: $f + g$ και $\frac{f^{-1}}{f}$

δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση: $f \circ g$

2. α) Να αποδείξετε με τη μέθοδο της μαθηματικής (τέλειας) επαγωγής ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο ότι σε γεωμετρική πρόοδο με γενικό όρο a_n , $n \in \mathbb{N}$, ισχύει :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_n = \frac{a_1(1 - \lambda^n)}{1 - \lambda}, \quad \lambda \neq 1$$

β) Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = \ln \sqrt[n]{x}$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

i. Να αποδείξετε ότι είναι φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.

ii. Για ποιες τιμές του x ισχύει η σχέση: $2^8 \cdot \Sigma_8 > 2^9 - 2$

3. Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} x = \alpha \sin^3 \theta \\ y = \alpha \eta \mu^3 \theta \end{cases}, \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να βρείτε την πρώτη και τη δεύτερη παράγωγο της καμπύλης (K). (μον.3)

β) Δίνονται οι τριγωνομετρικές παραστάσεις:

$$A = (\eta \mu \theta - \sigma \nu \theta) \left(\frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta} \right) \quad \text{και} \quad B = 3\alpha \eta \mu \theta \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^4$$

i. Να δείξετε ότι: $A = -\frac{3\alpha}{4} \eta \mu 4\theta$ και $B = \frac{3 - \sigma \nu 2\theta}{1 + \sigma \nu 2\theta}$ (μον.4)

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{4}{3\alpha} A = -1$, στο διάστημα $[0, \pi]$ (μον.3)

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ορισμένες και παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$$f^3(x) + 2g^2(x) = 10, \forall x \in \mathbb{R} \text{ και } g(1) = 1 \text{ και } g'(1) = -3$$

α) Να υπολογίσετε την τιμή του $f(1)$.

β) Να υπολογίσετε την παράγωγο της $f(x)$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο με τετμημένη 1.

δ) Να δείξετε ότι: $\frac{\varepsilon \varphi^2(f(1)) - \varepsilon \varphi^2(g(1))}{1 - \varepsilon \varphi^2(f(1)) \varepsilon \varphi^2(g(1))} = \varepsilon \varphi 3 \varepsilon \varphi 1$

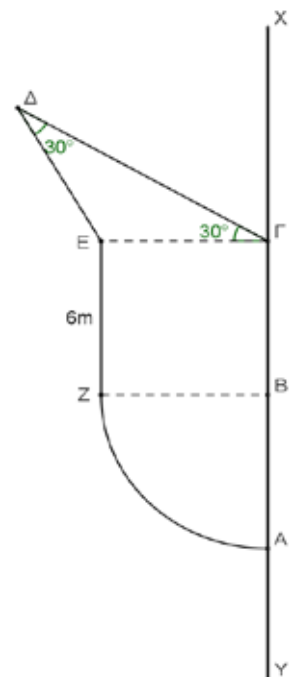
5. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $\Delta E \Gamma$ είναι ισοσκελές με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 30^\circ$ και το $B \Gamma E Z$ είναι τετράγωνο με πλευρά 6 m.

Με κέντρο το σημείο B και ακτίνα BZ γράφουμε τόξο AZ

(τα σημεία A, B, Γ συνευθειακά).

Το σχήμα AΓΔEZA στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα XY.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



Ο Διευθυντής

.....

Δημήτρης Παπαμιλιάδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Κατεύθυνσης)

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19/05/2017

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- (β) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- (γ) Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι.
- (δ) Οι απαντήσεις να δοθούν σε ξεχωριστά φύλλα απαντήσεων. Τα σχήματα να μεταφέρονται στις κόλλες (όπου χρειάζεται).
- (ε) Το γραπτό αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.
- (στ) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α': Να απαντήσετε και στις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των πιο κάτω :

(α) $y = e^{3x}$ ~~hmx~~

(β) $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$

2. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης $\begin{cases} x = e^t - 1 \\ y = \ln(1 - t) \end{cases} \quad t \in [0,1)$, στο σημείο της με $t = 0$.

3. Να λύσετε την εξίσωση $\log_3(4^{x+1} + 2) = 2 + x \log_3 2$.

4. Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι ισχύει :

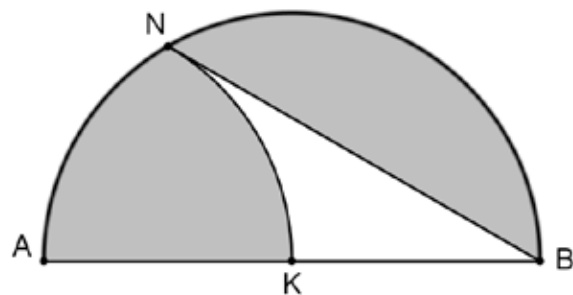
$$1^3 + 2^3 + 3^3 \dots + n^3 = \frac{n^2 \times (n+1)^2}{4} \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = hmx$ και $h(x) = sun x$.

(α) Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές. (β.2)

(β) Να δείξετε με την βοήθεια του ορισμού της παραγώγου ότι $g'(x) = h(x)$. (β.3)

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο Κ και ακτίνα $R = 2a$. Με κέντρο Α και ακτίνα ΑΚ, γράφουμε το τόξο ΝΚ μέσα στο ημικύκλιο. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του a , το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος.



7. Δίνεται ότι το άθροισμα S_n των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι: $S_n = 3 - \frac{1}{4^n}$.

(α) Να δείξετε ότι ο γενικός όρος της είναι $a_n = \frac{3}{4^n}$. (β.2)

(β) Να εξετάσετε αν πιο πάνω ακολουθία είναι άνω ή κατω φραγμένη ή φραγμένη. (β.1)

(γ) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος και να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων της. (β.2)

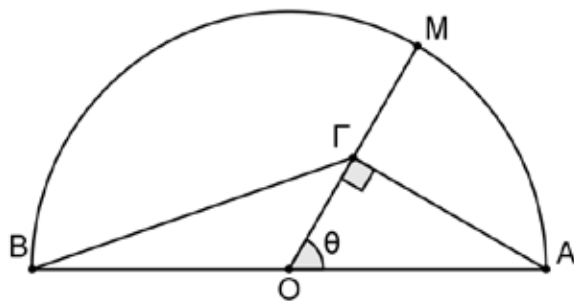
8. Να βρείτε τα $a, b \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin x + ax + b, & \text{αν } x > 0 \\ 2x^2 - x, & \text{αν } x \leq 0 \end{cases}$, να είναι παραγωγίσιμη για $x = 0$.

9. Με διάμετρο ΑΒ και κέντρο Ο γράφουμε ημικύκλιο με ακτίνα $R = 1 \text{ cm}$. Με βάση το διπλανό σχήμα να δείξετε:

(α) Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ

ισούται με $E = \frac{\sin 2\theta}{4}$

(β) $(BG)^2 = \frac{5 + 3 \sin 2\theta}{2}$



10. (α) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x^2 - 4, x \geq 0$ και $g(x) = 1 - \sqrt{5 - x}$. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $\frac{g}{f}$ και $g \circ f$. (β.4)
- (β) Αν $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $g^{-1}(x)$ (β.1)

ΜΕΡΟΣ Β': Να απαντήσετε και στις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. (α) Να λύσετε την εξίσωση $1 + \log_2 x = 2 \log_x 2$ (β.3)

(β) Αν $x = 2$ είναι η ακέραια ρίζα της πιο πάνω εξίσωσης, να δείξετε ότι η ακολουθία αριθμών $\log_3 x, \log_3 3x, \log_3 9x, \dots$ είναι Α.Π. (β.3)

(γ) Στη συνέχεια, να δείξετε ότι το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της, ισούται με $S_{10} = 45 + 5 \log_3 4$. (β.4)

2. Δίνεται ότι $e^y = \hbar m x - \sin x$.

(α) Να δείξετε ότι: $\frac{dy}{dx} = \frac{\hbar m x + \sin x}{\hbar m x - \sin x}$ (β.3)

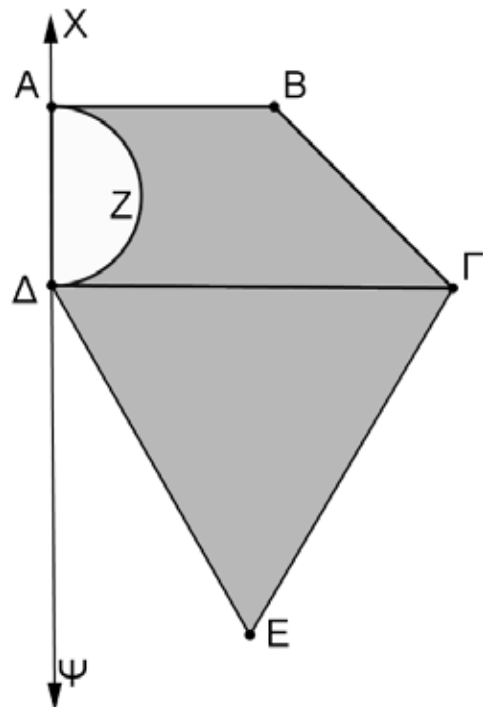
(β) Να δείξετε ότι: $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-2}{1 - \hbar m 2x}$ (β.3)

(γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \times \frac{dy}{dx} = 0$ (β.4)

3. Στο πιο κάτω σχήμα το $ABGD$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{A} = \hat{D} = 90^\circ$ και $AB \parallel DG$).

Το τρίγωνο DGE είναι ισόπλευρο με πλευρά $DG = 9 \text{ cm}$. Το ημικύκλιο AZD γράφτηκε

με διάμετρο την AD . Δίνονται επίσης $\hat{DGB} = 45^\circ$ και $BG = 4\sqrt{2} \text{ cm}$. Να υπολογίσετε την επιφάνεια του στερεού που δημιουργείται από την πλήρη περιστροφή της σκιασμένης επιφάνειας γύρω από τον άξονα CY .



4. (α) Πότε μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της; (β.3)

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax + b, & x \leq 3 \\ ax^2 + bx + g, & x > 3 \end{cases}$

Να υπολογίσετε τους σταθερούς αριθμούς a, b, g , αν η $f(x)$ είναι συνεχής και ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2. \quad (\beta.3)$$

(γ) Να εξετάσετε κατά πόσο υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{|x^2 - x - 2|}{x + 1}$ (β.4)

5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x-2}$, $g(x) = \frac{2x}{|x|-2}$ και

$$h(x) = \frac{a \ln(2x-2)}{x-1} + b x^2 \quad (a, b \in \mathbb{R}) \quad \text{με πεδίο τιμών το } \mathbb{R}.$$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο πάνω συναρτήσεων. (β.3)

(β) Να βρείτε για ποιές τιμές του x ισχύει $f(x) = g(x)$. (β.3)

(γ) Η εφαπτομένη της $h(x)$ στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{3}{2}$ είναι κάθετη στην ευθεία

$$x + 4y = 16. \text{ Αν η γραφική παράσταση της } h \text{ διέρχεται από το σημείο } K\left(\frac{3}{2}, 0\right), \text{ να}$$

υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς a, b . (β.4)

-ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ-

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Η ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΡΙΑ Β.Δ.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Κυριακή Παναγή

Κυριακή Παναγή

Παναγιώτης Λαμπίσης

Ουρανία Βαλιαντή

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2017
ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες
ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 07:45 π.μ.

ΒΑΘΜΟΣ:.....
ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:.....
ΥΠ. ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:.....

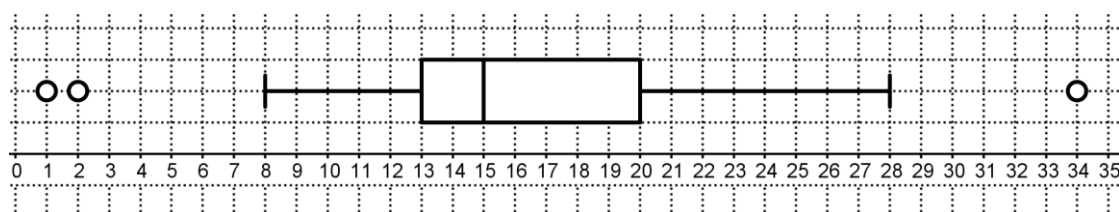
ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:.....ΤΜΗΜΑ:.....

- ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΤΕΚΑ (11) ΣΕΛΙΔΕΣ.
- Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο, το οποίο αποτελείται από μία (1) σελίδα.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Να γράφετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν και με μολύβι).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής σφραγισμένης από το Σχολείο.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

ΑΣΚΗΣΗ 1:

Στο πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζεται ο εβδομαδιαίος χρόνος μελέτης (σε ώρες) των μαθητών ενός τμήματος της Β' Λυκείου.



- (α) Να βρείτε, αν υπάρχουν, ακραίες παρατηρήσεις.
- (β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση και το εύρος των παρατηρήσεων.
- (γ) Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.
- (δ) Να εξετάσετε κατά πόσο το δείγμα είναι συμμετρικό.

ΑΣΚΗΣΗ 2:

Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\frac{d\psi}{d\chi}$ των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) \quad \psi = \frac{\chi^2 + 3}{\chi}$$

$$(\beta) \quad \chi^3 + \chi\psi = 5$$

ΑΣΚΗΣΗ 3:

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) \quad f(\chi) = \frac{\chi^2 + 4}{3 - |\chi|}$$

$$(\beta) \quad f(\chi) = \frac{\sqrt{\chi+1}}{\chi-2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $f(\chi) = \frac{1}{\chi-2}$ και $g(\chi) = \frac{\chi+2}{\chi^2-4}$.

Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες ($f \neq g$), να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

ΑΣΚΗΣΗ 5:

- (α) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής να αποδείξετε ότι ο αριθμός $4^{2^v} - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 5, $\forall v \in \mathbb{N}$.
- (β) Αν $\alpha_v = 4^{2^v} - 1$, $v \in \mathbb{N}$, να υπολογίσετε το όριο $\lim \frac{\alpha_v}{\alpha_{v+1}}$.

ΑΣΚΗΣΗ 6:

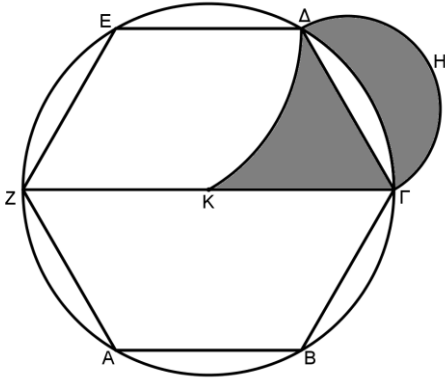
Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 3$ και $g(x) = \sqrt{x} - 3$.

- (α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$ (τύπος και πεδίο ορισμού).
- (β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $g \circ f$ (τύπος και πεδίο ορισμού).

ΑΣΚΗΣΗ 7:

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κανονικό εξαγώνο ΑΒΓΔΕΖ εγγεγραμμένο σε κύκλο (Κ, 8 cm).

Με κέντρο Ε και ακτίνα ΕΔ γράφουμε τόξο ΔΚ εσωτερικά του εξαγώνου. Με διάμετρο ΔΓ γράφουμε ημικύκλιο ΔΗΓ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους του σχήματος.



ΑΣΚΗΣΗ 8:

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $4 \cdot E \cdot \eta\mu \frac{A}{2} = a^2 \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{A}{2}$, όπου Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ, να δείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΑΣΚΗΣΗ 9:

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu(x-2)}{x^2-6x+8}, & x < 2 \\ -\frac{1}{2}, & x = 2 \\ \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{3x-2}}{|2-x|}, & x > 2 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 2$.

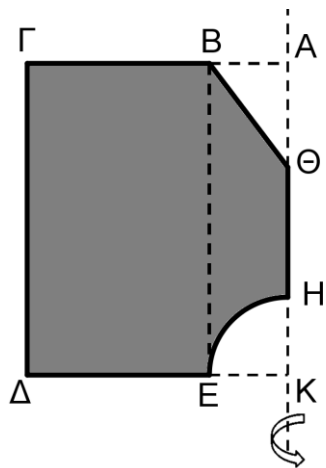
ΑΣΚΗΣΗ 10:

- (α) Φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο a_1 και λόγο λ , έχει άθροισμα άπειρων όρων 16 και άθροισμα των πέντε πρώτων όρων $\frac{31}{2}$. Αριθμητική πρόοδος έχει τον ίδιο πρώτον όρο με τη γεωμετρική πρόοδο και διαφορά $\delta = \log_2(8\lambda)$. Να σχηματίσετε τις δύο προόδους.
- (β) Αν $a_1 = 8$ και $\lambda = \frac{1}{2}$, να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης: $a_1^{1+\sin x + \sin^2 x + \dots} = \lambda^{-6}$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

ΑΣΚΗΣΗ 1:

Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΓΔΚ και τεταρτοκύκλιο ΚΕΗ με κέντρο Κ και ακτίνα ΚΗ = 3 cm. Αν $B\Theta = H\Theta = 5$ cm, $B\Gamma = 7$ cm και $H\Theta \parallel BE$, να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του μικτόγραμμου χωρίου ΒΓΔΕΗΘ γύρω από την ευθεία ΑΚ.



ΑΣΚΗΣΗ 2:

Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} \chi = \sigma \nu 2t + \eta \mu^2 t \\ \psi = \eta \mu 2t + \sigma \nu^2 t \end{cases}, t \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$$

(α) Να δείξετε ότι: $\frac{d\psi}{d\chi} = -2\sigma\eta 2t + 1$ και $\frac{d^2\psi}{d\chi^2} = -\frac{1}{\eta\mu^3 2t}$

(β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{t^2}{(\psi - \chi)} \cdot \begin{pmatrix} \psi & 1 \\ d\chi & \end{pmatrix} \right|$

ΑΣΚΗΣΗ 3:

Δίνεται η συνάρτηση $f : A \rightarrow f(A)$ με $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$.

- (α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Mov. 2)
- (β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f . (Mov. 5)
- (γ) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f . Αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} , να την προσδιορίσετε (τύπο και πεδίο ορισμού). (Mov. 3)

ΑΣΚΗΣΗ 4:

(α) Να βρείτε τη λύση (χ_0, ψ_0) του συστήματος:

$$\begin{cases} \chi^{\log \psi} = 10 \\ \log \sqrt{\chi \cdot \psi} = 1 \end{cases}$$

(β) Αν $\chi_0 = 10$ είναι λύση της εξίσωσης: $\log[\log_{\theta} 4 + \chi \log_2 \theta - \chi - 1] = 0$, να βρείτε τις τιμές του θ .

ΑΣΚΗΣΗ 5:

(α) Η ακτίνα r (σε cm) μιας μπάλας παγωτού σχήματος σφαίρας δίνεται συναρτήσει του χρόνου t (σε min) από τη σχέση $r(t) = 9 - t^2$, $t \in [0, 3]$.

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του όγκου της μπάλας του παγωτού τη χρονική στιγμή $t = 2$ min.

(β) Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) + f(x^2) = 3 \ln x + 4$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

Ο Διευθυντής

Λοΐζος Σέπος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ–ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά
ΤΑΞΗ: Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18 / 5 / 2017
ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά
ΩΡΑ: 7:45 – 10:15

ΒΑΘΜΟΣ

Αριθμητικώς:

Ολογράφως:

Υπογραφή:

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα: Αρ.:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
3. Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

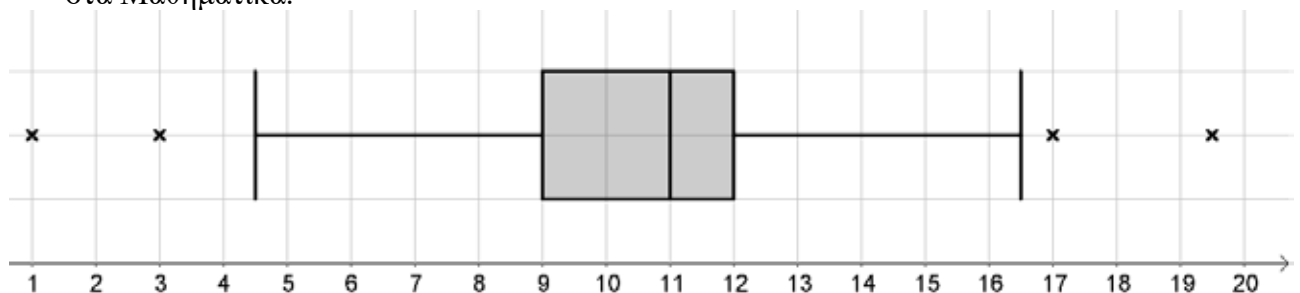
ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

Επισυνάπτεται ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ αποτελούμενο από 1 σελίδα.

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Το πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζει τους βαθμούς των μαθητών μίας τάξης σε διαγώνισμα στα Μαθηματικά.



- (α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.
- (β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη, την ελάχιστη παρατήρηση και το εύρος των παρατηρήσεων.
- (γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

2. Να βρείτε τις παραγώγους των πιο κάτω συναρτήσεων :

(α) $f(x) = e^x \cdot \ln x$

(β) $x^2 - y^2 = 2$

3. Σε τρίγωνο $\overset{D}{A}\overset{B}{B}\overset{G}{G}$ δίνονται $\overset{\circ}{A} = 45^\circ$, $g = 5\text{cm}$ και $b = 5\sqrt{2}\text{cm}$. Να υπολογίσετε την πλευρά a του τριγώνου.

4. Να υπολογίσετε την τιμή του x , ώστε οι αριθμοί $\log_2(5x-4)$, 1 , $-\log_2 x$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

5. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 - 1}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$$

6. Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$

με τύπους $f(x) = |x+4|$ και $g(x) = \frac{x^2 - 16}{x - 4}$ είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσες.

7. Να αποδείξετε ότι: $1 \times 6 + 2 \times 7 + 3 \times 8 + \dots + n(n+5) = \frac{n(n+1)(n+8)}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-1}$ και $g(x) = \ln x$.

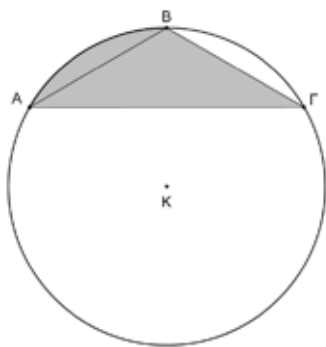
α) Να ορίσετε (τύπος και πεδίο ορισμού) την συνάρτηση $f \circ g$.

β) Να βρείτε την τιμή της $(f \circ g)'(x)$ για $x = e^2$.

9. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα R . Οι χορδές AB και $B\Gamma$ είναι πλευρές κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K, R) .

α) Να αποδείξετε ότι η χορδή $A\Gamma$ είναι πλευρά κανονικού τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K, R) .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου χωρίου, συναρτήσει της ακτίνας R .



10. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει: $(x+1)f'(x) + f\left(\frac{x}{x+1}\right) = 3x$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(1) = 2$.

β) Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

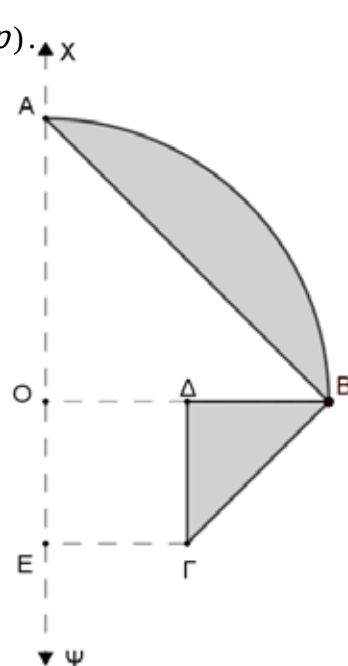
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο πιο κάτω σχήμα ο κυκλικός τομέας AOB είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $OB = 8\text{cm}$, το Δ είναι μέσο του OB και το $ODΓΕ$ είναι τετράγωνο. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα $\chi\psi$.

2. Αν $A = \frac{\ln 8x}{\ln x} - \frac{\sin 3x}{\sin x}$ και $B = \frac{\ln 4x \times \sin 5x + \ln x}{\ln 5x}$

α) Να δείξετε ότι: $A = 2$ και $B = \sin 4x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $AB - 1 = 0$, $x \in (0, \frac{\rho}{2}) \cup (\frac{\rho}{2}, \rho)$.



3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με :

$$f(x) = \begin{cases} \ln^2(x-2) + x - 1, & x < 2 \\ x^2 - 3x + 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ είναι συνεχής στο $x = 2$.

β) i) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = 2$.

ii) Να βρείτε την παράγωγο της $f(x)$ στο $\mathbb{R}$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = a \ln(x-1) + be^{-2x+4}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ τέμνονται σε σημείο A με τετμημένη $x = 2$ και οι εφαπτομένες τους στο σημείο A είναι κάθετες μεταξύ τους, να υπολογίσετε τις τιμές των a και b .

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ με :

$$f(x) = \ln\left(x^2 + \sqrt{x^4 - x^2}\right) + \ln\left(x^2 - \sqrt{x^4 - x^2}\right)$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \ln(x^2)$ και ακολούθως να αποδείξετε ότι η f είναι άρτια συνάρτηση.

β) Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{4}{f(x)} - \frac{2}{f(x)} = \frac{3f(e)}{2}$.

γ) Δεδομένου ότι στο $[1, \infty)$ ορίζεται η $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$,

i) να αποδείξετε ότι η f^{-1} έχει τύπο $f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$,

ii) να λύσετε την ανίσωση $[f^{-1}(x)]^4 - [f^{-1}(x)]^2 \leq 4(f^{-1})'(0)$.

5. Δίνεται ότι το άθροισμα S_n των n -πρώτων όρων μιας ακολουθίας $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι:

$$S_n = 3 - \frac{3}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

α) i) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία δίνεται από το γενικό τύπο: $a_n = \frac{3}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$

ii) Να βρείτε τον όρο a_n της ακολουθίας για τον οποίο $\frac{a_n}{3} = 4^{\sqrt{\log_{10} 9}}$.

β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (a_n) είναι γνησίως φθίνουσα και φραγμένη.

γ) i) Αφού δικαιολογήσετε γιατί υπάρχει το όριο της ακολουθίας (a_n) , να το υπολογίσετε.

ii) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία (a_n) είναι γεωμετρική πρόοδος και να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων της.

Ο Διευθυντής

Ανδρέας Λοΐζου

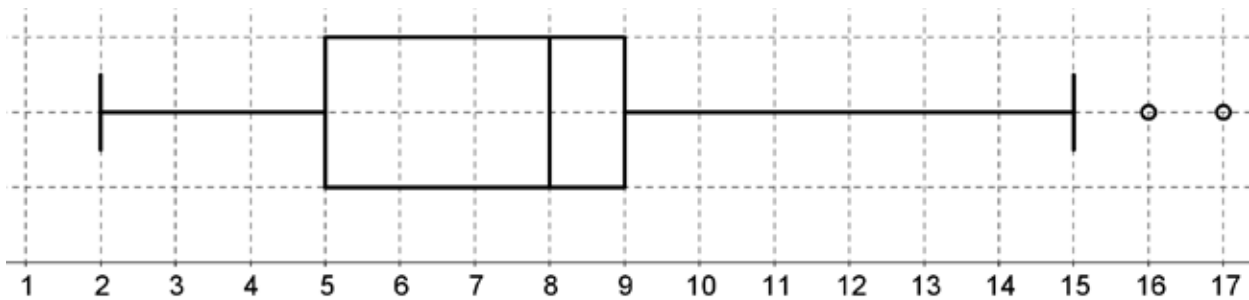
ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΤΑΞΗ: Β΄ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ****ΧΡΟΝΟΣ : 2 ΩΡΕΣ ΚΑΙ 30 ΛΕΠΤΑ****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: Παρασκευή 26/05/2017****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο.
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.(υγρού ή ταινίας)

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

1. Να λύσετε την εξίσωση: $|2x - 3| = 7$

2. Το πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζει τις ώρες χρήσης του ηλεκτρονικού υπολογιστή κατά τη διάρκεια του Σαββατοκύριακου από μια ομάδα μαθητών.



- α) Να βρείτε, τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.
β) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση και το εύρος των παρατηρήσεων.
γ) Να βρείτε τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x}{2\sigma\upsilon\nu x - 1}$

4. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 2^x = 8^{\frac{1}{x-1}} \\ \Rightarrow x \quad (\quad - \quad) \times \end{cases}$$

5. Να υπολογίσετε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της παραμετρικής συνάρτησης:

$$\begin{cases} x(t) = e^{3t} \\ y(t) = \sin 3t \end{cases}$$

6. Αν $\eta\alpha, \eta\mu\beta, \sigma\upsilon\nu\beta, \sigma\upsilon\alpha$ είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου, να δείξετε ότι $\eta\mu(\alpha + \beta) = 1$.

7. Τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο. Φέρουμε την εφαπτομένη του κύκλου στο A και μια χορδή MN παράλληλη προς την εφαπτομένη, που τέμνει τις πλευρές AB και $A\Gamma$ στα σημεία Δ και E αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta B\Gamma E$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

8. Δίνεται η ακολουθία $\alpha_n = 3n + 2, n \in \mathbb{N}$.

α) Να εξετάσετε την ακολουθία ως προς τη μονοτονία.

β) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Τέλειας Επαγωγής, να αποδείξετε ότι:

$$5 + 8 + 11 + \dots + (3n + 2) = \frac{3n^2 + 7n}{2}$$

9. Μια σφαιρική μπάλα χιονιού αρχίζει να λιώνει. Η ακτίνα της σε cm, ελαττώνεται και δίνεται από

τον τύπο $R(t) = e^{1 - \frac{1}{2}t^2}$, όπου t ο χρόνος σε min. Να βρείτε:

α) Τη χρονική στιγμή t κατά την οποία η ακτίνα της σφαιρικής μπάλας γίνεται 1 cm.

β) Τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής της επιφάνειας E της σφαιρικής μπάλας, όταν $t = 1$ min.

γ) Να βρείτε τον στιγμιαίο ρυθμό μεταβολής του όγκου V της σφαιρικής μπάλας όταν $R = 1$ cm.

10. α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha, \beta \neq 0$, ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3 - 3\beta \sin \frac{\pi x}{3} - x^2}{5}, & x < 3 \\ \alpha^2 + 4\alpha + \frac{\beta}{5}, & x = 3 \\ \frac{|x^2 - 3x|}{5x - 15}, & x > 3 \end{cases}$$

β) Αν $\beta = 3$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-2, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α

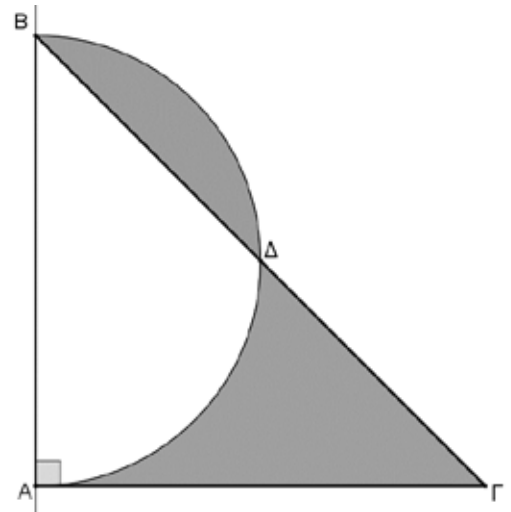
ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις .

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\log_2 x)^2 - \alpha(\log_2 x)(\log_2 2x) - 1$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ και $x > 0$.
- α) Αν $f(4) = 9$ να υπολογίσετε την τιμή του α .
- β) Αν $\alpha = -1$ να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τον άξονα των τετμημένων x' .
2. Δίνεται καμπύλη με τύπο $\ln(\sin x + e) = x + \ln x$, $x > 0$, $x \in (0, \pi)$. Να δείξετε ότι:
- α) $x \cdot e^x - \sin x = e$
- β) $\eta \mu x \cdot \frac{d\psi}{dx} + (x+1) \cdot e^x = 0$
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $x = 1$.
3. Αν $A = 2\eta\mu^2 x - 2\eta\mu^2 x \cdot \sin 2x + 2\eta\mu^2 x \cdot \sin^2 2x - 2\eta\mu^2 x \cdot \sin^3 2x + \dots$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και
- $$B = \frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x - \eta\mu 2x}{\sin x + \sin 3x - \sin 2x}, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$
- α) Να δείξετε ότι: $A = e^{\varphi^2 x}$ και $B = e^{\varphi 2x}$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{3} \cdot B(A - 1) + 2 = 0$ στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$, με τύπο $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.
- α) Να δείξετε ότι:
- i) Η συνάρτηση f είναι περιττή.
- ii) Η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της.
- β) Αν $f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ και $g(x) = 1 - \ln x$, να ορίσετε τη συνάρτηση $(f^{-1} \circ g)(x)$.

5. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $AB=2a$ cm και χορδή $B\Delta = \lambda_4$. Από το A φέρουμε εφαπτομένη στο ημικύκλιο που τέμνει την προέκταση της $B\Delta$ στο Γ.

- α) Αν E_1 το εμβαδό του κυκλικού τμήματος που αντιστοιχεί στη χορδή $B\Delta$ και E_2 το εμβαδό του μικτόγραμμου τριγώνου $\Delta\Gamma A$, να βρείτε το εμβαδό των δύο χωρίων συναρτήσει του a .
- β) Αν V_1 και V_2 είναι οι όγκοι που θα παράγονται από την περιστροφή των χωρίων E_1 και E_2 γύρω από την AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $V_2=5V_1$.



ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Β

Οι εισηγητές

Χαραλαμπίδης Κώστας

Κωνσταντίνου Ρένος

Πηλακούρη Αλεξία

Διονυσίου Διονύσης

Τσαγγάρης Θεόδωρος

Η Διευθύντρια

Ελένη Αντωνίου Τσιελεπή

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΣΕΙΡΑ: Α΄

ΤΑΞΗ: Β΄

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2017

ΧΡΟΝΟΣ: 8:00 π.μ. – 10:30 π.μ.

Οδηγίες:

- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.
 - Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο (2) **μέρη**.
 - Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από πέντε (5) σελίδες.
(επισυνάπτεται τυπολόγιο)
 - Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (με μολύβι **μόνο** τα σχήματα).
 - Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής σφραγισμένης από το σχολείο.
 - **Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.**
 - **Όλες οι απαντήσεις να δοθούν σε σφραγισμένες κόλλες.**
-

ΜΕΡΟΣ Α΄: (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες (5/100).

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 3x}{x^3 + 2x - 7}$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + \pi$

β) $f(x) = \frac{x^4 - 2x}{\ln x}$

3. Να λύσετε την ανίσωση: $|4x + 8| \leq 12$

4. Να λύσετε την εξίσωση: $5^{2x+1} + 5 = 130 \cdot 5^{x-1}$

5. Η ποσότητα αλκοόλ στο αίμα σε mg / ml που βρέθηκε κατά τη διάρκεια ελέγχου αλκοτέστ που έγινε σε 18 οδηγούς χτες το βράδυ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα:

22	0	18	5	0	18	25	12	4
25	32	56	0	4	49	4	0	12

- α) Να κατασκευάσετε το φυλλογράφημα για τις πιο πάνω παρατηρήσεις. (Μονάδες 2)
 β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο. (Μονάδες 3)

6. Ένα αεροπλάνο ταξιδεύει από το Πουέρτο Ρίκο (θέση Γ) με προορισμό τις Βερμούδες (θέση Β), που απέχουν απόσταση 1600 km. Στη συνέχεια όμως λόγω κακοκαιρίας, αλλάζει πορεία και κατευθύνεται προς το Μαϊάμι (θέση Α), που απέχει απόσταση 1650 km από το Πουέρτο Ρίκο. Αν η απόσταση από τις Βερμούδες στο Μαϊάμι είναι ίση με 1770 km να υπολογίσετε τη γωνία ΒΓΑ που πρέπει να στρίψει το αεροπλάνο για να αποφύγει την κακοκαιρία.



7. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{8x+2}{x^2-x-2}$ και $g(x) = \frac{2x}{x+1}$

Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

- α) $f + g$ β) $\frac{g}{f}$

8. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο: $a_v = \ln 2^v$, $v \in \mathbb{N}$

Να δείξετε ότι:

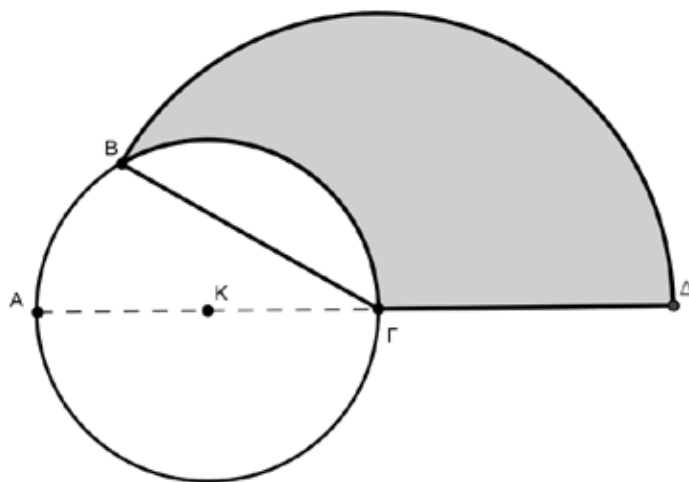
- α) η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος

- β) το άθροισμα των v -πρώτων όρων της είναι: $\Sigma_v = \frac{v(v+1)}{2} \ln 2$

9. Να δείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}$$

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος με κέντρο K και ακτίνα R . Η AG είναι διάμετρος του (K, R) και η χορδή $BΓ$ είναι πλευρά ισοπλεύρου τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο (K, R) . Με κέντρο το $Γ$ και ακτίνα τη $ΓB$ γράφουμε τόξο $BΔ$ που τέμνει την προέκταση της AG στο σημείο $Δ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος συναρτήσει της ακτίνας R .



ΜΕΡΟΣ Β': (Μονάδες 50) Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες (10/100).

1. Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} x = e^t \\ y = \eta \mu t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$
- α) Να εξετάσετε κατά πόσο το σημείο $A(1,0)$ ανήκει στην καμπύλη. (Μονάδες 2)
- β) Να δείξετε ότι: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της καθέτου της καμπύλης (K) στο σημείο της με $t = 0$. (Μονάδες 3)

2. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{1 + \sin 4\alpha + \sin 2\alpha}{\eta\mu 4\alpha + \eta\mu 2\alpha} \quad \text{και} \quad B = \frac{\sin 4\alpha \times \sin 3\alpha - \sin 5\alpha \times \sin 2\alpha}{\eta\mu 2\alpha}$$

α) Να δείξετε ότι: $A = \sigma\phi 2\alpha$ και $B = \eta\mu \alpha$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $B + A \sin \alpha = 1$ στο διάστημα $(0, \pi)$.

3. α) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x + \alpha, & x < 1 \\ \beta - \frac{3}{2}, & x = 1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}, & x > 1 \end{cases}$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Να υπολογίσετε τις τιμές των α και β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.
(Μονάδες 6)

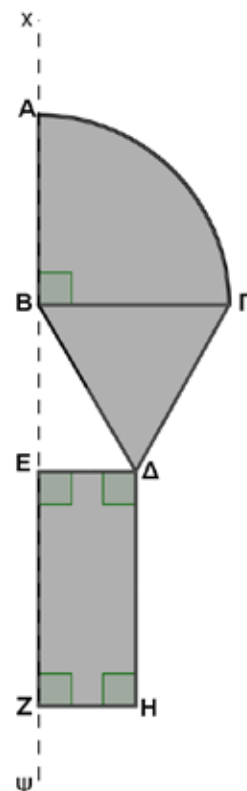
β) Να υπολογίσετε την παράγωγο της συνάρτησης: $g(x) = x^2 + 3x + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$
εφαρμόζοντας τον ορισμό της παραγώγου.
(Μονάδες 4)

4. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κυκλικός τομέας $AB\Gamma$ με $\hat{B} = \frac{\pi}{2}$

και ακτίνα 4 cm, ισόπλευρο τρίγωνο $B\hat{\Gamma}\Delta$ και

ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΔEZH με $EZ = 5$ cm.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του σκιασμένου χωρίου γύρω από τον άξονα $X\Psi$.



5. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln \frac{x-2}{x-1}$ και $g(x) = x^2 - 3x + 2$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της g .

γ) Να ορίσετε πλήρως την $g \circ f$.

δ) Αν η συνάρτηση $f(x)$ με $f: A \rightarrow f(A)$, όπου A το πεδίο ορισμού της, να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτησή της και να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.

Οι Εισηγήτριες

Η Συντονίστρια

Η Διευθύντρια

Μαρία Παπαπέτρου

Μαρία Πολυκάρπου Β.Δ.

Αθηνά Ονουφρίου

Θεονίτσα Νεοφύτου

Ελένη Θεοδωρίδη

**ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ
ΣΤΟ ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ ΕΠΙΣΥΝΑΠΤΕΤΑΙ ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- § Να γράφετε με μελάνι χρώματος μπλε. Για τα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι.
- § Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται καθαρά όλη η αναγκαία εργασία.
- § Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- § Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να λύσετε την εξίσωση: $2^{2x-6} = \frac{1}{16}$

A2. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x}{3x^2 - 5x + 6}$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \eta \mu x}{x}$

A3. Δίνεται η ακολουθία α_n , $n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $\alpha_n = 1 + \frac{1}{n}$.

- α) Να γράψετε τους 4 πρώτους όρους της ακολουθίας.
- β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία α_n είναι γνησίως φθίνουσα.

A4. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των πιο κάτω:

α) $y = e^{3x} \eta \mu 2x$

β) $x^2 - xy + y^2 = 3$

A5. Να λύσετε την εξίσωση: $2\log_9 x + 7^{\log_7 10} = 6\log_3 x - 5$

A6. α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x + \eta\mu 5x}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu 5x} = \epsilon\phi 3x$

β) Να βρείτε στο διάστημα $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$ τις λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x + \eta\mu 5x}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu 5x} = \sqrt{3}$$

A7. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει:

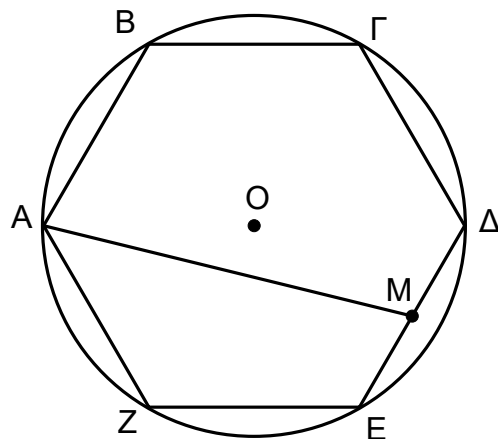
$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

A8. Σε τρίγωνο ABΓ δίνονται $\beta = 2\gamma$ και $\hat{A} = 60^\circ$. Να βρείτε τις άλλες γωνίες του τριγώνου.

A9. α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f: [1,4] \rightarrow [2,14]$ με τύπο $f(x) = 4x - 2$ αντιστρέφεται.

β) Να προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να υπολογίσετε τη $f^{-1}(13)$.

A10. Σε κανονικό εξάγωνο ABΓΔΕΖ
εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) ,
ενώνουμε την κορυφή A με το μέσο M
της πλευράς ΔΕ. Να υπολογίσετε
συναρτήσει του R το εμβαδόν του κάθε
μέρους του εξαγώνου που χωρίζεται
από την AM.



ΤΕΛΟΣ ΤΟΥ ΜΕΡΟΥΣ Α΄

ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $S_n = 2n^2 + n$

- α) Να αποδείξετε ότι $a_n = 4n - 1$
- β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.
- γ) Να βρείτε τις τιμές του n ώστε $|a_n - 7| = 24$
- δ) Χρησιμοποιώντας τον πιο πάνω τύπο ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να υπολογίσετε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της αριθμητικής προόδου.

B2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ορθογώνιο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$

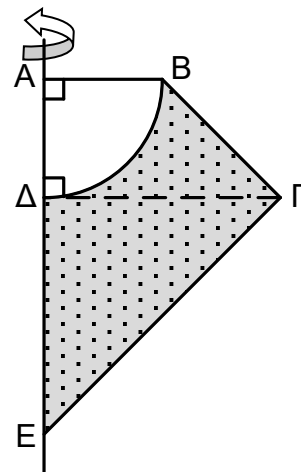
με $\angle A = \angle \Delta = 90^\circ$, $\angle B\Gamma\Delta = 45^\circ$ και ορθογώνιο

ισοσκελές τρίγωνο $\Gamma\Delta E$. Με κέντρο το A και ακτίνα την $AB = a$ cm γράφουμε τόξο $B\Delta$ μέσα στο τραπέζιο.

Το μικτόγραμμο τετράπλευρο $B\Gamma E\Delta$ στρέφεται

πλήρη στροφή γύρω από την AE .

Να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο του στερεού που παράγεται συναρτήσει του a .



B3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $h: [3,5] \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με τύπους

$$f(x) = \sqrt{x} - 1, \quad g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1} \quad \text{και} \quad h(x) = x^2 - 9.$$

- α) Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ έτσι ώστε $f = g$.
- β) Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο τιμών για το οποίο ορίζεται η συνάρτηση $f \circ h$ και να γράψετε τον τύπο της.
- γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{h}$.

B4. Δίνεται η συνάρτηση $f : (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & , \quad -1 < x \leq 1 \\ \frac{x^2 + \lambda x - 1}{x + 1} & , \quad x > 1 \end{cases}$

η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

- α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = 4$.
- β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , στο σημείο της $A(2, f(2))$.

B5. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = 4 - \log(10 - 5x)$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y\phi$.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση: $4^{\frac{|x|}{2} - 1} = f(-18)$
- δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Η Διευθύντρια

.....
Μυρτώ Πουαγκαρέ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΧΡΟΝΟΣ: 2½ ΩΡΕΣ****ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ****ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23/05/2017****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- Να λύσετε τις ασκήσεις πάνω στα φύλλα εξέτασης που σας δίνονται.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 5 σελίδες.**ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

1. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = \ln x - 6x^3 + e^\pi - 7\sqrt{x}$

(β) $y = \frac{e^{2x}}{\sin^2 x}$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

(α) $2^{|2x-1|} = 8$

(β) $\log(x+1) + 2\log\sqrt{5x} = 2$

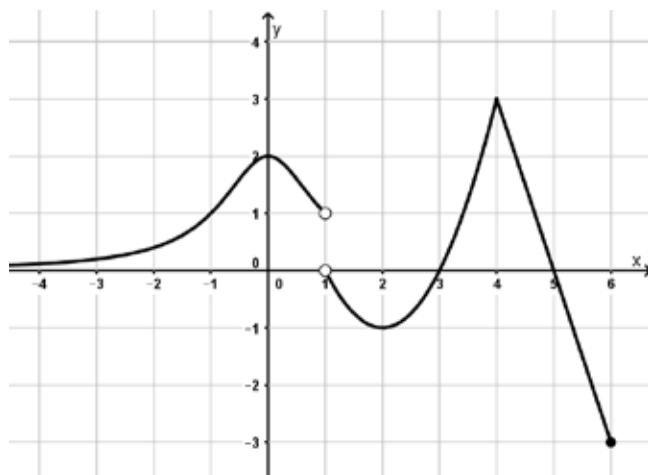
3. Ο αρχικός μηνιαίος μισθός ενός υπαλλήλου είναι 750 ευρώ. Κάθε χρόνο γίνεται αύξηση του μισθού του κατά 20 ευρώ.

(α) Να βρείτε τον γενικό όρο που εκφράζει τον μισθό του υπαλλήλου κάθε χρόνο.

(β) Τι μισθό θα πάρει ο υπάλληλος μετά από 10 χρόνια;

(γ) Πόσα χρήματα θα πάρει συνολικά ο υπάλληλος μετά από 30 χρόνια;

4. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)$.



(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x)$.

(β) Να υπολογίσετε την τιμή του $f(f(4))$.

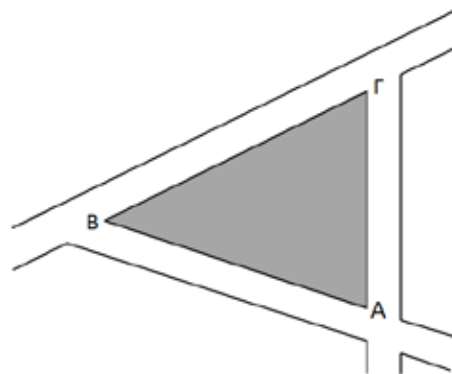
(γ) Να υπολογίσετε τα όρια (αν υπάρχουν): (i) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, (ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$.

(δ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η $f(x)$ δεν είναι παραγωγίσιμη και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5. Το δημαρχείο πρόκειται να τοποθετήσει συνθετικό γρασίδι στην τριγωνική νησίδα που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Αν τα μήκη των πλευρών της είναι $AB = 12,6 \text{ m}$, $AG = 10 \text{ m}$ και $BG = 13,5 \text{ m}$, να υπολογίσετε:

(α) τη γωνία B του τριγώνου, κατά προσέγγιση ενός δεκαδικού ψηφίου.

(β) το κόστος για το δημαρχείο, αν το συνθετικό γρασίδι στοιχίζει με την τοποθέτησή του $\text{€}10/\text{m}^2$.



6. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1, & x \leq 1 \\ \sqrt{x} + \beta, & x > 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τις τιμές του $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

7. Στο πιο κάτω φυλλογράφημα δίνεται ο χρόνος αναμονής (σε λεπτά) 19 επιβατών μιας πτήσης μέχρι να εξυπηρετηθούν στο γραφείο ελέγχου αποσκευών.

2	2
1	9
1	0 0 1 1 2 3
0	5 5 5 6 6 7 8
0	2 2 3 3

- (α) Να βρείτε τον ελάχιστο και μέγιστο χρόνο αναμονής και το εύρος των παρατηρήσεων.
 (β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο των παρατηρήσεων.
 (γ) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.
 (δ) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-5}$ και $g(x) = x^2 + 2x - 3$, $x \geq 1$.

(α) Να ορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$.

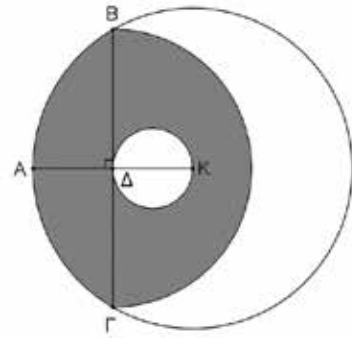
(β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - 1}{x - 6}$.

9. Δίνεται καμπύλη (K) με εξίσωση $y^2 = 16x$, $x \in \mathbb{R}_0^+$.

(α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο A με τεταγμένη $y = 4$.

(β) Αν η εφαπτομένη και η κάθετη της καμπύλης (K) στο σημείο A τέμνουν τον άξονα $x'x$ στα σημεία B και Γ αντίστοιχα, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου P που ισαπέχει από τα σημεία A, B και Γ, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, R) και τυχαίο σημείο Α στην περιφέρειά του. Η μεσοκάθετη της ΑΚ τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ. Φέρουμε ημικύκλιο στο εσωτερικό του κύκλου, με κέντρο το μέσο Δ της ΑΚ και διάμετρο ΒΓ. Στη συνέχεια, φέρουμε κύκλο με διάμετρο ΚΔ. Να βρείτε συναρτήσει του R, το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.



ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. (α) Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι ο αριθμός $5^n - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 4 για κάθε n φυσικό αριθμό.
(β) Αν το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας $\alpha_n, n \in \mathbb{N}$ είναι $\Sigma_n = 5^n - 1$, να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.
(γ) Να εξετάσετε αν η ακολουθία $\beta_n = \frac{1}{5^n - 1}, n \in \mathbb{N}$ είναι συγκλίνουσα.

2. Παραμετρική καμπύλη (Κ) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = 2\theta + \eta\mu 2\theta \\ y = \sigma\upsilon\nu 2\theta \end{cases}, \quad \theta \in [0, \pi)$$

Να δείξετε ότι:

(α) $\frac{dy}{dx} = -\epsilon\phi\theta$

(β) $4\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 1 = 0$

- (γ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Μ της καμπύλης (Κ) στο οποίο παρουσιάζει οριζόντια εφαπτομένη και να γράψετε την εξίσωσή της.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 2}$ $x > 2$.

(α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι 1-1.

(β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f^{-1}(x)$.

(γ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = e^x + 3$.

4. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{1 + \eta\mu 2x - \sigma\upsilon\nu 2x}{1 + \eta\mu 2x + \sigma\upsilon\nu 2x}$ και $B = \frac{\eta\mu 7x - 2\eta\mu 3x - \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu 7x - 2\sigma\upsilon\nu 3x + \sigma\upsilon\nu x}$.

(α) Να δείξετε ότι: $A = \epsilon\phi x$ και $B = \epsilon\phi 3x$.

(β) Να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης $A + B = \tau\epsilon\mu x$.

(γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)A}{x}$.

5. Να κατασκευάσετε ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 8cm και με κέντρο το μέσο του O, να δημιουργήσετε το ημικύκλιο AB. Στη συνέχεια να φέρετε τη χορδή ΑΓ μήκους $\frac{1}{6}$ και τη χορδή ΓΒ και να σκιάσετε το σχήμα που περικλείεται ανάμεσα στο ημικύκλιο και τις δύο χορδές.

(α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του πιο πάνω μικτόγραμμου σχήματος.

(β) Αν το πιο πάνω μικτόγραμμο σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τη διάμετρο AB, να υπολογίσετε τον όγκο του στερεού που δημιουργείται.

(γ) Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που δημιουργείται, αν το πιο πάνω μικτόγραμμο σχήμα κάνει στροφή **μόνο π ακτίνια**.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Μεσαρίτου Άδα, Σ.Β.Δ.

Ολυμπίου Μαρία

Κορέλλη Σωτηρούλα

Θεοδούλου Χρήστος

Ηλιάδου Χαρά

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Ανδρέας Γεωργίου

**ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΜΑΪΟΥ/ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**

Τάξη: Β΄

Ημερομηνία: 29/05/17

Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού

Διάρκεια εξέτασης: 2,5 ώρες

Ονοματεπώνυμο:

Τμήμα:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- (α) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).
 (β) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 (γ) Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 3 σελίδες.
 (δ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 (στ) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.
 Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dc}$ των πιο κάτω:

α) $y = \frac{c^2 - 4c + 5}{c - 2}$

β) $2c^2 + 5cy + y^2 = 10$

2) Αν οι αριθμοί $\frac{a^2 + ag}{a - g}, \frac{a + g}{2}, \frac{b^2 + g^2}{g - a}$ είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου, να δείξετε ότι οι αριθμοί a, b, g είναι διαδοχικοί όροι Γεωμετρικής Προόδου.

3) Να βρείτε αν υπάρχει το όριο $\lim_{c \rightarrow 3} \frac{|c - 3| + 2c - 6}{c^2 - 9}$

4) Η βαθμολογία 10 μαθητών σε ένα διαγώνισμα ήταν 7, 10, 11, 13, 15, 3, 12, 11, 4, 14
 Να υπολογίσετε : α) την τυπική απόκλιση.
 β) τον συντελεστή μεταβλητότητας .

5) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $2f(c) - 3f(-c) = 2c^{2017} - 3c$, " $c \in \mathbb{R}$.
 Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(c) = c^2 + 3$, $c < 0$

α) Να εξετάσετε αν είναι αντιστρέψιμη.

β) Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(c)$ της $f(c)$. (Τύπο και πεδίο ορισμού).

7) Να αποδείξετε ότι :

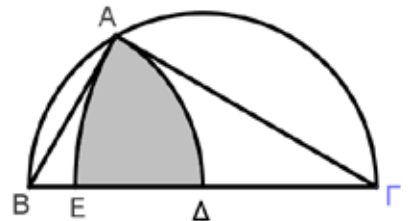
$$\alpha) \sin^2 \frac{\pi}{4} - c^{\frac{0}{2}} - \ln^2 \frac{\pi}{4} - c^{\frac{0}{2}} = \ln 2 c.$$

$$\beta) \frac{\ln 4 c}{1 + \sin 4 c} \times \frac{\sin 2 c}{1 + \sin 2 c} \times \frac{\sin c}{1 + \sin c} = e^j \frac{c}{2}.$$

$$8) \text{ Να απλοποιήσετε το κλάσμα: } K = \frac{1 + c + c^2 + \dots + c^n}{1 + \frac{1}{c} + \frac{1}{c^2} + \dots + \frac{1}{c^n}}$$

$$9) \text{ Να βρείτε το } a \in \mathbb{R} \text{ ώστε η συνάρτηση } f(c) = \begin{cases} 2 + \frac{1 - \sin 2c}{c^2}, & c < 0 \\ c^3 + c + a, & c \geq 0 \end{cases} \text{ να είναι συνεχής.}$$

10) Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με διάμετρο $B\Gamma = 2a \text{ cm}$ και τρίγωνο $AB\Gamma$ εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο με πλευρά $AB = \lambda_6$. Με κέντρο το B και ακτίνα BA φέρουμε τόξο AD και με κέντρο το Γ και ακτίνα ΓA φέρουμε τόξο AE . Να βρείτε συναρτήσει του a το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου AED .



ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες .

1) Αν ισχύει $e^j a = 3$

α) Να υπολογίσετε το $\sin 2a$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln(a + c) - 2\ln(a - c) = 0$.

γ) Να δείξετε ότι $e^j 3a - e^j 2a - e^j a = -\frac{81}{52}$.

2) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(c) = \ln(2 - c)$ και $g(c) = \sqrt{c - 1}$

α) Να ορίσετε την συνάρτηση $g \circ f$ (Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της).

β) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ορίζεται η $\frac{f}{g}$.

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $f(c) = \ln(2 - c)$ στο σημείο με

τετμημένη $c = \frac{3}{2}$ είναι η $y + 2c = \ln \frac{e^3}{2}$.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{c \rightarrow +\infty} \frac{e^{g(c)} - 1}{e^{f(c)}} = \frac{e^{g(c)} - 1}{e^{f(c)}}$

3) Αν $c = 2q + \ln 2q$ και $y = 1 - \sin 2q$ να δείξετε ότι:

α) $\frac{dy}{dc} = \frac{1}{2} q$.

β) $8 \sin^4 q \frac{d^2 y}{dc^2} + 3 \sin q \frac{dy}{dc} = 5$.

4) Δίνεται η Αριθμητική Πρόοδος (a_n) με $a_2 = \frac{1}{2} \log(3 \sin^2 j)$, $j \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και διαφορά $d = \frac{\log 3}{2}$.

α) Να αποδείξετε ότι $a_1 = \log(\sin j)$.

β) Αν $a_3 = \log(\sin j)$ να αποδείξετε ότι $j = \frac{\pi}{3}$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\log \frac{3^{c+3} + 9 \cdot 2^c}{22 \cdot 2^{c-1} + 2 \cdot 3^c} = a_5$.

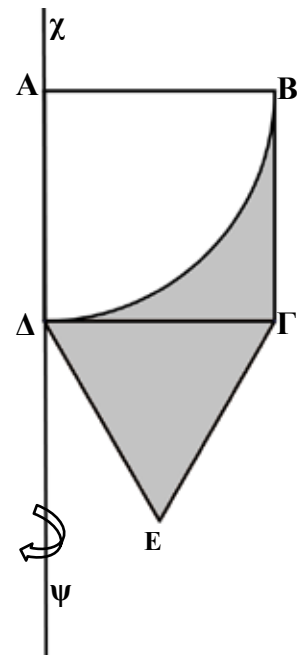
δ) Να λύσετε την ανίσωση $(c+2) \log 2^{13} \leq S_{13} + c \log 3^{13}$.

5) Στο σχήμα το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο πλευράς

$AB = a$ cm και το ΓΔΕ ισόπλευρο τρίγωνο.

Με κέντρο το Α και ακτίνα την ΑΒ γράφουμε τόξο ΒΔ μέσα στο τετράγωνο. Το σκιασμένο σχήμα περιστρέφεται γύρω από την ευθεία χψ.

Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



Οι Εισηγητές
Παπαϊωάννου Ε.
Παπαδοπούλου Ε.

Η Συντονίστρια
Χριστοφόρου Ε.

Ο Διευθυντής
Γιώργος Χρυσοστόμου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΑΞΗ: Β' Προσανατολισμού
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 18 / 05 / 2017
ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 ώρες

Βαθμός:
Ολογράφως:
Υπογραφή:

Όνοματεπώνυμο: Τμήμα: Αριθ.:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράψετε όλες τις απαντήσεις πάνω στο εξεταστικό δοκίμιο.
2. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που έχει ελεγχθεί και σφραγιστεί.
3. Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).
4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΤΕΚΑ (11) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Δίνονται τα γκολ που πέτυχαν οι 14 ομάδες που συμμετέχουν στο Παγκύπριο πρωτάθλημα ποδοσφαίρου στην κανονική περίοδο:
62, 54, 56, 40, 56, 39, 35, 22, 42, 30, 30, 20, 18, 20
α) Να κατασκευάσετε το φυλλογράφημα.
β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο των παρατηρήσεων.

2. Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, $x \in \mathbb{R}$

β) $g(x) = (x+1) \ln x$, $x \in \mathbb{R}^+$

3. Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις:

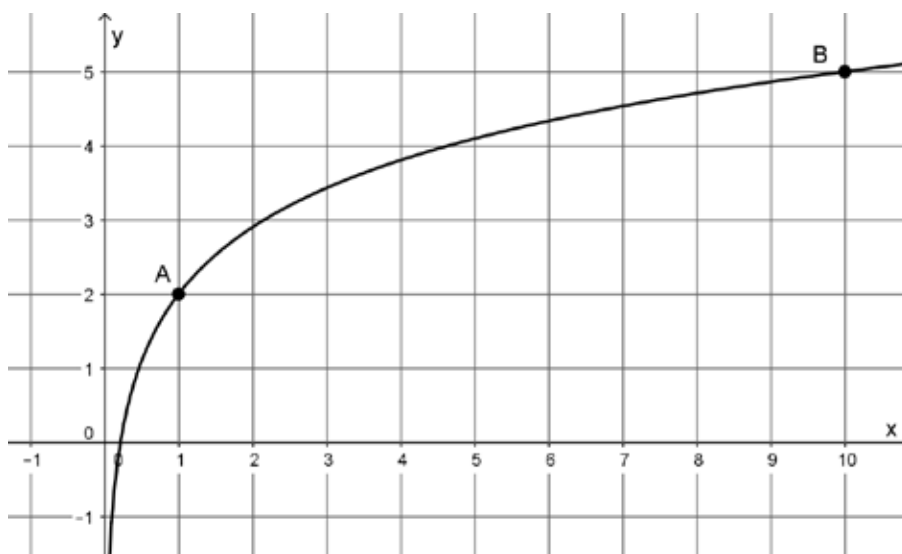
$$\begin{cases} x = 3t \\ y = t^3 + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

α) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$.

β) Να βρείτε την τιμή της $\frac{d^2y}{dx^2}$ για $t = 3$.

4. Μια σφαίρα και ένας κύλινδρος έχουν τον ίδιο όγκο. Το εμβαδόν της σφαίρας είναι ίσο με $36\pi \text{ cm}^2$. Η ακτίνα της βάσης του κυλίνδρου και η ακτίνα της σφαίρας είναι ίσες. Να βρείτε:
- α) Το ύψος του κυλίνδρου.
 - β) Το εμβαδόν της κυρτής επιφάνειας του κυλίνδρου.

5. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha \log x + \beta$, $x \in (0, +\infty)$.
- α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 2$.
 - β) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y = 11$.



6. Δίνεται ακολουθία με $a_n = \frac{2}{3^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

- α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ είναι απόλυτα φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.
 β) Να βρείτε το άθροισμα των άπειρων όρων της.

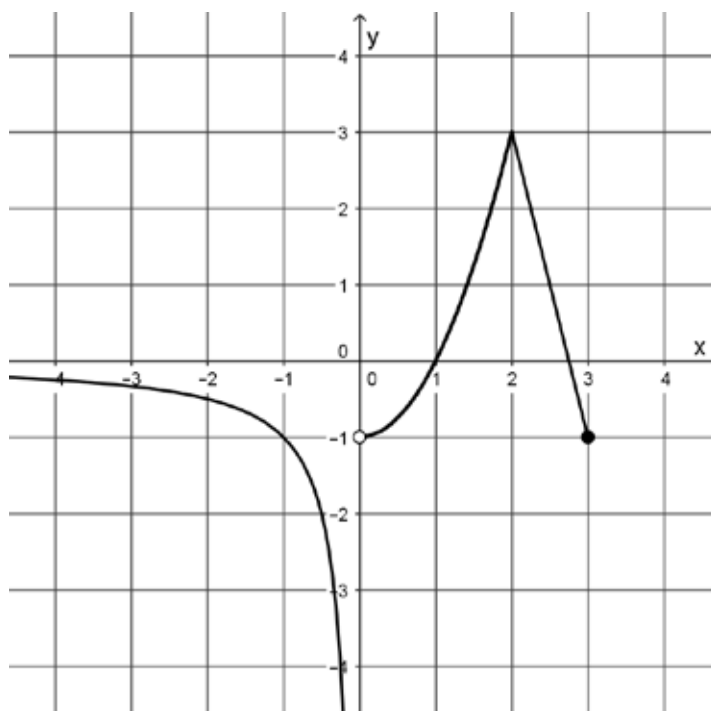
7. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .
 Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) =$

β) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) =$

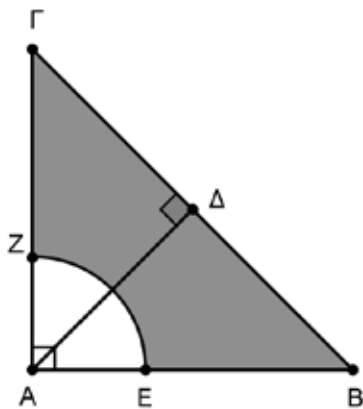
γ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$

δ) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$



8. α) Να αποδείξετε ότι: $\frac{2\eta\mu x + \eta\mu 2x}{2\sigma\upsilon\nu^2 x} = 2\eta\mu x$.
- β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{2\eta\mu x + \eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 2\sqrt{3}$.

9. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και το ύψος του $A\Delta$. Με κέντρο το A και ακτίνα $\frac{A\Delta}{2}$ γράφουμε τόξο που τέμνει τις AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Z αντίστοιχα. Αν το μήκος του τόξου ZE είναι π cm, να βρείτε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής.



10. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, με τύπους

$$f(x) = \ln \frac{1}{e^{x^2} - 1} \text{ και } g(x) = -2 \ln x. \text{ Να εξετάσετε κατά πόσο είναι ίσες. Στην}$$

περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Να βρείτε την τιμή του x ώστε οι αριθμοί
 $\log 80, \log \sqrt{20(5^{x+1} + 3^x)}$ και $x \log 3$
να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι

$$f(x^3 + x) = 5x^2 + 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι $f(2) = \frac{5}{2}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της $A(2, f(2))$.

3. Δίνονται $A = \frac{\eta\mu 3x \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu 3x}$ και $B = \frac{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 2x + \sigma\upsilon\nu 3x}{1 + 2\sigma\upsilon\nu x}$.
- α) Να δείξετε ότι: $A = \eta\mu x$ και $B = \sigma\upsilon\nu 2x$.
- β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{B - 1}{xA}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
 - β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
 - γ) Δίνεται η συνάρτηση $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x^2 + 2$. Να εξετάσετε, αν ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να εξετάσετε, αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.
- β) Να βρείτε την παράγωγο f' της συνάρτησης.

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Σοφούλα Αχειριώτου

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μή προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

β) Να γράψετε με μπλε μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπονται με μολύβι)

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

δ) Επισυνάπτεται τυπολόγιο

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 3 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Να λύσετε την εξίσωση: $|2\chi - 6| = 10$

2) Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(\chi) = \frac{\eta\mu\chi}{\chi^2}$, $\chi \neq 0$

β) $\chi^2\psi + e^x - \ln\psi = 10$

3) Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{\chi \rightarrow 2} \left(\frac{\chi^2 - 5\chi + 6}{\chi^2 - 4} \right)$ β) $\lim_{\chi \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{\chi-1} - 2}{\chi-5} \right)$

4) Σε ένα πάρκο τα δέντρα είναι φυτεμένα σε τριγωνικό σχηματισμό. Στην πρώτη σειρά είναι φυτεμένο ένα δέντρο και σε κάθε επόμενη σειρά είναι φυτεμένα δύο δέντρα περισσότερα από την προηγούμενη. Να βρείτε:

α) Τον αριθμό δέντρων που είναι φυτεμένα στην δέκατη σειρά.

β) Αν όλα τα δέντρα του πάρκου είναι 144, να υπολογίσετε σε πόσες σειρές συνολικά έχουν τοποθετηθεί.

5) Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει: $\alpha = 2\beta$, $\gamma = \sqrt{3}cm$, $\hat{\Gamma} = 60^\circ$.

α) Να επιλύσετε το τρίγωνο.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου.

6) Δίνεται συνάρτηση $f(\chi) = \begin{cases} \frac{\alpha\chi^2 - 3\alpha\chi + 2\alpha}{\chi - 2} & , \chi < 2 \\ 2\chi - 6 & , \chi \geq 2 \end{cases}$

Να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής.

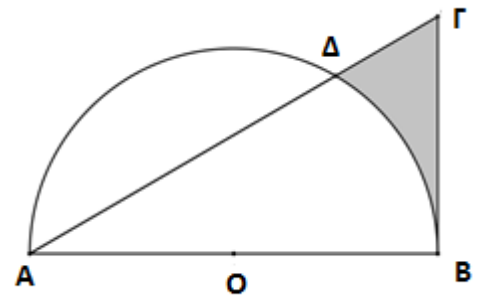
7) Με τη βοήθεια της μεθόδου της τέλειας επαγωγής να δείξετε ότι:

$$1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2} \quad \text{για κάθε } n \text{ φυσικό αριθμό.}$$

8) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3 x + 2\log_x 3 = 3$

9) Η καμπύλη $\psi = \alpha \ln x + \beta x^2$, $x > 0$ περνά από το σημείο $A(1,5)$ και η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο A είναι 4. Να βρείτε τα α και β καθώς και την εξίσωση της καθετού της καμπύλης στο σημείο A .

10) Στο διπλανό σχήμα το $A\Delta B$ είναι ημικύκλιο με κέντρο O και διάμετρο $AB=2R$. Αν $A\Delta = \lambda_3$ και $B\Gamma$ εφαπτομένη του ημικυκλίου στο B , να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου $B\Gamma\Delta$.



ΜΕΡΟΣ Β: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = \frac{3}{x-2}$, $h(x) = \frac{3x+6}{x^2-4}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο πάνω συναρτήσεων.

β) Να ελέγξετε αν $g(x) = h(x)$. Αν δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο των πραγματικών αριθμών στο οποίο να είναι ίσες.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $g \circ f$.

δ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)$ είναι '1-1' και να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης της συνάρτησης.

2) α) Να δείξετε ότι: $\frac{\eta\mu 10\chi + \eta\mu 2\chi}{2\sigma\upsilon\nu 7\chi + 2\sigma\upsilon\nu \chi} = \eta\mu 3\chi$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{\eta\mu 10\chi + \eta\mu 2\chi}{2\sigma\upsilon\nu 7\chi + 2\sigma\upsilon\nu \chi} = \frac{1}{2}$ στο διάστημα $[0, \pi]$

3) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \sqrt{\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$ $x \neq k\pi$, $x \neq k\pi \pm \frac{\pi}{2}$

α) Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{2}{\eta\mu 2x}$

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} x f'(x)$

4)α) Αριθμητική πρόοδος έχει πρώτον όρο $\alpha_1 = \log x$ και δεύτερο όρο $\alpha_2 = \log \psi$, $x > 0$, $\psi > 0$
Αν $\alpha_6 = 11$ και $\Sigma_7 = 49$, να βρείτε τα x και ψ .

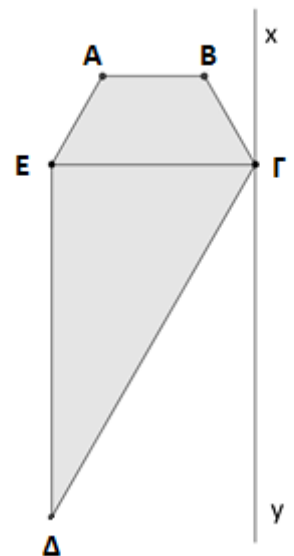
β) Να υπολογίσετε το γινόμενο:

$$2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[16]{2} \dots \dots \dots$$

5) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΕΓΔ είναι ορθογώνιο ($\hat{E} = 90^\circ$) με $ΕΔ = 8 \text{ cm}$, $ΕΓ = 6 \text{ cm}$. Το ΑΒΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο με βάσεις τις ΕΓ, ΑΒ και $ΑΕ = ΑΒ = ΒΓ = 4 \text{ cm}$. Αν το σχήμα ΕΑΒΓΔ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy που είναι κάθετος στην ΕΓ, να βρείτε:

α) Το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και

β) Τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



Ο Εισηγητής

Νεόφυτος Νεοφύτου

Ο Συντονιστής Β.Δ.

Χαράλαμπος Σωτηριάδης

Ο Διευθυντής

Ιωάννης Ορφανίδης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**ΤΑΞΗ:** Β' *Ενιαίου Λυκείου***ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 25/05/2017**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ :** 2:30'**ΩΡΑ:** 7:45 – 10:15 π.μ**Οδηγίες:**

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- β) Να γράφετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- ε) Σε όλες τις ερωτήσεις να φαίνεται ο τρόπος απάντησής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης αιτιολόγησης δεν θα λαμβάνονται υπόψη.
- ζ) Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- στ) Η ΔΟΛΙΕΥΣΗ ΤΙΜΩΡΕΙΤΑΙ ΑΥΣΤΗΡΑ.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α' και το Μέρος Β'.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από μία (1) σελίδα.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 4x}$ και β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{2x^2 - 4x}$

2. Να αποδείξετε την τριγωνομετρική ταυτότητα: $\frac{\eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 2x} = \epsilon\varphi x$.

3. Να λύσετε την εξίσωση: $2^x + 2^{2-x} = 5$.

4. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x^3}{3} + \tau\epsilon\mu x + \sqrt{x}$

β) $g(x) = e^{3x} \cdot \eta\mu 2x$

5. Δίνεται η καμπύλη με εξίσωση $x^2 + y^2 + 2y - 12 = 0$. Να βρείτε τις εξισώσεις της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο της με $x = 3$ και $y > 0$.

6. Να λύσετε την εξίσωση $2\eta\mu x \cdot \eta\mu 3x = 1$ στο διάστημα $[0, \pi]$

7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x + 2}{x + \alpha} & , x \leq 1 \\ \frac{\eta\mu(x-1)}{\sqrt{x}-1} & , x > 1 \end{cases}$

Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση να είναι συνεχής στο 1.

8. Η ακτίνα (R) και το ύψος (u) κυλίνδρου μεταβάλλονται συναρτήσει του χρόνου t και

$$\text{δίνονται από τις εξισώσεις: } \begin{cases} R(t) = \ln(1 + t) \\ u(t) = t^2 + 2t \end{cases}, t \geq 0.$$

α) Να βρείτε το λόγο μεταβολής $\frac{du}{dR}$ του ρυθμού μεταβολής του ύψους προς τον ρυθμό μεταβολής της ακτίνας του.

β) Να εκφράσετε συναρτήσει του t , το εμβαδόν της κυρτής του επιφάνειας.

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της κυρτής επιφάνειας, τη χρονική στιγμή $t = 2 \text{ min}$.

9. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2^{-x}$, $g(x) = \log_2(2 - e^x)$ και $h(x) = \frac{e^{-x}}{2e^{-x} - 1}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων $h(x)$ και $(f \circ g)(x)$.

β) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες.

10. Δίνεται η συνάρτηση $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \varepsilon\varphi x$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

β) Αν f^{-1} η αντίστροφη συνάρτηση της f , να δείξετε ότι $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{1+x^2}$.

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο της $A(1, f^{-1}(1))$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$ είναι διαδοχικοί όροι αύξουσας Α.Π..

α) Να σχηματίσετε την πρόοδο αν η διάμεσος των πρώτων 5 όρων της είναι 5 και η μέση τιμή των 6 πρώτων όρων της είναι 6.

β) Να δείξετε ότι ο γενικός της όρος είναι $\alpha_n = 2n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

γ) Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι ο αριθμός $\beta_n = \alpha_n^2 - 1$ είναι πολλαπλάσιο του 8, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG = \alpha$ και γωνία $\hat{A} = 120^\circ$.

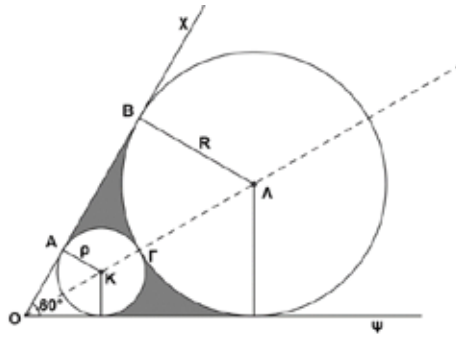
α) Να υπολογίσετε συναρτήσει του α την πλευρά του ΒΓ.

β) Το τρίγωνο περιστρέφεται γύρω από την πλευρά του ΑΓ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο του παραγόμενου στερεού συναρτήσει του α .

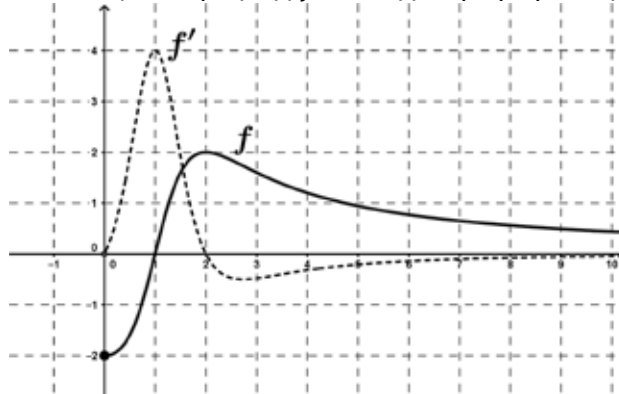
3. Στο εσωτερικό γωνίας $\widehat{X\hat{O}\Psi} = 60^\circ$ εγγράφουμε κύκλους (K, ρ) και (Λ, R) με $\rho < R$ που εφάπτονται στις πλευρές της γωνίας και μεταξύ τους.

α) Να δείξετε ότι $R = 3\rho$.

β) Να υπολογίσετε, συναρτήσει του ρ , το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου μέρους του πιο κάτω σχήματος.



4. Σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $1 + \varepsilon\varphi(45^\circ + B) = \frac{2}{1 - \sigma\varphi \Gamma}$
- α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.
- β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $4E = a^2$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι και ισοσκελές.
5. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις συνάρτησης f και της παραγώγου της f' :



Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού και σύνολο τιμών της f .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

i) $h_1(x) = \frac{\sqrt{3-|x|}}{f(x)}$ ii) $h_2(x) = f(\log_2 x)$ iii) $h_3(x) = (f \circ f)(x)$

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f^2(x) - e^{f'(x)})$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log \frac{1}{f(x)}$ iii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

γ) Να υπολογίσετε την παράγωγο $g'(2)$ σε κάθε μια από τις ακόλουθες περιπτώσεις:

i) $g(x) = \frac{f^2(x)}{e^x}$ ii) $g(x) = f(\sqrt{x+2})$ iii) $g(x) = (f \circ f)(x)$

Τέλος Δοκιμίου

Οι εισηγητές :

Χριστίνα Κυπριανού

Γιώργος Ζαχαρικός

Μιχάλης Κοντοβούρκης

Συντονιστής ΒΔ

Χρίστος Βαλανίδης

Ο Διευθυντής

Αδάμος Σεργίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**ΤΑΞΗ:** Β΄**ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:** 25/05/2017**ΧΡΟΝΟΣ:** 2,5 ώρες**ΟΝΟΜΑ:** **ΤΜΗΜΑ:**..... **ΑΡ.:**

**Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις(4) σελίδες
Το τυπολόγιο δίνεται ξεχωριστά και αποτελείται από μία(1) σελίδα.**

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσης δεν θα λαμβάνονται υπόψη.

ΜΕΡΟΣ Α:

- **Να λύσετε και τις δέκα(10) ασκήσεις του Μέρους Α.**
- **Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε(5) μονάδες.**

A1. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\beta = 2\alpha \sin \Gamma$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές.

A2. Ένας πληθυσμός βακτηριδίων τριπλασιάζεται σε αριθμό κάθε μία ώρα. Αν αρχικά υπάρχουν 10 βακτηρίδια, να υπολογίσετε το πλήθος των βακτηριδίων ύστερα από 6 ώρες.

A3. Να υπολογίσετε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = \ln x + 2\sqrt{x} + e^{5x} + \pi$

(β) $y = x^2 \sin 3x$

A4. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ισχύει:

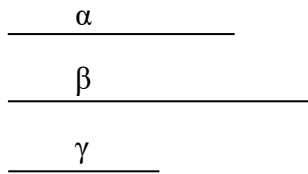
$$1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3} \times$$

A5. Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της συνάρτησης $f: A \rightarrow f(A)$, όπου

A το πεδίο ορισμού, με τύπο $f(x) = \frac{x-3}{x+5}$ και $A = [3, +\infty)$.

Αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.

A6. Δίνονται τα πιο κάτω ευθύγραμμα τμήματα α , β , γ :



Να κατασκευάσετε ξεχωριστά με κανόνα και διαβήτη:

(α) τη μεσοκάθετη του ευθύγραμμου τμήματος α

(β) το τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές τα α , β , γ .

Να περιγράψετε όλα τα βήματα με τη σειρά που ακολουθήσατε για το κάθε σχήμα.

A7. Να αποδείξετε ότι $x^{\log 2} = 2^{\log x}$, $x > 0$ και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $2^{2\log x} = 3x^{\log 2} + 4$.

A8. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 + x}, & x < -1 \\ 5, & x = -1 \\ \frac{|x^2 - 2x - 3|}{4 - 4x^2}, & x > -1 \end{cases}$$

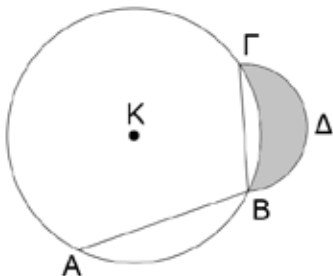
(α) Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(β) Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

(γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = -1$.

A9. Να αποδείξετε ότι:
$$\frac{\eta\mu 3\alpha - \eta\mu 4\alpha + \eta\mu 5\alpha}{1 - 4\eta\mu^2 \alpha} = 1.$$

A10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) με χορδές AB και $B\Gamma$, έτσι ώστε $AB = \lambda_4$ και $\angle B\Gamma = 105^\circ$. Αν το τόξο $B\Delta\Gamma$ είναι ημικύκλιο με διάμετρο $B\Gamma$, να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου, συναρτήσει της ακτίνας R .



ΜΕΡΟΣ Β:

- Να λύσετε και τις πέντε(5) ασκήσεις του Μέρους Β.
- Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα(10) μονάδες.

B1. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x + 5}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

(i) $\frac{f}{g}$

(ii) g^2

(γ) Να εξετάσετε αν ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$ και αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.

(δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια, περιττή ή τίποτα από τα δύο.

B2. Δίνονται $A = 2\eta\mu^2x - 2\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu 2x + 2\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^2 2x - 2\eta\mu^2x\sigma\upsilon\nu^3 2x + L$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ και

$$B = \frac{\eta\mu x + \eta\mu 3x - \eta\mu 2x}{\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu 2x}.$$

(α) Να δείξετε ότι: $A = \epsilon\phi^2x$ και $B = \epsilon\phi 2x$

(β) Να δείξετε ότι: $\frac{2B(1 - A)}{1 + A} = 2\eta\mu 2x$

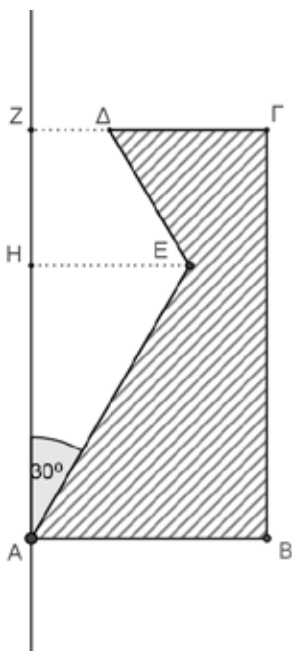
(γ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{2B(1 - A)}{1 + A} = 1$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

B3. Στο πιο κάτω σχήμα το ΑΒΓΔΕ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία ΑΖ. Η ΒΓ είναι παράλληλη προς την ΑΖ και οι ΔΖ, ΗΕ και ΒΑ είναι κάθετες στην ΑΖ. Αν $(AB) = 6 \text{ m}$, $(B\Gamma) = 6\sqrt{3} \text{ m}$, $(\Delta Z) = 2 \text{ m}$, $(\Delta E) = 4 \text{ m}$, $(AE) = 8 \text{ m}$ και $\angle EAH = 30^\circ$

να υπολογίσετε:

(α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και

(β) τον όγκο του στερεού που παράγεται.



- B4.** Δίνεται καμπύλη με τύπο: $\ln(e + \sin y) = x + \ln x$, $x > 0$ και $y \in (0, \pi)$. Να δείξετε ότι:
- (α) η καμπύλη γράφεται στη μορφή $x \times e^x - \sin y = e$
 - (β) $\eta \mu y \times \frac{dy}{dx} = -(x+1) \times e^x$
 - (γ) η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της με $x=1$ έχει εξίσωση:
 $4ex + 2y - 4e - \pi = 0$
 - (δ) $-\sin y \times (x+1) \times e^x \times \frac{dy}{dx} + \eta \mu^2 y \times \frac{d^2 y}{dx^2} = -e^x \times (x+2) \times \eta \mu y$
- B5.** Ο πέμπτος όρος αριθμητικής προόδου είναι ίσος με $\log_2(x \times y^4)$ και ο όγδοος όρος της είναι ίσος με $\log_2(x \times y^7)$.
- (α) Να δείξετε ότι: $\alpha_1 = \log_2 x$ και $\delta = \log_2 y$
 - (β) Αν τα x και y είναι οι λύσεις των εξισώσεων

$$\frac{2}{3} \delta^{x-2} = e^{-2 \ln 3} \times 10^{\log 4} \quad \text{και} \quad \log \frac{e}{5^y + y - 2} \delta = y \times (\log 20 - 2) \quad \text{αντίστοιχα,}$$
να σχηματίσετε την πρόοδο.
 - (γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της.

Η Διευθύντρια

Παναγιώτα Χρυσοχού-Αναστασιάδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ

ΤΑΞΗ: Β΄

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: ΔΥΟ (2) ΩΡΕΣ ΚΑΙ ΤΡΙΑΝΤΑ (30) ΛΕΠΤΑ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 3, 4

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/ 2017

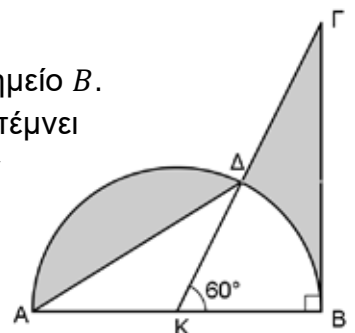
Ονοματεπώνυμο: Τμήμα: Αριθ.:

Οδηγίες:

- Να γράψετε μόνο με μελάνι μπλε (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας τύπου Tipp-Ex.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τρεις (3) σελίδες.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α΄**Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.**

1. Σε αμβλυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ δίνονται $\beta = \sqrt{3} \text{ cm}$, $\gamma = 1 \text{ cm}$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.
2. Να υπολογίσετε τα όρια:
 - α) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 7x + 9}{4x^2 - 5}$
 - β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$
3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\frac{d\psi}{dx}$ των συναρτήσεων:
 - α) $\psi = \frac{3x-1}{\eta\mu x}$
 - β) $\psi = \sqrt{x^4 - 5} + \varepsilon\varphi(6x + 2)$
4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $\psi = \frac{3x-1}{x+2}$, $x \geq 1$.
5. Να λύσετε την εξίσωση: $e^x + 3e^{-x} = 4$
6. Σε ημικύκλιο $(K, 6\text{cm})$ με διάμετρο AB , φέρουμε εφαπτομένη στο σημείο B . Τόξο $B\Delta$ έχει επίκεντρο γωνία 60° και η προέκταση της ακτίνας $K\Delta$ τέμνει την εφαπτομένη του ημικυκλίου στο B , στο Γ . Να βρείτε το εμβαδόν της σκιασμένης επιφάνειας του διπλανού σχήματος.



7. α) Να μετασχηματίσετε τη συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-5|+x^2-5|x|}{x-5}$ σε πολλαπλού τύπου (τμηματική).
 β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

8. α) Να δείξετε ότι: $\frac{2\eta\mu 3\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha} = 2\varepsilon\varphi 2\alpha$

β) Να δείξετε ότι: $\frac{2}{(\sigma\upsilon\nu 4\alpha + 1)} \cdot \frac{\eta\mu 4\alpha}{\frac{2\eta\mu 3\alpha \sigma\upsilon\nu\alpha + \eta\mu 2\alpha}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu^2 2\alpha}} = 1$

9. Στο πιο κάτω φυλλογράφημα παρουσιάζονται τα μηνιαία έξοδα 20 μαθητών ενός τμήματος στην καντίνα του σχολείου τους. Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα, αν γνωρίζουμε ότι τα περισσότερα χρήματα, που ξόδεψε ένας μαθητής, είναι €136.

13	6
10	2
6	2
5	0 2 6
4	8 8
3	8 8
2	0 0 4 6 8 8
1	0 4 6 8

10. α) Αν οι αριθμοί $-\ln e^2$, $\log(x+2)$, $2\log(x^2+36)$ αποτελούν τους τρεις πρώτους όρους Αριθμητικής Προόδου, να υπολογίσετε την τιμή του x ($x > 5$) και στη συνέχεια να σχηματίσετε την πρόοδο.
 β) Να υπολογίσετε την αριθμητική τιμή της παράστασης $A = \alpha_{11} + \alpha_{12} + \dots + \alpha_{20}$.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1. Στο διπλανό σχήμα ο κυκλικός τομέας $AB\Gamma$ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $AG = 4\text{cm}$ και το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο με βάσεις 6cm και 9cm . Το σκιασμένο σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $x\Gamma\psi$ που είναι κάθετος στη $B\Gamma$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο, που παράγεται.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις με τύπο $f(x) = \ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right)$ και $g(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2)$.
- α) Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathcal{R}$ και $g: B \rightarrow \mathcal{R}$, $A, B \subseteq \mathcal{R}$ είναι ίσες. Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathcal{R}$, ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.
- β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)$ είναι περιττή.
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $f(x)$ στο σημείο $x_0 = 3$.
3. Δίνεται η ακολουθία αριθμών με αναδρομικό τύπο $\alpha_1 = 1, \alpha_{v+1} = 2\alpha_v$.
- α) Να βρείτε τους πρώτους τέσσερις όρους της ακολουθίας και να δείξετε ότι σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο.
- β) Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει η πιο κάτω πρόταση: $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 2$.
- γ) Να δείξετε ότι η λύση της εξίσωσης $\frac{x}{\alpha_1} + \frac{x}{\alpha_2} + \frac{x}{\alpha_3} + \frac{x}{\alpha_4} + \dots = 8$ είναι διπλάσια από τον λόγο (λ) της γεωμετρικής προόδου του (α) ερωτήματος.
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 10x + 16}$ και η συνάρτηση $g(x) = x^2 - \frac{5}{4}x + 4$.
- α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{g}{f}$.
- β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της σύνθεσης $g \circ f$.
- γ) Δίνεται η πολλαπλού τύπου συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} f(x), & x < 0 \\ g(x), & x \geq 0 \end{cases}$.
- Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.
5. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu 2x}{1+\eta\mu 2x+\sigma\upsilon\nu 2x} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x}$ και $g(x) = \frac{1}{\log_2(\sqrt{x})} - \frac{1}{\sqrt{\log_2(x)}}$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $g(x)$.
- β) Να δείξετε ότι η λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$ είναι $x = 16$.
- γ) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{2}$.
- δ) Αν το άθροισμα των απείρων όρων φθίνουσας γεωμετρικής προόδου (Σ_∞), η οποία έχει πρώτο όρο (α_1) τη λύση της εξίσωσης $g(x) = 0$ και λόγο (λ) τη συνάρτηση $f(x)$, ισούται με $64 \cdot \eta\mu x$, να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης, που δημιουργείται.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

ΟΙ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ:
ΚΟΥΛΑΣ ΧΡΙΣΤΟΣ
ΖΑΜΠΑΚΙΔΗΣ ΠΟΛΥΣ
ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΥ ΔΗΜΗΤΡΗΣ

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΤΑΛΙΑΔΩΡΟΣ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

Τάξη : Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2017

Μάθημα : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣΟδηγίες:

- 1) Να γράψετε μόνο με μελάνι μπλε.
- 2) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
- 3) Επιτρέπεται η χρήση ΜΗ προγραμματισμένης υπολογιστικής μηχανής.
- 4) Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο φύλλο απαντήσεων (όπου είναι αναγκαίο).
- 5) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = \frac{x+3}{x-2}$

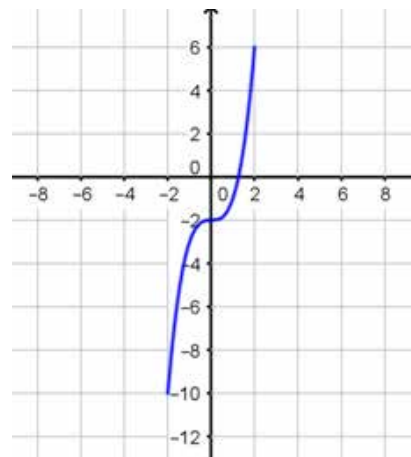
(β) $g(x) = \ln(x^2 - 2x)$

2. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

(β) Να υπολογίσετε την τιμή $f(f(0))$.

(γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f^{-1} .



3. Σε αριθμητική πρόοδο ο πέμπτος όρος της είναι 18 και το άθροισμα του τέταρτου και του δέκατου όρου της είναι 52. Να βρεθεί η πρόοδος.

4. Να υπολογίσετε την τιμή των ορίων

(α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ln x}$

(β) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 4x^2 + 1}{2x^5 + 3x - 6}$

5. Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\ldots}}}}$ (άπειρα ριζικά).

6. Δίνεται ο αριθμός των μονάδων ηλεκτρικής ενέργειας που παρήγαγε ένα οικιακό φωτοβολταϊκό σύστημα σε δεκαπέντε ημέρες.

8,11,12,13,14,8,,9,13,13,11,24,15,20,23,14.

Να κατασκευάσετε:

(α) το Φυλλογράφημα

(β) το θηκόγραμμα

7. Αν σε τρίγωνο $AB\Gamma$ ισχύει η σχέση $\sin B + \sin G = \frac{b+g}{a}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

8. Με βάση τον ορισμό της παραγώγου να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης:

$$f(c) = \sqrt{c^2 + 1}$$

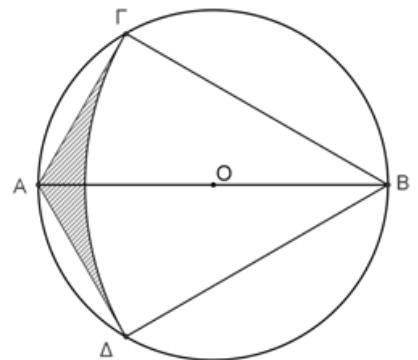
9. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ισχύει:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

10. Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τόξα $AG = AD = 60^\circ$. Με κέντρο το B και ακτίνα $B\Gamma$ γράφεται τόξο $\Gamma\Delta$ μέσα στον κύκλο γράφεται τόξο $\Gamma\Delta$ μέσα στον κύκλο.

(α) Να δείξετε ότι $B\Gamma = R\sqrt{3}$ μονάδες.

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου.



ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις . Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους: $f(x) = \sqrt{x-3}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-9}$.

(α) Να οριστούν οι συναρτήσεις: $f+g$, $\frac{f}{g}$, $f \times g$.

(β) Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο τιμών για το οποίο ορίζεται η συνάρτηση $g \circ f$ και να γράψετε το τύπο της.

(γ) Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} g(5^x) = 3k - 2$, όπου $k \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε την τιμή του k .

2. Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ με τύπο $f(c) = c \times e^{\frac{1}{c}}$.

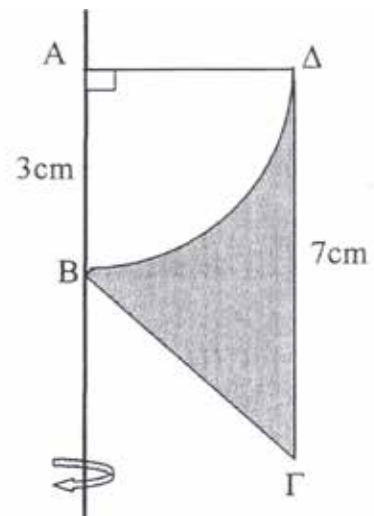
(α) Να δείξετε ότι ισχύει η ισότητα: $c^3 \times \frac{d^2 y}{d c^2} + c \times \frac{d y}{d c} - y = 0$

(β) Να βρείτε το όριο $\lim_{c \rightarrow 0^-} f(c)$

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης με τύπο

$y = f'(c)$, στο σημείο της με τετμημένη $c = 1$.

3. Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι ένα ορθογώνιο τραπέζιο ($A = \Delta = 90^\circ$) με βάσεις $(AB) = 3 \text{ cm}$, $(\Delta\Gamma) = 7 \text{ cm}$ και $AB = AD$. Με κέντρο το σημείο Α και ακτίνα ΑΒ γράφουμε τόξο ΒΔ. Το σκιασμένο μικτόγραμμο τρίγωνο ΒΓΔ περιστρέφεται πλήρως γύρω από την ΑΒ. Να βρείτε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



4. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{1}{6 - 2x + \dots}$ και $B = \frac{1}{6x - 4 - \dots}$

Να δείξετε ότι:

(α) $A = \epsilon\phi 2x$

(β) $B = \sigma\phi 2x$

(γ) $\frac{6A \times B}{1 - \dots} \times [\sin^2 \alpha - 2\sin \alpha \cdot \sin x \cdot \sin(\alpha + x) + \sin^2(\alpha + x)] = 3$

5. (α) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει η παράγωγος της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = |x^2 - 4|$ στο σημείο με $c_0 = 2$.

(β) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x < 0 \\ xe^x, & x > 0 \end{cases}$ Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $c_0 = 0$.

(γ) Παραμετρική Καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} x = \frac{2+t}{1+2t} \\ y = \frac{3+2t}{t} \end{cases}, t \in (0, +\infty)$

(i) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{(1+2t)^2}{t^2}$

(ii) Να υπολογίσετε την τιμή της $\frac{d^2y}{dx^2}$ για $x = 0$.

...ΤΕΛΟΣ...

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Κ. Παπαντωνίου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία:

31/05/2017

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Διάρκεια: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ: Να γράφετε με μελάνι μπλε (μόνο τα σχήματα με μολύβι).

Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από (4) σελίδες.

Το εξεταστικό δοκίμιο βαθμολογείται με 100 μονάδες.

Τα σχήματα (όπου είναι αναγκαίο) να μεταφέρονται στο γραπτό σας.

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

Μέρος Α'

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = x^2 - 2x + 7$

β) $f(x) = e^{2x} \ln x, \quad x > 0$

2. Να λύσετε την εξίσωση $\log x + \log(x - 3) = 1$

3. Το διπλανό θηκόγραμμα παρουσιάζει τους μέσους χρόνους απάντησης (sec), ανά ερώτηση, 20 μαθητών που απάντησαν σωστά σε τεστ ευφυΐας.



Να βρείτε:

α) τις ακραίες παρατηρήσεις

β) το πρώτο τεταρτημόριο



γ) το ενδοτεταρτημοριακό εύρος

δ) το ποσοστό των ευφυών μαθητών, αν ευφυής θεωρείται ο μαθητής που απάντησε σωστά σε χρόνο μικρότερο από 0.7sec.

4. Να εξετάσετε αν οι πραγματικές συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ είναι ίσες.Στην περίπτωση που οι συναρτήσεις δεν είναι ίσες, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις να είναι ίσες.

$$f(x) = |x - 2| \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$$

5. Η ποσότητα του πετρελαίου που διαρρέει προς τη θάλασσα από ένα βυθισμένο δεξαμενόπλοιο διπλασιάζεται κάθε μέρα. Την πρώτη μέρα διέρρευσαν 20 τόνοι πετρελαίου.
 α) Πόσοι τόνοι πετρελαίου θα διαρρεύσουν την 7^η μέρα;
 β) Σε πόσες μέρες θα διαρρεύσουν συνολικά 5100 τόνοι πετρελαίου;

6. Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Να βρείτε:

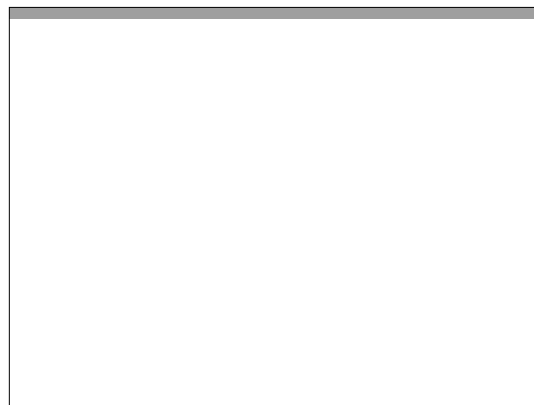
- α) τα πιο κάτω όρια (αν υπάρχουν):

(i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (ii) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(iii) $\lim_{x \rightarrow +4} f(x)$ (iv) $\lim_{x \rightarrow +2} f(x)$

- β) τις τιμές του x για τις οποίες η f :

- (i) δεν είναι συνεχής
 (ii) δεν είναι παραγωγίσιμη.



7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{2}$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.
 β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x+1) = 1$

8. Δίνεται η ακολουθία (a_n) με γενικό όρο $a_n = 2n - 1$

- α) Να εξετάσετε την ακολουθία ως προς τη μονοτονία.
 β) Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

9. Δίνεται ημικύκλιο ακτίνας R και δύο χορδές του

$$AB = R\sqrt{2} \text{ και } AC = R\sqrt{2}.$$

Να βρείτε συναρτήσει του R :

- α) την περίμετρο και
 β) το εμβαδόν
 του μικτόγραμμου τριγώνου ABC .

10. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{\sin 3\theta}{2\eta\mu\theta} + \frac{\eta\mu 3\theta}{2\sigma\upsilon\eta\theta}$ και $B = \frac{\sigma\upsilon\eta\theta - \sigma\upsilon\eta 5\theta}{\eta\mu\theta + \eta\mu 5\theta + 2\eta\mu 3\theta}$

- α) Να δείξετε ότι $A = \sigma\phi 2\theta$ και $B = \epsilon\phi\theta$

β) Να βρείτε τη λύση της εξίσωσης $A = B$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

Μέρος Β'

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = 1 + \cos^2 t \\ y = \sin^2 t \end{cases}, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να δείξετε ότι:

i) $\frac{dy}{dx} = -2 \cot t$

ii) $\cot t \times \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} = 0$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της με $t = \frac{\pi}{6}$

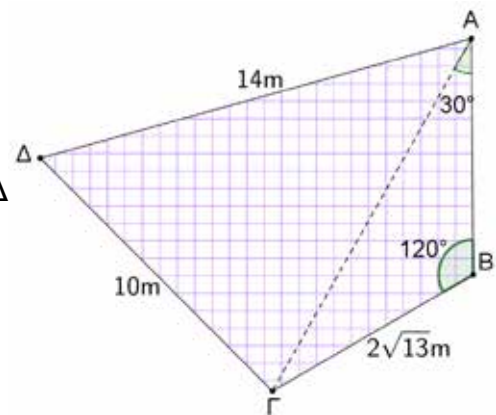
2. Η αυλή ενός κτηριακού συγκροτήματος πρόκειται να καλυφθεί με πλακάκια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαγωνίου ΑΓ

β) Να δείξετε ότι η γωνία $\angle A\Delta\Gamma = 60^\circ$

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετράπλευρου ΑΒΓΔ

δ) Να αναφέρετε σε ποιο σημείο της αυλής πρέπει να τοποθετηθεί φωτεινός πάσσαλος, ώστε να ισαπέχει από τα σημεία Α, Β, Γ και Δ.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{2x-3}{x+2}$, όπου $x \in \mathbb{R}, x \neq -2$

και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = x^2 - 4$

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών των f και g

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

δ) Να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}

4. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 & , x < 1 \\ 2\sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & , x \leq 1 \\ \frac{2x}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$$

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g :

- i) είναι συνεχείς στο $x_0 = 1$
- ii) είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 = 1$

β) Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{g(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 2x}{g(x) - 1}$

5. Στο διπλανό σχήμα τεταρτοκύκλιο με κέντρο το O και ακτίνα την OE εφάπτεται στις πλευρές AB και BE του ορθογωνίου τραπεζίου $AOEB$ με $OA = AB = 6$ cm.

Το $BE\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με διαστάσεις $B\Gamma = 6$ cm και $\Gamma\Delta = 3$ cm. Το σκιασμένο σχήμα περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα xy , κάθετο στην AO στο σημείο O , και δημιουργεί κύπελλο.

α) Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.

β) Αν το πιο πάνω κύπελλο κατασκευαστεί, πόσα cm^2 φύλλο χρυσού θα χρησιμοποιηθούν για την επιχρύσωση της ολικής επιφάνειάς του;



Ο Διευθυντής

.....

Γιώργος Ιωσηφίδης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ: Β'

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 31/5/2017

ΧΡΟΝΟΣ: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____ ΤΜΗΜΑ: _____ ΑΡ: _____

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ.

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
1. Να λύσετε όλα τα θέματα στις κόλλες απαντήσεων.
 2. Να γράφετε μόνο με **μπλε μελάνι**.
 3. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
 4. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού (υγρού ή ταινίας/Tipp Ex).
 5. Επιτρέπεται η χρήση υπολογιστικής μηχανής με σφραγίδα του σχολείου.

ΜΕΡΟΣ Α': Περιλαμβάνει 10 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 3| < 7$

2. Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $y = 5e^x - 3\sqrt{x} + \sin x + x^2$

β) $y = \frac{x^2 + 3}{1 + 2x}$

3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x + 7}{x^4 + 5x^2 - 1}$

4. α) Να λύσετε την εξίσωση: $4^x \times 2^{x^2} = 8$

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\log_{\frac{1}{3}}(3x - 1) < 1$

5. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\sin 4x}{1 + \sin 4x} \times \frac{\sin 3x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\sin x} = 2$

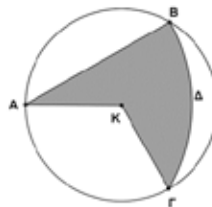
6. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 3 \times 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

α) Να εξετάσετε την ακολουθία ως προς την μονotonία.

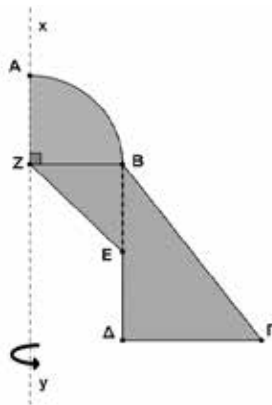
β) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.

7. Δίνεται κύκλος (Κ, R) και χορδή AB που είναι πλευρά κανονικού τριγώνου εγγεγραμμένου στον κύκλο. Με κέντρο το A και ακτίνα AB γράφουμε τόξο BDΓ.

Να υπολογίσετε, συναρτήσει του R, το εμβαδόν και την περίμετρο του σκιασμένου σχήματος.



8. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει: $3+7+11+ \dots +(4n-1)=2n^2+n$.
9. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln(1 - 2e^x)$.
- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
- β) Να ελέγξετε αν η $f(x)$ ορίζει αντίστροφη. Στην περίπτωση που ορίζει, να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.
10. Στο διπλανό σχήμα το ABZ είναι τεταρτοκύκλιο ακτίνας 4cm και το τρίγωνο BZE είναι ορθογώνιο και ισοσκελές. Το E είναι μέσο του BD και το (ΓΔ)=6cm. Το σκιασμένο χωρίο στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy. Να υπολογίσετε τον όγκο του παραγόμενου στερεού.



ΤΕΛΟΣ Α' ΜΕΡΟΥΣ

ΜΕΡΟΣ Β': Περιλαμβάνει 5 θέματα.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{3-x}, \quad g(x) = \frac{x^2+x}{x^2-1} \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{x}{x-1}, \quad \text{όπου } f: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } A = D_f.$$

α) Να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο $g(x) = h(x)$.

β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: $\frac{g}{h}$ και $f \circ h$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x)}{g(x)}$. (μον.: 3, 4, 3)

2. α) i. Να αποδείξετε ότι: $A = \frac{\sin 2x - 2 \sin 4x \sin 8x}{\sin 4x + 1} = \sin 2x$

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $A = -\sqrt{3}, x \in [0, 2\pi]$

β) Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $a + b = 3g$, να δείξετε ότι $\sin \frac{A-B}{2} = 3 \sin \frac{C}{2}$

3. Σε αριθμητική πρόοδο το άθροισμα του πρώτου και τρίτου όρου της ισούται με $\log_4 y^2$, ενώ το

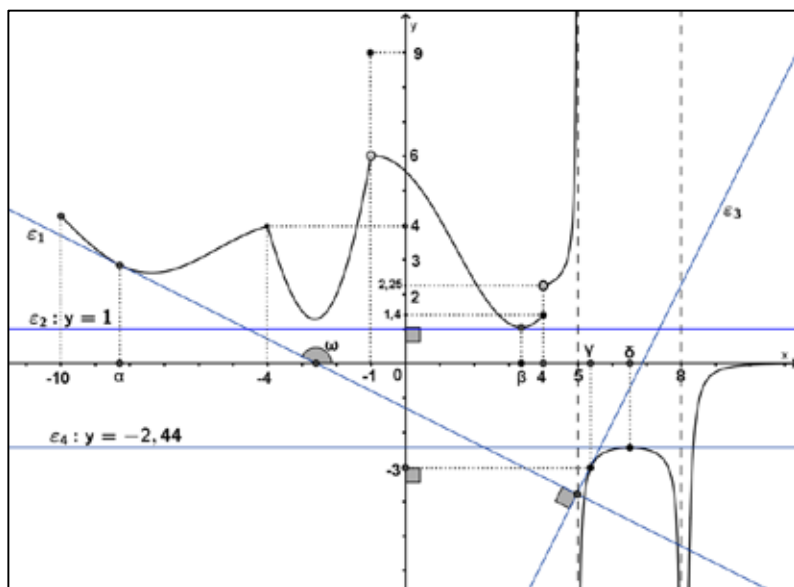
άθροισμα του δεύτερου και πέμπτου όρου της ισούται με $\log_4 \frac{xy^8}{x^3}$ όπου $x, y > 0$ και $x \neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι: $a_1 = \log_4 \frac{xy}{y}$ και $d = \log_4 \frac{xy^2}{x}$

β) Αν $\log_4 \frac{xy}{y} = 2$ και $\log_4 \frac{xy^2}{x} \log_{x^3} 4 = 1$ να υπολογίσετε τα x, y και το S_{10} της προόδου.

Commented [CS1]:

4. Πιο κάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x)$. Οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = -\frac{1}{2}x - 1,3$, $(\varepsilon_2): y = 1$, (ε_3) και $(\varepsilon_4): y = -2,44$ είναι εφαπτόμενες στα σημεία της καμπύλης με τετμημένες $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ αντίστοιχα και οι ευθείες (ε_1) και (ε_3) είναι κάθετες μεταξύ τους.



α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης $y = f(x)$.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα πιο κάτω:

i. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ iii. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 8} f(x)$ v. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ vi. $f(-1)$

γ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο με $x = -1$.

δ) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $y = f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στα σημεία με $x = \alpha$, $x = -4$, $x = -1$ και $x = \beta$.

ε) Να βρείτε τη γωνία ω με προσέγγιση δύο δεκαδικών ψηφίων και την τιμή της $f(\xi)$.

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

(μον.: 2, 3, 1.5, 2, 1.5)

5. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $g(x)$ για την οποία ισχύει: $g(xe^x) = 2a + ae^x, x \in \mathbb{R}$, και η παραμετρική καμπύλη που ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} x = \ln(\sin t) \\ y = t \end{cases}, t \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
- α)** Να δείξετε ότι για την παραμετρική καμπύλη ισχύει: $y \times \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + e^x \times y - 1 = 0$.
- β)** Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της $g(x)$ στο σημείο της $(0, g(0))$ έχει εξίσωση $(e): y = ax + 3a$.
- γ)** Να υπολογίσετε την τιμή του a , αν η ευθεία (e) είναι παράλληλη με την κάθετη της παραμετρικής καμπύλης στο σημείο της με $t = \frac{\pi}{3}$.

ΤΕΛΟΣ

Η Διευθύντρια

Παρασκευούλα Κωνσταντινίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

Ημερομηνία: Δευτέρα 22.5.2017

Ώρα: 7.45 π.μ.

Διάρκεια: 2,5 ώρες

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Να γράφετε μόνο με μπλε πένα. (Τα σχήματα με μολύβι).
2. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή ταινίας.
3. Επιτρέπεται η χρήση μη-προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
4. Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
5. Δίνεται τυπολόγιο.
6. Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
7. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από **5** σελίδες.
8. Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

ΜΕΡΟΣ Α': (50 μονάδες)

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

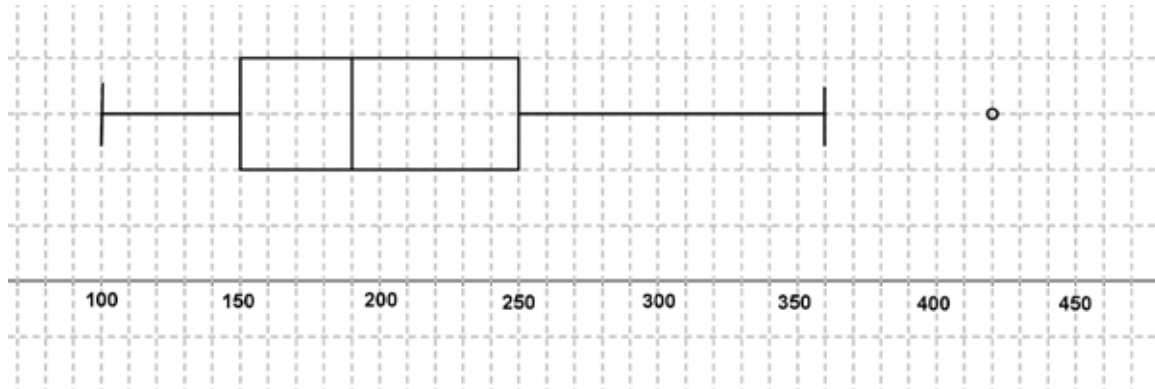
(α) $f(x) = x^2 - 3x - \sin 2x$

(β) $f(x) = \frac{2x-1}{x+5}$

2. Σε αριθμητική πρόοδο ο δεύτερος και έκτος όρος έχουν άθροισμα 24 και ο πέμπτος όρος ισούται με 15. Να σχηματίσετε την πρόοδο και να υπολογίσετε το άθροισμα των είκοσι πρώτων όρων της.

3. Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\alpha = 2\text{cm}$, $\gamma = 2\sqrt{2}\text{cm}$, $E = 2\text{cm}^2$ και $\hat{B} < 90^\circ$.

4. Στο πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζονται οι εβδομαδιαίοι μισθοί των υπαλλήλων μια εταιρίας.



(α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.

(β) Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση και το εύρος των παρατηρήσεων.

(γ) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος.

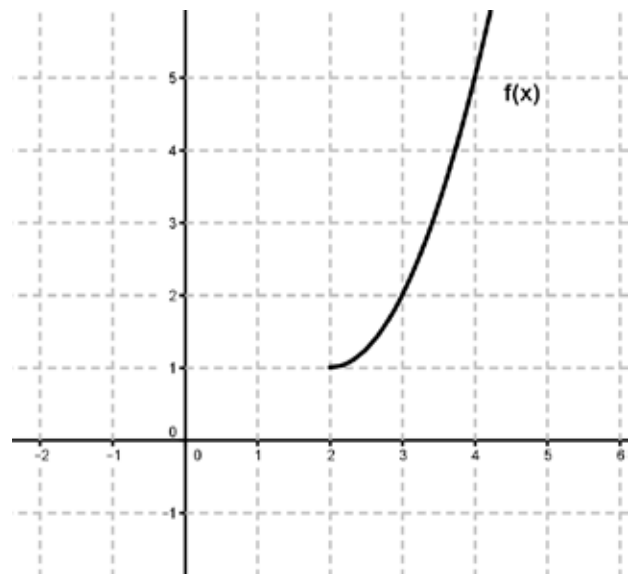
5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 - \log(10 - 3x)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση :

$$8^{\left(\frac{|x|}{3}-1\right)} = f\left(\frac{33}{10}\right)$$

6. Στη διπλανή γραφική παράσταση δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = x^2 - 4x + 5$, όπου $A = [2, +\infty)$. Να εξετάσετε κατά πόσο ορίζεται η αντίστροφη της συνάρτησης και αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.



7. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ισχύει:

$$2 + 4 + 8 + \dots + 2^n = 2 \cdot (2^n - 1)$$

8. Να υπολογίσετε το όριο:

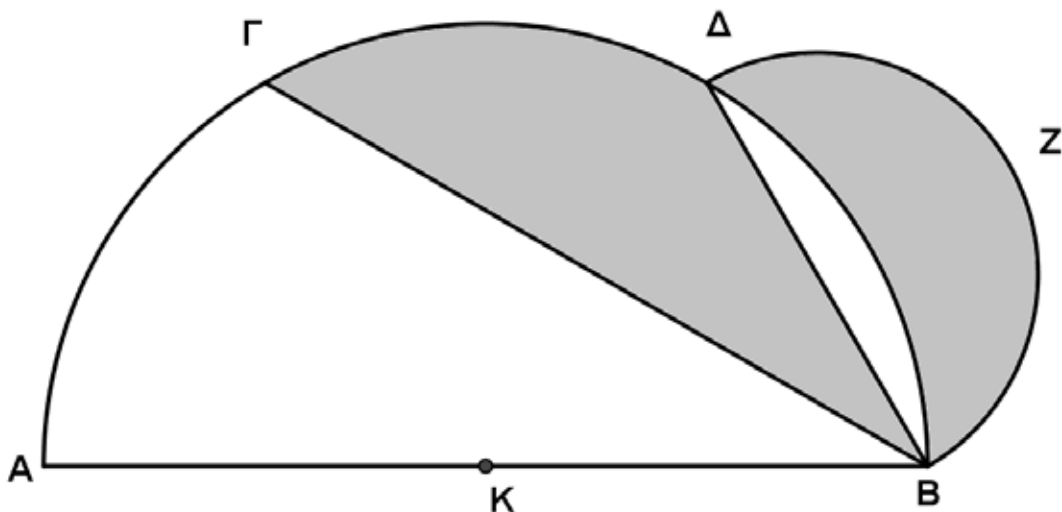
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x - \sin 3x}{x \cdot \eta \mu x}$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2 - 3x + 2|}{x^2 - 4}, & x < 2 \\ \alpha x + \ln(2x - 3), & x \geq 2 \end{cases}$

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο 2.

(β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

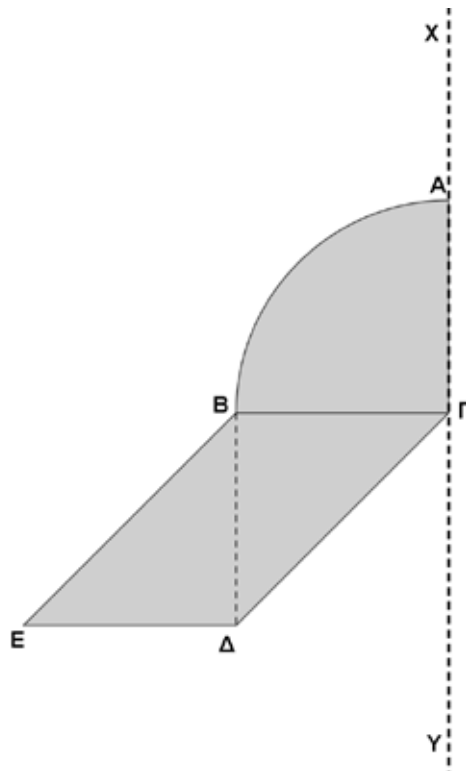
10. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο το K και ακτίνα R . Με διάμετρο τη BD γράφουμε ημικύκλιο $BZ\Delta$. Αν $B\Delta = \lambda_6$ και $B\Gamma = \lambda_3$, να βρείτε συναρτήσει του R το **εμβαδόν** της σκιασμένης περιοχής.



Μέρος Β: (50 μονάδες)

Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο πιο κάτω σχήμα ο κυκλικός τομέας $AB\Gamma$ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $A\Gamma = 6\text{cm}$ και το $B\Gamma\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο με $BE = 10\text{cm}$. Η $B\Gamma$ είναι κάθετη στον άξονα XY και η $B\Delta$ είναι παράλληλη με τον άξονα XY . Να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου σχήματος γύρω από τον άξονα XY .



2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x+2}{x-2}$, $g(x) = \sqrt{x+2}$ και $h(x) = \frac{\sqrt{3x-2}}{\sqrt{x-2}}$.
- (α) Να ορίσετε τη $g \circ f$ (πεδίο ορισμού και τύπο).
- (β) Να εξετάσετε αν $g \circ f = h$.
Στην περίπτωση που $g \circ f \neq h$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του R για το οποίο ισχύει $g \circ f = h$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{3x^2-4x+1}$ και $g(x) = e^{\ln e^{(x^2-1)}}$.

(α) Να δείξετε ότι $\frac{d^2f}{dx^2} - 6x \frac{df}{dx} = 2(11 - 12x)f(x)$.

(β) Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των δύο συναρτήσεων f και g είναι το σημείο $(1,1)$.

(γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης f στο σημείο $(1,1)$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 1 - \sin 2x$ και $g(x) = 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\eta\mu 5x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 5x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)$.

(α) Να αποδείξετε ότι: $g(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x$.

(β) Αν οι συναρτήσεις $f(x)$, $\frac{1}{2} f'(x)$, $g(x)$ είναι οι πρώτοι όροι μιας απόλυτα γνήσιας φθίνουσας γεωμετρικής προόδου, να αποδείξετε ότι ο λόγος της είναι $\lambda = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$.

(γ) Να αποδείξετε ότι $\Sigma_{\infty} = \frac{2\eta\mu^3 x}{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}$.

(δ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{\Sigma_{\infty}}{\eta\mu x} = 3(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$ στο διάστημα $45^\circ < x < 90^\circ$.

5. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \log_2 \frac{x-2}{x(x-1)} - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) \cdot \log_{\sqrt{2}} 2$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(β) Να δείξετε ότι $f(x) = \log_2 \frac{(x-2) \cdot (x-1)}{x}$.

(γ) Να δείξετε ότι $f(4) = \log_2 3 - 1$.

(δ) Να λύσετε ως προς $\lambda \in \mathbb{R}$ την εξίσωση $2\lambda f(4) + \lambda - 2 = \log_2 3^{\lambda-2}$.

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017ΤΑΞΗ: Β' **Ενιαίου Λυκείου**

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 17/5/2017

ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΧΡΟΝΟΣ: 2,5 Ώρες

- ΟΔΗΓΙΕΣ:**
- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
 - β) Να γράψετε με μπλε ή μαύρο μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται με μολύβι).
 - γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
 - δ) Δίνεται τυπολόγιο.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α' .
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 3| < 7$.

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων που δίνονται από τους τύπους:

(α) $y = 5x^3 + \pi$ (1 μονάδα)

(β) $y = \frac{6}{x^3} + \sqrt{x}$ (2 μονάδες)

(γ) $y = \ln \frac{x^2}{e^{\frac{1}{x}}}$ (2 μονάδες)

3. Να λύσετε την εξίσωση: $9^x - 8 \cdot 3^x - 9 = 0$.

4. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 7x + 12}{|x - 4|}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2}$

10. Ισόπλευρο τρίγωνο ABΓ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (O,R). Τα σημεία K, Λ είναι τα μέσα των μικρών τόξων AB και AΓ, αντίστοιχα και η ευθεία ΚΛ τέμνει τις πλευρές AB, AΓ στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα.

(α) i. Να αποδείξετε ότι $\hat{AMK} = 120^\circ$.

ii. Να αποδείξετε ότι $KM = MN = NL = \frac{R\sqrt{3}}{3}$.

(β) Να βρείτε, συναρτήσει του R, το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου AMK.

ΜΕΡΟΣ Β' Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x e^x, & x > 0 \\ (\alpha - 1) \ln x, & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(α) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$.

(β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της καμπύλης στο σημείο της με $x = 2$.

2. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 16$, ...

(α) Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι για το άθροισμα των n πρώτων όρων της

$$\text{ισχύει η σχέση: } 1 + 4 + 16 + \dots + 4^{n-1} = \frac{4^n - 1}{3}.$$

(β) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\frac{1}{\alpha_1} \ln \alpha_1^2 + \frac{1}{\alpha_2} \ln \alpha_2^2 + \frac{1}{\alpha_3} \ln \alpha_3^2 + \dots$ των απείρων όρων.

(γ) Να δείξετε ότι η ακολουθία με γενικό όρο $\beta_n = \log \frac{1}{\alpha_n} \ln \alpha_n^2$ είναι αριθμητική πρόοδος.

3. (α) Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $10 \sin \frac{3\Gamma}{2} \sin \frac{\Gamma}{2} = 4 + 3 \sin 2\Gamma$, να δείξετε ότι $\sin \Gamma = \frac{3}{4}$.

(β) Αν για το τρίγωνο ABΓ (που δεν είναι ισοσκελές) δίνεται επιπλέον ότι $A = 2\Gamma$ και $\gamma = 4 \text{ cm}$, να υπολογίσετε το μήκος των πλευρών α και β .

4. Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow f(A)$ με $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι ένα προς ένα και επί και η αντίστροφή της είναι η

$$f^{-1}(x) = \log_2 \frac{x}{1-x}.$$

(γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης f^{-1} .

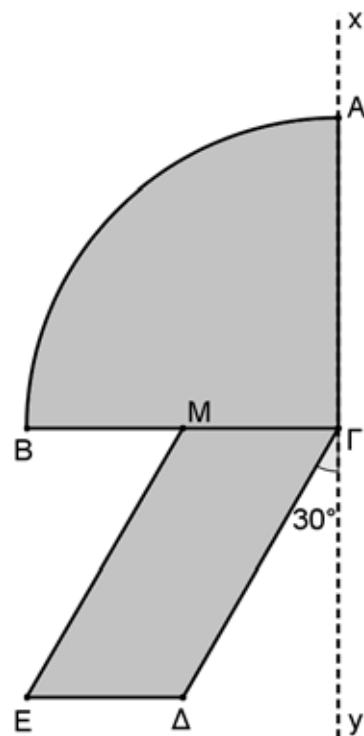
(δ) Αν $g(x) = \log_2 x$, να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(ε) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f^{-1} + h$, όταν $h(x) = \log_4(1-x)^2$.

5. Στο διπλανό σχήμα ο κυκλικός τομέας $AB\Gamma$ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $A\Gamma = 6\text{cm}$ και το τετράπλευρο $M\Gamma\Delta E$ είναι παραλληλόγραμμο με $M\Gamma = 3\text{cm}$ και $\Delta\Gamma = 6\text{cm}$. Αν το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Delta$ σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα xy και το σκιασμένο σχήμα στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy να βρείτε:

(α) τον όγκο του παραγόμενου στερεού και

(β) το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του παραγόμενου στερεού.



ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Γεωργίου Γιώργος

Γεωργίου Χριστίνα

Μαλακτού Μαίρη

Μιχαήλ Χριστοδούλα

Παπαμιχαήλ Έλενα

Χριστοδούλου Χριστάκης

ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ

Ιωάννου Γ.

ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

Κλειώ Σαββίδου

Η Διευθύντρια:

Κλειώ Σαββίδου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ (ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ)

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 19 / 05 / 2017

ΧΡΟΝΟΣ: 2.30'

ΥΠΟΓΡΑΦΗ ΚΑΘΗΓΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:

ΒΑΘΜΟΣ ΟΛΟΓΡΑΦΩΣ:

100	20

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΤΜΗΜΑ: ΑΡ.:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
2. Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
4. Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

(1) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

$$(\alpha) \psi = x^4 \sin 3x \quad (\beta) x^2 - \psi^3 = 10x + 7$$

(2) Να υπολογίσετε τα όρια των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^5 + 3x^3 - 8x^2}{3x^2 - 6x + 5} \quad (\beta) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 5} - 2}$$

(3) Να βρείτε τις τιμές του x έτσι ώστε οι αριθμοί $\log x$, 2 , $3 + \log x$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους γεωμετρικής προόδου.(4) Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} < 90^\circ$), αν δίνονται: $a = 6\sqrt{3}$ cm, $g = 6$ cm και $\hat{G} = 30^\circ$.

(5) Κάποιος θα φυτέψει στον κήπο του τριανταφυλλιές σε σειρές με τον εξής τρόπο: στην πρώτη σειρά θα φυτέψει 8 τριανταφυλλιές και σε κάθε επόμενη σειρά θα φυτέψει 3 τριανταφυλλιές περισσότερες από την προηγούμενη σειρά.

(α) Να βρείτε πόσες τριανταφυλλιές θα υπάρχουν στη νιοστή σειρά.

(β) Αν θα σχηματίσει 14 σειρές, να βρείτε πόσες τριανταφυλλιές θα φυτέψει συνολικά.

(6) Με τη βοήθεια της μεθόδου της τέλει επαγωγής, να αποδείξετε ότι ισχύει:

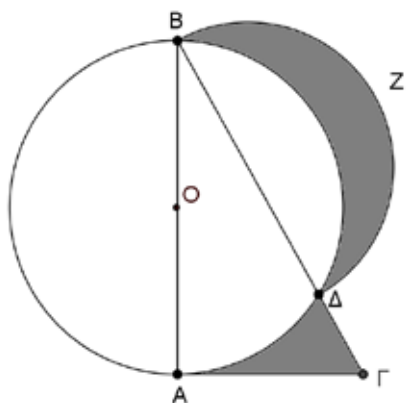
$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1) = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

(7) Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

$$\eta \mu^2 \left(\frac{\pi}{8} - \alpha \right) + \sigma \nu \nu^2 \left(\frac{\pi}{8} + \alpha \right) = 1 - \sqrt{2} \eta \mu \alpha \cdot \sigma \nu \alpha$$

(8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^4 - 3x^2 + 5x, & x \geq 0 \\ 8x - 3\eta\mu x, & x < 0 \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

(9) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) με διάμετρο AB και χορδή $B\Delta = \lambda_3$. Η $A\Gamma$ είναι εφαπτομένη του κύκλου στο A . Το ημικύκλιο $BZ\Delta$ σχηματίζεται με διάμετρο την $B\Delta$. Να βρείτε το εμβαδόν της σκιασμένης περιοχής συναρτήσει της ακτίνας R .



(10) Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow f(A)$ με $A = (4, +\infty)$ και τύπο $f(x) = \frac{2x+9}{x-4}$.

Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f . Αν ορίζεται, να βρεθεί ο τύπος της και το πεδίο ορισμού της.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

(1) Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις :

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = \ln t - \sin t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

(α) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης (K) , στο σημείο της με $x = 1$.

(β) Να δείξετε ότι: $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + y = 0$

(2) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \log(x+4) - \log(x^2 - 2x)$ και $g(x) = 1 - \log(x+1)$.

(α) (i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο πάνω συναρτήσεων.

(ii) Να δείξετε ότι $f(5) - g(4) + 3 = \log 300$.

(iii) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα xx' .

(β) Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα :

$$\begin{cases} 5^x - 2^y = 1 \\ x \log 5 + y \log 2 = g\left(-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

(3) Δίνονται οι συναρτήσεις f, h και g με τύπους αντίστοιχα:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 5x - hmk}{|x^2 - x|} & , x < 0 \\ 6x + 2/ & , x \geq 0 \end{cases} , \quad h(x) = \sqrt{x} \text{ και } g(x) = \frac{x^2 - 49}{x^2 - 25} .$$

(α) Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου $\lambda, \lambda \in R$, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(β) (i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων h και g .

(ii) Να εξετάσετε αν η g είναι άρτια ή περιττή συνάρτηση.

(iii) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + h$.

(iv) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g$.

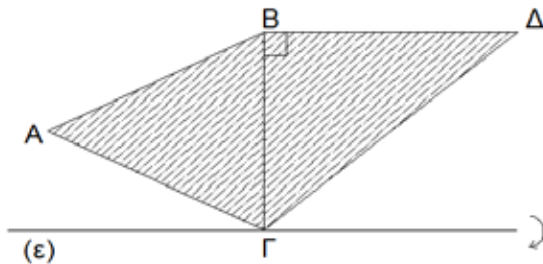
(4) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\eta\mu 12x - 2\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 10x}{1 - \sigma\upsilon\nu 8x}$ και $\rho(x) = \frac{\eta\mu 4x + \eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x}$

(α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\phi 4x$ και $\rho(x) = \epsilon\phi 2x$.

(β) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης

$$\frac{1 - \sigma\upsilon\nu 8x}{\eta\mu 12x - 2\eta\mu 2x \cdot \sigma\upsilon\nu 10x} + \frac{\eta\mu 4x + \eta\mu 2x}{1 + \sigma\upsilon\nu 4x + \sigma\upsilon\nu 2x} = 0, \text{ στο διάστημα } (0, \frac{\pi}{2}).$$

(5) Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $(AB) = (A\Gamma) = 15\text{cm}$, $(B\Gamma) = 18\text{cm}$ και το ορθογώνιο τρίγωνο $\Gamma B\Delta$ με $\hat{B} = 90^\circ$ και $(\Gamma\Delta) = 30\text{cm}$. Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ϵ) που περνά από το Γ και είναι παράλληλη με τη $B\Delta$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

ΟΙ ΔΙΔΑΣΚΟΝΤΕΣ

Αριστοδήμου Χρ., Β. Δ.

Σεβέρη Λ.

Μουγής Ν.

Φωτιάδου Κ.

Ματθαίου Κ.

Η ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΡΙΑ

Αριστοδήμου Χρ., Β. Δ.

Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

Λοιζίδης Πέτρος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ–ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

Μάθημα: **Μαθηματικά Β κατ.**Διάρκεια: **2,5 ώρες**Ημερομηνία: **24.05.2017****Οδηγίες:**

1. Να γράφετε με μελάνι μπλε ή μαύρο (για τα σχήματα μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι).
2. Τα σχήματα των ασκήσεων να αντιγράφονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
3. Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.
4. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
5. Το δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
6. Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α' : Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **πέντε** μονάδες από τις **εκατό**.**1.** Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 4}{5x^2 + 1},$

β) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x - 5}$

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των συναρτήσεων:

α) $y = 2x^5 - \sqrt{3x + 1} + \frac{4}{x},$

β) $y^2 \ln x + y = e^{5x}$

3. Μια μπάλα χιονιού που έχει σχήμα σφαίρας αρχίζει να λιώνει. Αν ισχύει η σχέση $R = 9 - t^2$, όπου R η ακτίνα της σφαίρας σε cm και t ο χρόνος σε sec, να βρείτε:α) Τη σχέση που συνδέει τον όγκο V της μπάλας με το χρόνο t .β) Το ρυθμό μεταβολής του όγκου της μπάλας τη χρονική στιγμή $t = 2\text{sec}$.**4.** Με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει:

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n \times (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

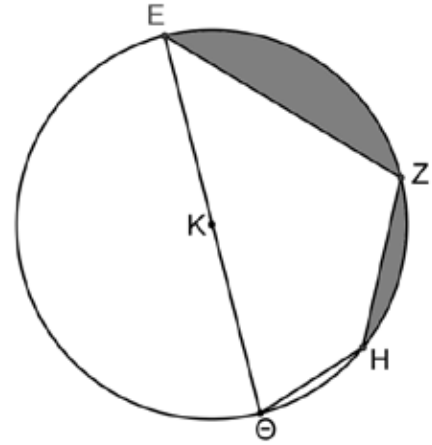
5. Τα χρήματα σε ευρώ που έδωσαν δέκα παιδιά σε κάποιο έρανο είναι:

1, 6, 8, 17, 1, 8, 6, 20, 10, 6. Να βρείτε:

α) Το ενδοτεταρτημοριακό εύρος (IQR).

β) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα και να βρείτε τις ακραίες τιμές αν υπάρχουν.

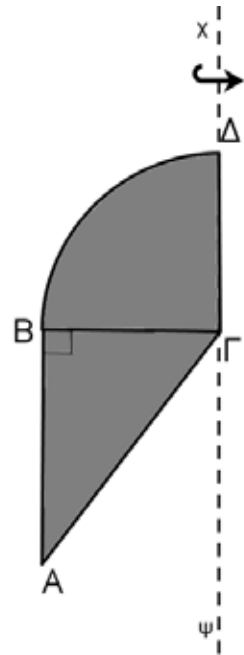
6. Σε κύκλο $(K, 3\text{cm})$ με διάμετρο $E\Theta$, παίρνουμε διαδοχικές χορδές $EZ = 3\sqrt{2}\text{cm}$ και $ZH = 3\text{cm}$. Να υπολογίσετε:
- Το εμβαδόν του σκιασμένου σχήματος, συναρτήσει του π .
 - Το μήκος της χορδής $H\Theta$.



7. Να λύσετε το σύστημα:
- $$\begin{cases} \log x + \log y = \log 24 \\ \log_2 10 \times \log(x - 2y) = 3 \end{cases}$$

8. α) Να δείξετε ότι $\eta\mu(x + \alpha) - \eta\mu(x - \alpha) = 2\sigma\upsilon\nu\chi\eta\mu\alpha$
 β) Αν επιπλέον ισχύει ότι $\epsilon\phi\alpha = -\frac{1}{2}$, να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:
 $\eta\mu(x + \alpha) - \eta\mu(x - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\alpha\chi\eta\mu\chi$

9. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο τρίγωνο με $\hat{A}B\Gamma = 90^\circ$, $B\Gamma = 3\text{cm}$, και $A\Gamma = 5\text{cm}$. Το $\Gamma B\Delta$ είναι τεταρτοκύκλιο που γράφτηκε με κέντρο το Γ και ακτίνα $B\Gamma$. Η σκιασμένη επιφάνεια $AB\Delta\Gamma$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $\chi\psi$ που είναι κάθετος στην $B\Gamma$. Να υπολογίσετε:
- Το εμβαδόν της επιφάνειας και
 - τον όγκο του στερεού που παράγεται.



10. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{4}, & x < 1 \\ 2+x, & x \geq 1 \end{cases}$ και $g(x) = \frac{|4-x^2|}{2-x}$.

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f = g$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε **όλες** τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **δέκα** μονάδες από τις **εκατό**.

1. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \leq 2 \\ x^3 + 2ax^2 - x + 4, & x > 2 \end{cases}$

α) Να βρείτε την τιμή του a ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

β) Αν $a = -1$

i. Να εξετάσετε κατά πόσο η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

ii. Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης f στο σημείο της $(2, f(2))$.

2. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = 2x$, $\beta = \ln(2 - e^x)$ και $\gamma = \ln 4$.

α) Να υπολογίσετε το x , $x \in (-\infty, \ln 2)$, έτσι ώστε οι α, β, γ να είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου.

β) Αν $x = \ln \frac{2}{3}$

i. Να δείξετε ότι η διαφορά της Αριθμητικής Προόδου ισούται με $\ln 3$.

ii. Να υπολογίσετε το άθροισμα $\Sigma = x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \dots$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \sin 4x \cdot \cos 3x - \sin 5x \cdot \cos 2x \quad \text{και}$$

$$g(x) = 5\eta\mu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x - 1$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \eta\mu 2x \cdot \eta\mu x$ και $g(x) = -4\sigma\upsilon\nu 2x$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι άρτια.

γ) Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{\eta\mu 2x} - \frac{g(x)}{4} - 1 = 0$ στο διάστημα $(0, 2\pi)$.

4. Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} x = 2t + \eta\mu 2t \\ y = 2\eta\mu^2 t \end{cases}, t \in (0, \frac{\pi}{2})$

α) Να δείξετε ότι: $\frac{dy}{dx} = \epsilon\phi t$.

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης (K), στο οποίο η εφαπτομένη της σχηματίζει με το θετικό ημιάξονα των τετμημένων γωνία $\frac{\pi}{4}$.

γ) Να δείξετε ότι: $\sigma\phi t \times \frac{dy}{dx} + 8\sigma\upsilon\nu^6 t \times \frac{d^2y}{dx^2} + y = 3$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f : A \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = \frac{e^x + 1}{2e^x + 3}$ όπου $A = (0, +\infty)$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1} .

γ) Αν $g(x) = (f \circ h)(x)$ και $h(x) = \ln x$ να βρείτε το πεδίο ορισμού της g και να δείξετε

$$\text{ότι } g(x) = \frac{x + 1}{2x + 3}.$$

Οι διδάσκοντες:

Κυπρούλα Μοσφίλη
Κώστας Σταματόπουλος
Ελένη Γεωργιάδου
Στέλλα Αγγελή

Η συντονίστρια:

Θούλα Ιερίδου

Ο Διευθυντής:

Ευάγγελος Ευαγγέλου



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΙΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΤΑΞΗ: Β' Λυκείου Προσανατολισμού

Ημερομηνία: 23/5/2017

ΧΡΟΝΟΣ: 2.5 ΩΡΕΣ

Ωρα: 07:45

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: _____

ΤΜΗΜΑ: _____

ΒΑΘΜΟΣ:

Αριθμητικά: _____

Ολογράφως: _____

Υπογραφή: _____

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- ∅ Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
- ∅ Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- ∅ Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υγρού (Tirrex).
- ∅ Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

ΜΕΡΟΣ Α': (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Να λύσετε την εξίσωση: $3^{6x-1} = \frac{1}{81^x}$.

2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = 3x^2 + \sqrt{x} + 5$, $x > 0$ (β) $f(x) = (x+3) \ln x$

3. Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι:

$$2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

4. Να βρείτε τα όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - x|}{x - 1}$ (β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 2x + 2}{3x^2 + x}$

5. Αν $x = h\pi$ $\ddot{y}$ $y = \sin 2t$ να δείξετε ότι: $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 = 0$

6. Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3(9^x - 2 \times 3^{x+1}) = \log_2(8 - \log_{100} 1)$.

7. Σ' ένα ενδοσχολικό αγώνα δρόμου δόθηκαν χρηματικά βραβεία στους πρώτους με βάση τη θέση τερματισμού τους αρχίζοντας από τον πρώτο. Τα βραβεία με τη σειρά που δόθηκαν σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο. Ο 5^{ος} πήρε τετραπλάσια από τον 10^ο, ενώ ο τρίτος και ο 7^{ος} πήραν συνολικά €80.

(α) Να υπολογίσετε τα βραβεία του πρώτου, δεύτερου και τρίτου αθλητή.

(β) Να υπολογίσετε το συνολικό ποσό που δόθηκε στους δέκα πρώτους.

8. Τρίγωνο ABΓ έχει πλευρές $a = 6\sqrt{3}cm$ και $b = g = 6cm$.

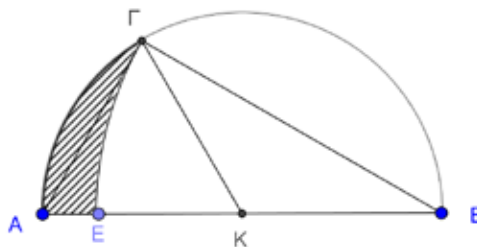
Να υπολογίσετε: (α) τις γωνιές του τριγώνου ABΓ,

(β) το εμβαδόν του τριγώνου ABΓ.

9. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η συνάρτηση $f(x)$ να είναι συνεχής στο $x_0 = 5$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 2}, & x > 5 \\ 3, & x = 5 \\ \alpha - 2x, & x < 5 \end{cases}$$

10. Δίνεται ημικύκλιο (Κ, R) διαμέτρου AB και χορδή ΑΓ=R.. Με κέντρο το σημείο Β και ακτίνα ΒΓ γράφουμε τόξο ΓΕ που τέμνει την AB στο σημείο Ε. Να βρείτε το εμβαδόν του μικτόγραμμου τριγώνου ΑΓΕ συναρτήσει του R.



ΜΕΡΟΣ Β': (50 μονάδες)

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \ln(x - 1)$ και $g(x) = \ln \frac{1}{x - 1}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των $f(x)$ και $g(x)$.

(β) Να δείξετε το σημείο $A(2,0)$ είναι το κοινό σημείο των γραφικών παραστάσεων των $f(x)$ και $g(x)$.

(γ) Να υπολογίσετε την $f(x) + g(x)$.

(δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο A της γραφικής παράστασης της $g(x)$.

2. Δίνεται η συνάρτηση: $y = 1 + \sin 2x$

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί y , $\frac{-y}{2}$, $2\sin^2 x$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου,

με λόγο $l = \frac{1}{2}$ $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

β) Να δείξετε ότι το άθροισμα των απείρων όρων της πιο πάνω γεωμετρικής προόδου, με

$$a_1 = 1 + \sin 2x \text{ ισούται με } \frac{2\sin^3 x}{\sin x - \cos x}, x \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right).$$

3. (α) Να δείξετε ότι $\sin 2q \cos f q = \sin 2q + 1$

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $2^{\sin 2q} - 2^{2 - \sin 2q \cos f q} = 1$, στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

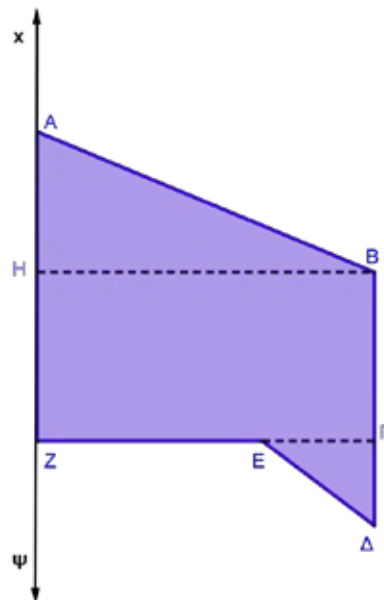
4. (α) Να υπολογίσετε την συνάρτηση f , έτσι ώστε να ισχύει

$$(f \circ g)(x) = 9x^2 - 24x + 17,$$

αν η συνάρτηση g έχει τύπο $g(x) = 3x - 4$.

(β) να δείξετε ότι $f(2) - 2g(2) = 0$

5. Το πιο κάτω σχήμα, όπου ABH , GDE , ορθογώνια τρίγωνα, και $BΓZH$ ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, περιστρέφεται πλήρως γύρω από τον άξονα $\chi\psi$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.
Δίνονται: $AB=13\text{cm}$, $AH = DE = 5\text{cm}$, $ZE = 8\text{cm}$ και $BD=9\text{cm}$.



Διευθυντής

Ευάγγελος Ζώτος

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2017ΜΑΘΗΜΑ: **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

ΤΑΞΗ: Β' Κατεύθυνσης

Ημερομηνία: 25/5/2017

Χρόνος: 2 ώρες και 30 λεπτά

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που

φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

β) Να γράψετε με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν με μολύβι).

γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

δ) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τα 10 θέματα του Μέρους Α'.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 5 μονάδες.

Θέμα 1:

Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

$$(α) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 5x + 2}{3x^2 + 1}$$

$$(β) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 + x - 6}$$

Θέμα 2:

Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(α) f(x) = (2x + 5)^3$$

$$(β) f(x) = \frac{\eta \mu x}{\sigma \upsilon \nu x + 1}, \quad \sigma \upsilon \nu x^2 - 1$$

Θέμα 3:

Δίνεται η ακολουθία $a_n, n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $a_n = \frac{1}{2^n}$

(α) Να αποδείξετε ότι η ακολουθία είναι φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.

(β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των άπειρων όρων της είναι 1.

Θέμα 4:

Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n ισχύει:

$$1 + 5 + 9 + \dots + (4n - 3) = 2n^2 - n$$

Θέμα 5:

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των πιο κάτω συναρτήσεων:

$$(α) \quad y = \frac{\sqrt{x-3}}{|x|-6}$$

$$(β) \quad y = \ln(1-2x)$$

Θέμα 6:

Να λύσετε το πιο κάτω σύστημα:

$$\begin{cases} \log_3(x-y) = 1 \\ 2^x + 4^y = 48 \end{cases}$$

Θέμα 7:

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g και h με τύπους $f(x) = \frac{x}{x^2 - x}$, $g(x) = \frac{x-3}{x-1}$ και $h(x) = \frac{1}{|x-1|}$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $f+g$ (Να δώσετε το αποτέλεσμα στην πιο απλή του μορφή).

(β) Να εξετάσετε κατά πόσο οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $h: B \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ίσες. Στην περίπτωση που ισχύει $f \equiv h$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο είναι $f = h$.

Θέμα 8:

Να λύσετε την εξίσωση:

$$\log_2(4^x + 3^{2x-1}) - 2 = \log_2(9^x + 2^{2(x-1)}) - \log_2 3$$

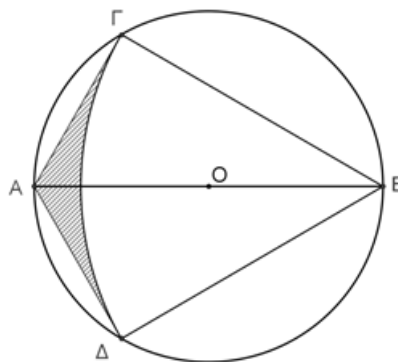
Θέμα 9:

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τόξα $\widehat{AG} = \widehat{AD} = 60^\circ$.

Με κέντρο το B και ακτίνα $B\Gamma$ γράφεται τόξο $\Gamma\Delta$ μέσα στον κύκλο.

(α) Να δείξετε ότι $B\Gamma = R\sqrt{3}$ cm. [1 μον.]

(β) Να βρείτε το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου (συναρτήσει του R). [4 μον.]



Θέμα 10:

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} ax^2 - 1 & x \leq 1 \\ \sqrt{x} + \beta & x > 1 \end{cases}$

Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τα 5 θέματα του Μέρους Β'.

Κάθε θέμα βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Θέμα 1:

Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται από τις εξισώσεις:

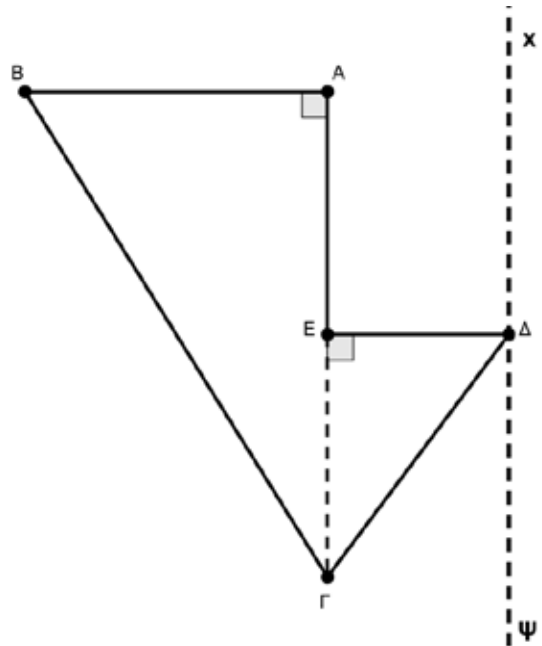
$$\begin{cases} x = \ln(1+t) \\ y = e^t - 1 \end{cases}, \quad t > -1$$

(α) Να βρείτε τις παραγώγους $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$. [6 μον.]

(β) Να δείξετε ότι $\frac{d^2y}{dx^2} - t \times \frac{dy}{dx} - 2(t+1)y = 2(t+1)$. [4 μον.]

Θέμα 2:

Στο διπλανό σχήμα το πολύγωνο $AB\Gamma\Delta E\Lambda$ περιστρέφεται μια πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα $\chi\psi$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται αν: $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{\Delta E\Gamma} = 90^\circ$, E μέσο της $A\Gamma$, $A\Gamma \parallel \chi\psi$, $AE = 4\text{ cm}$, $\Delta E = 3\text{ cm}$ και $B\Gamma = 2(\Delta\Gamma)$.



Θέμα 3:

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\Lambda = \frac{\beta \sigma \nu \Gamma + \gamma \sigma \nu \Delta}{2R}$$

$$K = \frac{\eta \mu 2A \times \sigma \nu 3A + \eta \mu A}{\eta \mu 3A}$$

(α) Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο $\hat{A} B \Gamma$ ισχύουν:

[3/4 μον.]

(i) $\Lambda = \eta \mu A$,

(ii) $K = \sigma \nu 2A$.

(β) Αν $3\Lambda - K = 1$, να υπολογίσετε την γωνία A .

[3 μον.]

Θέμα 4:

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{4-x^2}$.

(α) Να εξετάσετε:

(i) αν η συνάρτηση g είναι άρτια,

(ii) αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη. Στην περίπτωση που είναι αντιστρέψιμη να ορίσετε την f^{-1} .

(β) Να ορίσετε πλήρως την συνάρτηση $f^{-1} \circ g$.

Θέμα 5:

Έστω μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin x + x \text{ για κάθε } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Να βρείτε:

(α) να βρείτε το $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ [5 μον.]

(β) να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο $A\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ είναι

$$y + x - 1 - \frac{\pi}{2} = 0, \quad [3 \text{ μον.}]$$

(γ) Αν η εφαπτομένη της καμπύλης στο A τέμνει τους άξονες xx' και yy' στα σημεία B και Γ

αντίστοιχα, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου $O\Delta B\Gamma$ (όπου O η αρχή των αξόνων). [2 μον.]

Εισηγητές

Διευθυντής

Παρασκευή Ανδρέου

Δήμητρα Βωβίδου

Ελένη Γεωργίου

Χαράλαμπος Πιτσιλλίδης

Γρηγόρης Χατζημάρκου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 23 / 05 / 2017

ΧΡΟΝΟΣ: 2:30΄ ώρες

ΤΑΞΗ: Β΄ Ενιαίου Λυκείου

ΩΡΑ: 7:45΄ - 10:15΄

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΡΕΙΣ (3) ΣΕΛΙΔΕΣ

ΟΔΗΓΙΕΣ : (α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.

(β) Να γράψετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα μπορούν να γίνουν και με μολύβι).

(γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

(δ) Σε όλες τις ασκήσεις να φαίνεται ο τρόπος επίλυσής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της επίλυσής τους δε θα λαμβάνονται υπόψη.

(ε) Επισυνάπτεται σχετικό τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α΄ : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να σχηματίσετε την αριθμητική πρόοδο της οποίας το άθροισμα του 3^{ου} και του 6^{ου} όρου είναι 30, ενώ ο 12^{ος} όρος ισούται με το τριπλάσιο του 2^{ου} όρου.

2. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $f(x) = e^{3x} \cdot \sin 2x$

(β) $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

3. Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta\mu 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha} \times \frac{1 - \sin 2\alpha}{2\sin^2 \alpha} = \epsilon\phi^3 \alpha$

4. Να υπολογίσετε τα όρια : (α) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x-2| + x^2 - 4}{4 - 2x}$

(β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin 2x}{x^2}$

5. Να λύσετε την εξίσωση: $2^{\epsilon\phi x} + 2^{1-\epsilon\phi x} = 3$

6. Δίνεται κύκλος (Κ,ρ) και Α σημείο της περιφέρειάς του. Να κατασκευάσετε με χρήση κανόνα και διαβήτη, ευθεία ε που να εφάπτεται του δεδομένου κύκλου στο σημείο Α.

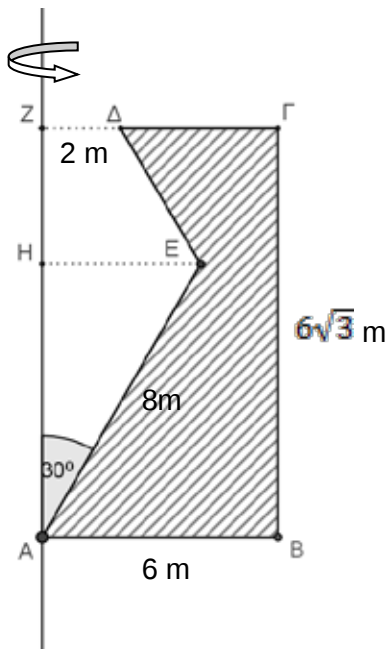
7. Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{\log_3 x - 1}{\log_3 \frac{x-1}{x+1}} = 4\log_3 x - (\log_3 x)^2 + 4$

8. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{G} < 90^\circ$ ισχύει η σχέση: $\log(\eta\mu A) - \log 2 = \log(\eta\mu B) + \log(\sin \Gamma)$.

(α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

(β) Αν η πλευρά β = 8 cm και η γωνία Γ = 75° να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

9. Δίνεται κύκλος (O,R) και η διάμετρος του AB . Με κέντρο το μέσο Γ του ενός ημικυκλίου και ακτίνα ΓA γράφουμε κύκλο που ορίζει με το άλλο ημικύκλιο μηνίσκο. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του μηνίσκου ισούται με το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.
10. Στο πιο κάτω σχήμα το $AB\Gamma\Delta E$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία AZ . Η $B\Gamma$ είναι παράλληλη προς την AZ και οι ΔZ , $E\Gamma$ και BA είναι κάθετες στην AZ . Αν $AB = 6\text{ m}$, $B\Gamma = 6\sqrt{3}\text{ m}$, $\Delta Z = 2\text{ m}$, $AE = 8\text{ m}$ και $\angle EAH = 30^\circ$, να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται (να μεταφέρετε το σχήμα στο φύλλο των απαντήσεών σας).



ΜΕΡΟΣ Β' : Να λύσετε όλες τις ασκήσεις.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Στο πιο κάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Με τη βοήθεια του σχήματος να βρείτε:

(α) το πεδίο ορισμού της $f(x)$

(β) το σύνολο τιμών της $f(x)$

(γ) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

(δ) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

(ε) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

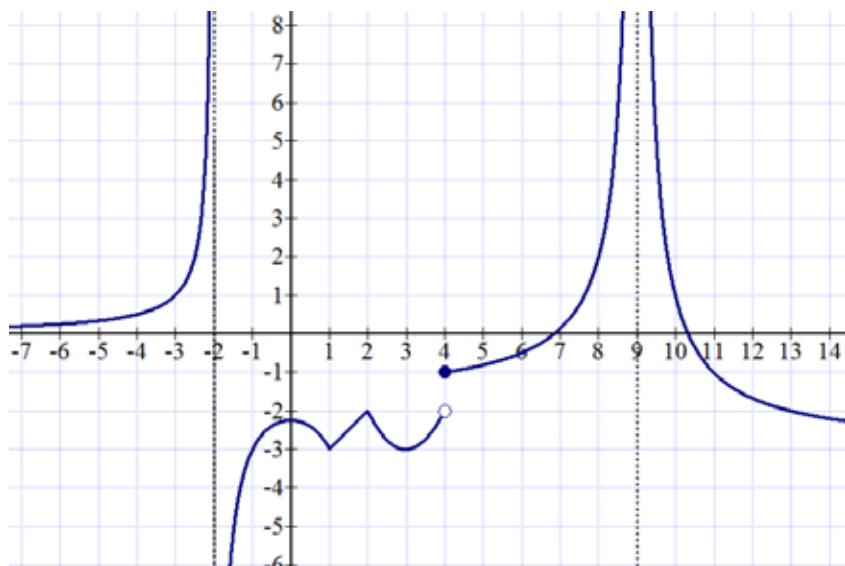
(στ) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

(ζ) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

(η) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

(θ) τις τιμές του x στις οποίες δεν ορίζεται η πρώτη παράγωγος

(ι) την τιμή της $(f \circ f)(10)$.



2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log_x \frac{x^3 - x}{x^3 + x}$ και η $g(x) = x^2 - 4x + 5$, η οποία ορίζεται για $x \in [2, +\infty)$.

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f(x)$.

(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $g(x)$.

(γ) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της $g(x)$ και αν ορίζεται να την προσδιορίσετε.

(δ) Να ορίσετε τη συνάρτηση: $h(x) = f(x) + g(x)$.

3. Δίνονται $A = 2\eta\mu^2 x - 2\eta\mu^2 x \sin 2x + 2\eta\mu^2 x \sin^2 2x - 2\eta\mu^2 x \sin^3 2x + K$, $x \in (0, \frac{\pi}{4})$

$$\text{και } B = \frac{\eta\mu x - \eta\mu 2x + \eta\mu 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x}.$$

(α) Να δείξετε ότι: $A = \varepsilon\phi^2 x$ και $B = \varepsilon\phi 2x$.

(β) Να λύσετε την εξίσωση: $3B \times (1 - A) = 2\sqrt{3}$, στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{4})$.

4. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 3$, $\alpha_3 = 9, \dots$

(α) Να δείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, ότι για το άθροισμα των n πρώτων

$$\text{όρων της ισχύει η σχέση: } 1 + 3 + 9 + \dots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}.$$

(β) Να βρείτε τις τιμές του n ώστε: $|\alpha_n - 15| = 12$.

(γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} + \frac{1}{\alpha_3} + \dots$

(δ) Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $\beta_n = \left| \log \frac{1}{\alpha_n} \right|$. Πόσους όρους θα πρέπει να προσθέσουμε για να πάρουμε άθροισμα $55 \log 3$;

5. (α) Παραμετρική καμπύλη (K) ορίζεται παραμετρικά από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = e^{2t} - t \\ \psi = e^{2t} + t \end{cases}$$

(i) Να δείξετε ότι: $\frac{d^2\psi}{dx^2} = \frac{-4(x+\psi)}{(x+\psi-1)^3}$

(ii) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (K) στο σημείο της με $t = \ln 2$.

(β) Να βρείτε με βάση τον ορισμό την παράγωγο της συνάρτησης f με τύπο $f(x) = \frac{3}{x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Εισηγητές:
Κάλλη Χριστοφόρου
Γιώργος Ιωαννίδης
Έβη Πιερίδου
Αγγελική Σάββα

Η Διευθύντρια

Ελένη Παπαστεφάνου

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2017

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ: 2,5 ώρες

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 07:45 π.μ.

- ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ.
- Στο τέλος του εξεταστικού δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο, το οποίο αποτελείται από μία (1) σελίδα.
- Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι. (Τα σχήματα επιτρέπεται να γίνουν και με μολύβι.)
- Τα σχήματα να μεταφέρονται στη θέση που λύνεται η άσκηση.
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, σφραγισμένης από το Σχολείο.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις δέκα (10) ασκήσεις του Μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε (5) μονάδες.

- 1) Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 3| \leq 5$
- 2) Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{A}$, ($\hat{A} < 90^\circ$), τριγώνου ABG, με πλευρές $\alpha = 8 \text{ cm}$, $\beta = 8\sqrt{3} \text{ cm}$ και γωνία $\hat{B} = 60^\circ$.

- 3) Ένας αθλητικός σύλλογος διοργάνωσε μια εκδρομή για τα μέλη του. Στο διπλανό φυλλογράφημα δίνεται η κατανομή των ηλικιών των μελών που συμμετείχαν στην εκδρομή. Να υπολογίσετε τη διάμεσο και το ενδοτεταρτημοριακό εύρος των ηλικιών των συμμετεχόντων στην εκδρομή.

5	1
4	137
3	2455
2	0113468
1	7889

- 4) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{7}{(2-x)^3}$
- 5) Να βρείτε την πρώτη παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $y = x^4 + \sqrt{x} - 7^x + \log 5$, $x \in (0, +\infty)$

β) $y = \ln^3(2x - 4)$, $x \in (2, +\infty)$

- 6) Να αποδείξετε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση: $1 + \alpha + \alpha^2 + \dots + \alpha^{n-1} = \frac{\alpha^n - 1}{\alpha - 1}$, $\alpha \neq 1$.

7) Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} \ln y + \ln x = \ln 32 \\ 2\log x + \log(2x) = \log y \end{cases}$$

8) Δίνεται αριθμητική πρόοδος με $a_1 = 2$ και $a_3 = 10$.

α) Να βρείτε τον εικοστό όρο της προόδου.

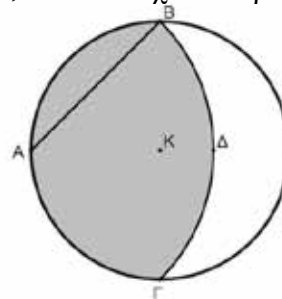
β) Να βρείτε πόσοι όροι της ακολουθίας πρέπει να προστεθούν, ώστε να έχουν άθροισμα 242.

Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (Κ, R).

Με κέντρο το Α και ακτίνα τη χορδή ΑΒ, $AB = R\sqrt{2}$ cm,

γράφουμε τόξο $\widehat{BDG}$ μέσα στον κύκλο. Να βρείτε,

συναρτήσει του R, το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



9) Παραμετρική καμπύλη (Κ) ορίζεται από τις εξισώσεις:
$$\begin{cases} y = \sin t + t \\ x = \eta \mu t + 2 \end{cases}, \quad t \in [0, \pi)$$

α) Να βρείτε την εξίσωση της κάθετης της καμπύλης (Κ) στο σημείο της με $t = 0$.

β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{dy}{dx} \times \eta \mu^2 t$

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις πέντε (5) ασκήσεις του Μέρους Β'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με δέκα (10) μονάδες.

1) Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{1+e^x}{1-e^x}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή συνάρτηση.

β) Να δείξετε ότι: $f'(x) = \frac{2e^x}{(1-e^x)^2}$

γ) Να λύσετε την εξίσωση: $2f'(x) = e^x$

2) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = 2 + \sqrt{x}$, $g(x) = \frac{4-x}{2-\sqrt{x}}$ και $h(x) = \ln(x-2)$

α) Να εξετάσετε κατά πόσο οι πραγματικές συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ και $g: B \rightarrow \mathbb{R}$,

$A, B \subseteq \mathbb{R}$, είναι ίσες. Αν $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, για το οποίο $f = g$.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ h$ (τύπος και πεδίο ορισμού).

3) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3\alpha x + \beta, & x \geq 1 \\ \beta x + \gamma - 1, & x < 1 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές των α, β, γ , ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να περνά από το σημείο $(0, 2)$ και η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

β) Αν $\alpha = 0, \beta = 4$ και $\gamma = 3$, να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

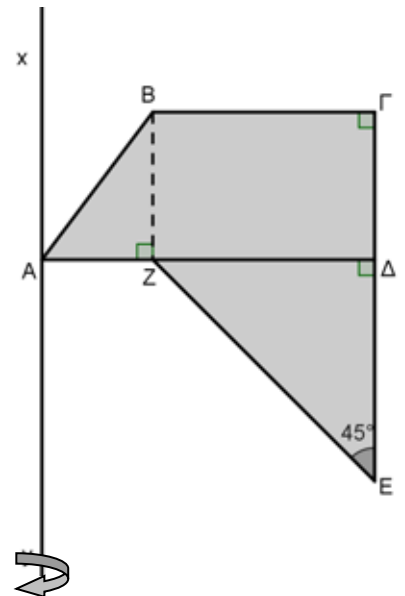
4) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \eta\mu^2 x - \eta\mu^2 3x$ και $g(x) = \frac{2\eta\mu 4x \times (1 + \sigma\upsilon\nu 4x)}{\sigma\upsilon\nu^3 2x}$, $x \in -\{\kappa\pi \pm \frac{\pi}{4}\}$

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = -\eta\mu 4x \times \eta\mu 2x$ και $g(x) = 8\eta\mu 2x$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $g(x) + 2f(x) = 0$

γ) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x \times g(x)}$

- 5) Στο διπλανό σχήμα $ABGD$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο και DEZ είναι ορθογώνιο τρίγωνο ($\hat{\Gamma} = \hat{D} = 90^\circ$), με $AB = 5 \text{ cm}$, $B\Gamma = 6 \text{ cm}$, $AZ = 3 \text{ cm}$ και $\hat{D}\hat{E}Z = 45^\circ$. Το σκιασμένο πολύγωνο $ABGDEZ$ περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xAy , που είναι κάθετος στην AD , στο σημείο A .
Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.
(Να γίνει σχήμα στο φύλλο απαντήσεων και να φαίνεται η περιστροφή.)



Ο Διευθυντής

Νίκος Πρωτοπαπάς

ΛΥΚΕΙΟ ΠΑΛΟΥΡΙΩΤΙΣΣΑΣ	
ΕΠΩΝΥΜΟ:	
ΟΝΟΜΑ:	
ΤΑΞΗ ΚΑΙ ΤΜΗΜΑ:	
ΟΝΟΜΑ ΚΑΘΗΓΗΤΗ:	

Βαθμός:	
Ολογράφως	
Υπογραφή:	

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού

ΤΑΞΗ: Β΄ Λυκείου

Ημερομηνία

Ώρα:

Ημέρα:

Χρόνος:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται συνολικά από τέσσερις (4) σελίδες.
2. Τα στοιχεία των μαθητών να γραφτούν μόνο στην πρώτη σελίδα, στον ειδικό χώρο.
3. Κατοχή κινητού τηλεφώνου ισοδυναμεί με δολίευση.
4. Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
5. Δεν επιτρέπεται να γράφετε με μολύβι παρά μόνο με μπλε πένα.
6. Δεν επιτρέπεται να δανείζεστε οτιδήποτε από συμμαθητές σας.
7. Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής, που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
8. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

ΜΕΡΟΣ Α΄

Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του μέρους Α΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων:

(α) $y = \sin x + \sqrt{x} + 2^x + e$

μ. 2

(β) $y = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$

μ. 3

2. Τις πρώτες δεκατρείς μέρες του περασμένου μήνα σημειώθηκαν οι ακόλουθες θερμοκρασίες (σε βαθμούς κελσίου):

19, 22, 22, 17, 11, 9, 15, 17, 22, 21, 22, 30, 35

(α) να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.

(β) να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

3. Να λύσετε την ανίσωση: $|1 + 3x|^3 \geq 2$, $x \in \mathbb{R}$

4. Ένας χειριστής άρματος βρίσκεται στο ακινητοποιημένο άρμα του και βλέπει υπό γωνία 40 μοιρών ένα εχθρικό φυλάκιο και μια αποθήκη πυρομαχικών. Με τη βοήθεια μιας ειδικής συσκευής βρίσκει ότι απέχει 300m από το φυλάκιο και 200m από την αποθήκη. Να εξετάσετε, αν η αποθήκη είναι πιο κοντά στον χειριστή απ' ό,τι στο φυλάκιο.



5. Να βρείτε το $x \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε οι αριθμοί: $\log x$, $\frac{1}{2}$, $\log(x - 3)$ να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου

6. Δίνεται γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο το $\ln 4x$ και λόγο το $\sin 4x$.

(α) να δείξετε ότι $S_n = \ln 2x$ και

μ. 2

(β) να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $S_n = \ln x$ στο διάστημα $[0, \pi]$

μ. 3

7. Οι μαθητές ενός σχολείου παρατάσσονται σε τριγωνικό σχηματισμό. Στην πρώτη σειρά τοποθετούνται δύο μαθητές και σε κάθε επόμενη σειρά τοποθετούνται τρεις επιπλέον μαθητές.

(α) να βρείτε το γενικό όρο που εκφράζει τον αριθμό των μαθητών σε κάθε σειρά

μ. 1

(β) να βρείτε έναν αναδρομικό τύπο της ακολουθίας που εκφράζει τον αριθμό των μαθητών σε κάθε σειρά

μ. 2

(γ) αν στην τελευταία σειρά βρίσκονται 35 μαθητές, να βρείτε πόσοι είναι όλοι οι μαθητές του σχολείου

μ. 2

8. Κατασκευάζουμε κύβους με μήκος ακμής $1, 2, 3, 4$ και ούτω καθεξής.

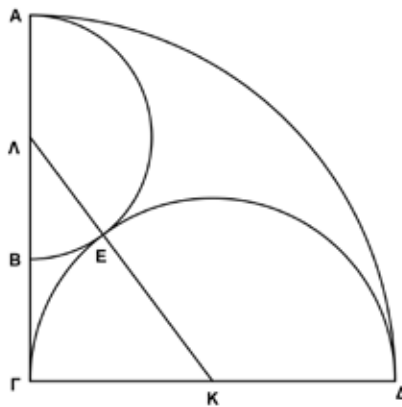
Να δείξετε ότι το άθροισμα των όγκων των κύβων $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

είναι ίσο με $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

9. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \begin{cases} \ln x & x < p \\ ax + b & x \geq p \end{cases}$

Να βρείτε τις τιμές των a και b για τις οποίες η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = p$

10.



Στο πιο πάνω σχήμα δίνεται τεταρτοκύκλιο ΓΑΔ με ΓΑ=R. Στο εσωτερικό του τεταρτοκυκλίου γράψαμε δύο ημικύκλια με διαμέτρους ΓΔ=R και ΑΒ=2ρ.

(α) να δείξετε ότι η ακτίνα του τεταρτοκυκλίου είναι τριπλάσια της ακτίνας του μικρού ημικυκλίου

(β) να βρείτε, συναρτήσει του ρ, τον όγκο του στερεού που παράγεται από την πλήρη στροφή του τριγώνου ΓΚΛ γύρω από την ΑΓ

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του μέρους Β΄.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. (α) να λύσετε την εξίσωση: $4^{1+x} + 4^{-x} = 5, x \in \mathbb{R}$

(β) με τη βοήθεια του πιο πάνω ερωτήματος ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο

να βρείτε τη γενική λύση της εξίσωσης: $16^{\sin^2 q} + 4^{-\sin 2q} = 5, q \in \mathbb{R}$

2. Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \rightarrow [1, +\infty)$, $g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ και $h: A \rightarrow B$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}, \quad g(x) = 2 \ln x \quad \text{και} \quad h(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

- (α) να εξετάσετε αν η f είναι άρτια συνάρτηση
(β) να αποδείξετε ότι η g ικανοποιεί την ιδιότητα:

$$g(a) + g(b) = g(ab) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

- (γ) να ορίσετε τη σύνθεση $g \circ h$

- (δ) χρησιμοποιώντας τον ορισμό της παραγώγου να δείξετε ότι: $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

3. Δίνεται τρίγωνο ABG . Να δείξετε ότι: $(\sin A + \sin G)^2 + (\sin A - \sin G)^2 = 4 \sin^2 \frac{B}{2}$
όπου A, B, G οι γωνίες του τριγώνου

4. Το άθροισμα των n πρώτων όρων μιας ακολουθίας a_n , $n \in \mathbb{N}$ είναι:

$$S_n = -2n^2 + n$$

- (α) να δείξετε ότι η ακολουθία δίνεται από το γενικό τύπο $a_n = 3 - 4n$
(β) να δείξετε ότι η ακολουθία αυτή είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά $\delta = -4$
(γ) να γράψετε ένα άνω φράγμα της πιο πάνω ακολουθίας
(δ) να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = a_2^2 + a_4^2 + a_6^2 + \dots + a_{30}^2 - (a_1^2 + a_3^2 + a_5^2 + \dots + a_{29}^2)$$

5. (α) Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ με τύπο $f(x) = \ln(1 - x^2)$

- (i) να βρείτε το πεδίο ορισμού της

- (ii) να δείξετε ότι: $(1 - x^2) \frac{dy}{dx} = -2x$

- (β) Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $g(x) = (1 - x^2) \ln(1 - x^2)$

Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις συντεταγμένες των σημείων της καμπύλης της g στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη του άξονα $x'x$

- (γ) Δίνεται συνάρτηση h . Ο τύπος της σύνθεσης της h με την f είναι:

$$h(f(x)) = -\frac{4}{3}x, \quad x \in (0, 1)$$

Να δείξετε ότι: $h'\left(\ln\left(\frac{3}{4}\right)\right) = 1$

μ. 3

Οι εισηγητές

Ο Διευθυντής

μ. 4

Μιχάλης Χρυσafίνης

Τάσος Τάσου

μ. 3

Μάριος Πίκας

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΤΑΞΗ: Β΄ Λυκείου

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 25/05/2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ ΕΞΕΤΑΣΗΣ : 2:30΄

ΩΡΑ: 8:00 – 10:30 π.μ.

Οδηγίες:

- α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- β) Να γράφετε με μελάνι μπλε (τα σχήματα μπορείτε να τα κάνετε με μολύβι).
- γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού ή διορθωτικής ταινίας.
- δ) Τα σχήματα να μεταφέρονται στο γραπτό σας.
- ε) Σε όλες τις ερωτήσεις να φαίνεται ο τρόπος απάντησής τους. Ορθές απαντήσεις χωρίς την παρουσίαση της απαιτούμενης αιτιολόγησης δεν θα λαμβάνονται υπόψη .
- ζ) Να συμμορφώνεστε πρόθυμα με τις οδηγίες των επιτηρητών.
- στ) Η ΔΟΛΙΕΥΣΗ ΤΙΜΩΡΕΙΤΑΙ ΑΥΣΤΗΡΑ.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη, το ΜΕΡΟΣ Α΄ και το Μέρος Β΄.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.

Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται τυπολόγιο που αποτελείται από μία (1) σελίδα.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5/100.

1. Σε γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι 5 και ο λόγος 2. Να βρείτε τον πέμπτο όρο της γεωμετρική προόδου.
2. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των συναρτήσεων:

$$(\alpha) y = x^6 - \sqrt{x} + \ln 2, \quad x > 0$$

$$(\beta) y = \frac{\eta \mu x}{e^x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

3. Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

$$(\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{3x^2 - 6x}$$

$$(\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 8x + 2}{1 - 5x^2}$$

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με πλευρές $\alpha = 6 \text{ cm}$, $\beta = 6\sqrt{3} \text{ cm}$ και εμβαδόν $E = 9\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$ ($\hat{\Gamma} < 90^\circ$) και την πλευρά γ .

5. Με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής, να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n , ισχύει:

$$2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n + 1)$$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$(\alpha) 4^{2x+1} > 16$$

$$(\beta) \log_{\frac{1}{5}} x \leq -2$$

7. Να αποδείξετε την πιο κάτω ταυτότητα:

$$\frac{\eta\mu 4\alpha + \eta\mu 2\alpha}{1 + \sigma\upsilon\nu 4\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha} = \epsilon\varphi 2\alpha$$

8. Δίνονται οι θερμοκρασίες 15 διαφορετικών σημείων του πλανήτη σε μία χρονική στιγμή:

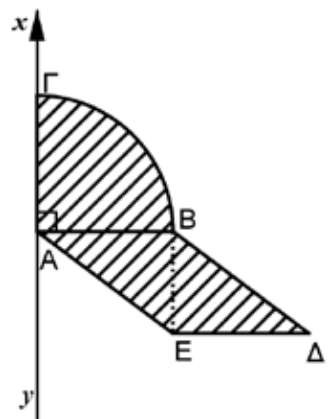
0, 12, 15, 19, 20, 21, 23, 26, 27, 27, 30, 31, 39, 40, 40.

(α) Να βρείτε τη διάμεσο τιμή, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτομοριακό εύρος.

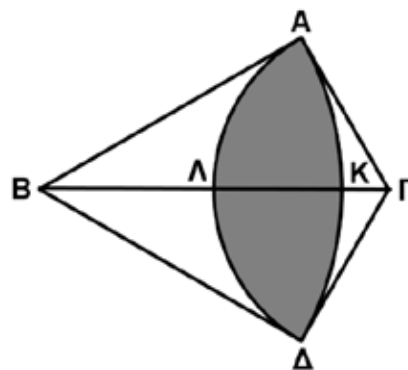
(β) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα και να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις (αν υπάρχουν).

9. Στο διπλανό σχήμα δίνεται $A\Gamma B$ τεταρτοκύκλιο και $AB\Delta E$ παραλληλόγραμμο με $AB = 4 \text{ cm}$ και ύψος $BE = 3 \text{ cm}$.

Το μικτόγραμμα σχήμα $AE\Delta B\Gamma$ στρέφεται πλήρη στροφή γύρω από τον άξονα xy . Να βρείτε τον **όγκο** και το **εμβαδόν** της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



10. Στο διπλανό σχήμα με κέντρο Γ και ακτίνα ΓA γράφουμε τόξο $A\Lambda\Delta$ και με κέντρο B και ακτίνα BA γράφουμε τόξο $AK\Delta$. Αν $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^\circ$, $\widehat{AB\Gamma} = 30^\circ$ και $B\Gamma = 4 \text{ cm}$, να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις. Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10/100.

- Δίνονται οι συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $A, B, \Gamma \subseteq \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = |x - 3|$, $g(x) = \frac{x^2 - 3x}{x}$ και $h(x) = \sqrt{1 - x}$.
 - Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Σε περίπτωση που $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο $f = g$.
 - Να ορίσετε τις συναρτήσεις $(h + g)(x)$ και $(h \circ f)(x)$.
- Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow f(A)$ με τύπο $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.
 - Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
 - Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια ή περιττή ή τίποτα από τα δύο.
 - Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι «1-1».
 - Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση και αν ορίζεται να βρείτε τον τύπο της και το πεδίο ορισμού της.
- Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta \mu x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$.
 - Να εξετάσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση στο $x_0 = 0$.
 - Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με χρήση του ορισμού.
 - Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-f(x)}$
- Δίνονται οι αριθμοί $2 \cdot 3^{\beta+2}$, $2^{\beta+5} + 3^\beta$, $5 \cdot 2^{\beta+1}$, $\beta \in \mathbb{R}$.
 - Αν οι πιο πάνω αριθμοί είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να υπολογίσετε την τιμή του β .
 - Αν $\beta = 3$ να λύσετε τις εξισώσεις:
 - $\log_2(5^{2x} - \beta) = 1 + \log_2 5^x$.
 - $\varepsilon \varphi x = (\sqrt{10})^{\log \beta}$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = f\left(-\frac{1}{x}\right) + x \cdot f(-x)$. Η ευθεία $(\varepsilon): \psi = 3x - 1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
- (α) Να δείξετε ότι $f(1) = 2$ και $f'(1) = 3$.
- (β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $B(-1, g(-1))$.

Τέλος Δοκιμίου

Οι εισηγητές :

Μαρία Ευθυμίου (Β.Δ.)

Άντρη Κακκίντηρου

Ειρήνη Γεωργίου

Γιώργος Χειμωνίδης

Πιέρος Φακλαμάς

Συντονίστρια Β.Δ.

Μαρία Ευθυμίου

Ο Διευθυντής

Σόλων Χαραλάμπους

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ/ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΤΑΞΗ:	Β' ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΜΑΘΗΜΑ:	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	30/05/2017
ΔΙΑΡΚΕΙΑ:	2,5 ώρες

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ :**ΤΜΗΜΑ:**.....

ΟΔΗΓΙΕΣ

- § Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες (συμπεριλαμβανομένης και της 1^{ης} σελίδας)
- § Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δύο μέρη.
- § Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- § Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικών υλικών.
- § Γράφετε μόνο με μελάνι μπλε χρώματος. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- § Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
- § Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

Μέρος Α΄: Το μέρος Α΄ αποτελείται από 10 ασκήσεις. Πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 10.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **5 μονάδες**.

1. Να βρείτε τη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = 2x^3 + \frac{8}{x} + \sqrt{5}$

β) $f(x) = 2\ln x + e^{3x} - \ln(x+2)$

2. Να λυθεί η εξίσωση $|2x - 1| - 5 = 0$.

3. Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} =$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 - x^{10}}{x^3 + 5x^{10}} =$

4. Δίνεται η ακολουθία a_n , $n \in \mathbb{N}$ με γενικό όρο $a_n = 3n^2 + 2n$.

α) Να βρείτε τον 10^ο όρο της.

β) Να υπολογίσετε τη διαφορά $a_{n+1} - a_n$.

5. Να δείξετε, με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής, ότι " $n \in \mathbb{N}$ " ισχύει η πρόταση:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6. Να βρείτε το x έτσι ώστε οι αριθμοί $\log 2^{x-2}$, $\log \sqrt{5^x + 2^{x-3}}$, $\log 63$ να είναι διαδοχικοί όροι Αριθμητικής Προόδου.

7. Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $a + g = b \cdot \frac{B}{2}$ να δείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο.

8. Να βρείτε τα $a, b \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \geq 2 \\ ax + b, & \text{αν } x < 2 \end{cases} \quad \text{να είναι παραγωγίσιμη στο } x_0 = 2$$

9. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει $f(x) = e^x + x + 2$ " $x \in \mathbb{R}$ ".

Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x + 4$ εφάπτεται του διαγράμματος της g στο σημείο της $A(3, g(3))$ να βρείτε την εφαπτομένη της f στο σημείο της $B(0, f(0))$.

10. Δίνεται η συνάρτηση με παραμετρικές εξισώσεις:

$$\begin{aligned} x &= 1 + 2\sin q \\ y &= 2 + e^j q \end{aligned} \quad 0 < q < \frac{\rho}{2}$$

i. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης στη μορφή $y = f(x)$ (μ.2)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης, της πιο πάνω συνάρτησης, στο σημείο της A με τετμημένη $x = 2$. (μ.3)

Μέρος Β': Το μέρος Β' αποτελείται από 5 ασκήσεις. Πρέπει να λύσετε ΚΑΙ τις 5.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με **10 μονάδες**.

1. Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ με τύπο $y = xe^{2ax}$, $a \in \mathbb{R}$.

i. Αν για $x = -\frac{1}{4}$ ισχύει $\frac{dy}{dx} = 0$ να βρείτε την τιμή του a . (μ.4)

ii. Αν $a = 2$ να δείξετε ότι: $e^{-2x} \left(\frac{1}{8} \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 4y \right) = 2xe^{2x}$ (μ.6)

2. Αν η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sin x \ln \frac{1+x}{1-x}$ είναι συνεχής στο διάστημα $(-1, 1)$:

i. Να δείξετε ότι αυτή είναι περιττή συνάρτηση. (μ.6)

ii. Αν $g(x) = \ln(1+e^x)$ να δείξετε ότι $g\left(\frac{p}{4} - x\right) = \ln 2 - g(x)$. (μ.4)

3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $y = 1 + \sin 2x$

i. Να δείξετε ότι οι όροι y , $-\frac{1}{2} \frac{dy}{dx}$, $2\sin^2 x$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου με λόγο

$$l = e^j x \quad (\mu.4)$$

ii. Αν S είναι το άθροισμα της πιο πάνω γεωμετρικής προόδου με $0 < x < \frac{p}{4}$ και

$$\frac{S}{\sin x} = 3(\sin x + \sin x) \text{ να υπολογίσετε το } x. \quad (\mu.6)$$

4. Δίνεται η καμπύλη με παραμετρικές εξισώσεις:

$$x = 2 \ln \frac{1+\sin q}{1-\sin q}, \quad y = 2 \cos q \quad \text{και} \quad 0 < q < \frac{p}{2}$$

i. Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = -\cot q$ (μ.4)

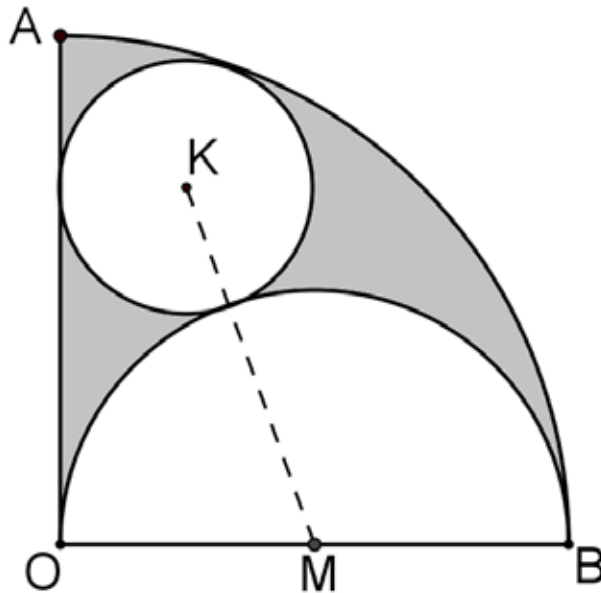
ii. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών της. (μ.2)

β) Αν η f είναι «1-1» συνάρτηση να προσδιορίσετε την αντίστροφη της f^{-1} . (μ.2)

γ) Αν $g(x) = x^2 - 1$ να βρείτε τη συνάρτηση $(f^{-1} \circ g)(x)$ και να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της. (μ.2)

5. Δίνεται τεταρτοκύκλιο AOB με κέντρο O και ακτίνα R. Γράφουμε ημικύκλιο με διάμετρο OB μέσα στο τεταρτοκύκλιο.
- i. Να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου, συναρτήσει του R, που εφάπτεται στο τεταρτοκύκλιο, στο ημικύκλιο και στην OA. (μ.6)
- ii. Να δείξετε ότι το εμβαδόν της γραμμοσκιασμένης επιφάνειας είναι ίσο με $\frac{\rho R^2}{16}$. (μ.4)



Ο ΔΙΕΥΘΥΝΤΗΣ

A. Χριστοδουλίδης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ – ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά
ΤΑΞΗ: Β΄ Λυκείου Κατεύθυνση

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 22/05/2017
ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ**ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- (α) Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται μολύβι).
(β) Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.
(γ) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
(δ) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
(ε) Στο τέλος του δοκιμίου επισυνάπτεται ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ που αποτελείται από μια (1) σελίδα.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

A1. Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

(α) $y = 5x^2 + \sqrt{x} - \frac{8}{x^3} + 9$

(β) $y = e^{4x} \cdot \sin x$

A2. Να βρείτε τα πιο κάτω όρια:

(α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

(β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x^4 + 3x^2 + 1}{1 - 2x^3}$

A3. Δίνεται ο αριθμός των αδειών ασθενείας 11 υπαλλήλων για το πρώτο τρίμηνο του 2017.

9, 28, 7, 20, 9, 10, 5, 11, 12, 6, 15

- (α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.
(β) Να κατασκευάσετε το θηκόγραμμα.

A4. Να λύσετε την εξίσωση: $7^{x+1} + 7^{-x} = 8$.

A5. Αν $\left| \frac{|\beta| - 5|\alpha|}{5\alpha + \beta} \right| = 1$ και $\alpha, \beta \neq 0$, $5\alpha + \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι.

A6. Έστω $n \in \mathbb{N}$, να αποδείξετε ότι: αν ο αριθμός $n^4 - n^3 + 11n + 7$ είναι άρτιος, τότε ο αριθμός n είναι περιττός.

A7. Παραμετρική καμπύλη ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = 4 - t^2 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

(α) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$. (μονάδες 3)

(β) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου της καμπύλης στο οποίο η καμπύλη έχει οριζόντια εφαπτομένη. (μονάδες 2)

A8. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{5|x|+3x^2-21}{\sqrt{3-|x|}}$.

(α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι άρτια.

(β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sqrt{3-|x|}$.

A9. Να λύσετε το σύστημα:
$$\begin{cases} 2 \log_9 y = \log_3(2x) \\ \log 10^y - \log 2^y = x^2 \log 5 \end{cases}$$

A10. Δίνεται η ακολουθία με γενικό όρο $a_n = 5 \cdot 4^{-n}$

(α) Να εξετάσετε την ακολουθία ως προς τη μονοτονία.

(β) Να δείξετε ότι η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος.

(γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων της ακολουθίας.

(δ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{5}{4} \cdot 3^x + \frac{5}{16} \cdot 3^x + \frac{5}{64} \cdot 3^x + \dots = 5^x$.

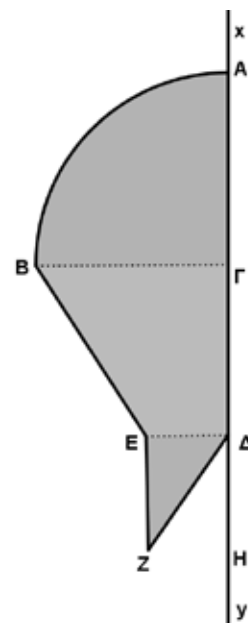
ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

B1. Στο διπλανό σχήμα ο κυκλικός τομέας $AB\Gamma$ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα $\Gamma B = 9 \text{ cm}$, το τετράπλευρο $B\Gamma\Delta E$ είναι ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 90^\circ$) με $\Delta E = 3 \text{ cm}$ και $\Gamma\Delta = 8 \text{ cm}$.

Το τρίγωνο ΔEZ είναι ορθογώνιο ($\hat{E} = 90^\circ$) με $EZ = 4 \text{ cm}$.

Αν η ZH είναι κάθετη στον άξονα xy , να βρείτε τον όγκο και το εμβαδόν ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σκιασμένου μέρους του σχήματος γύρω από τον άξονα xy .



B2. Δίνονται οι πραγματικές συναρτήσεις $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: B \rightarrow \mathbb{R}$ και $h: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ με $A, B, \Gamma \subseteq \mathbb{R}$

με τύπους: $f(x) = 1 - \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-1}$ και $h(x) = \sqrt{1-x^2}$

(α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f , g και h . (μονάδες 3)

(β) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

Στην περίπτωση που ισχύει $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό

υποσύνολο του $\mathbb{R}$ για το οποίο είναι $f = g$. (μονάδες 4)

(γ) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ h$. (μονάδες 3)

B3. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + a, & x < 2 \\ \eta\mu(x - 2), & x \geq 2 \end{cases}$$

(α) Να υπολογίσετε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$, για την οποία η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x = 2$. (μονάδες 4)

(β) Έστω $a = 2$, (μονάδες 6)

(i) να εξετάσετε αν είναι η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $x = 2$.

(ii) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = 1$.

B4. Έστω $A = \frac{2\sigma\upsilon\nu 5\theta \cdot \sigma\upsilon\nu 2\theta - 2\sigma\upsilon\nu 6\theta \cdot \sigma\upsilon\nu \theta}{\eta\mu 4\theta}$ και $B = \frac{\eta\mu 3\theta}{\eta\mu \theta} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3\theta}{\sigma\upsilon\nu \theta}$

(α) Να δείξετε ότι: (μονάδες 6)

(i) $A = 2\eta\mu\theta$

(ii) $B = 2$

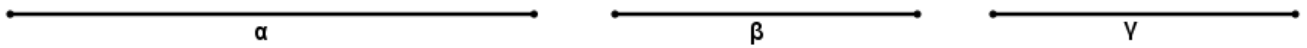
(β) Να βρείτε το σύνολο των τιμών του θ , ώστε οι αριθμοί:

$$B, A, 3 + \sigma\upsilon\nu 2\theta$$

να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (μονάδες 4)

B5. (α) Να κατασκευάσετε τρίγωνο $AB\Gamma$ του οποίου δίνονται οι πλευρές του. (μονάδες 2)

$$B\Gamma = \alpha, A\Gamma = \beta \text{ και } AB = \gamma.$$



(β) Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ που κατασκευάσατε στο ερώτημα (α) οι πλευρές του είναι:

$$\alpha = 4\sqrt{3} \text{ cm}, \beta = 4 \text{ cm} \text{ και } \gamma = 4 \text{ cm}$$

(i) Να επιλύσετε το τρίγωνο και να βρείτε το εμβαδόν του. (μονάδες 4)

(ii) Με κέντρο το A και ακτίνα την AB φέρουμε το κυρτό τόξο $B\Gamma$.

Με διάμετρο τη $B\Gamma$, φέρουμε ημικύκλιο έτσι ώστε το τόξο $B\Gamma$

και το ημικύκλιο $B\Gamma$ να βρίσκεται προς το ίδιο μέρος της πλευράς $B\Gamma$.

Να βρείτε το εμβαδόν του μηνίσκου που σχηματίζεται. (μονάδες 4)

Ο Διευθυντής

.....
Μελής Νικολαΐδης

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ - ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 25/05/2017

ΤΑΞΗ: Β' ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ΩΡΕΣ

ΩΡΑ ΕΝΑΡΞΗΣ: 7:45 π.μ.

ΩΡΑ ΛΗΞΗΣ: 10:15 π.μ.

ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
2. Να γράφετε **μόνο** με μπλε ή μαύρο μελάνι. (Μόνο σχήματα με μολύβι)
3. **Δεν** επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
4. Επιτρέπεται η χρήση **μη** προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
5. Τα προσωπικά σας στοιχεία και οι **λύσεις** των ασκήσεων να γραφούν στα φύλλα εξέτασης.
6. Τα σχήματα των ασκήσεων να **μεταφέρονται** στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
7. **Επισυνάπτεται** τυπολόγιο που αποτελείται από **1 (μία)** σελίδα.

ΜΕΡΟΣ Α': Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με πέντε 5 μονάδες.

1. Σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών είχαμε τα πιο κάτω αποτελέσματα:

2, 10, 12, 13, 12, 14, 15, 13, 17, 12, 15

α) Να κατασκευάσετε θηκόγραμμα για τις πιο πάνω τιμές.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ακραίες παρατηρήσεις και αν ναι να γράψετε τα σχόλια σας για αυτές.

2. Να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $y = 3\eta\mu^2 x + \epsilon\phi 2x - e^{x^2}$

β) $x^2 + y^2 = 2y + 9$

3. Να δείξετε ότι για όλους τους φυσικούς αριθμούς $n \in \mathbb{N}$ ο αριθμός $7^n + 5$ είναι πολλαπλάσιο του 3.

4. Να επιλύσετε το τρίγωνο $AB\Gamma$ στο οποίο είναι $a = 2b$, $\Gamma = 60^\circ$ και $E = 2\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

5. Να λυθεί στο διάστημα $90^\circ, 180^\circ$ η εξίσωση $\sin x \times \sin 2x = \sin 2x \times \sin x$

6. Ένας αγρότης, για να κάνει μία γεώτρηση στο κτήμα του, συμφώνησε τα εξής με τον ιδιοκτήτη του γεωτρώπανου. Το 1ο μέτρο θα κοστίσει 20 ευρώ και αυξανόμενου του βάθους, θα αυξάνεται και η τιμή κάθε μέτρου κατά 5 ευρώ. Ο αγρότης διαθέτει 4700 ευρώ. Σε πόσο βάθος μπορεί να πάει η γεώτρηση στο κτήμα του;

7. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + a, & x \leq 0 \\ \sin x, & x > 0 \end{cases}$

Να υπολογίσετε τις τιμές των a, β για τις οποίες η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

8. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - 2x| + x - 2}{x^2 - 4}$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f : (-\infty, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 8x + 10$

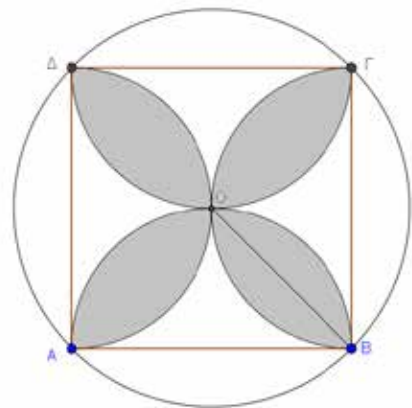
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να βρείτε την f^{-1} .

10. Στο διπλανό σχήμα η ακτίνα του μεγάλου κύκλου $OB = 8 \text{ cm}$. Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο εγγεγραμμένο στον κύκλο $(O, 8 \text{ cm})$. Τα τόξα ΔOG , ΓOB , BOA και $AO\Delta$ είναι ημικύκλια με διαμέτρους $\Delta\Gamma$, ΓB , BA και $A\Delta$ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $AB = 8\sqrt{2} \text{ cm}$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του σκιασμένου μέρους.



ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Δίνονται οι παραμετρικές εξισώσεις καμπύλης:
- $$\begin{aligned} x &= \ln(1 - hm) \\ y &= \ln(1 + hm) \end{aligned}$$

α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = \frac{hm - 1}{hm + 1}$ και να βρείτε τη $\frac{d^2y}{dx^2}$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο της (0,0).

2. α) Να δείξετε ότι: $(\sin^2 c + 2hmc \sin c - hm^2 c)^2 = 1 + hm^4 c$.

β) Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω ταυτότητα ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο να βρείτε την γενική λύση της εξίσωσης:

$$(\sin^2 c + 2hmc \sin c - hm^2 c)^2 = 3 + 4hm^4 c - 2hm^2 4c.$$

3. Δίνεται η ακολουθία: $\log_3 x^2, \log_9 x^2, \log_{81} x^2, \dots$ με $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι απολύτως φθίνουσα γεωμετρική πρόοδος.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $\log_3 x^2 + \log_9 x^2 + \log_{81} x^2 + \dots = 8$.

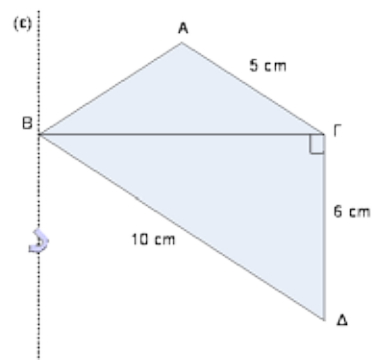
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \ln(x - 2)$, $x > 2$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να ορίσετε (πεδίο ορισμού και τύπο) την αντίστροφη της f.

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f^{-1} με την ευθεία $y = 3$.

5. Στο διπλανό σχήμα το $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές τρίγωνο ($AB = AG = 5 \text{ cm}$) και το τρίγωνο $B\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο ($\hat{\Gamma} = 90^\circ$, $B\Delta = 10 \text{ cm}$, $\Gamma\Delta = 6 \text{ cm}$). Το σκιασμένο σχήμα $A\Gamma\Delta B$ στρέφεται πλήρηστροφή γύρω από την ευθεία (ε) η οποία περνά από το σημείο B και είναι παράλληλη με την ευθεία $\Gamma\Delta$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και τον όγκο του στερεού που παράγεται.



ΟΙ ΕΙΣΗΓΗΤΕΣ

Ο ΣΥΝΤΟΝΙΣΤΗΣ Β.Δ

Η ΔΙΕΥΘΥΝΤΡΙΑ

ΣΑΒΒΑΣ ΚΟΥΝΤΟΥΡΗΣ

ΜΙΛΤΟΣ ΠΑΠΑΜΙΛΤΙΑΔΟΥΣ

ΦΟΙΝΙΚΗ ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΥ

ΑΝΑΣΤΑΣΙΟΣ ΕΥΑΓΟΡΟΥ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΧΡΟΝΟΣ: 2.30΄

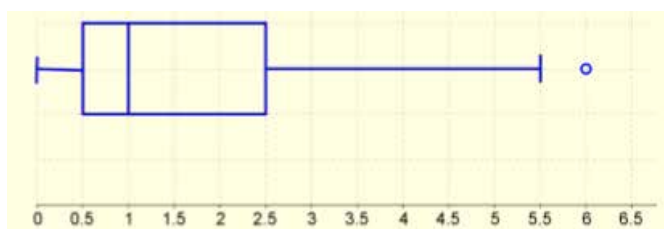
ΤΑΞΗ: Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: 29/05/2017

ΟΔΗΓΙΕΣ: α) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής
 β) Να γράψετε μόνο με μπλε ή μαύρο μελάνι (στα σχήματα επιτρέπεται το μολύβι)
 γ) Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ**ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α΄.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

1. Στο πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζεται ο αριθμός των παιδιών που έχουν οι οικογένειες που εργάζονται σε ένα σχολείο.



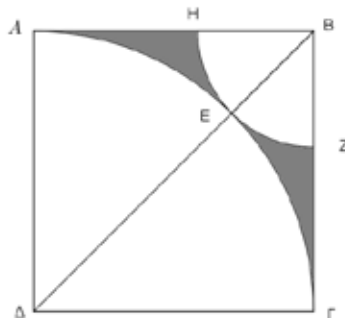
- α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις αν υπάρχουν.
 β) Να υπολογίσετε τη διάμεσο, το πρώτο και τρίτο τεταρτημόριο και το ενδοτεταρτομοριακό εύρος.
 γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη παρατήρηση και το εύρος των παρατηρήσεων.
2. Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $f(c) = \frac{c-1}{2c+3}$. Να βρείτε:
- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης.
 β) το πεδίο ορισμού, το σύνολο τιμών και τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης της f .
3. Να βρείτε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:
- α) $y = \frac{c^2 + 7c}{3c^2 - 1}$ β) $y = e^{3x+1} + \ln 5c$
4. Σε γεωμετρική πρόοδο ο πρώτος όρος είναι 3 και ο έκτος 96. Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων 6 όρων της.
5. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^{n-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}, \quad a \neq 1$$

6. Αμβλυγώνιο τρίγωνο ABΓ έχει $a = \sqrt{3} \text{ cm}$, $g = 1 \text{ cm}$ και $\hat{G} = 30^\circ$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου.

7. Να λύσετε την εξίσωση $\log_2(9^{x-1} + 7) = \log_3 9 + \log_2(3^{x-1} + 1)$

8. Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ πλευράς $a\sqrt{2} \text{ cm}$. Με κέντρο το Δ και ακτίνα ΔΑ γράφουμε τόξο ΑΓ μέσα στο τετράγωνο. Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ η οποία τέμνει το τόξο ΑΓ στο σημείο Ε. Με κέντρο το Β και ακτίνα ΒΕ γράφουμε τόξο ΗΖ επίσης μέσα στο τετράγωνο. Να υπολογίσετε το εμβαδόν και την περίμετρο της σκιασμένης επιφάνειας.



9. Δίνεται η καμπύλη $3c^2 + 4cy - 2y - 7 = 0$

α) Να δείξετε ότι $\frac{dy}{dc} = \frac{3c + 2y}{1 - 2c}$

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης και της κάθετης της καμπύλης στο σημείο P, με τεταγμένη -2 και τετμημένη θετική.

10. Δίνεται η συνάρτηση: $f(c) = \begin{cases} \frac{c|c-4|}{4-c}, & c < 4 \\ 3, & c = 4 \\ \frac{c-4}{\sqrt{c-a}}, & c > 4 \end{cases}$

α) Αν $f(16) = 6$ να βρείτε την τιμή του πραγματικού αριθμού α.

β) Αν $a=2$ να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 4} f(c)$.

γ) Είναι συνεχής η $f(c)$ στο $c = 4$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β'.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1. Σε αριθμητική πρόοδο ο δεύτερος, ο έκτος και ο έννατος όρος έχουν άθροισμα 45. Ο δέκατος όρος είναι επταπλάσιος του δεύτερου.

α) Να σχηματίσετε την πρόοδο

β) Να βρείτε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται μεταξύ του δέκατου και εικοστού πέμπτου όρου συμπεριλαμβανομένων.

γ) Πόσους όρους πρέπει να προσθέσουμε για να πάρουμε άθροισμα 117.

2. α) Αν $A = \frac{h\hbar^3 c}{h\pi^2} - \frac{sun3c}{sun^c}$ και $B = \frac{h\hbar^7 c + h\pi^c}{2h\hbar^4 c}$
- ι) Να δείξετε ότι $A = 2$ και $B = sun3c$
- ιι) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{A}{B} = 4$ στο διάστημα $[0, p]$
- β) Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει η σχέση $a = bsunG$ να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(c) = \sqrt{c-1}$, $g(c) = c^2$ και $h(x) = \frac{2x}{x-5}$.

α) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$

β) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{h}$

γ) Αν $h(x) = \frac{2x}{x-5}$ με $c \in [6, +\infty)$ να αποδείξετε ότι είναι 1-1 και να ορίσετε την αντίστροφη της. (τύπος και πεδίο ορισμού)

δ) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h\hbar^8 c}{g(c) + 4c}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση $f(c) = \ln\left(\frac{c}{2c+3}\right)$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(c)$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(e^c) = -c$.

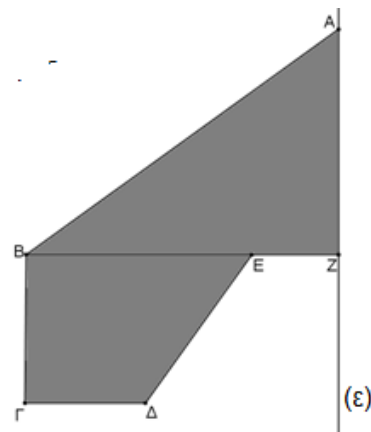
γ) Να δείξετε ότι: $\frac{df(c)}{dx} - 3e^{f(c)} \cdot \frac{1}{c^2} = 0$.

δ) Να βρείτε την $\frac{df^2(c)}{d^2 c}$.

5. Στο διπλανό σχήμα το πολύγωνο ABΓΔΕΖ ($\angle \hat{A}ZB = \angle \hat{E}BG = \angle \hat{B}GD = 90^\circ$) με πλευρές $AB=10$ cm, $AZ=6$ cm, $\Gamma\Delta=3$ cm, $\Delta E=5$ cm και $EZ=2$ cm περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από ευθεία (ε) η οποία είναι παράλληλη με το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.

Να υπολογίσετε:

- α) το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας και
β) τον όγκο του στερεού που παράγεται.



ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!



ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

Μάθημα: **Μαθηματικά**

Τάξη: **Β' ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ

Χρόνος: **2,5 ώρες**

Ημερομηνία: **24 Μαΐου 2017**

Ονοματεπώνυμο: Τμήμα: Αριθμός:

ΟΔΗΓΙΕΣ:

- Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από ΠΕΝΤΕ (5) σελίδες.
- Επισυνάπτεται τυπολόγιο.
- Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι. Τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.
- Τα σχήματα των ασκήσεων να μεταφέρονται στο γραπτό σας (όπου είναι αναγκαίο).
- Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

ΜΕΡΟΣ Α' Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α'.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.

1) Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{3-x}{x+3}, x \in A, A \subseteq \mathbb{R}$. Να βρείτε:

- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της $f(x)$.
β) Την παράγωγο $f'(x)$ στο $x \in A$.

2) Να βρείτε την παράγωγο $\frac{dy}{dx}$ των πιο κάτω συναρτήσεων:

- α) $y = x \varepsilon \varphi 2x, x \neq \frac{\pi}{4}$
β) $xy + x^2 = x, x \neq 0$

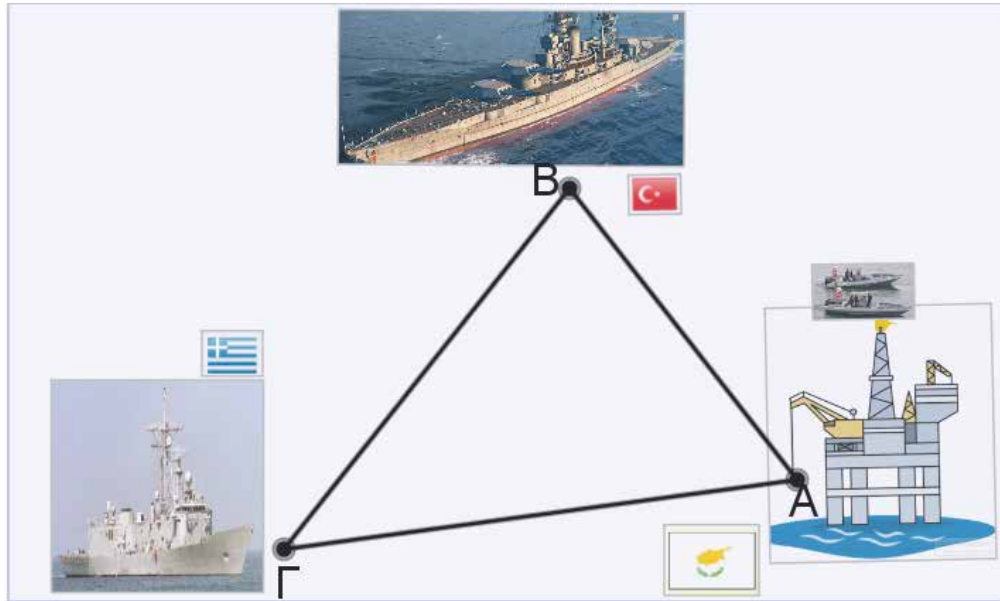
3) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $\frac{\eta \mu \alpha + \sigma \nu \nu 2 \alpha - 1}{\eta \mu 2 \alpha - \sigma \nu \nu \alpha} = -\varepsilon \varphi \alpha, a \neq \frac{\pi}{2}$.

4) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x + 5, & x < -1 \\ \mu - x^2, & x \geq -1 \end{cases}$

α) Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η συνάρτηση είναι συνεχής στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

β) Αν $\mu = 4$, να εξετάσετε αν η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $A(-1, f(-1))$.

- 5) α) Αν στο τρίγωνο ABΓ στο πιο κάτω σχήμα ισχύει ότι $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma$ να αποδείξετε ότι $\hat{A} = 60^\circ$



β) Στο πιο πάνω σχήμα η πλατφόρμα πετρελαίου της εταιρείας ENI βρίσκεται στο σημείο A, για να ξεκινήσει γεώτρηση σύμφωνα με εντολές της ΚΥΠΡΙΑΚΗΣ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑΣ. Σε απόσταση (AB)=20 ναυτικών μιλίων από το σημείο A, και συγκεκριμένα στο σημείο B, βρίσκεται η φρεγάτα “ΑΤΑΤΟΥΡΚ” του Τουρκικού Ναυτικού.

Επίσης σε απόσταση (BΓ) = 27 ναυτικών μιλίων από το σημείο B, και συγκεκριμένα στο σημείο Γ, βρίσκεται η φρεγάτα του Ελληνικού Ναυτικού “ΘΕΜΙΣΤΟΚΛΗΣ”, η οποία παρακολουθεί την όλη κατάσταση. Με βάση το ερώτημα α) και τα δεδομένα που δίνονται στο σχήμα, να υπολογίσετε την απόσταση (ΑΓ) με ακρίβεια 2 δεκαδικών ψηφίων .

- 6) α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1| + 3x^2 - x - 5}{1-x}$ δικαιολογώντας την απάντησή σας.

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της $f(x)$:

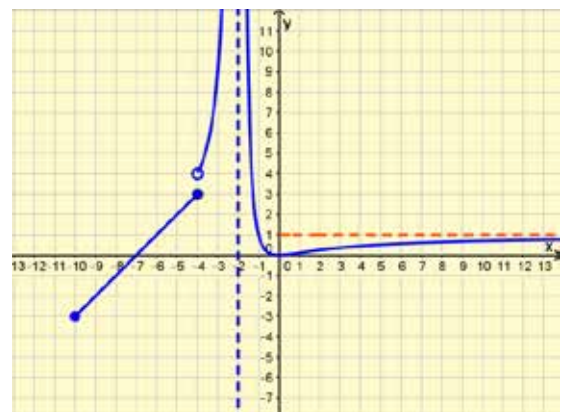
Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν):

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

iv) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$



7) α) Να δείξετε ότι ο γενικός όρος α_n μιας γεωμετρικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ είναι $\alpha_n = \alpha_1 \cdot \lambda^{n-1}, n \in \mathbb{N}$.

β) Σε ένα ηλεκτρονικό υπολογιστή υπάρχουν αρχικά 544 αρχεία. Ο ηλεκτρονικός υπολογιστής έχει προσβληθεί από τον ιό zombie ο οποίος «μολύνει» κάθε πρωί στις 8.00 τα μισά αρχεία του υπολογιστή. Να βρείτε σε πόσες μέρες θα παραμείνουν μόνο 17 «αμόλυντα» αρχεία.

8) α) Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi: A \rightarrow \varphi(A)$ και $\sigma: B \rightarrow \sigma(B)$, $A, B \subseteq \mathbb{R}$, με τύπους $\varphi(x) = \sqrt{x}$ και $\sigma(x) = \frac{x+3}{x^2-4}$. Να ορίσετε και να βρείτε την $\varphi \circ \sigma$ (αν ορίζεται).

β) Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)$ και $g(x)$.

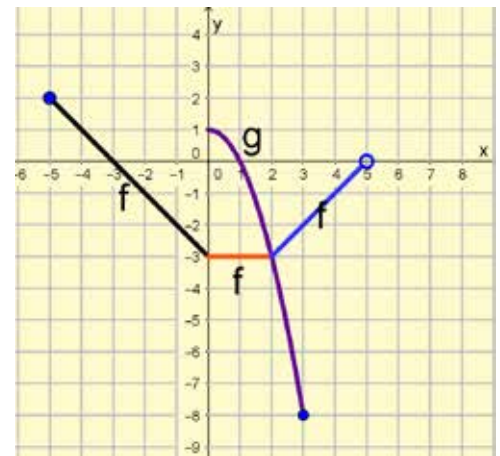
Να υπολογίσετε τις τιμές (αν υπάρχουν):

i) $(f - g)(1)$

ii) $\left(\frac{g}{f}\right)(3)$

iii) $(f \circ f)(2)$

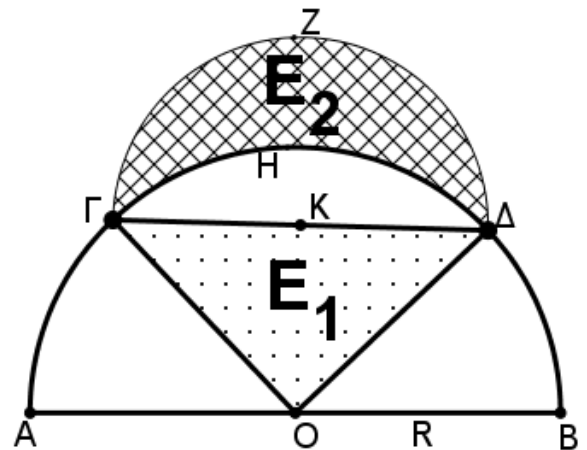
iv) $(f \circ g)(3)$



9) Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $\Gamma O \Delta$ είναι εγγεγραμμένο σε ημικύκλιο με κέντρο O και διάμετρο $AB = 2R$. Με διάμετρο $\Gamma \Delta = R\sqrt{2}$ και κέντρο K σχηματίζεται το ημικύκλιο $\Gamma Z \Delta$. Αν E_1 είναι το εμβαδόν του τριγώνου $O \Gamma \Delta$ και E_2 το εμβαδόν του μηνίσκου που περικλείεται από τα τόξα $\Gamma H \Delta$ και $\Gamma Z \Delta$ να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο $\Gamma O \Delta$ είναι ορθογώνιο και

β) $E_1 = E_2$



10) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1+3\lambda}{1+\lambda}\right)^x, \lambda, x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε η $f(x)$ να είναι εκθετική συνάρτηση.

β) Αν $\lambda = 1$, να δείξετε ότι $f(x) = 2^x$ και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της

συνάρτησης: $h(x) = \sqrt{f(2x) - 6f(x) + f(3)}$

ΜΕΡΟΣ Β΄: Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β΄.
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Αν $\begin{cases} x = e^t - 2 \\ y = \sin t \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$

α) Να δείξετε ότι $(x + 2)^2 \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + (x + 2) \cdot \frac{dy}{dx} + y = 0$.

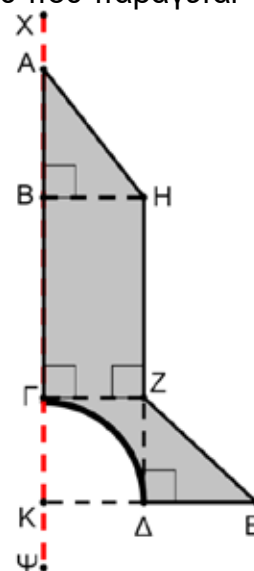
β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της πιο πάνω καμπύλης στο σημείο με τετμημένη -1.

2) Στο πιο κάτω σχήμα ο κυκλικός τομέας ΚΓΔ είναι τεταρτοκύκλιο με ακτίνα ΚΔ=3 cm, τα τρίγωνα ΑΒΗ, ΖΔΕ είναι ορθογώνια και το ΒΗΖΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

Δίνονται ότι (ΑΒ)=x, (ΗΖ)=2(ΑΒ) και ΔΕ=4 cm. Αν το στερεό που παράγεται από την πλήρη περιστροφή του σχήματος ΑΗΖΕΔΓ σχήματος γύρω από τον άξονα χψ // ΗΖ έχει όγκο $V = 145 \pi \text{ cm}^3$ τότε:

α) Να βρείτε την τιμή του x, $x \in \mathbb{R}^+$.

β) Αν x=4 να υπολογίσετε το εμβαδόν της ολικής επιφάνειας του στερεού που παράγεται από την πιο πάνω περιστροφή.



3) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(\alpha) = \frac{\eta\mu 3\alpha}{\eta\mu\alpha} + \frac{\sigma\upsilon\nu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha}$ και $g(\alpha) = \frac{\eta\mu\alpha - \eta\mu 2\alpha + \eta\mu 3\alpha}{\sigma\upsilon\nu\alpha - \sigma\upsilon\nu 2\alpha + \sigma\upsilon\nu 3\alpha}$.

α) Να δείξετε ότι $f(\alpha) = 4 - 8\eta\mu^2\alpha$ και $g(\alpha) = \varepsilon\varphi 2\alpha$.

β) Να δείξετε ότι η $f(\alpha)$ είναι άρτια συνάρτηση και η $g(\alpha)$ περιττή συνάρτηση.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{8g^2(a)}{a^3 - 2a^2}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(a) = 4\sigma\eta\alpha$ στο διάστημα $\alpha \in (0, \pi)$.

4) α) Αν το άθροισμα των n όρων μιας ακολουθίας δίνεται από τον τύπο $\Sigma_n = 4n^2 + 3n, n \in \mathbb{N}$:

- i) να βρείτε το γενικό όρο της $a_n, n \in \mathbb{N}$ της πιο πάνω ακολουθίας και
- ii) να αποδείξετε ότι αποτελεί αριθμητική πρόοδο.

β) Δίνονται οι ακολουθίες $\beta_n = \frac{\sigma\eta\eta(n)}{n^2+n^4}$ και $\gamma_n = \sqrt{n+2017} - \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$.

Να δείξετε ότι η ακολουθία β_n είναι φραγμένη και $\gamma_n \rightarrow 0$.

5) α) i) Να δείξετε ότι $a^{\log_{\beta} \gamma} = \gamma^{\log_{\beta} a}, a, \beta, \gamma > 0, \beta \neq 1$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $3 \cdot x^{\log_2 5} + 5^{\log_2 x} = 2500$

iii) Αν $x = 16$, να λύσετε την εξίσωση:

$$\log_x(5^y - 3^{y+1}) - \log_x(4 \cdot 3^{y-1} - 5^{y-1}) = \frac{1}{2}, \forall y \in \mathbb{R}.$$

β) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f: A \rightarrow f(A), g: B \rightarrow g(B), A, B \subseteq \mathbb{R}$.

$$f(x) = \ln \frac{x}{x-2} \text{ και } g(x) = \frac{x^2}{x^2-2x}$$

- i) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε οι συναρτήσεις $e^{f(x)}$ και $g(x)$ να είναι ίσες.
- ii) Να εξετάσετε αν ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1}(x)$ της $f(x)$ και να την βρείτε αν υπάρχει.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΗΣ

Η Διευθύντρια

Δέσποινα Παπαγιάννη

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ- ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ****ΤΑΞΗ : Β΄ Κατεύθυνσης****Ημερομηνία: 29/5/2017****Χρόνος : 2,5 ώρες****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- § Επιτρέπεται η χρήση ΜΗ προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής που φέρει τη σφραγίδα του σχολείου.
- § Να γράφετε μόνο με μπλε μελάνι (τα σχήματα επιτρέπεται και με μολύβι).
- § Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- § Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από 4 σελίδες.
- § Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

ΜΕΡΟΣ Α΄: Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις του Μέρους Α.**Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

- 1) Δίνεται το φυλλογράφημα για τα αποτελέσματα ενός διαγωνίσματος φυσικής ,ενός τμήματος με 16 μαθητές και 13 μαθήτριες.(Το διαγώνισμα βαθμολογήθηκε από τα 60)

Μαθητές		Μαθήτριες
0	6	
7 6 6 4 4	5	2 4
8 7 5 5 4	4	5 6 7
4 2 2	3	2 3 4 4 9
9 8	2	4 6 8

- α) Να υπολογίσετε τη διάμεσο της βαθμολογίας των μαθητών και τη διάμεσο της βαθμολογίας των μαθητριών.
- β) Ποια ομάδα (μαθητές ή μαθήτριες) είχε καλύτερα αποτελέσματα;

2) Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{3x}{x+2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της.

β) Αν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{x}{2} + 1$ να βρείτε το πεδίο ορισμού και τον τύπο της συνάρτησης $\frac{g}{f}$.

3) Να βρείτε την παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:

α) $y = \sqrt{x^2 + 1} \times \tan x$,

β) $y^3 + xy^2 - 6x = 0$

4) Να αποδειχθεί ότι $(\sin \alpha - \eta \mu \alpha) \times (\sin 3\alpha - \eta \mu 3\alpha) = \sin 2\alpha - \eta \mu 4\alpha$.

5) Να υπολογίσετε τα πιο κάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 5x + 2}{1 - x^4}$

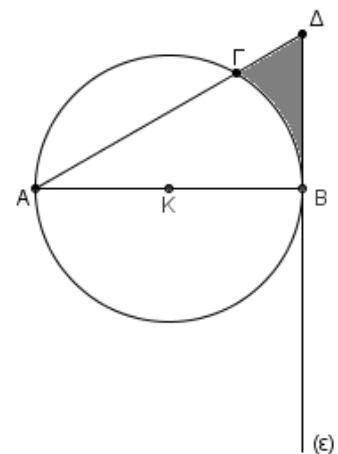
β) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+4}{|x^2 + x - 12|}$

6) Στο διπλανό σχήμα δίνεται κύκλος (K, R) .

Αν $(A\Gamma) = \lambda_3$ και (ϵ) εφαπτομένη του κύκλου

στο B , να βρείτε το εμβαδόν της σκιασμένης

επιφάνειας συναρτήσει του R .



7) Να δείξετε ότι για κάθε φυσικό αριθμό ισχύει: $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + v(v+1) = \frac{v(v+1)(v+2)}{3}$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f: \hat{\mathbb{A}} \rightarrow (0, \infty)$ με τύπο $f(x) = e^{\frac{\kappa x}{2}}$, $|\kappa| < 2$.

Να βρείτε το κ ώστε να ισχύει $f(0) + f'(0) + f''(0) + f'''(0) + \dots = \frac{9}{2}$.

9) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + \alpha x + \beta, & x < 2 \\ x + 2, & x \geq 2 \end{cases}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε η συνάρτηση f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 2$.

10) Ο γενικός όρος μιας ακολουθίας είναι $a_n = \ln \sqrt[n]{e \times 3^n}$.

α) Να δείξετε ότι η ακολουθία a_n είναι αριθμητική πρόοδος.

β) Να βρείτε τη διαφορά και τον πρώτο όρο της αριθμητικής προόδου a_n .

γ) Να βρείτε τον όρο της αριθμητικής προόδου a_n που ισούται με $\frac{1}{2} + \ln 27$.

ΜΕΡΟΣ Β': Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις του Μέρους Β.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x - x}{e^x + x}$.

i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της πιο πάνω συνάρτησης.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

β) Αν οι όροι $\log 2$, $\log \sqrt{1 + 2^{2-x}}$, $\log(2^x + 4)$ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου, να βρείτε το x .

2) Παραμετρική καμπύλη (Κ) ορίζεται από τις εξισώσεις: $\begin{cases} y = \frac{\sin 4\theta}{4} \\ x = 5 + \sin^2 \theta \end{cases}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις παραγώγους $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{2} \frac{dy}{dx} + 3 \sin \theta = 5$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης (Κ) στο σημείο της με $\theta = \frac{\pi}{6}$.

3) Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $2\sigma\upsilon\nu^2\frac{\Gamma}{2} - 2\sigma\upsilon\nu^2\frac{A}{2} = \eta\mu B$, να δείξετε ότι

είναι ορθογώνιο. Αν επιπλέον ισχύει $\alpha = 2\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma$, να δείξετε ότι το τρίγωνο είναι και ισοσκελές.

4) Στο διπλανό σχήμα το ΑΒΓΔ είναι

ορθογώνιο τραπέζιο ($\hat{\Gamma} = \hat{B} = 90^\circ$) και

το τόξο ΔΕ γράφτηκε με κέντρο το Ζ και

ακτίνα ΕΖ. Δίνονται $\Delta Z \perp \chi Z\psi$, $(EZ)=2\alpha\text{cm}$,

$(AD)=5\alpha\text{ cm}$, Γ μέσο της ΔΖ και $(AB)=2(ZE)$.

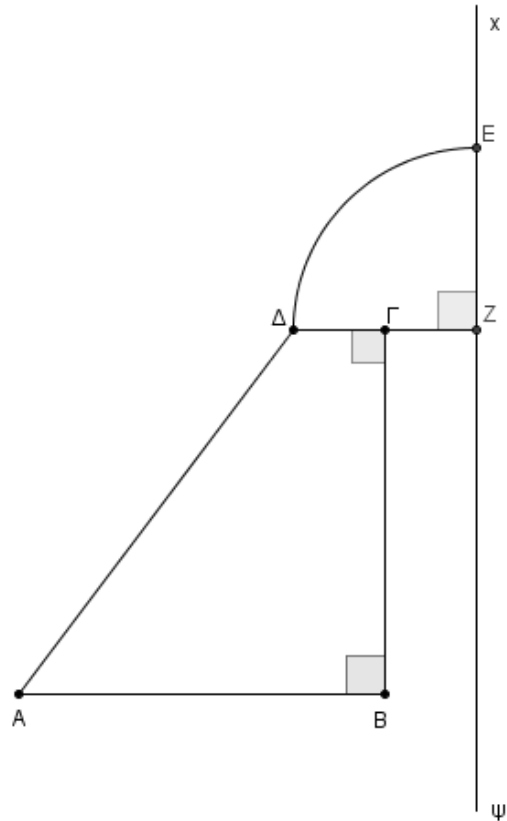
Να βρείτε, συναρτήσει του α , τον όγκο και

το εμβαδόν του στερεού που θα

σχηματιστεί από την πλήρη περιστροφή

ολόκληρου του σχήματος ΑΒΓΖΕΔΑ,

γύρω από την ευθεία $\chi Z\psi$.



5) α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : A \rightarrow f(A)$, όπου Α το πεδίο ορισμού της , με τύπο

$$f(x) = 1 - \sqrt{3 - x}, \text{ αντιστρέφεται.}$$

β) Να προσδιορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση της f.

γ) Να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της $f^{-1} \circ g$ αν $g(x) = x^2$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta\mu(-x+2)}{f(x)}$.

Ο Διευθυντής

Ματσικάρης Ανδρέας

ΓΡΑΠΤΕΣ ΠΡΟΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΜΑΪΟΥ-ΙΟΥΝΙΟΥ 2017**ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Κατεύθυνσης****ΤΑΞΗ: Β΄ Λυκείου****ΩΡΑ: 7:45-10:15****Ημερομηνία: 02/06/2017****ΔΙΑΡΚΕΙΑ: 2,5 ώρες****ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ/ΤΡΙΑΣ:****ΟΔΗΓΙΕΣ:**

- 1) Να γράψετε με μπλε μελάνι. (Μόνο τα σχήματα επιτρέπονται με μολύβι).
- 2) Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.
- 3) Απαγορεύεται η χρήση διορθωτικού υλικού.
- 4) Τα σχήματα των ασκήσεων μεταφέρονται στα φύλλα των λύσεών σας.
- 5) Επισυνάπτεται τυπολόγιο.

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από τέσσερις (4) σελίδες.**ΜΕΡΟΣ Α΄****Να λύσετε και τις 10 ασκήσεις.****Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 5 μονάδες.**

- 1) Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.**

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα πιο κάτω όρια:

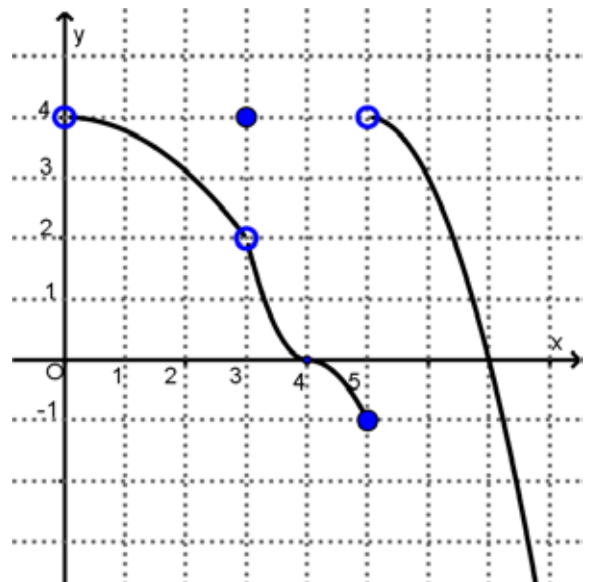
α) $\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

δ) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$



- 2) Να υπολογίσετε την πρώτη παράγωγο των πιο κάτω συναρτήσεων:**

α) $f(x) = 3x + \sqrt{x^2 + 4}$

β) $g(x) = x^3 \cdot \varepsilon\varphi x, \quad x \in \mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$

3) Σε τρίγωνο ΑΒΓ δίνονται: $A = 60^\circ$, $\gamma = 2 \text{ cm}$, $\beta = 1 \text{ cm}$. Να υπολογίσετε την πλευρά α, τη γωνία Β και το εμβαδόν του τριγώνου.

4) Να λύσετε την εξίσωση $3^{x+2} + 8 = 3^{-x}$.

5) Να αποδείξετε με τη μέθοδο της τέλει επαγωγής ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η πρόταση:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

6) Στο πιο κάτω θηκόγραμμα παρουσιάζεται η κατανομή του ύψους των δέντρων σε ένα δάσος.



α) Να βρείτε τις ακραίες παρατηρήσεις, αν υπάρχουν.

β) Να βρείτε τη διάμεσο του ύψους των δέντρων, το πρώτο και το τρίτο τεταρτημόριο.

γ) Να βρείτε το ενδοτεταρτημοριακό εύρος του ύψους των δέντρων.

δ) Αν υπάρχουν 300 δέντρα στο δάσος αυτό, να υπολογίσετε τον αριθμό των δέντρων που έχουν ύψος το πολύ 17 μέτρα.

7) Να λύσετε την εξίσωση $\ln x + \ln x^5 + \ln x^9 + \dots + \ln x^{133} = 4556$.

8) Δίνεται η συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ όπου $A = (1, +\infty)$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

β) Να δείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της οποίας να βρείτε τον τύπο και το πεδίο ορισμού της.

9) Από σημείο P εκτός του κύκλου (O, R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB τέτοια ώστε $\widehat{APB} = 60^\circ$.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $APBO$ είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

β) Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R τα μήκη των εφαπτόμενων τμημάτων PA και PB .

γ) Να υπολογίσετε συναρτήσει της ακτίνας R το εμβαδόν του μεικτόγραμμου τριγώνου PAB .

10) Παραμετρική καμπύλη (C) ορίζεται από τις εξισώσεις:

$$\begin{cases} x = \sigma\upsilon\nu 2\theta \\ y = 4\eta\mu^3\theta \end{cases}, \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2})$$

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{dy}{dx} = -3\eta\mu\theta$.

β) Να δείξετε ότι $y \frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 3 = 3x$.

ΜΕΡΟΣ Β΄

Να λύσετε και τις 5 ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

1) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\eta\mu 5x}{\eta\mu x} - \frac{\sigma\upsilon\nu 5x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $g(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu 4x \sigma\upsilon\nu 3x - \sigma\upsilon\nu 5x \sigma\upsilon\nu 2x}{\eta\mu 2x}$

όπου $x \in \mathbb{R} - \{\frac{\kappa\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}\}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 4\sigma\upsilon\nu 2x$ και $g(x) = \eta\mu x$.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + 4g^2(x) = 3$.

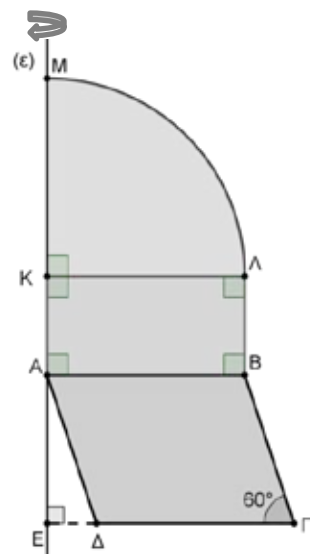
γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των απείρων όρων απόλυτα φθίνουσας γεωμετρικής προόδου που έχει πρώτον όρο $\alpha_1 = f(\frac{\pi}{6})$ και λόγο λ τέτοιο ώστε $|3\lambda - 1| = 3$.

2) Να βρείτε τους αριθμούς x, ψ και ω αν ισχύουν οι πιο κάτω σχέσεις:

$$\log(2^x + 2 \cdot 3^x) + 4\log 3 = \log 178 + x\log 3$$

$$\begin{cases} \log_9 \omega + \log_9 \psi = 2 \\ \log_3 \omega \cdot \log_3 \psi = 3 \end{cases}$$

3) Στο διπλανό σχήμα δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $\hat{\Gamma} = 60^\circ$, $\Delta\Gamma = 5cm$, ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $AB\Lambda K$ με $AK = 2cm$ και το τεταρτοκύκλιο $K\Lambda M$ με κέντρο K και ακτίνα $K\Lambda$. Το σκιασμένο σχήμα περιστρέφεται πλήρη στροφή γύρω από την ευθεία (ε) η οποία διέρχεται από τα σημεία A, K, M και απέχει από την κορυφή Δ απόσταση $\Delta E = 1cm$. Να υπολογίσετε τον όγκο και το εμβαδόν της επιφάνειας του στερεού που παράγεται.



4) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(e^{2x} - 1) - x$, $g(x) = \ln(x + 4)$ και

$$h(x) = \ln \frac{x^2 + 8x + 15}{x + 4}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f , g και h .

β) Να ορίσετε πλήρως τη συνάρτηση $f \circ g$ (τύπος και πεδίο ορισμού).

γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες. Στην περίπτωση που δεν είναι ίσες να βρείτε το ευρύτερο δυνατόν υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε να είναι ίσες.

δ) Να δείξετε ότι η παράσταση $A = (e^{2x} - 1)^2 \cdot f''(x) + 4e^{x+f(x)}$ είναι ανεξάρτητη του x .

5) Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + \gamma, & x < 1 \\ \beta, & x = 1 \\ -x^2 + \alpha x + 1, & x > 1 \end{cases}$

η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $\beta = \alpha$ και $\gamma = \alpha - 2$.

β) Αν επιπρόσθετα η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$, να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

γ) Αν $\alpha = 5$, $\beta = 5$ και $\gamma = 3$,

i. να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με $x = 5$.

ii. να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)}$.

Η Διευθύντρια

Δρ. Αντωνία Λοΐζου